Communication C 1

ENTRER DANS LE CODE ECRIT : LE SYSTEME DE NUMERATION EN CYCLE 2

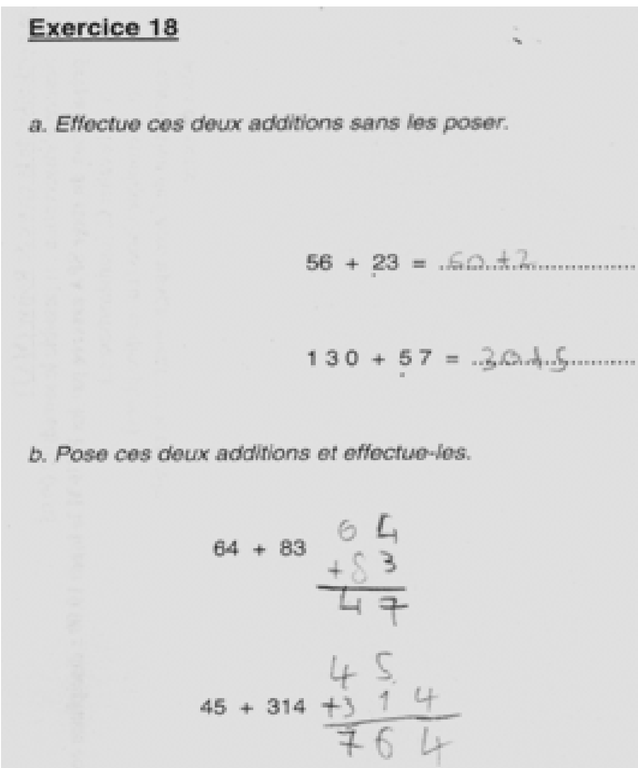
Claudine CHEVALIER,
Professeur de mathématiques
IUFM de Créteil
claudine.chevalier@creteil.iufm.fr

Comment enseigner aux élèves notre système de numération ? A quel âge peuvent–ils le mieux appréhender son fonctionnement ? Ce sont les questions envisagées ici dans le cadre d'expérimentations menées dans deux classes de CP, depuis deux ans, d'une situation adaptée de celle proposée par Bassis (texte initial 1984) en prenant appui sur les travaux de l'équipe Ermel (1991) autour des « groupements échanges » et de Briand – Salin concernant les processus de désignation (2004). Cette situation a également servi de support de formation en formation initiale et continue des Professeurs des Écoles. Des éléments de ces expérimentations et leur analyse, qui emprunte à la terminologie de Duval (2005), sont l'objet de cette communication.

1 CONTEXTE

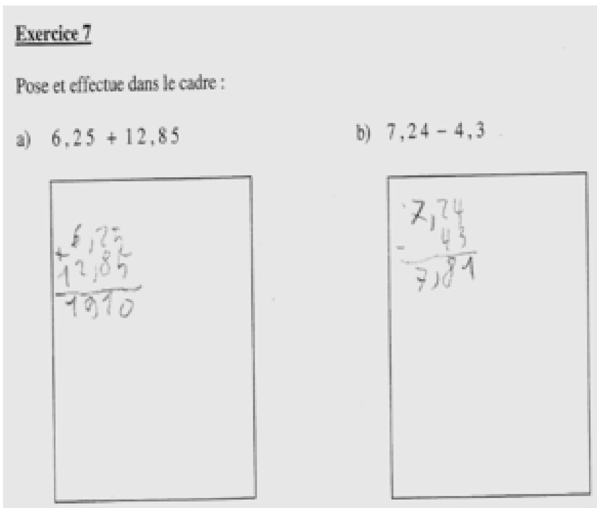
1.1 Origine du questionnement

A l'origine de ces questions, un constat de difficultés récurrentes, voire d'échecs, constatés aux évaluations CE2, difficultés qui persistent en se prolongeant en 6ème par des erreurs d'interprétation du fonctionnement des nombres décimaux. Voici un exemple issu d'une évaluation en CE2 de 2004 et deux exemples d'évaluation 6^{éme} de 1995 et 2004.



En CE2, les erreurs commises - ajout du chiffre des unités (avec une erreur de comptage) au premier nombre puis ajout du chiffre des dizaines au résultat dans le premier calcul, alignement par la gauche dans l'addition posée - dénotent un traitement incertain des chiffres d'un nombre, témoin de la non compréhension du rôle de la position des chiffres dans un nombre.

En 6ème (1995) cette évaluation témoigne d'une liaison langage oral – écrit digital défectueuse.



Ici (6ème, 2004), la pose de l'addition est faite sans référence à l'existence de la virgule. On pourrait supposer qu'il ne s'agit que d'une incompréhension des nombres décimaux mais un entretien avec l'élève montre qu'il n'a jamais perçu le rôle de la position des chiffres dans un nombre même entier. L'alignement des chiffres par la droite dans une addition posée relève d'un apprentissage d'automatisation sans compréhension.

Ces erreurs constatées dans les évaluations depuis toutes ces années confirment les observations très souvent effectuées par des enseignants de cycle 3.

Des erreurs fréquentes rencontrées en cycle 3		
« cent trois »	traduit	1003
« mille vingt trois »	traduit	1000203

Ces difficultés de conversion entre représentations symboliques verbales et digitales sont fréquentes et posent, pour moi, la question du passage privilégié, dans l'enseignement français actuel, de l'apprentissage de la numération par l'énumération verbale. Les travaux effectués par

Briand – Salin avec des enfants d'âge maternel montrent, à mon sens, que les processus de désignation autre que verbale sont également à considérer dans l'apprentissage des notions de nombre et de numération.

1.2 Des regards sur ces difficultés spécifiques des élèves

De nombreux chercheurs et praticiens ont attiré l'attention sur les difficultés de cet enseignement.

- Le regard d'un chercheur : **Complexité du concept, Fayol (1990)**

« Les activités numériques présentent un double aspect. […] D'une part, elles renvoient à la numération comme système organisé, élaboré et mis en œuvre au sein d'une culture donnée. Il s'agit là d'un produit socio-historique extérieur à l'enfant mais qu'il doit s'approprier et intérioriser pour résoudre les problèmes. D'autre part, elles font appel à un certain nombre de notions logicomathématiques – sériation, équivalence, itération, addition, soustraction - qui structurent le système de manière sous-jacente et qui conditionnent son organisation interne. On a là affaire aux fondements logiques du nombre et de la numération. Or il va de soit que ***ces fondements ne peuvent être socialement transmis au même titre que la chaîne numérique verbale***[1]*. Ils doivent faire l'objet d'une construction de la part de l'enfant lui-même »*[2]

Cette conclusion de Fayol nous impose de nous saisir de cette difficulté d'enseignement pour tenter de la résoudre.

- Le regard de rééducatrices : **Difficulté d'apprentissage**

« Comment accepter qu'un ***enfant d'intelligence normale****, qui a su lire et écrire sans difficulté, se voit en fin de CE ou CM contraint de redoubler à cause du calcul ?* […] *Dix années de face à* ***face avec l'échec en mathématiques*** *nous ont convaincues que quel que soient la classe, le niveau ou les points d'impact des blocages,* ***on doit revenir à la numération****. »*[3]

Le constat de ces rééducatrices, Bacquet et Gueritte-Hess (1996) à la suite de leur longue pratique, témoigne de l'importance de la compréhension du concept de numération pour toute acquisition ultérieure concernant le domaine numérique.

- Le regard de praticiennes : **Des questions en cours…**

---

[1] Souligné par moi

[2] Michel Fayol, L'enfant et le nombre, Delachaux et Niestlé, 1990, p. 185

[3] Michelle Bacquet, Bernadette Gueritte-Hess, rééducatrices en mathématiques, p. 2-3 in Le nombre et la numération, Pratique de rééducation, Isoscel, Editions du Papyrus, 1996

Déjà, en 2004, des praticiennes, Aigoin et Debourg, avaient fait part de leur questionnement sur ce sujet. La conclusion de leur article montrait que la question restait ouverte.

« Ainsi, nous pouvons nous demander ***dans quelle mesure les connaissances*** **a priori** ***des élèves sur les nombres*** *(connaissance de la comptine numérique orale sans relation avec le nombre en tant que mémoire d'une quantité, connaissance partielle du code, limitée à la connaissance des chiffres au détriment des règles d'écriture)* ***ne sont pas****, elles-mêmes,* ***un obstacle didactique à la construction de la numération et à la compréhension des fondements de notre système décimal. »***[4]

A la suite de l'ensemble de ces réflexions, de nombreuses années d'aide aux élèves en difficulté en CM et en 6ème, d'aide à des plus jeunes et de nombreuses lectures, j'ai été intéressée par une proposition de situation de Bassis (1984) qui me semblait correspondre au questionnement exprimé.

Il semble bien que la question qui se pose est celle de l'écriture du nombre qui se prononce, à la suite de « neuf » encore avec un mot nouveau, mais qui s'écrit avec un chiffre déjà utilisé et un signe qui signifie « rien »…

J'ai donc adapté et expérimenté une situation « les moutons », comme situation de référence dont je vais vous décrire tout d'abord les grandes étapes. Vous trouverez en annexe un écrit détaillé rédigé à destination d'enseignants de CP.

1.3 Présentation de la situation

Et après 9, quelle écriture ? : **« Les moutons »,** une situation de référence qui permet aux élèves l'apprentissage de la numération positionnelle, leur évite l'installation de conceptions erronées et permet aux Professeurs des Ecoles en formation la compréhension de la difficulté intrinsèque à notre numération, les oblige à une remise en question de leurs connaissances automatisées. Les étapes décrites ici sont celles de la situation telle que présentée aux élèves de CP. Quelques

[4] Chistine Aigoin,conseillère pédagogique et Valérie Debourg, professeur des écoles, membre du groupe d'Etudes et de Recherches à l'IREM de Montpellier in Grand N n°73, 2004 : dans leur article intitulé « Du dénombrement terme à terme aux groupements réguliers : un pas nécessaire vers la compréhension de notre système de numération positionnelle ! »

adaptations – mineures - sont nécessaires pour la présenter en situation de formation de professeur des écoles.

Les grandes étapes[5]

1.3.1 La désignation ORALE d'une quantité

Création d'un contexte imaginaire répondant au contexte d'historicité, introduisant le concept de nombre « mémoire de quantité », sans induire de procédure de dénombrement usuel.

1.3.2 La désignation ECRITE d'une quantité

Création des conditions de la compréhension de la nécessité d'un code écrit commun pour désigner une quantité et de la nécessité de réalisation de groupements.

1.3.3 La désignation ECRITE d'une quantité à l'aide de chiffres

Utilisation du code écrit usuel pour provoquer la prise de conscience du rôle conventionnel de la position des chiffres dans un nombre.

1.3.4 L'introduction du chiffre 0

Découverte de la nécessité de coder la place de l'absence d'un groupement (ou d'un isolé).

1.3.5 La désignation ECRITE d'une quantité à l'aide des dix chiffres disponibles

Compréhension de l'usage des groupements par dix pour permettre le codage à l'aide des chiffres disponibles.

Je vais à présent vous relater quelques éléments de ces expérimentations en formation de professeurs des écoles puis en classes de CP.

[5] cf. annexe 1

2 EXPERIMENTATION

2.1 En formation de Professeurs des Ecoles

Je vais, en un premier temps, vous présenter quelques productions écrites réalisées au cours des stages. Je veux toutefois vous préciser que cette situation a toujours provoqué chez les PE, devant ce tas d'objets à dénombrer, sans pouvoir compter en utilisant la suite numérique des mots appris, un premier moment de perplexité. Les très jeunes (proches de leur concours) ou les plus anciens (ayant vécu les « maths modernes ») ont ensuite en général réagi en disant : « mais ça c'est des bases », les uns cherchant à calculer après avoir compté en base dix (prisonniers de la dénomination usuelle et à la recherche de formules de traitement) puis transposant en base 4, les autres un peu perplexes puis constituant des groupes et des « groupes de groupes » et s'engageant dans des actions provoquant réflexion et échanges d'opinions…

Les trois premières étapes (après manipulation de trombones (ou jetons), écrit à l'aide de « mots », écrit à l'aide de « dessins », écrit à l'aide de « chiffres ») suffisent en général pour provoquer une discussion de fond sur les différentes facettes de notre numération décimale et les conditions de présentation aux élèves pour leur assurer une bonne compréhension de la notion de numération de position et de « système ».

La première étape orale qui permet de formuler les actions réalisées, est suivie d'une réalisation écrite avec comme objectif : « se souvenir du nombre de moutons de sa tribu ».

Voici quelques exemples de réalisations.

2.1.1 En formation initiale

Je vais, en un premier temps, vous présenter quelques productions écrites réalisées au cours des stages. Je veux toutefois vous préciser que cette situation a toujours provoqué chez les PE, devant ce tas d'objets à dénombrer, sans pouvoir compter en utilisant la suite numérique des mots appris, un premier moment de perplexité. Les très jeunes (proches de leur concours) ou les plus anciens (ayant vécu les « maths modernes ») ont ensuite en général réagi en disant : « mais ça c'est des bases », les uns cherchant à calculer après avoir compté en base dix (prisonniers de la dénomination usuelle et à la recherche de formules de traitement) puis transposant en base 4, les

autres un peu perplexes puis constituant des groupes et des « groupes de groupes » et s'engageant dans des actions provoquant réflexion et échanges d'opinions…

Les trois premières étapes (après manipulation de trombones (ou jetons), écrit à l'aide de « mots », écrit à l'aide de « dessins », écrit à l'aide de « chiffres ») suffisent en général pour provoquer une discussion de fond sur les différentes facettes de notre numération décimale et les conditions de présentation aux élèves pour leur assurer une bonne compréhension de la notion de numération de position et de « système ».

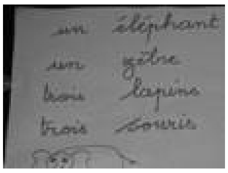
La première étape orale qui permet de formuler les actions réalisées, est suivie d'une réalisation écrite avec comme objectif : « se souvenir du nombre de moutons de sa tribu ».

Voici quelques exemples de réalisations.

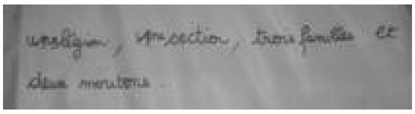
2.1.2 En formation continue

Etape 1

Groupe C



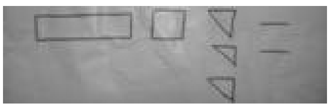
Groupe D



Le choix de dénomination faisant appel nettement à un imaginaire figuratif résulte-t-il des pratiques auprès d'enfants de ces enseignants expérimentés et de leur souci de se mettre à leur portée ? En tout état de cause, j'ai très fréquemment fait le constat de cette différence de symbolisation entre professeurs stagiaires et professeurs déjà expérimentés.

Etape 2

Le groupe C a simplement « traduit » en dessin sa dénomination verbale et a choisi de structurer additivement ces désignations.



Le groupe D a cherché une représentation plus abstraite des groupements.

Groupe C Groupe D

Etape 3

Groupe C Groupe D

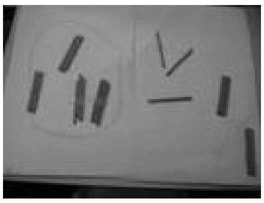
Le groupe C a choisi de représenter les différents ordres en symbolisant le rang par une position rappelant notre notation conventionnelle sous forme de puissance, en conservant toutefois une écriture de type additif pour le groupement de premier ordre. Il est à noter que le symbole « 4 » a été choisi en rappel de la constitution de base de chacun des groupes. Le groupe D a lui choisi un codage additif, tout en gardant une présentation positionnelle mais verticale – le 1 représentant les isolés, le 2 un groupe de quatre, le 3 un groupe de quatre fois quatre, le 4 un groupe de quatre fois quatre fois quatre – (le langage utilisé ici est celui par lequel s'expriment les PE et cela d'une manière courante).

2.2 Des réalisations d'élèves en classe de CP

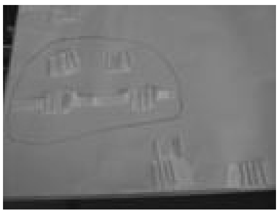
L'expérimentation a lieu depuis deux ans dans deux classes de CP de milieux socioprofessionnels différents (une école recrute dans un milieu plutôt favorisé, l'autre plutôt défavorisé). Le suivi des élèves en CE1 est également assuré.
La séquence a lieu en début d'année scolaire, sur huit séances environ. Le début d'année est consacré à s'assurer que les élèves possèdent bien la notion de cardinal ainsi que l'écriture des nombres jusqu'à 9.
La phase de représentation verbale écrite n'a pas lieu, comme avec les adultes, avec des élèves de CP. La communication orale collective et le choix du vocabulaire employé a lieu après la première étape.

Des réalisations d'élèves :

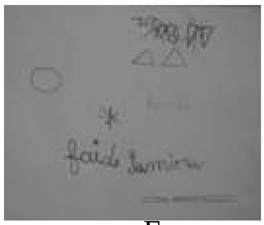
Etape 1 : *Les groupements* **Etape 2 :** *les représentations iconiques*



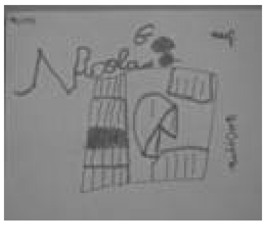
Groupe E



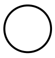
groupe F



groupe E

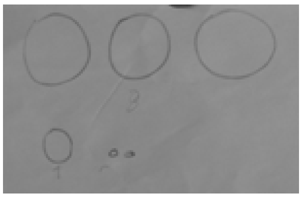


groupe F

Le passage de la réalisation matérielle à la représentation iconique s'est fait facilement. **Pour le groupe E**,  représente le grand groupe,  un petit groupe,  un isolé[6]. On pourrait parler ici, à l'instar de Duval, de « pseudo-objets » qui permettent une représentation figurée de ce qui a été réalisé et est très proche de la réalité des objets dénombrés. **Pour le groupe F**, le besoin de figurer ce qui était en réalité est encore plus prégnant.

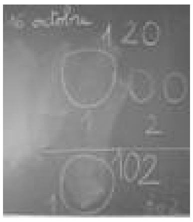
La synthèse collective a permis ensuite de choisir la représentation la moins « coûteuse » en termes de temps d'écriture et « d'encre » dépensée.

Etape 3 : *Les désignations à l'aide de chiffres*



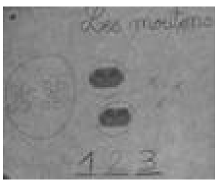
Dans la classe, dont une des représentations est extraite ci-contre, les petits, moyens et grands « ronds » ont été choisis pour symboliser respectivement les « tout seul », les « moyens groupes » et les « grands groupes ». Le groupe concerné ici, n'a pas pu en un premier temps se détacher de la proximité entre la représentation iconique et la représentation symbolique chiffrée. Il a fallu l'exigence, par la maîtresse, d'une écriture sans « dessin », sur une seule ligne, pour admettre le choix imposé par la transmission de notre code issu de cet héritage socio-historique dont parle Fayol (cf. citation ci-dessus).

Etape 4 : *La nécessité du chiffre 0*



Cette photographie témoigne de la synthèse faite le 16 octobre 2006 dans l'une des classes. Un des groupes n'avait pas de « tout seul », l'autre pas de « moyen champ » et pourtant ils avaient codé leur nombre de moutons « 12 » sans avoir le même nombre de bâtonnets. La nécessité de l'introduction d'un symbole nouveau comme marqueur de « place vide » a légitimé l'emploi du « 0 ».

Etape 5 : *Désignation écrite à l'aide des dix chiffres*



Il s'agit ici de la synthèse écrite collective finale permettant la mémorisation de la conversion entre représentation iconique et représentation symbolique digitale, cette fois dans notre système conventionnel de groupement par dix et

[6] La terminologie utilisée ici est celle qui a été employée dans les classes et qui a correspondu aux dénominations utilisée spontanément par les élèves.

d'écriture à l'aide des chiffres disponibles. La représentation des groupements par dix à l'aide des doigts des mains s'est imposée tout naturellement, témoignage de la liaison doigts – cerveau - pensée numérique dont parle Dehaene (2007) dans ses travaux. En aucune manière la chaîne numérique verbale n'est à ce moment concernée. « *Le passage des représentations iconiques, quelles qu'elles soient, aux systèmes de représentations symboliques* », dont parle Duval (2005) est ici directement travaillé.

3 ELEMENTS D'ANALYSE DE CETTE SITUATION

3.1 Apports pour les Professeurs d'Ecole

Récemment encore, des enseignants engagés dans un PPI[7] m'ont témoigné du grand intérêt que leur apportent le vécu et l'analyse de cette situation. Elle leur permet de comprendre concrètement les origines possibles des difficultés de leurs élèves et de les légitimer. Elle leur permet également de comprendre les différents aspects de la construction d'une réelle compréhension de la notion de numération : la nécessité de groupement régulier et optimal (manque de « mots » pour désigner le suivant - on ne peut pas « compter » -), la contrainte d'efficacité, la nécessité d'une désignation non seulement orale mais écrite à convenir en commun – le code -, la nécessité de comprendre le fonctionnement du code – la position des chiffres -.

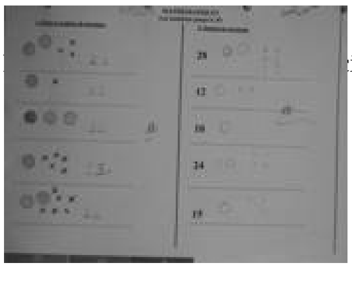
En formation initiale, cette situation permet aux stagiaires de prendre conscience de la différence entre posséder une connaissance et la transmettre. La nécessité d'une réflexion d'ordre didactique s'impose alors à eux comme préalable à l'acte d'enseigner.

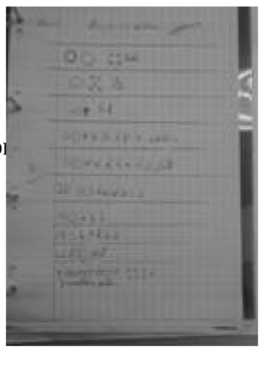
3.2 Apports pour les élèves de CP

Voici quelques éléments d'évaluation qui permettent de percevoir un apport positif de cette situation pour l'apprentissage par les élèves du système de numération.

– Un cas de « remédiation »

Mathieu est maintenu au CE1 à cause des mathématiques, les autres apprentissages



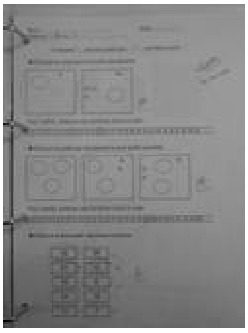


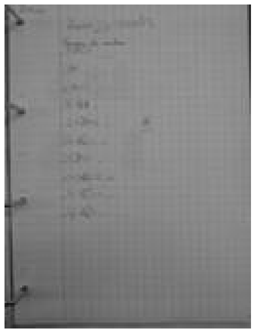
[7] Enseignants travaillant depuis plusieurs années dans le Plan de ... circo

ne lui causent aucune difficulté. En janvier il ne « dépasse pas le 9 ». Sa maîtresse déclare avoir tout essayer (manipulations, groupements/échanges…). Il travaille avec elle la situation « Les moutons » qui agit sur lui comme un élément déclencheur de compréhension. En mars, il a étendu la compréhension de son champ numérique jusqu'à 69…

– En CP

- Une aisance rapidement acquise dans les processus de conversion des représentations symboliques en représentations iconiques et réciproquement.
Les couleurs, apparaissant ci-contre, ont été une aide à la mémorisation pour certains élèves, la compréhension du rôle différent du chiffre des dizaines et de celui des unités étant assuré par le recours régulier au rappel de la situation vécue et du « moyen champ » ou « petit groupe » réalisé avec dix « tout seul ».
- Des résultats très encourageants sur tous les exercices de comparaison de nombres en écriture symbolique digitale et cela pour une grande majorité d'élèves dès le mois de novembre.





D'autres exemples de résultats encourageants en CE1 et CE2 ont été communiqués par les enseignants ayant participé à cette expérimentation dans les deux écoles. La remédiation en CE2 a été menée par la maîtresse de CP.

– En CE1 :

Des élèves ayant travaillé « Les moutons » en CP deviennent « moteurs » pour les autres élèves grâce au rappel de cette situation « référente » qui se travaille aisément également en CE1 et devient vite une référence pour toute la classe.

– En CE2 :

Des élèves en échec dans le domaine numérique, après avoir travaillé en petits groupes de remédiation cette situation, ont pu reprendre le travail du domaine numérique avec l'ensemble de leur classe, avec succès cette fois.
Depuis plusieurs années, cette maîtresse avait déjà pris en charge des élèves présentant des difficultés similaires et jusqu'à présent ces aides, prenant appui sur les ouvrages de l'équipe Ermel, n'avaient pas produit les effets attendus.

3.3 Une réponse à des questionnements théoriques ?

Cette situation permettrait-elle de répondre à des avis de différents chercheurs qui ont déjà longuement étudié cette question ?

3.3.1 Un accord avec certaines prises de position théoriques :

- Ancrage socio-historique pour l'élève :

La situation présentée ici semble permettre cette appropriation dont parle Fayol (1990)[8] en favorisant cet ancrage dans une histoire de tribus et de troupeaux et l'expérimentation à partir d'une situation imaginaire, processus si familier aux jeunes enfants qui favorise l'apprentissage.

- Travail des notions logico-mathématiques sous-tendues :

Par les manipulations permises et la nécessité de l'invention d'un code commun, elle engage l'enfant dans la compréhension « *[….] des fondements logiques du nombre et de la numération. Or il va de soit que ces fondements ne peuvent être socialement transmis au même titre que la chaîne numérique verbale. Ils doivent faire l'objet d'une construction de la part de l'enfant lui-même.* » Fayol (1990)[9].

Par la possibilité de réaliser des groupes et des « groupes de groupes » elle lui permet de percevoir certaines notions logicomathématiques. « *D'autre part, elles font appel à un certain nombre de notions logicomathématiques – sériation, équivalence, itération, addition, soustraction - qui structurent le système de manière sous-jacente et qui conditionnent son organisation interne.* » Fayol (1990)[10].

3.3.2 Un choix différent de certains autres :

- **Dissociation comptage et langage**

[8]Cf. citation infra p.2 Fayol, L'enfant et le nombre, Delachaux et Niestlé, 1990, p.185.
[9] Fayol, L'enfant et le nombre, Delachaux et Niestlé, 1990, p. 185
[10] ibidem

« C'est seulement lorsque le comptage des dizaines est conçu comme un résumé de celui des unités qu'il permet lui aussi de se représenter les unités. […] On voit que la langue joue un rôle essentiel dans cet apprentissage » Brissiaud (2003)[11]

- Groupements autres que dix

« Nous avons choisi de ne faire écrire les résultats des groupements que lorsque ceux-ci se font par dix, de manière à éviter les mélanges d'écritures […]. L'expérience a montré que la majorité des enfants de six ans ne tiraient pas profit du travail effectué dans des bases autres que dix. » Ermel (1991)[12].

Il n'est pas question ici de négliger le rôle de la langue ni de faire travailler écriture ou groupements de façon systématique dans plusieurs bases[13], mais de **permettre de dissocier temporairement comptage et désignation symbolique orale d'une quantité.** Notre langue française impose la mémorisation de seize mots différents pour désigner les seize premiers nombres[14] avant de permettre la possibilité d'un appui éventuel sur le langage pour comprendre les règles de fonctionnement interne du système de désignation symbolique chiffrée. Il semble donc nécessaire d'éviter de prendre appui sur le langage pour débuter cet apprentissage. D'autre part, la compréhension du fonctionnement du système ne peut se faire sans la prise de conscience de l'existence de groupements (groupe et groupes de groupes) et leurs désignations symboliques écrites. Mais le groupement par dix, par son étendue et l'impossibilité d'estimation visuelle de la quantité dix, impose le passage par une procédure de dénombrement verbal oral et empêche donc une liaison directe quantité – désignation écrite.

Ainsi la situation décrite permet-elle d'envisager de répondre aux recherches et prises de positions d'autres chercheurs.

3.3.3 Prise en compte des points de vues ci-après.

[11] Brissiaud, Comment les enfants apprennent à calculer, Retz, 2003 p. 232, 233

[12] Ermel , Apprentissages numériques et résolutions de problèmes, CP, Hatier, 2005, p.271

[13] Ce n'est pas la notion de base qui est privilégiée ici mais celle de groupement (groupe et groupe de groupes) d'une dimension qui permet la manipulation de jeunes enfants et la perception visuelle de la quantité regroupée.

[14] cf. annexe 3

- **Complexité des représentations des nombres**

« Il y a la situation dans laquelle les objets étudiés sont inaccessibles en dehors de ***représentations relevant d'une activité sémiotique****, comme en mathématiques. […] Quand un enfant utilise une, voire même deux, de ces représentations devient-il pour autant capable de reconnaître les nombres dans une troisième représentation ? […] L'enjeu essentiel de l'enseignement est* ***le passage des représentations iconiques****, quelles qu'elles soient,* ***aux systèmes de représentations symboliques****. »* Duval (2005)[15]

Duval[16] classe le langage naturel, comme les représentations chiffrées parmi les représentations symboliques, représentations chiffrées dont l'emploi est nécessaire dans la désignation écrite des nombres et leur utilisation dans les calculs. Les difficultés d'apprentissage mentionnées ci-dessus engendrées par l'utilisation de la langue orale nécessitent donc de pouvoir travailler dans un autre registre plus accessible aux élèves. Or l'accès aux représentations iconiques est plus aisé car proche des activités de manipulations possibles. Dans la situation proposée, ces représentations iconiques sont à la portée (physiquement à partir de manipulations simples) des élèves et la possibilité de réaliser des groupements facilitée par le petit nombre d'objets à manipuler. Ainsi, très rapidement les représentations iconiques correspondantes réalisées par les élèves prennent sens et les représentations symboliques chiffrées amenées alors peuvent prendre appui sur la notion même de quantité isolée ou de groupement.

- **Intuitions spatiales des quantités chez le jeune enfant.**

« Cette expérience […] a permis de déterminer que ***certaines régions cérébrales répondent à l'identité des objets, et d'autres à la quantité numérique****. […] Il est remarquable de penser que le cerveau de l'enfant est déjà organisé chez des bébés de trois mois. […].* ***Il s'agit du socle sur lequel se feront les apprentissages ultérieurs. […]*** *Je crois qu'il serait particulièrement intéressant de* ***renforcer*** *dans les écoles* ***le lien entre chiffres arabes et quantités correspondantes. »*** Dehaene (2007) [17]

Dans la situation proposée, le groupement par 4 permet de se « passer de compter ». La représentation du nombre en tant que quantité est très nettement favorisée car visuellement disponible. Ainsi le *« le lien entre chiffres arabes et quantités correspondantes »* est nettement

[15] Duval, Actes du XXXII$^{\text{ème}}$ colloque COPIRELEM, 2O05, p.67 ; 69
[16] cf. annexe 2
[17] Dehaene, Actes du Séminaire de mathématiques (novembre 2007), publication 14 mars 2008

renforcé. La correspondance entre chiffre arabe et groupement par quatre étant réalisée, passer du groupe de quatre au groupe de dix ne perturbe pas la compréhension du lien écriture symbolique chiffrée – quantité correspondante et dans les expériences faites, la compréhension de la nécessité du groupement par dix n'a posé aucun souci. La liaison groupement de dix – écriture symbolique chiffrée est ainsi effective.

4 CONCLUSION

Les expériences réalisées, autant en formation des maîtres qu'en classe de CP, permettent de faire l'hypothèse que la situation décrite pourrait servir de situation de référence pour l'apprentissage par les jeunes enfants de notre système de numération et la compréhension par les maîtres des difficultés de cet enseignement. Elle semble respecter les conclusions des différents travaux sur la nécessité de désignations des groupements menés par l'équipe Ermel et sur les difficultés inhérentes à notre langue française soulignées particulièrement par Brissiaud. Elle semble pouvoir apporter une réponse aux recommandations faites par Duval concernant *le passage des représentations iconiques aux systèmes de représentations symboliques* et Dehaene concernant *le renforcement dans les écoles du lien entre chiffres arabes et quantités correspondantes.* Il reste, de toute évidence, à en poursuivre l'expérimentation de façon à pouvoir apporter une conclusion plus rigoureuse de l'efficacité de sa mise en œuvre.

5 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Aigoin C., Guebourg V. (2004) *Grand N* **73,** 49-65
- Bacquet M., Gueritte-Hess B., (1996) *Le nombre et la numération,* Isoscel, *« Du dénombrement terme à terme aux groupements réguliers : un pas nécessaire vers la compréhension de notre système de numération positionnel »*
- Bassis O., (2003) *Concepts clés et situations problèmes,* Hachette Ed. 17-76
- Bideaud J., Lehalle H., (2002) d. *Le développement des activités numériques chez l'enfant,* Lavoisier

- Briand J., Salin M.H., Loubet M., *Apprentissages mathématiques en maternelle* Hatier 2004 CD.
- Brissiaud R., (2003) *Comment les enfants apprennent à calculer* Retz 232-238
- Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques* La Pensée sauvage
- Dehaene S. (2007) in *Actes du séminaire national Enseignement des mathématiques à l'école primaire* http://webtv.ac-versailles.fr 117-132
- Duval R. (2005) *Actes du XXXII colloque* Copirelem 67-89
- Ermel, (2005) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CP* Hatier 245-273
- Fayol M. (1990) *L'enfant et le nombre,* Delachaux et Niestlé, 180-190
- Fayol M. in Bideaud J., Lehalle H., (2002) d. *Le développement des activités numériques chez l'enfant,* Lavoisier 151-170
- Rouche N. (2006) *Du quotidien aux mathématiques* Ellipses 15-33

ANNEXE 1

Séquence CP *Et après 9, quelle écriture ?*
Etapes 1 à 5 :
Connaissances : Connaître et savoir interpréter la valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture décimale[18] d'un nombre.

Préambule
L'objectif principal, à ce moment de l'année, de la démarche d'apprentissage[19] exposée ici est double. Il s'agit tout d'abord de donner à l'élève, et à la classe, une situation de référence dans le domaine de la numération. Nous proposons en effet dans ce chapitre une « situation – problème », dans l'acception faible du terme, situation qui pourra également être réinvestie en CE1, favorisant ainsi la continuité des apprentissages. Il s'agit également de construire un apprentissage de la numération positionnelle ne permettant pas aux conceptions erronées des élèves de s'installer de manière pérenne. La situation des « moutons » a été conçue dans le but d'éluder les erreurs classiques connues depuis longtemps des élèves, mais aussi avec l'objectif d'appréhender la numération positionnelle dans tous ces questionnements (épistémologiques notamment). Il faudra, dans cette situation, porter attention à l'écrit et aux règles régissant celui-ci, en mathématiques.

Attention : En ce début d'année de CP, avec des élèves encore très jeunes, le plaisir de manipuler le matériel utilisé dans cette situation (des bâtonnets) peut l'emporter sur la réflexion. Il faut donc prévoir une séance de « découverte » (dévolution) du matériel, de la situation et des questions qu'elle implique.

Les moutons

1ère Etape : La désignation ORALE d'une quantité

Créer un contexte imaginaire qui réponde aux objectifs d'historicité et de communication.	Nous sommes dans un pays imaginaire, composé de tribus qui possèdent chacune un troupeau de moutons et qui, le soir, désirent trouver un moyen pour se souvenir du nombre de leurs moutons.
Contraindre le champ numérique disponible de façon à provoquer un problème de codage (oral puis écrit) sans dépasser les capacités manipulatoires de jeunes enfants.	Dans ce pays, les habitants ne savent compter que jusqu'à quatre et ….il leur arrive des choses « bizarres ».
Introduire le concept de nombre en tant que « mémoire de quantité », sans induire de procédure de dénombrement usuel de façon à ne pas interférer avec le savoir social et	Vous avez à votre disposition ces petits bâtonnets qui représentent les moutons de votre tribu. Vous devrez trouver un moyen pour savoir, la prochaine fois que vous

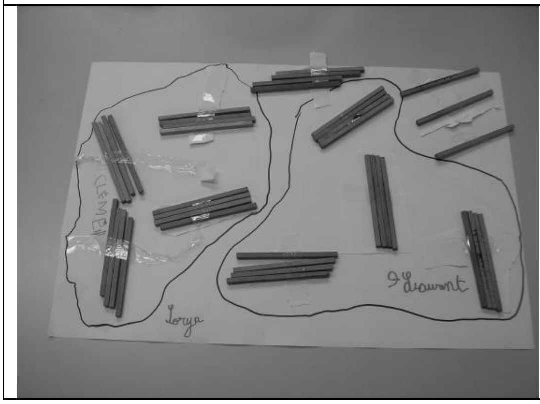
[18]L'expression « Ecriture décimale » signifie : écriture des nombres entiers à l'aide de chiffres qui prennent une valeur différente suivant la position où ils se trouvent, la base étant régulière et en groupements par dix.
[19] Démarche adaptée de celle expérimentée dans le cadre du GFEN (Groupe Français d'Education Nouvelle) - cf. Odette Bassis, Concepts Clés et situations problèmes, Hachette Education, 2005 -

scolaire déjà acquis (comptine numérique orale usuelle).	retrouverez vos moutons, si vous n'en avez pas perdu. Attention, dans ce pays, les habitants ne savent à ce moment que « parler ».
Mettre à disposition de chaque groupe vingt-sept, trente, trente-neuf, quarante-cinq, cinquante-quatre, ou cinquante-sept bâtonnets (suivant l'aisance des élèves) de façon à obtenir des groupements de trois ordres sans avoir le même nombre de groupes de chaque ordre. [20] Le nombre de bâtonnets est une **variable didactique** de la situation : ce nombre est en effet à la disposition de l'enseignant. L'enseignant choisira différentes valeurs de cette variable en fonction : - de la familiarité des élèves avec les nombres - du questionnement relatif à la nécessité du zéro (absent à ce stade de la situation)	

Difficultés prévisibles, rôle du maître : *Grouper par quatre les bâtonnets est une idée qui vient assez spontanément aux élèves. Cependant le rôle du maître est essentiel pour permettre la verbalisation de ces groupements et par là - même la prise de conscience de ce qui est en train de se passer. Le vocabulaire employé le plus souvent est « le petit groupe », « le petit champ », « le petit troupeau ».*
Certains groupes d'élèves cependant ne parviennent pas immédiatement ni au groupement régulier, ni au groupement optimisé par quatre. Là encore le rôle du maître est essentiel. Il est nécessaire de rappeler les objectifs d'optimisation : « Les habitants des tribus voudraient trouver un moyen le plus efficace possible pour se souvenir du nombre de moutons qu'ils possèdent : en disant le moins de mots possible et en trouvant le système le plus astucieux possible ».
Grouper ensuite les groupes par quatre (il s'agit là de la récursivité des groupements, aspect fondamental et n'allant pas de soi, de la numération positionnelle) est souvent plus difficile à concevoir pour les élèves. Ils sont généralement surpris par le problème du nombre de groupes de quatre qu'ils ne peuvent pas compter et une deuxième séance peut être nécessair ;

Provoquer la désignation orale des groupements réalisés par la nécessité de communication à distance au grand groupe.	Vous pouvez coller (scotcher) l'organisation de vos bâtonnets de façon à pouvoir montrer aux autres tribus comment vous vous y êtes pris. Expliquez oralement aux autres votre démarche.

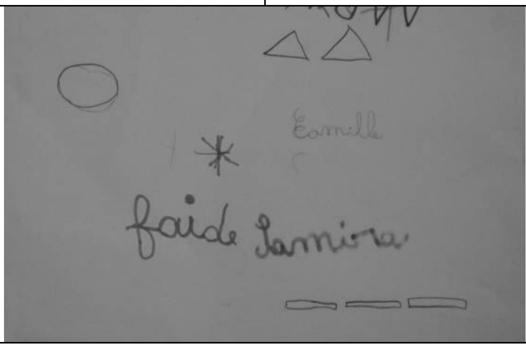
[20] Codages correspondants (à retrouver à la fin de la 3ème étape) : pour *vingt-sept bâtonnets* : 123 ; *trente* : 132 ; *trente-neuf* : 213 ; *quarante-cinq* : 231 ; *cinquante-quatre* : 312 ; *cinquante-sept* : 321.

Permettre le lien d'une séance à l'autre dans le processus d'apprentissage.	Je vais garder (ou photographier) vos réalisations de façon à ce que vous puissiez avoir une aide pour vous souvenir la prochaine fois de ce que vous avez fait.
	***Attention :*** *Bien conserver la trace des réalisations des élèves. Le support matériel est la référence pour eux pendant tout le déroulement de cette situation.*

DIFFICULTÉS PRÉVISIBLES, RÔLE DU MAÎTRE : *Si les élèves ont besoin d'une deuxième séance, il suffit alors de terminer le collage des groupements par quatre et prévoir ensuite un redécoupage des affichages pour pouvoir réorganiser ces groupes et obtenir les « groupes de groupes ». Le vocabulaire employé alors peut être « « le grand groupe », « le grand champ », « le grand troupeau ».*
Attention : *Laisser une liberté d'initiative aux élèves, ce vocabulaire n'ayant aucun caractère « officiel ». Il représente la « mémoire (locale, dans le temps et dans l'espace) de la classe » qui assurera le passage vers l'institutionnalisation de la dizaine lors du choix du groupement par dix. La seule contrainte à respecter est de retenir un vocabulaire qui image l'idée de groupement (petit et grand). Les élèves ont souvent, au moment de la mise en commun, des difficultés à faire un choix dans le vocabulaire qui leur permet de désigner les groupements qu'ils ont effectués. Là encore le rôle du maître est essentiel. Il doit les aider à choisir le vocabulaire pertinent qui deviendra la référence pour la classe. Il s'agit d'un moment d'institutionnalisation, ici uniquement orale, des référents :* « Nous avons donc décidé que, pour nous, les moutons isolés s'appelleront les « Tout Seul », les moutons groupés par quatre les « petits champs » et les « petits champs » groupés par quatre les « grands champs ».»
Attention : *Ne pas oublier de garder une certaine liberté dans le choix du vocabulaire, mais si les élèves n'en proposent pas un adéquat (cf. les contraintes ci-dessus), le professeur se doit de le proposer.*

2ème Etape : La désignation ECRITE d'une quantité et la nécessité d'un code commun

Créer les conditions de la compréhension de la nécessité de l'invention d'un code écrit pour désigner une quantité.	Toujours dans notre pays imaginaire, les habitants des tribus sont atteints d'une drôle de maladie passagère : ils ne savent plus parler, ils ne savent que dessiner. Ils vont essayer cette fois de trouver un moyen par le dessin de se souvenir du

	nombre de leurs moutons.
Provoquer la désignation écrite des groupements réalisés par la nécessité de communication à distance au grand groupe.	Vous pouvez représenter l'organisation de vos bâtonnets de façon à pouvoir montrer aux autres tribus comment vous vous y êtes pris.
Créer les conditions de la compréhension de la nécessité de l'invention d'un code écrit commun	Comparez vos représentations. Est-ce que vous pouvez savoir si votre tribu a autant de moutons que les autres tribus ?
Provoquer l'émergence de la notion d'efficacité et la compréhension du rôle d'optimisation des groupements par quatre dans la désignation écrite minimale de la quantité.	Essayez de vous mettre d'accord sur un code commun. Attention, il devra être le plus « efficace » possible (prendre le moins de temps possible pour réaliser le dessin).
	

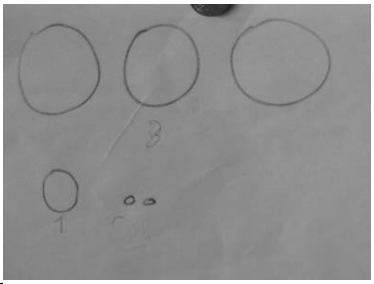
Difficultés prévisibles, rôle du maître : *A ce stade, il est possible qu'il soit nécessaire de recommencer, pour certains, de nouvelles manipulations (étape 1), compte tenu de la variété possible du choix de groupements (réguliers, irréguliers, optimisés ou non) et des régressions possibles dans les choix d'optimisation à cause du nouveau contexte (passage à l'écrit) ; l'objectif étant que tous les élèves parviennent à obtenir des groupements par quatre et des groupements de groupements par quatre et à les représenter avec le code écrit convenu en commun. Le maître doit alors bien insister sur : «* il [le code] devra être le plus efficace possible (prendre le moins de temps possible pour réaliser le dessin). »

3ème Etape : La désignation écrite d'une quantité à l'aide de CHIFFRES

Permettre d'utiliser la graphie du code usuel pour provoquer la prise de conscience du rôle conventionnel de la position des chiffres dans un nombre. *Soulignons ici que ce passage à un écrit « conventionnel » (celui de la communauté scientifique mais aussi celui du quotidien) renferme inévitablement une part*	Cette fois, dans notre pays imaginaire, les habitants des tribus ont rencontré un mathématicien un peu magicien : il leur a apporté, pour remplacer leur code dessin, un code écrit, « économique » : « 1 » pour désigner « une chose », « 2 » pour désigner « deux choses », « 3 » pour désigner « trois choses », « 4 » pour désigner « quatre choses ».

d'arbitraire. Cependant, la discussion collective dans la classe va permettre de faire émerger un consensus, et ainsi souligner que, parfois, il faut se mettre d'accord sur des définitions et des écrits (symboles et règles régissant ces symboles) pour ensuite parler de la même chose.	Ils vont essayer alors de représenter à l'aide de ce code un « dessin souvenir » du nombre de leurs moutons. A vous d'essayer…
Permettre, par la confrontation des écrits en grand groupe, la formulation explicite du rôle de la position de chaque chiffre dans un nombre dans notre système usuel.	Comparez vos écrits. Formulez (à l'oral) le mode d'emploi de votre code. Avez-vous tous le même ?
Créer les conditions de la compréhension de l'efficacité du code de numération usuel.	Pouvez-vous maintenant savoir si votre tribu a autant de moutons que les autres tribus ?

DIFFICULTÉS PRÉVISIBLES, RÔLE DU MAÎTRE : *Les élèves positionnent souvent leurs chiffres à côté des dessins dans une organisation non réfléchie. Le maître devra alors imposer d'écrire sur une autre feuille, c'est à ce moment que les problèmes posés par l'interprétation des significations apparaissent lors de la confrontation en grand groupe. La demande d'explicitation par le maître doit être rigoureuse :* « Comment positionnez-vous vos chiffres ? Que signifient-ils ? … »



Il est alors ensuite indispensable de bien prendre le temps de l'institutionnalisation et de faire un choix explicite dans le codage des groupements. Certains élèves peuvent avoir choisi de coder non pas le nombre de groupes, mais la nature des groupes : dans le cas ci-dessus, par exemple 4
4 4 4 désignant le « grand champ » ; 3 le « moyen champ »
3 et 1 les « tout seul »
1 1
Il n'y a donc ici aucune numération de position. Une discussion avec la classe permettra de convenir qu'il est nécessaire d' « utiliser tous le même code » *et qu'il vaut mieux* « utiliser le code qui est partagé par la communauté des adultes depuis très longtemps : on commence par écrire, sur une même ligne, le nombre de « grands champs », à côté le nombre de « moyens champs » et ensuite le nombre de « tout seul ».

Attention : *Bien prendre conscience que la convention d'écriture des nombres est inverse de ce que les élèves de CP sont en train d'apprendre concernant l'écriture du langage. A expliciter au besoin :* « Pour écrire un mot, on écrit les lettres dans l'ordre dans lequel on les entend, de gauche à droite. Pour écrire un nombre, j'écris les « tout seul », puis s'il y a « des moyens champs » isolés, j'en écris le nombre à sa gauche, puis s'il y a des « grands champs », j'en écris le nombre encore à sa gauche. »

4ème Etape : La nécessité de l'introduction du CHIFFRE « 0 »

Permettre de découvrir la nécessité de coder la place de l'absence d'un groupement (ou d'un isolé). *Remettre (par groupe échangeant en duo) : à l'un dix-huit bâtonnets, à l'autre vingt-quatre.* *Les codages correspondants (à retrouver à la fin de la 4ème étape) sont **102** pour dix-huit bâtonnets et **120** pour vingt-quatre bâtonnets.* *NB : ici encore, nous jouons sur la valeur de la variable didactique « nombre de bâtonnets »*	Cette fois, dans notre pays imaginaire, les habitants des tribus ont voulu, très fiers de savoir employer le code que leur a apporté le mathématicien, envoyer un message écrit à la tribu voisine pour comparer le nombre de leur nouveau troupeau de moutons. Vous échangerez vos messages entre deux groupes. Comparez vos écrits puis vérifiez à l'aide de vos bâtonnets votre conclusion.
Permettre la compréhension du rôle du « 0 » dans le code usuel en faisant le lien avec l'écriture connue du « 10 ».	Ne connaissez-vous pas un signe qui permette de noter cette « place vide » ?

Difficultés prévisibles, rôle du maître : *Les élèves sont très étonnés de trouver la même écriture codée pour leurs deux groupes (12) et un nombre de bâtonnets différents (contrôlés pour certains à l'aide de groupements, pour d'autres, plus déstabilisés, par une correspondance terme à terme). Ils pensent s'être trompés en codant. Là encore l'intervention du maître est déterminante. Il s'agit d'insister sur le fait qu'ils ne se sont pas trompés, mais qu'il s'agit* « d'un problème avec le code et qu'il faut trouver un moyen pour lever l'ambiguïté ». *La recherche en groupe ne doit pas se prolonger car il peut arriver que les élèves ne pensent pas au Zéro (0). Il est nécessaire de bien insister, lors de la confrontation collective, sur l'absence de « moyens champs » pour un groupe et l'absence de « tout seul » pour l'autre.* « Le « 0 » est situé à la place du groupement ou des isolés qui n'existent pas. »

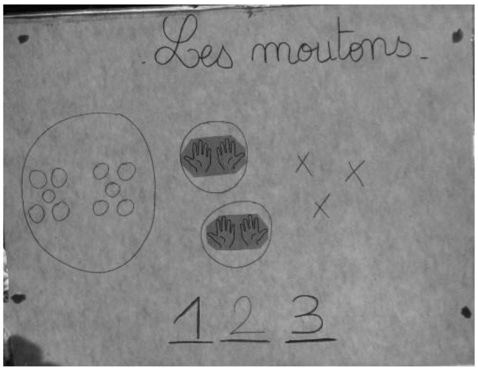
5ème Etape : **La désignation écrite d'une quantité à l'aide des DIX CHIFFRES disponibles**

Créer les conditions de la compréhension de la nécessité des groupements par dix pour permettre le codage d'une quantité supérieure à dix à l'aide des chiffres disponibles.	Cette fois, dans notre pays imaginaire, les habitants savent compter jusqu'à dix. … Le mathématicien est alors revenu et a complété le code représenté par les chiffres : « 1 » ; « 2 » ; « 3 » ; « 4 » ; « 5 » ; « 6 » ; « 7 » ; « 8 » ; « 9 » ; et le drôle de « 0 ». « 1 » pour désigner « une chose », « 2 » pour désigner « deux choses », « 3 » pour désigner « trois choses », « 4 » pour désigner « quatre choses », etc.
Contraindre le passage à l'écrit avant tout rappel de la comptine usuelle orale. *Donner un nombre de bâtonnets en rapport avec l'aisance des élèves (au besoin par duos de groupes d'aisance équivalente) ;(dix-sept, vingt) ; (dix-huit, vingt) ; (vingt-sept, trente) ; etc.… (cent sept, cent dix)…*	Mais attention, le mathématicien, un peu malicieux, les a tous rendus muets… Ecrivez à l'aide de ce code un message qui va permettre de comparer les différents troupeaux des tribus.
Permettre la compréhension de la spécificité du code écrit utilisant les chiffres par rapport au code oral (qui deviendra code écrit en lettres petit à petit).	Les habitants des tribus ont subitement retrouvé l'usage de la parole. Mettez-vous d'accord dans chaque groupe sur une façon de lire votre nombre de moutons. Ne retrouvez-vous pas la possibilité d'utiliser la comptine numérique ?

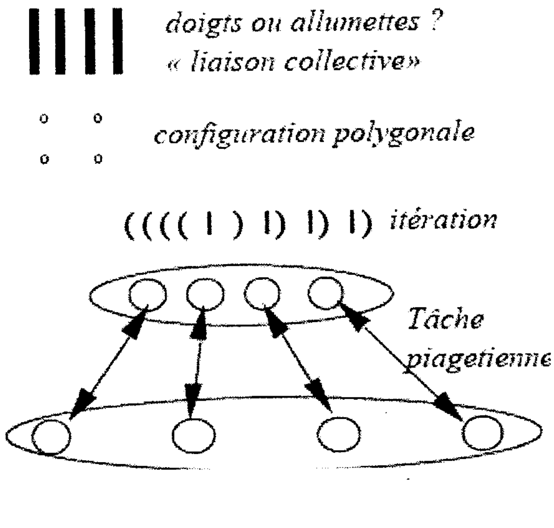
Il s'agit, à ce stade, d'assurer, pour tous, la compréhension de l'existence d'un code écrit utilisant dix chiffres, fait à partir de groupements par dix. Le « 0 » désigne l'absence d'éléments isolés (dans « 10 » ; « 20 »). La systématisation du système ne peut se faire que lorsque le nombre d'éléments à compter dépasse la centaine, pour permettre une écriture symbolique des groupements d'ordres différents et l'absence de groupements par « 0 » et sera donc un objectif d'apprentissage pour tous en CE1.

Difficultés prévisibles, rôle du maître : *Pour éviter le découragement éprouvé souvent par certains élèves - pourtant capables de gérer une grande quantité de bâtonnets - ou les erreurs de comptage des groupements de dix toujours possibles, il peut-être judicieux de répartir les rôles au sein des groupes en « compteurs » et « contrôleurs ». Certains élèves sont très vite à l'aise et comprennent la récursivité des groupements (au niveau de la structure qui se répète). Pour d'autres, il faudra attendre une nouvelle manipulation avec les groupements par dix (à poursuivre en CE1).*

Note : Le matériel utilisé ici peut être des trombones (réalisation facile de groupes attachés). Ce matériel peut être ensuite repris avec des groupements par dix pour aborder la centaine.



ANNEXE 2

<table>
<tr><th>Représentations ICONIQUES
Représentations « propres »</th><th>Représentations SYMBOLIQUES
(chiffres ou mots)</th></tr>
<tr><td>
</td><td>4 : SYSTÈME décimal.

100 : SYSTÈME binaire.
Ces systèmes de position à base n impliquent ce signe par excellence, « 0 », lequel ne s'entend pas dans l'oralisation de l'écriture symbolique et ouvrent des extensions.

64/16 : écriture fractionnaire.

Quatre : dénomination verbale dont le sens vient de sa place dans une suite de dénominations.</td></tr>
</table>

Figure 2 : Juxtaposition de plusieurs représentations d'un nombre.

Duval, conférence, in Actes du XXXII colloque, 2005, p. 71

REPRÉSENTATIONS SÉMIOTIQUES ET DÉMARCHES MATHÉMATIQUES 73

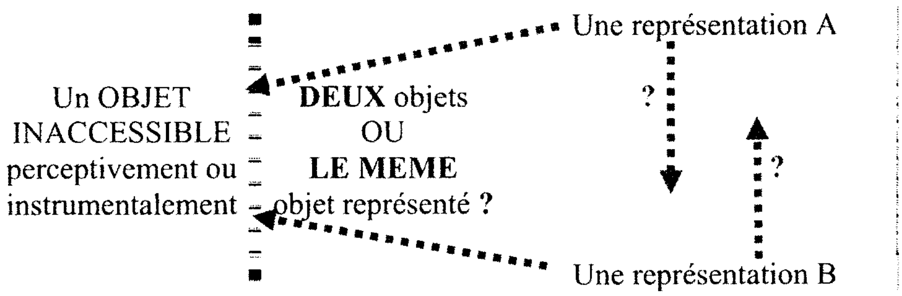


Figure 4 : Quelle reconnaissance en situation d'inaccessibilité non sémiotique ?

Duval, conférence, in Actes du XXXII colloque COPIRELEM, 2005, p. 73

66

La multiplication (1) : produit de deux nombres

Calcul rapide
Trouver la dizaine entière la plus proche.
236 ; 123...

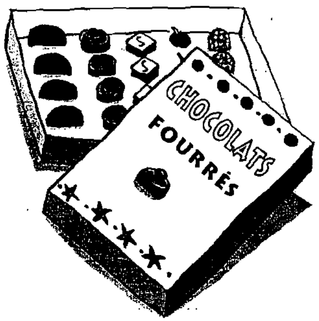
Objectifs – Construire le concept de produit. Écrire un produit sous la forme $a \times b$ et trouver sa valeur.

Date : ____________

Piste de recherche

Une boîte de chocolats

Combien de chocolats contient cette boîte ?

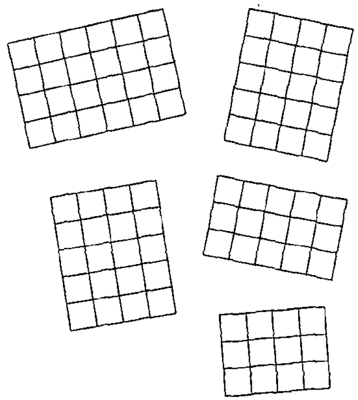


Le nombre de chocolats peut s'écrire 5×4 ou 4×5.

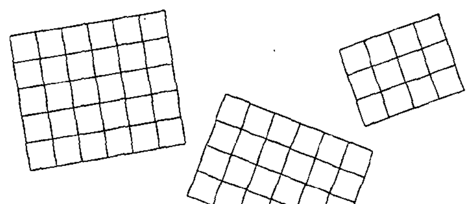
Complète : $5 \times 4 =$ ___ × ___ = ______

La boîte contient ______ chocolats.

• Colorie les rectangles qui permettent de calculer le nombre de chocolats.



1 Colorie le rectangle qui permet de calculer le nombre de carreaux de ce tapis.

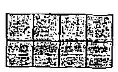


Complète : ___ × ___ = ___ × ___ = ______

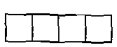
Nombre de carreaux du tapis : ______

2 Écris et calcule les produits.

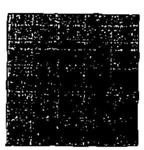
___ × ___ = ___ × ___ = ______



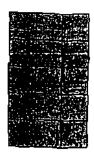
___ × ___ = ___ × ___ = ______



___ × ___ = ___ × ___ = ______



___ × ___ = ______



___ × ___ = ___ × ___ = ______

ANNEXE 1

« Pour comprendre les mathématiques », CE1, édition Hachette, 2002, fichier élève et guide pédagogique.

Objectifs – Construire le concept de produit ; écrire un produit sous la forme : $a \times b$ et trouver sa valeur.

Observations préliminaires

Nous proposons d'introduire le concept de produit à partir de la résolution d'un problème. Le produit est alors le nom et l'écriture qui exprime la solution de ce problème. Il n'est pas introduit *a priori*, de façon abstraite, mais représente dès le départ un nombre, encore inconnu, que l'on va déterminer et calculer avec les enfants. Il ne faut pas hésiter à consacrer deux journées à cette première leçon sur les produits. Il importe en effet que les enfants mettent du sens sous la notion. La première journée peut être consacrée aux activités collectives, nous en proposons un nombre suffisant pour que l'enseignant dispose d'un choix assez large. La seconde journée porte alors sur les activités individuelles qui sont un bon moyen d'évaluer les compétences acquises par les enfants. Sur la justification de nos choix pédagogiques, se reporter à l'annexe 4 du guide, *Produit de deux nombres, la multiplication.*

Calcul rapide

Trouver la dizaine entière la plus proche.
Le maître dit : « deux cent trente-six », l'élève écrit « 240 ».
236, 124, 74, 98, 207, 844, 392, 708, 403, 329.

 ACTIVITÉS COLLECTIVES

MATÉRIEL

Activité 1.
– Des étiquettes blanches de 4 formes différentes  une vingtaine par enfant ou groupe d'enfants.
– Pour la classe : quelques boîtes rectangulaires présentant des alvéoles régulièrement espacées pour ranger les objets : boîtes de chocolats, cagettes de fruits...

✦ Activité 1 : Combien de logos différents ?

Les enfants sont répartis en équipes de deux ou trois. Ils sont munis de leur cahier d'essais et de leurs crayons de couleur.

L'enseignant expose le problème : on veut dessiner des logos. Les formes de ceux-ci sont imposées : ce sont des carrés, des triangles, des ronds et des couronnes. Ils sont de couleurs rouge, noir, bleue, verte ou blanche. On voudrait savoir combien de logos différents on peut fabriquer et s'il y en a suffisamment pour en attribuer un à chaque enfant de la classe.

Il pose quelques questions pour s'assurer que tous les enfants ont compris la situation :

« *Que sont ces logos ? Qui peut en dessiner un au tableau ? De combien de couleurs dispose-t-on ? De combien de formes ?* »

Après quelques minutes de recherche, les enfants présentent leurs résultats. En général, les différentes équipes n'ont pas trouvé le même nombre, faute de méthode de travail rationnelle. L'enseignant organise alors la discussion. Il y a 4 formes et 5 couleurs. Ces nombres sont importants, si on les change, on ne trouvera pas le même nombre de logos. Il propose d'une part de noter le nombre inconnu de logos 4 x 5 ou 5 x 4, au choix, et induit la mise en ordre des logos : une forme et une couleur permettent de fabriquer un seul logo. On a déjà rencontré ce genre de situation : le tableau à double entrée est un bon outil pour trouver tous les logos sans oubli et sans répétition (*cf.* les leçons 32 et 33). Les enfants reprennent leur recherche. On trouve que le nombre de logos est 20. Selon l'effectif de la classe, il manquera ou non des logos. L'enseignant introduit alors le vocabulaire **produit de deux nombres**, la notation $5 \times 4 = 4 \times 5$ et définit ce produit comme le nombre de cases d'un tableau à double entrée ayant le nombre correspondant de lignes et de colonnes.

✦ Activité 2 : Le bal masqué

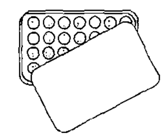
L'enseignant présente la situation-problème suivante. « *Pour Mardi gras, Lucile, Sophie, Lydia, Océane, Clément, Adrien et Julien se sont déguisés. Chaque garçon doit danser avec chaque fille et chaque couple se fait photographier. Combien de photos va-t-on obtenir ?* »

Les enfants sont répartis en groupes de sept ou huit de façon à pouvoir mimer la situation, un ou deux enfants selon l'effectif de la classe jouant le photographe. Ils doivent ensuite noter leurs découvertes. Souvent, les enfants ne prennent en compte que les photos où ils figurent, du moins dans un premier temps, certaines peuvent être comptées deux fois (Sophie-Julien et Julien-Sophie). L'enseignant leur demande de ranger leurs « photos » de façon qu'il n'y ait ni oubli ni répétition.

Au moment de la synthèse, chaque groupe vient expliquer sa démarche et les résultats auxquels il est parvenu. Si les enfants ne l'ont pas proposé, l'enseignant montre que le tableau à double entrée est l'outil adéquat : Sophie a toutes ses photos en ligne et Julien les siennes en colonne ou vice-versa. Il introduit le vocabulaire et les écritures : **le produit des nombres 4 et 3 est le nombre de cases d'un tableau à 4 lignes et 3 colonnes** ou, ce qui revient au même, de trois lignes et 4 colonnes. On note ce nombre $4 \times 3 = 3 \times 4$.

✦ Activité 3 : Piste de recherche « Une boîte de chocolats »

Phase 1. Les boîtes sont disposées devant les enfants, en partie cachées par leur couvercle, mais laissant voir les alvéoles sur deux côtés adjacents. Par exemple :



L'enseignant demande aux enfants combien de chocolats (ou de fruits...) la boîte peut contenir. Les enfants comptent les alvéoles sur chaque côté, ces nombres sont écrits au tableau. Les enfants verbalisent : il y a 4 rangées de 7 alvéoles ; il y a 7 rangées de 4 alvéoles. L'enseignant introduit le mot **produit**. Le nombre d'alvéoles est le produit : $4 \times 7 = 7 \times 4$. Les enfants le calculent par la méthode de leur choix : dessin de la boîte sans son couvercle, somme réitérée $7 + 7 + 7 + 7$ ou $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$.

Phase 2. Les enfants lisent le texte de la piste de recherche et observent le dessin. Ils retrouvent une situation analogue à celle que l'enseignant vient de leur proposer. Celui-ci s'assure que les enfants interprètent les quadrillages de la partie droite comme des modèles de la boîte vide et sans couvercle. Seuls les quadrillages en haut à droite et en bas à gauche sont des modèles convenables : $(4 \times 5 = 5 \times 4)$. Il est facile de compter le nombre de leurs cases. Les enfants renseignent enfin leur fichier.

66 La multiplication (1) : produit de deux nombres

Calcul rapide
Trouver la dizaine entière la plus proche.
236 ; 123...

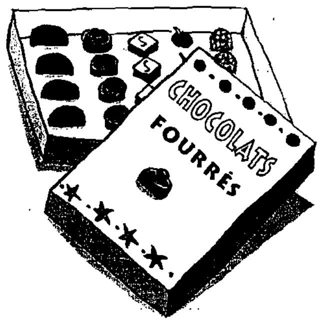
Objectifs – Construire le concept de produit. Écrire un produit sous la forme $a \times b$ et trouver sa valeur.

Date : ____________

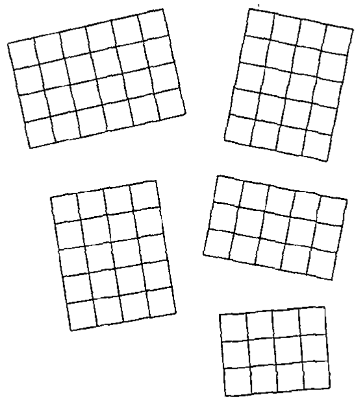
Piste de recherche

Une boîte de chocolats

Combien de chocolats contient cette boîte ?



• Colorie les rectangles qui permettent de calculer le nombre de chocolats.

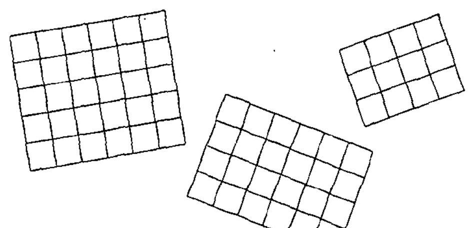


Le nombre de chocolats peut s'écrire 5 × 4 ou 4 × 5.

Complète : 5 × 4 = ___ × ___ = ______

La boîte contient ______ chocolats.

1 Colorie le rectangle qui permet de calculer le nombre de carreaux de ce tapis.



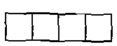
Complète : ___ × ___ = ___ × ___ = ______

Nombre de carreaux du tapis : ______

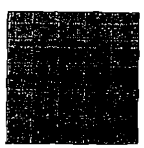
2 Écris et calcule les produits.

___ × ___ = ___ × ___ = ______

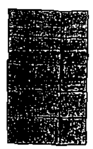
___ × ___ = ___ × ___ = ______



___ × ___ = ___ × ___ = ______



___ × ___ = ______



___ × ___ = ___ × ___ = ______

ANNEXE 1

« Pour comprendre les mathématiques », CE1, édition Hachette, 2002, fichier élève et guide pédagogique.

Objectifs – Construire le concept de produit ; écrire un produit sous la forme : a x b et trouver sa valeur.

Observations préliminaires

Nous proposons d'introduire le concept de produit à partir de la résolution d'un problème. Le produit est alors le nom et l'écriture qui exprime la solution de ce problème. Il n'est pas introduit *a priori*, de façon abstraite, mais représente dès le départ un nombre, encore inconnu, que l'on va déterminer et calculer avec les enfants. Il ne faut pas hésiter à consacrer deux journées à cette première leçon sur les produits. Il importe en effet que les enfants mettent du sens sous la notion. La première journée peut être consacrée aux activités collectives, nous en proposons un nombre suffisant pour que l'enseignant dispose d'un choix assez large. La seconde journée porte alors sur les activités individuelles qui sont un bon moyen d'évaluer les compétences acquises par les enfants. Sur la justification de nos choix pédagogiques, se reporter à l'annexe 4 du guide, *Produit de deux nombres, la multiplication*.

Calcul rapide

Trouver la dizaine entière la plus proche.
Le maître dit : « deux cent trente-six », l'élève écrit « 240 ».
236, 124, 74, 98, 207, 844, 392, 708, 403, 329.

Activités collectives

Matériel

Activité 1.
– Des étiquettes blanches de 4 formes différentes : une vingtaine par enfant ou groupe d'enfants.
– Pour la classe : quelques boîtes rectangulaires présentant des alvéoles régulièrement espacées pour ranger les objets : boîtes de chocolats, cagettes de fruits...

✦ Activité 1 : Combien de logos différents ?

Les enfants sont répartis en équipes de deux ou trois. Ils sont munis de leur cahier d'essais et de leurs crayons de couleur.

L'enseignant expose le problème : on veut dessiner des logos. Les formes de ceux-ci sont imposées : ce sont des carrés, des triangles, des ronds et des couronnes. Ils sont de couleurs rouge, noir, bleue, verte ou blanche. On voudrait savoir combien de logos différents on peut fabriquer et s'il y en a suffisamment pour en attribuer un à chaque enfant de la classe.

Il pose quelques questions pour s'assurer que tous les enfants ont compris la situation :

« *Que sont ces logos ? Qui peut en dessiner un au tableau ? De combien de couleurs dispose-t-on ? De combien de formes ?* »

Après quelques minutes de recherche, les enfants présentent leurs résultats. En général, les différentes équipes n'ont pas trouvé le même nombre, faute de méthode de travail rationnelle. L'enseignant organise alors la discussion. Il y a 4 formes et 5 couleurs. Ces nombres sont importants, si on les change, on ne trouvera pas le même nombre de logos. Il propose d'une part de noter le nombre inconnu de logos 4 x 5 ou 5 x 4, au choix, et induit la mise en ordre des logos : une forme et une couleur permettent de fabriquer un seul logo. On a déjà rencontré ce genre de situation : le tableau à double entrée est un bon outil pour trouver tous les logos sans oubli et sans répétition (*cf.* les leçons 32 et 33). Les enfants reprennent leur recherche. On trouve que le nombre de logos est 20. Selon l'effectif de la classe, il manquera ou non des logos. L'enseignant introduit alors le vocabulaire **produit de deux nombres**, la notation 5 x 4 = 4 x 5 et définit ce produit comme le nombre de cases d'un tableau à double entrée ayant le nombre correspondant de lignes et de colonnes.

✦ Activité 2 : Le bal masqué

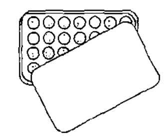
L'enseignant présente la situation-problème suivante. « *Pour Mardi gras, Lucile, Sophie, Lydia, Océane, Clément, Adrien et Julien se sont déguisés. Chaque garçon doit danser avec chaque fille et chaque couple se fait photographier. Combien de photos va-t-on obtenir ?* »

Les enfants sont répartis en groupes de sept ou huit de façon à pouvoir mimer la situation, un ou deux enfants selon l'effectif de la classe jouant le photographe. Ils doivent ensuite noter leurs découvertes. Souvent, les enfants ne prennent en compte que les photos où ils figurent, du moins dans un premier temps, certaines peuvent être comptées deux fois (Sophie-Julien et Julien-Sophie). L'enseignant leur demande de ranger leurs « photos » de façon qu'il n'y ait ni oubli ni répétition.

Au moment de la synthèse, chaque groupe vient expliquer sa démarche et les résultats auxquels il est parvenu. Si les enfants ne l'ont pas proposé, l'enseignant montre que le tableau à double entrée est l'outil adéquat : Sophie a toutes ses photos en ligne et Julien les siennes en colonne ou vice-versa. Il introduit le vocabulaire et les écritures : le **produit des nombres** 4 et 3 est le nombre de cases d'un tableau à 4 lignes et 3 colonnes ou, ce qui revient au même, de trois lignes et 4 colonnes. On note ce nombre 4 x 3 = 3 x 4.

✦ Activité 3 : Piste de recherche « Une boîte de chocolats »

Phase 1. Les boîtes sont disposées devant les enfants, en partie cachées par leur couvercle, mais laissant voir les alvéoles sur deux côtés adjacents. Par exemple :



L'enseignant demande aux enfants combien de chocolats (ou de fruits...) la boîte peut contenir. Les enfants comptent les alvéoles sur chaque côté, ces nombres sont écrits au tableau. Les enfants verbalisent : il y a 4 rangées de 7 alvéoles ; il y a 7 rangées de 4 alvéoles. L'enseignant introduit le mot **produit**. Le nombre d'alvéoles est le produit : 4 x 7 = 7 x 4. Les enfants le calculent par la méthode de leur choix : dessin de la boîte sans son couvercle, somme réitérée 7 + 7 + 7 + 7 ou 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4.

Phase 2. Les enfants lisent le texte de la piste de recherche et observent le dessin. Ils retrouvent une situation analogue à celle que l'enseignant vient de leur proposer. Celui-ci s'assure que les enfants interprètent les quadrillages de la partie droite comme des modèles de la boîte vide et sans couvercle. Seuls les quadrillages en haut à droite et en bas à gauche sont des modèles convenables : (4 x 5 = 5 x 4). Il est facile de compter le nombre de leurs cases. Les enfants renseignent enfin leur fichier.

ANNEXE 2

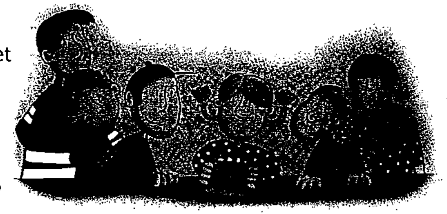
138 Situations de distribution (1)

Calcul rapide
Moitié d'un nombre de deux chiffres.
32 ; 50 ; 66....

Objectifs – Reconnaître une situation de division euclidienne.
Calculer empiriquement le quotient et le reste.

Piste de recherche

Des nougats



Amélie a rapporté de voyage un paquet de 32 nougats. Elle les distribue à ses 5 frères et sœurs.
Chacun reçoit le même nombre de nougats.
Combien de nougats chacun reçoit-il ?
Combien de nougats Amélie ne peut-elle pas distribuer ?

a) Reproduis les trois dernières lignes du tableau, puis complète-les.

b) Recopie et complète l'égalité suivante :
32 = (5 x ....) + ...

c) Rédige les réponses aux questions.

Nombre de nougats donnés à chaque enfant	Nombre de nougats distribués	Nombre de nougats restants
1	5 x 1 = 5	32 – 5 = 27
2	5 x 2 = 10	32 – 10 = 22
3	5 x 3 = 15	32 – 15 = 17
4	5 x 4 =	
5		
6		

Tu as divisé 32 par 5 ; 5 est le **diviseur**, 6 est le **quotient**, 2 est le **reste**.

1 Joris range ses 50 soldats dans 8 boîtes. Chaque boîte doit contenir le même nombre de soldats.
a) Combien de soldats contient chaque boîte ?
b) Tous les soldats sont-ils rangés ?

2 Le pirate Barberousse partage équitablement un sac de 47 écus entre ses 6 compagnons.
a) Combien chacun recevra-t-il ?
b) Si Barberousse ajoute un écu, combien aura alors chacun de ses compagnons ?

3 Émilie a acheté une boîte de 64 perles. Elle veut fabriquer 9 bracelets identiques.
a) Combien de perles chaque bracelet aura-t-il ?
b) Combien de perles restera-t-il ?

4 Aurélie possède 56 images d'insectes. Elle les distribue équitablement aux 10 enfants de son club de nature. Elle garde le reste.
a) Combien d'images chaque enfant reçoit-il ?
b) Combien d'images Aurélie garde-t-elle ?

5 Calcul réfléchi
Observe l'exemple, puis calcule.

26 x 4 = (26 x 2) x 2 = 52 x 2 = 104

17 x 4   35 x 4   28 x 4   87 x 4   115 x 4

« Pour comprendre les mathématiques », CE2, édition Hachette, 2002, fichier élève et guide pédagogique.

<u>Présentation de l'organisation de la classe prévue par les auteurs, dans le guide pédagogique correspondant</u>.
Deux séances sont prévues :
1re séance
Les enfants travaillent directement sur l'activité de la piste de recherche de leur fichier : après avoir pris connaissance du texte, le maître s'assure de la bonne compréhension de l'énoncé et répartit les élèves par groupe de 4. Dans chaque groupe les enfants doivent répondre aux questions de l'énoncé, sans tenir compte du tableau de droite. Les équipes ont à leur disposition des jetons représentant les frères et sœurs d'Amélie et des bûchettes représentant les nougats. En fin de travail un représentant de chaque groupe vient au tableau présenter les résultats de son équipe.
Le tableau à droite de la piste de recherche est reproduit au tableau, collectivement il est complété en « synthèse du travail des enfants ». Individuellement les enfants répondent à la question a) et aux questions de l'énoncé de la piste de recherche. Puis collectivement l'enseignant demande de répondre à la question b) et introduit le vocabulaire « diviseur », « quotient » et « reste ».
Les exercices 1 à 5 sont traités individuellement ou en petits groupes. L'enseignant s'assure collectivement que les énoncés sont bien compris. La correction de chacun, collective, est l'occasion d'exposer les différentes méthodes de calculs utilisés. Ils peuvent utiliser un tableau comme celui de la piste de recherche, dessiner la situation ou écrire directement l'égalité de la division. Dès l'exercice 2 l'enseignant attire l'attention sur l'expression « partage équitable ».

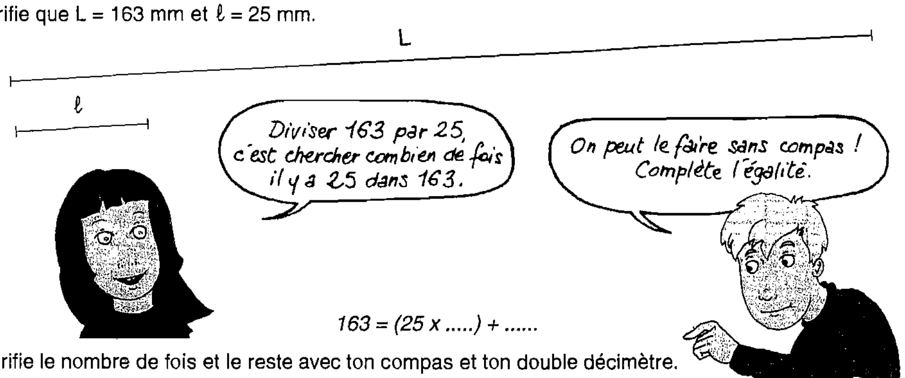
2e séance
Les enfants travaillent directement sur l'activité de la piste de recherche de leur fichier : le tableau a été reproduit par le maître sur le tableau de la classe, les enfants lisent individuellement la description de la situation proposée puis une discussion collective a lieu autour de deux questions : « que peut bien vouloir dire « grand père a triché » ? » et « quel est le mot important pour comprendre la situation ? », (équitable).
L'enseignant peut faire mimer la situation en cas de difficultés. Une fois la compréhension de la situation assurée, le maître demande ce qui se passe le jeudi. La réponse attendue est : « Grand père n'a pas fait d'erreur de calcul. Il a triché en ne distribuant pas jusqu'au bout ses poires le jeudi et le samedi ».
A la suite de cela le maître précise que « le reste d'une division est toujours inférieur au diviseur ».
Individuellement ou par groupes de 3 ou 4 les élèves résolvent les exercices 1 et 2. Le maître s'assure au préalable que les énoncés sont correctement compris et la correction est collective après mise en forme des résultats.

Dominantes de la période
Arithmétique : calcul réfléchi de la division.
Géométrie et mesure : construction de figures, les aires, les masses.

ANNEXE 3

Tu vas apprendre à calculer la division de 163 par 25 (163 : 25 ?).

Vérifie que L = 163 mm et ℓ = 25 mm.



163 = (25 x .....) + ...

Vérifie le nombre de fois et le reste avec ton compas et ton double décimètre.

J'ai appris

Diviser 163 par 25 (163 : 25) c'est chercher **deux nombres** :
1°) Combien de fois il y a 25 dans 163, ce nombre s'appelle le **quotient (q)**.
2°) Le **reste (r)**.

163 : 25 ? q = 6 ← c'est le nombre de fois ; r = 13 ← c'est le reste ; car 163 = (25 x 6) + 13

Attention : quand on divise par 25, le reste est obligatoirement plus petit que 25.

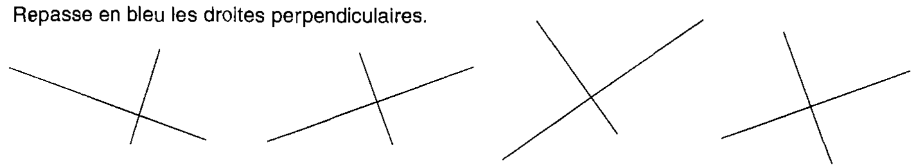
A

Calcule ces divisions. Si tu n'es pas sûr(e), tu peux tracer les segments correspondants sur ton cahier.

107 : 25 ?	q = ... r = ...	car 107 = (25 x ....) + ...	199 : 25 ?	q = ... r = ...	car ....
108 : 25 ?	q = ... r = ...	car 108 = (25 x ....) + ...	200 : 25 ?	q = ... r = ...	car ....
175 : 25 ?	q = ... r = ...	car 175 = (25 x ....) + ...	201 : 25 ?	q = ... r = ...	car ....
29 : 25 ?	q = ... r = ...	car	253 : 25 ?	q = ... r = ...	car ....
80 : 25 ?	q = ... r = ...	car	18 : 25 ?	q = ... r = ...	car ....

B

Repasse en bleu les droites perpendiculaires.



C

[A] et [B] La division est introduite dans son sens "division-groupement" (la "division-partage" sera abordée p.108). Le point de départ est un problème

« J'apprends les maths », CE2, édition Retz, 2001, fichier élève et guide pédagogique

<u>Présentation de l'organisation de la classe prévue par les auteurs, dans le livre du maître correspondant, pour travailler sur la fiche 96.</u>

Le maître débute la leçon en annonçant l'étude d'une nouvelle opération. Les auteurs proposent un discours du genre ; « Vous connaissez déjà l'addition, la soustraction, la multiplication, vous allez apprendre la division », tout en écrivant 163 ÷ 25 au tableau qu'il lit « on va calculer 163 ÷ 25 ».

La leçon se déroule en quatre phases :

1re phase (appelée « Anticipation »)

Les élèves prennent connaissance de la situation décrite dans le cadre A du fichier. D'après les auteurs, c'est une situation qui est familière aux enfants : ils savent qu'il faut chercher « combien de fois la petite longueur est contenu dans la grande ». Ici ce qui est nouveau est la donnée de longueurs L = 163 mm et l = 25 mm. Dans un débat collectif, on fait émerger qu'il n'y a pas besoin d'utiliser un compas, qu'il suffit de « chercher combien de fois il y a 25 dans 163 » ; le maître précise, si besoin est, qu'on cherche aussi « s'il reste une longueur et combien de millimètres elle mesure » puis il annonce que « quand on cherche combien de fois il y a 25 dans 163 et combien il reste, on fait la division de 163 par 25 ». On peut faire la division et vérifier que l'on trouve ce qu'on aurait trouvé avec le compas.

2e phase (appelée « Calcul et écriture du résultat »)

Au cours d'un débat collectif, les enfants trouvent qu'il y a 6 fois 25 dans 163 et qu'il reste 13. Le maître écrit 163 = (25 × 6) + 13 sous 163 ÷ 25. Cette égalité est comparée à celle qui aurait été écrite avec le compas L = (l × 6) + *r*, la valeur de *r* est discutée, on remarque que dans cette opération, contrairement aux autres opérations, on trouve deux nombres, les termes de quotient et de reste sont introduits. D'autres exemples peuvent être traités. L'encadré « J'ai appris » peut être utilisé à ce moment.

3e phase (appelée « Vérification avec compas et double décimètre »)

Le travail habituel est conduit avec le compas pour découper le grand segment et le reste est mesuré avec le double décimètre.

4e phase (appelée « Un autre problème et d'autres divisions »)

L'enseignant propose un problème analogue au précédent avec un segment d'une autre longueur, par exemple L = 191 cm et l = 25 cm. Après avoir écrit 191÷ 25 au tableau le maître demande le quotient *q* et le reste *r*. Les expressions utilisées précédemment sont reprises (on cherche combien de fois 25 dans 191 et combien il restera). Les élèves cherchent individuellement. L'écriture 191 = (25 × 7) + 16 justifie la réponse puis on vérifie au compas et au mètre au tableau.

D'autres divisions par 25 sont proposées collectivement avec des cas particuliers, comme un reste égal à 24 ou un quotient nul. Les deux premiers exercices du cadre B sont traités collectivement les autres individuellement.

Présentation de l'organisation de la classe prévue par les auteurs, dans le livre du maître correspondant, pour travailler sur la fiche 97.

Le même schéma que dans la séance précédente est préconisé : on annonce « explicitement le but de la séance », que l'on va anticiper par le calcul et vérifier avec le compas.

Si l'erreur correspondant à un reste supérieur au diviseur se produit, on peut avoir recours au problème géométrique pour expliquer ce qui se passe.

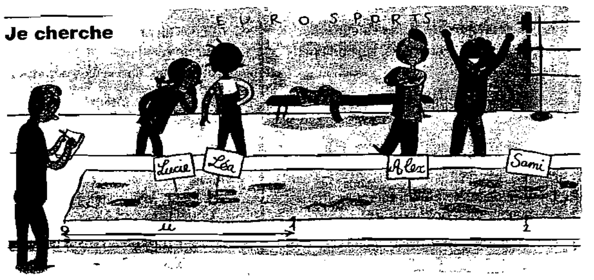
Des divisions par 5 peuvent être proposées en prolongement, (jusqu'à 12 × 5).

« Place aux maths ! », CM1, éditions Bordas, 2004, fichier élève

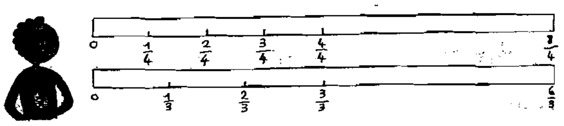
22 Les fractions (1)

Jeu de calcul : Portrait d'un nombre.

Je cherche



A. Léa, Lucie, Alex et Sami veulent mesurer la longueur de leur saut. Pour cela, ils ne disposent que de l'unité *u*. Sami a une bonne idée : il faut **partager** l'unité *u*.



Que peux-tu dire de $\frac{3}{3}$ et de $\frac{4}{4}$? de $\frac{8}{4}$ et de $\frac{6}{3}$?

$\frac{1}{3}$ *(un tiers),* $\frac{2}{3}$ *(deux tiers),* $\frac{3}{4}$ *(trois quarts), sont des* ***fractions***.

B. Sur du papier calque, reproduis les deux instruments de mesure que Sami a fabriqués, puis utilise-les pour mesurer, sur l'image, la longueur des quatre sauts.
Inscris ces mesures de longueur dans un tableau, puis range-les par ordre croissant.

Lucie	Léa	Alex	Sami
$\frac{2}{4}$ *u*	$\frac{2}{3}$ *u*		

Compare ton tableau avec celui de tes camarades. Avez-vous tous indiqué les mesures de la même façon pour les sauts d'Alex et de Sami ?

C. Trouve d'autres nombres pour exprimer la longueur des sauts de Lucie et de Léa.
Lucie : $\frac{2}{4} = \frac{...}{2} = \frac{...}{8}$ Léa : $\frac{2}{3} = \frac{...}{6}$

D. Comment sont les fractions égales à 1 ? égales à 2 ?

OBJECTIFS : • Utiliser les fractions pour mesurer des longueurs • Comparer des fractions

Je m'exerce

1. Reproduis et complète.

0 — 1 — 2
$\frac{1}{3}$ ... $\frac{3}{3}$ ... ... $\frac{6}{3}$ ...

0 — 1 — 2
$\frac{1}{4}$ ... ... $\frac{4}{4}$ ... ... $\frac{8}{4}$ ...

2. À son deuxième essai, Lucie fait un saut de $\frac{3}{4}$ d'unité.
Que lui manque-t-il pour arriver à l'unité 1 ?

$\frac{3}{4}u$?
0 *u* 1

Complète.

$\frac{3}{4} + \frac{...}{...} = 1$ $\frac{5}{8} + \frac{...}{...} = 1$ $\frac{2}{3} + \frac{...}{...} = 1$ $\frac{1}{2} + \frac{...}{...} = 1$

$\frac{5}{4} + \frac{...}{...} = 2$ $\frac{7}{4} + \frac{...}{...} = 2$ $\frac{4}{3} + \frac{...}{...} = 2$ $\frac{3}{2} + \frac{...}{...} = 2$

3. Reproduis et complète.

0 — 1 — 2

$\frac{...}{4}$ $\frac{...}{4}$ $\frac{...}{4}$ $\frac{...}{4}$ $\frac{...}{4}$ $\frac{...}{4}$ $\frac{...}{4}$ $\frac{...}{4}$ $\frac{...}{4}$ $\frac{...}{4}$

$\frac{...}{8}$ $\frac{...}{2}$ $\frac{...}{8}$ $\frac{...}{2}$ $\frac{...}{8}$ $\frac{...}{2}$ $\frac{...}{8}$ $\frac{...}{2}$ $\frac{...}{8}$ $\frac{...}{2}$

$\frac{...}{8}$

Parmi ces fractions, trouve celles qui sont plus grandes que 1, puis celles qui sont plus petites que 1.

Je calcule

• $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ car $\frac{1}{2} \overset{\times 2}{=} \frac{2}{4}$ (×2)

• Complète :

$\frac{1}{3} = \frac{...}{6} = \frac{...}{9} = \frac{...}{...}$ $\frac{1}{4} = \frac{...}{8} = \frac{...}{12} = \frac{...}{...}$ $\frac{6}{8} = \frac{...}{4} = \frac{...}{...} = \frac{...}{...}$

ANNEXE 4

Troisième période

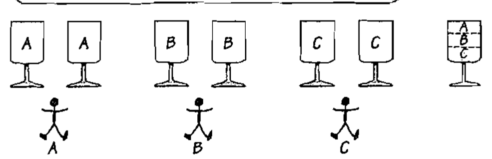
Arithmétique : la division-fraction ; les fractions (comparaisons, sommes) ; la technique écrite de la division (2e étape) ; la proportionnalité.
Géométrie et mesure : triangles ; parallélogrammes quelconques et particuliers ; aires.

Je découvre

1 *Tu vas apprendre une nouvelle division, celle où l'on partage le reste.*

Problème : 7 verres de jus d'orange sont à partager entre 3 enfants.
Quelle sera la part de chaque enfant ?

C'est 7 divisé par 3. Mais attention, ici, il faut partager le reste !

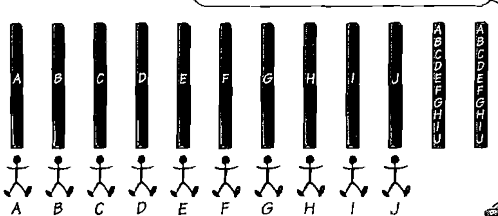


7 divisé par 3, c'est égal à 2 … plus le reste 1, divisé par 3.
On écrit $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$

Et s'il fallait partager 10 verres entre 3 enfants ? Écris l'égalité correspondante.

2 Problème : 12 barres de chocolat sont à partager entre 10 enfants.
Quelle sera la part de chaque enfant ?

C'est 12 divisé par 10. Mais attention, là aussi …



12 divisé par 10, c'est égal à 1 … plus le reste 2, divisé par 10.
On écrit $\frac{12}{10} = 1 + \frac{2}{10}$

Et s'il fallait partager 24 barres de chocolat entre 10 enfants ? Écris l'égalité correspondante.
Et s'il fallait partager 123 barres de chocolat entre 10 enfants ? Écris l'égalité correspondante.

1 à 3 L'écriture 7/3 désigne à la fois la division de 7 par 3 et la fraction « 7 tiers ». De sérieux arguments plaident en faveur d'une introduction de l'écriture *a*/*b* dans le sens « *a* divisé par *b* » (voir p. 4 et 5). Dans cette séquence, et jusqu'à la sq n° 61, on lira donc les écritures 7/3, 12/10, etc.

SÉQUENCE **58**

Une nouvelle division et de nouveaux nombres

Calculs proposés par écrit au tableau
1. Divisions par 2 de *n* < 200 (voir p. 11).
2. Divisions par 3, 4… dans des cas (ceux de la sq n° 55) où *q* = 10, 25, 50, 100…

3 Problème : 13 tartelettes sont à partager équitablement entre 4 personnes.
Quelle sera la part de chaque personne ?

Dessine les tartelettes et effectue le partage. Écris l'égalité correspondante.

J'ai appris
$\frac{17}{3}$ se lit « 17 divisé par 3 » (tu apprendras bientôt une autre façon de le lire).
C'est une nouvelle division, la **division-fraction**, où l'on partage le reste.
Avec cette division, on peut écrire une égalité :
c'est le quotient de la division avec reste…
$\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}$ *… mais le reste a été partagé.*

4 Calcule ces divisions-fractions.

$\frac{561}{4}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{52}{10}$ $\frac{25}{6}$ $\frac{702}{100}$

$\frac{103}{25}$ $\frac{109}{3}$ $\frac{35}{8}$ $\frac{4\,258}{5}$ $\frac{7\,041}{1\,000}$

5 Problèmes

Résous ces problèmes en indiquant si tu utilises la division avec reste ou la division-fraction.

1 ▶ On partage 7 brioches en 2 parts égales.
Combien de brioches y a-t-il dans chaque part ?

2 ▶ On répartit équitablement 13 billes entre 4 enfants.
Combien de billes aura chaque enfant ?

3 ▶ On partage équitablement 14 pains au lait entre 5 enfants.
Quelle sera la part d'un enfant ?

4 ▶ On partage équitablement 26 gaufrettes entre 3 frères.
Combien de gaufrettes chacun aura-t-il ?

ANNEXE 5

« J'apprends les maths », CE2, édition Retz, 2001, fichier élève

Gérer la résolution des problèmes, non pas seulement pour chercher, mais aussi et avant tout… pour apprendre des mathématiques

Annie NOIRFALISE [1]

IREM de Clermont Ferrand et ICFP Auvergne Limousin

A. Introduction

L'élaboration et la mise en œuvre de travaux de formation initiale et continue de professeurs d'école[2] ont été l'occasion de rassembler les matériaux sur lesquels s'appuie cet article.
Les analyses faites dans cette perspective, sur l'ensemble des thèmes abordés à l'école primaire, d'extraits d'ouvrages de collections variées, font apparaître des difficultés récurrentes, objet de notre propos, liées à l'utilisation de **« problèmes pour apprendre »** ; en particulier de problèmes pour la **« construction d'une nouvelle connaissance ».**

Ces analyses didactiques d'extraits d'ouvrages scolaires sont motivées, dans le cadre des formations évoquées, par les faits suivants :

- la grande majorité des professeurs d'école conduisent les études mathématiques dans leur classe en ayant essentiellement recours aux éléments d'organisation didactique donnés dans un ouvrage scolaire, (livret élève et quelques fois livre maître correspondant) ; les charges considérables qui leur incombent les obligent à limiter le temps de préparation dans chaque discipline étudiée,
- l'analyse de plusieurs de ces documents montre que néanmoins un travail important devrait être fait avant la séquence, par l'enseignant, pendant la séquence par l'enseignant et les élèves, et après la conduite de la séquence, afin que les différentes

[1] Cette contribution a été rédigée en collaboration avec Yves MATHERON, INRP, UMR-ADEF Marseille.
[2] L'ensemble des éléments élaborés, constituant un programme complet de formation de professeurs d'Ecoles, est rassemblé dans un ouvrage à paraître MATHERON Yves et NOIRFALISE Annie, (2008).

études conduites par le collectif maître/élèves en mathématiques, s'articulent en un tout cohérent afin que cette cohérence, elle-même, soit accessible aux élèves.

- ces analyses ne visent, en aucune façon, la dévalorisation du travail des auteurs d'ouvrages qui sont, eux aussi, soumis à des contraintes. Il s'agit, au contraire, de proposer en formation des outils pouvant permettre aux professeurs d'école d'utiliser quotidiennement, et de meilleure façon, les documents mis à leur disposition par les auteurs.

Les matériaux sur lesquels nous nous appuyons sont des analyses didactiques essentiellement conduites dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique[3]. Pour les lecteurs non familiers de l'usage de cette théorie, précisons que dans cet article, nous n'utilisons essentiellement, dans ce qui suit, qu'un nombre restreint des éléments théoriques qui la constitue : ceux utiles à la compréhension de notre propos.

Précisons tout d'abord que, dans un tel cadre, un objet mathématique n'existe jamais en soi. Si l'on prend l'exemple de la division euclidienne, parmi les diverses pratiques la mettant en jeu, on trouvera des déclarations que l'on range sous la rubrique définition : « on appelle division de l'entier a par l'entier b … », déclaration qui est une activité consistant à donner une définition. On pourra aussi calculer, d'une façon ou d'une autre, le reste et le quotient d'un entier par un autre, étudier ou utiliser les propriétés du reste et du quotient, etc. Mais on ne « mettra jamais la main » sur l'objet division euclidienne lui-même. Tout seul il n'existe pas, mais il n'existe qu'inséré dans des activités : par exemple, définir, calculer, déterminer des propriétés, etc., dont on a décidé qu'elles évoquaient, plus ou moins directement, la division euclidienne. Ce que nous appelons « division euclidienne » est, en fait, l'ensemble de toutes ces pratiques dont on ne saurait, toutefois, dresser un répertoire exhaustif.

Poursuivant l'exemple de la division euclidienne, étudier un objet mathématique revient à étudier un type de tâches dont on donne dans ce qui suit quelques occurrences : déterminer le montant de chaque part ou le nombre de parts dans des situations de partage ou de distribution équitables, calculer le quotient et le reste de la division euclidienne d'un nombre entier (d'au plus 4 chiffres) par un nombre entier (d'au plus 2 chiffres).

---

[3] Nous nous référons à la théorie didactique développée par Yves Chevallard et les didacticiens qui se réclament de cette approche. On pourra se reporter à la bibliographie de référence (Chevallard 1998 & 1999, Matheron & Noirfalise 200X, Cirade 2006).

Ce type de tâches peut être accompli grâce à une ou plusieurs techniques – ce terme signifiant étymologiquement « qui concerne un art ». Il s'agit, dans notre exemple et plus prosaïquement, d'une manière de faire : par un calcul posé, un partage effectif, un encadrement entre deux multiples consécutifs du diviseur, etc. Une technique répond à la question « Comment accomplir les tâches de ce type ? » On sait historiquement que depuis les Grecs, et en rupture avec les mathématiques développées par les Babyloniens et les Egyptiens, se limiter à l'usage de techniques permettant de résoudre certains problèmes n'est plus considéré, en Occident tout d'abord puis au niveau international, comme une pratique mathématique qui se suffirait à elle-même. Dans l'histoire de l'humanité, les mathématiques ne sont pas regardées, depuis plus de 2000 ans, comme une pratique qui consisterait à appliquer des « recettes », mais comme un savoir fondé en raison.

Aussi, les techniques mathématiques peuvent-elles être décrites, et leur adéquation à l'accomplissement d'un type de tâches donné peut-elle être justifiée par un discours, que l'on nomme technologique en recourrant pour cela à l'étymologie de ce terme constitué à l'aide de « logos » qui signifie « parole » ou « raison » ; la technologie désigne ainsi le discours raisonné tenu sur la technique. A son tour, la technologie d'une technique peut être justifiée dans le cadre d'une théorie mathématique. Ce dernier terme, emprunté à un verbe grec qui signifiait « observer, contempler », a pris en latin le sens de « spéculation » ou de « recherche spéculative ». L'élément théorique peut être de nature mathématique ou relever du recours au bon sens, à l'ordre des choses qui se font. L'ensemble des quatre éléments constitué d'un type de tâches, d'une technique permettant de l'accomplir, d'une technologie associée à la technique, et d'une théorie, définit une organisation praxéologique. Pour un type de tâches donné, une telle organisation dépend évidemment de l'institution dans laquelle on l'accomplit et où une praxéologie peut être partiellement incomplète. Dans le vaste champ des praxéologies de toutes natures, nous ne nous intéressons pour cet article qu'aux praxéologies de deux types. Les praxéologies mathématiques, soit ce que l'on nomme des organisations mathématiques, telles qu'elles se présentent à l'issue du processus de transposition didactique, ainsi que les praxéologies qui permettent de les mettre en place dans les classes, de les faire rencontrer et étudier par les élèves, soit ce que l'on nomme des organisations didactiques.

Pour chaque séquence étudiée, notre travail d'analyse consiste essentiellement à se poser les questions suivantes : quelle est l'organisation mathématique dont l'étude est visée et comment cette étude est-elle conduite, autrement dit quelle est l'organisation didactique proposée par les auteurs de l'ouvrage ? En particulier, en quoi les activités proposées permettent-elles de faire avancer l'étude de l'organisation mathématique visée ?

Afin de préciser notre propos, nous donnons dans un premier temps un extrait d'un tel travail, puis nous précisons les phénomènes récurrents relevés en les illustrant d'autres exemples évoqués plus succinctement.

B. Enseignements tirés de quelques extraits d'analyses didactiques

I. Analyse d'une séquence sur l'introduction du produit de deux entiers :

Nous travaillons sur la séquence 66 extraite de l'ouvrage « Pour comprendre les mathématiques », CE1, édition Hachette, 2002, fichier élève et guide pédagogique.
Voir documents de référence en ***ANNEXE 1*** *(nous utilisons tout d'abord la présentation du guide pédagogique)*

I. 1. Quel(s) objet(s) d'étude ?

La séquence étudiée est intitulée : « Le produit de deux nombres »,
Les objectifs annoncés sont : « Construire le concept de produit. Ecrire un produit sous la forme $a \times b$ *et trouver sa valeur »*

I. 1. a) À la lecture de cet intitulé, il s'agit entre autres de trouver la valeur du produit de deux nombres. Une des questions proposée à l'étude, mais non la première, est donc la suivante : « comment déterminer la valeur du produit de deux nombres entiers ? ». Nous la noterons Q 1, et son étude concerne la construction d'une organisation mathématique qui peut se décrire *a priori* ainsi :

- type de tâches : trouver la valeur produit de *a* et *b*, où *a* et *b* sont deux entiers quelconques donnés,
- techniques possibles : des techniques à portée limitée du type « je fais *a* tas de *b* jetons et je dénombre la collection obtenue par réunion de tous les tas », ou encore « je fais

un quadrillage de *a* lignes et *b* colonnes et je dénombre les cases », vers une technique de multiplication posée, en passant par le recours à des additions réitérées et l'usage d'une calculatrice,

- éléments technologiques et théoriques : ils dépendent de la technique utilisée et de l'institution dans laquelle s'accomplit ce travail.

I. 1. b) À cette étude s'en adjoint au moins une seconde, évoquée en premier lieu, et la question à laquelle elle répond, nécessite d'être précisée. Il s'agit, disent les auteurs de l'ouvrage, de « *construire le concept de produit* », donc, d'après la définition du mot « concept » donnée par le Larousse, d'œuvrer à « *définir les caractères spécifiques de l'objet " produit "* ». Que peut-on entendre par là ? Comme on l'a dit plus haut, un objet mathématique n'existe qu'inséré dans une pratique, on ne rencontre jamais l'objet « produit de deux entiers », on peut rencontrer une écriture d'un produit, (4×7), par exemple comme compte rendu[4] d'actions produisant l'organisation d'une collection en lignes et colonnes régulières, à l'occasion du calcul d'un produit, avec une calculatrice ou tout autre technique, à l'occasion de la résolution d'un problème où on se pose une question à laquelle le calcul d'un produit permet de répondre ; soit ce que l'on nomme une situation multiplicative….

Dans leur ouvrage, les auteurs précisent qu'ils se proposent « *d'introduire le concept de produit à partir de la résolution d'un problème. Le produit est alors le nom et l'écriture qui expriment la solution de ce problème* ». On peut donc comprendre qu'on commence ici à « définir les caractères spécifiques » des problèmes qui se résolvent avec un produit et peut-être même à répondre à la question : « comment reconnaître qu'une expérience matérielle pourra donner lieu à un compte rendu multiplicatif ? », que nous noterons Q 2. L'organisation praxéologique à construire pour répondre à cette seconde question n'est pas simple à décrire.
A partir des éléments trouvés dans l'ouvrage de référence, l'organisation qui s'ébauche alors semble être la suivante :

[4]En référence à une terminologie utilisée par H. Lebesgue à propos des nombres et citée par A. Mercier : « Le mathématicien Henri Lebesgue (1935, réédition 1975), qui disait aux futurs professeurs que « un nombre est le compte-rendu complet de l'action qui le produit [...] le reste est métaphysique » déclarait en conclusion de son cours sur « La mesure des grandeurs » que l'étude des mathématiques élémentaires était essentielle pour leur enseignement : cette étude permettait par exemple de comprendre qu'un nombre est le résultat d'une expérience particulière sur une grandeur. Il travaillait pour que, peut-être, les professeurs au fait de ce qu'est la mesure des grandeurs envisagent leur enseignement sur les systèmes de nombres comme portant sur les manières de *produire des mesures* par un algorithme vérifié ou des dispositifs validés, selon les cas, et *d'en rendre compte par un nombre,* que l'on considérerait alors comme le compte-rendu d'une *expérience de mesure*. ». Pour notre part, nous parlerons de compte rendu d'actions ou d'activités.

- type de tâches : pour une collection donnée, définie ici en compréhension, déterminer s'il est possible d'écrire son cardinal sous la forme $a \times b$,
- technique : déterminer deux caractères permettant de qualifier tous les objets de la collection ; déterminer toutes les valeurs possibles, pour chacun de ces deux caractères, prises par au moins un élément de la collection, a est le nombre de valeurs possible pour le premier caractère, b pour le second ; ranger les objets de la collection en un tableau à double entrée : dans une ligne donnée, on range les objets ayant une même valeur pour le premier caractère, ces objets étant ordonnés dans chaque ligne en respectant une même valeur, pour le second caractère dans une colonne donnée ; vérifier si tous les éléments de la collection sont rangés et si toutes les cases du tableau sont remplies,
- éléments technologiques : la description de la technique ; l'organisation de collections en tableaux de a rangées et b lignes complètes assure l'existence d'une correspondance terme à terme, par superposition des tableaux par exemple, et légitime la même écriture pour le cardinal de toutes les collections constituées de tous les objets caractérisés par deux variables, prenant respectivement a et b valeurs, représentées une fois et une seule ; pour des collections pour lesquelles a et b sont grands, cette écriture permet de garder en mémoire une organisation possible de la collection, comme une empreinte numérique et spatiale de celle-ci,
- théorie : produit cartésien en théorie des ensembles.

Cette étude préalable permet donc d'envisager au moins deux questions dont l'étude débuterait dans cette séquence. Ces deux questions sont interdépendantes : pour que le collectif enseignant / élèves puisse se lancer dans l'étude de la détermination du produit de deux nombres, il semblerait naturel d'avoir *a priori*, ou au moins rapidement en cours de travail, quelques précisions sur les objets dont il est question, sur leur nature, sur l'intérêt de cette étude et son devenir. Les auteurs ayant fait le choix « *d'introduire le concept de produit à partir de la résolution d'un problème* », cela signifie que l'on va sans doute débuter le travail par un exemple d'expérience matérielle pouvant donner lieu à un compte rendu multiplicatif, mais en poursuivant le projet d'instruire une réponse à la première question : « comment déterminer la valeur du produit de deux nombres entiers ? »

I. 2. Quels éléments d'organisation didactique trouve-t-on évoqués dans le guide pédagogique?

Notre travail consiste ici essentiellement à examiner si les activités proposées permettent de faire avancer l'élaboration des praxéologies dont la construction est visée, et ce qui pourrait optimiser ce travail.

En formation, le repérage des différents moments de l'étude et de la manière dont ils sont gérés[5] permet de s'interroger sur la place à donner aux élèves dans cette élaboration, et d'évaluer les places accordées d'une part à l'ostension et, d'autre part, à la collaboration attendue de la classe. Pour ne pas surcharger cette présentation, nous ne proposons dans ces lignes qu'une analyse incomplète de l'organisation didactique.

Nous examinons l'ensemble des activités prévues par les auteurs, y compris celles dont on ne trouve pas trace dans le livret élève, ce qui suppose la prise de connaissance préalable du contenu du guide pédagogique correspondant à la leçon, (*cf.* ANNEXE 1).

• Durant la première activité intitulée « *les logos* », une tâche de dénombrement d'une collection d'objets repérés par deux variables dont les valeurs possibles sont précisées, est confiée aux élèves :

- après une première présentation des résultats que l'on attend divergents, l'enseignant « *propose de noter le nombre inconnu de logos 4×5 ou 5×4 au choix* », puis de poursuivre le travail de détermination des éléments de la collection à l'aide d'une technique d'énumération recourrant à l'usage d'un tableau à double entrée. Il justifie ainsi sa proposition : « *le tableau à double entrée est un bon outil pour trouver tous les logos sans oubli et sans répétition* ». On ignore comment les symboles « 4×5 » et « 5×4 » sont introduits. Comment sont-ils motivés ? Quelle place occupent-ils dans l'activité d'énumération en cours, dans le dénombrement visé ? Comment l'équivalence de ces deux symboles est-elle justifiée ? Toutes ces questions demeurent sans réponse, car elles semblent procéder d'un « allant de soi » non questionnable. On peut relever que leur introduction précède le recours au tableau rectangulaire. L'énumération exacte des éléments de la collection n'est pas encore réalisée. Rien ne permet en ce point de justifier une telle notation. Les auteurs écrivent simplement : « *Il y a 4 formes et 5 couleurs. Ces nombres sont importants, si on les change, on ne trouvera pas le même nombre de logos* ». Il faudra s'en contenter car l'état d'avancement du travail ne permet pas aux élèves de comprendre en quoi ils sont

[5] Voir dans la bibliographie de référence les Actes de l'Université d'été, La Rochelle, 1998, pages 109 et suivantes.

importants, ni non plus de mettre en relation la notation introduite avec la structure de la collection ; donc de préciser des éléments pour caractériser les situations où elle peut être utilisée. Rien ne permet de justifier l'équivalence des deux écritures « 4×5 » et « 5×4 ». Cette manière de faire engage vers une introduction prématurée des conclusions énoncées, car les élèves n'ont guère pu les éprouver par eux-mêmes. Le texte le leur dit ; ils sont conviés à lui faire confiance.

- après une seconde phase de travail en équipes, durant laquelle les élèves doivent utiliser la technique donnée par l'enseignant pour énumérer les objets de la collection, « *l'enseignant introduit le vocabulaire produit de deux nombres***,** *la notation $4 \times 5 = 5 \times 4$, et définit ce produit comme le nombre de cases d'un tableau à double entrée ayant le nombre correspondant de lignes et de colonnes* ». Le terme « produit » de deux nombres est utilisé pour la première fois, mais aucune indication n'est donnée sur la gestion de ce moment. Un travail est-il fait à propos de la nature de la collection permettant une organisation en colonnes et lignes régulières, afin d'avancer dans la reconnaissance des situations pouvant donner lieu à un compte rendu multiplicatif (réponse à la question Q 2) ? Le tableau à double entrée a déjà été rencontré dans une séquence précédente, le rappel des situations alors étudiées pourrait être utilisé. L'attention est-elle attirée sur le rôle du tableau à double entrée, en tant qu'«empreinte numérique et spatiale » d'une organisation de la collection lui assurant le même cardinal qu'une autre collection ayant la même empreinte ? Ceci est pourtant l'une des raisons qui confèrent aux deux écritures « 4×5 » et « 5×4 » le statut de nombre ; et qui permet de justifier leur égalité…

• Pour la seconde activité, intitulée « *le bal masqué* », l'utilisation de la technique d'énumération montrée précédemment est explicitement attendue. Néanmoins, l'organisation de la classe est prévue de façon à ce que les enfants puissent mimer la situation dans leur groupe :

- lors de la synthèse du travail des groupes, l'enseignant « *montre que le tableau à double entrée est l'outil adéquat : Sophie a toutes ses photos en lignes et Julien les siennes en colonnes ou vice versa* ».
- à la fin de cette synthèse, l'enseignant « *introduit le vocabulaire et les écritures : le produit des nombres 4 et 3 est le nombre de cases d'un tableau à 4 lignes et 3*

colonnes ou, ce qui revient au même, de 3 lignes et 4 colonnes. On note ce nombre $4 \times 3 = 3 \times 4$ ».

Compte tenu de la nature du travail délégué aux élèves, cette seconde activité peut être interprétée comme engageant les élèves à s'entraîner à l'utilisation du tableau à double entrée, en tant que technique d'énumération des éléments d'une collection ; ce qui n'est pourtant pas tout à fait le but assigné à l'étude poursuivie.

Si l'on veut poursuivre le travail d'élaboration d'une technique de reconnaissance des situations pouvant donner lieu à un compte rendu multiplicatif, travail débuté précédemment, il s'agirait plutôt de déterminer si, dans une telle situation, les objets de la collection peuvent être organisés en tableau à double entrée ; cela constituerait plutôt un entraînement à la *reconnaissance de situations* donnant lieu à un compte rendu multiplicatif. Ce qui est tout autre chose ! Cette seconde activité permettrait de montrer que les deux problèmes proposés correspondent à un phénomène général ; tant en ce qui concerne l'utilisation de la technique d'énumération, que la notation multiplicative, grâce au lien que l'on peut faire entre les deux puisqu'on peut constater l'identité des cardinaux correspondants à chacun des tableaux… Cette activité permettrait aux élèves de changer d'objet de travail : passer du dénombrement de collections d'objets repérés par deux variables dont le nombre de valeurs est précisé, au dénombrement de collections disposées en rectangle, afin de poursuivre l'étude entreprise.

Si on veut débuter le travail sur la détermination du produit de deux nombres entiers a et b, réponse à Q 1, la référence au tableau de a lignes et b colonnes permet de détacher le nombre produit du contexte des couples et des logos. Les remarques de l'enseignant sur les lignes ou les colonnes, (« *Sophie a toutes ses photos en lignes et Julien les siennes en colonnes ou vice versa* »), sont importantes et peuvent permettre de faire passer les élèves dans le cadre du calcul numérique. L'enseignant peut préciser que Sophie ou Julien peuvent ainsi savoir dans combien de photos ils apparaîtront et, en notant en face de chaque ligne (ou colonne) le nombre d'objet énumérés dans celle-ci, on peut peut-être utiliser ces dénombrements partiels pour calculer le nombre total d'objets de la collection.

Si l'on veut poursuivre ces deux études qui viennent d'être débutées, il peut être utile :

- de s'entraîner à la reconnaissance des situations pouvant donner lieu à un compte rendu multiplicatif, en proposant éventuellement des situations ne permettant pas un tel compte rendu (travail sur la question Q 2),

- que le maître fasse inscrire au tableau, lors de la restitution du travail des élèves par exemple, et pour chaque situation le permettant, la description du tableau à double entrée correspondant ; en particulier la caractérisation des lignes et des colonnes successives de la collection traitée, en mentionnant le nombre d'éléments dans les lignes et les colonnes, et le nombre d'éléments de la collection. Les élèves seront ensuite invités à travailler non plus sur la constitution des collections mais sur le matériel numérique ainsi relevé, afin d'élaborer une technique de calcul du cardinal de la collection (travail sur la question Q 1),
- que les élèves aient à rechercher le cardinal de collections pour lesquelles le dénombrement direct est impossible, car le nombre de valeurs pour chacune des deux variables est trop important : 18 garçons et 23 filles, par exemple. Dans un tel cas, la construction du tableau à double entrée devient fastidieuse. Ceci conduit les élèves à changer de stratégie pour aller vers la nécessité de ne prendre en compte que le nombre d'éléments de chaque ligne (ou de colonne) et le nombre de lignes (ou de colonnes) afin d'obtenir le nombre total d'éléments par addition réitérée ; cette démarche permettrait de motiver mathématiquement le travail de la question Q 1. A ce titre la première activité du livret élève : « *Piste de recherche " Une boîte de chocolat "* », aurait davantage acquis de pertinence didactique si un travail antérieure avait été conduit pour que le nombre « produit » soit quelque peu décontextalisé des situations qui ont permis sa rencontre.

Si l'enseignant débute sa leçon par la première activité proposée dans le fichier élève, intitulée « *Piste de recherche " Une boîte de chocolat "* »,, il n'est plus question d'élaborer une organisation praxéologique correspondant à la question Q 2. Ce que les auteurs appellent « *Construire le concept de produit* » se limitera à admettre que « *le nombre de chocolats peut s'écrire* 5×4 *ou* 4×5 » et que le dénombrement des cases d'un quadrillage ayant le même nombre de lignes et de colonnes permet de le trouver. La réponse à la question Q 1, sera donnée par le matériel mis à disposition : la technique pour calculer le produit $a \times b$ consiste à dessiner un quadrillage de a sur b et de dénombrer les cases de celui-ci. Aucune information sur la technique de dénombrement attendue n'est apparente. Est-ce directement ? Par un comptage des cases une à une ? Ou grâce à des additions réitérées, après avoir dénombré les cases dans une ligne ou une colonne ?…

I. 3. Quels enseignements tirer de ce travail d'analyse:

La séquence dont nous avons précédemment amorcé l'analyse illustre, nous semble-t-il, l'effort affirmé des auteurs pour « *conduire les enfants à élaborer les notions fondamentales comme outils pertinents pour résoudre des problèmes dans le domaine numérique* »[6], conformément aux documents d'application des programmes de 2002[7].

Dans cette perspective :

- les activités proposées par l'enseignant doivent être choisies et guidées de façon à organiser le passage des élèves du problème initial (portant sur une expérience matérielle), à un autre problème (portant sur une expérience numérique), induisant un changement de cadre, correspondant au passage du système étudié à son modèle mathématique,
- les problèmes traités doivent être considérés comme des exemples de problèmes que l'on apprend à reconnaître : on n'apprend pas à résoudre le problème des logos mais à reconnaître les problèmes du « même type » que celui-ci, autrement dit à accomplir des tâches d'un même type et non une seule tâche du type
- les mathématiques que ces activités sont censées produire doivent rester présentes en ligne de mire, d'un bout à l'autre des séquences qui leur sont consacrées ; ce qui suppose une analyse *a priori* ascendante et globale. De plus, pour chaque activité, une analyse à l'aide d'un questionnement bâti à l'aide d'interrogations du type des suivantes devraient servir au professeur de fil directeur auquel se raccrocher constamment : comment se résout ce problème, comment sa résolution permet-elle d'avancer l'étude entreprise ? La détermination précise et préalable de l'organisation praxéologique à construire ou, comme dans l'exemple que nous avons suivi, des organisations praxéologiques à construire et de leur articulation, est indispensable pour poser ces questions et y répondre,
- enfin, si les situations proposées ne permettent pas d'amener les élèves à se détacher du contexte du problème à résoudre, tout en identifiant la catégorie de problèmes auxquels il appartient, il s'agit au minimum, que l'enseignant les alerte sur le travail en cours et précise clairement, lors de moments d'institutionnalisation, où l'on en est dans l'étude engagée.

[6] Extrait du guide pédagogique, page 11.
[7] Documents d'application des programmes, Cycle 2 page 7 et Cycle 3 page 7, édition CNDP, juillet 2002.

Le professeur se trouve ainsi confronté à la **difficulté professionnelle, sans doute inédite jusqu'alors, de gérer l'utilisation de « problèmes pour apprendre », en particulier de problèmes sur lesquels s'appuie la « construction d'une nouvelle connaissance »**. Cette façon d'aborder le travail mathématique est suggérée par les instructions officielles de 2002. Nous allons évoquer, sans entrer dans le détail, l'étude d'autres thèmes, proposée dans la même collection ou dans d'autres collections, afin de montrer que la séquence précédente illustre un phénomène récurrent.

II. Deux séquences sur l'introduction de la division euclidienne :

II. 1. Dans la même collection :

Nous travaillons sur la séquence 138, extraite de l'ouvrage « Pour comprendre les mathématiques », CE2, édition Hachette, 2002, fichier élève et guide pédagogique.

Voir documents de référence en ***ANNEXE 2***

II. 1. a. Quels objets d'étude ?

La séquence est intitulée : *« Situations de distributions »*

Les objectifs annoncés sont : *« Reconnaître une situation de distribution euclidienne. Calculer empiriquement le quotient et le reste »*

Suivant le schéma de la séquence précédente, celle-ci débute par l'étude de deux questions interdépendantes:

- « comment reconnaître qu'une situation peut se résoudre avec une division euclidienne ? », Q' 2,
- « comment déterminer le quotient et le reste dans la division euclidienne d'un entier par un autre entier ? », Q' 1. Les auteurs parlent de « *calculer empiriquement le quotient et le reste* » : on peut donc imaginer que la détermination sera faite en s'appuyant sur l'expérience et l'observation.

II. 1. b. Activités proposées et questions posées par leur gestion :

Comme dans la séquence étudiée auparavant, le travail débute par la résolution d'un problème matériel : un problème de partage équitable, un exemple de problème qui peut se résoudre à l'aide d'une division euclidienne, intitulé « *Piste de recherche " Les nougats "* ». A ce niveau, dans la situation présente, les élèves ont à leur disposition toutes les connaissances ou le matériel nécessaires pour résoudre ce problème ; la tâche à accomplir n'est pas problématique et aucun apport nouveau ne s'impose pour répondre à la question posée. On peut s'interroger : à quoi cela sert-il de résoudre ce problème ? En quoi le poser permet-il de faire avancer la construction des deux organisations praxéologiques visées ?

En fin d'activité, les auteurs introduisent l'égalité de la division « $32 = (5 \times \ldots) + \ldots$ » et le vocabulaire *«diviseur, quotient et reste »*. Comment cette écriture se justifie-t-elle ? Quelle est sa fonction ? En quoi permet-elle de faire avancer l'enjeu de l'enseignement escompté ?

Pour que cette activité permette d'entrer dans la double étude poursuivie, il semble au moins nécessaire qu'un travail d'analyse de la situation proposée soit fait avec les élèves, afin de faire avancer la réponse à la question Q' 2, et aussi qu'un lien soit établi entre la technique utilisée par chaque élève pour résoudre le problème de nougats et le matériel numérique introduit dans le livret. L'expérience proposée doit produire cinq *tas identiques* de nougats, *les plus gros possible*. A chaque étape, ces tas grossissent d'une unité, et on peut mettre en correspondance les états successifs de l'organisation de la collection totale, éventuellement en visualisant l'expérience matérielle, et la ligne correspondante du tableau ; pour cela le maître peut noter au tableau une description rapide des différentes étapes de l'expérience matérielle au regard de leur compte rendu numérique, comme ci-dessous :

Organisation de la collection totale	**Compte rendu numérique**
5 tas identiques de 1 nougat et un autre tas de 27	se note $5 \times 1 + 27$
…	…
5 tas identiques de 6 nougats et un autre tas de 2	se note $5 \times 6 + 2$
On ne peut plus faire de tas plus gros	L'organisation totale se note $5 \times 6 + 2$
Résultat de l'expérience matérielle	**Résultat de l'expérience numérique**
6 est le nombre maximum de nougats que l'on peut mettre dans chacun des 5 tas et il en reste	6 est le plus grand nombre par lequel on peut multiplier 5 pour s'approcher

2	de 32 et $32 - 5 \times 6 = 2$

Dans la deuxième colonne d'un tel tableau apparaît une description numérique du résultat de l'expérience matérielle correspondante qui, quant à elle, est évoquée dans la première colonne.

Au cours de ce travail :

- le professeur doit être attentif à permettre un début de description des situations que l'on cherche à reconnaître : partage d'un tout en un nombre donné de tas identiques les plus gros possible,
- le professeur peut aussi saisir l'occasion de rendre visibles des éléments qui permettent de justifier la technique qui permet d'abord de compléter le tableau, puis d'établir ensuite l'égalité numérique de la fin d'activité ; en particulier pour les élèves qui n'ont pas utilisé de calculs multiplicatifs pour répondre aux questions posées, et pour lesquels elle peut sans doute rester bien mystérieuse. Le professeur fait ainsi passer les élèves d'un cadre matériel à un cadre numérique. Mais les écritures numériques utilisées successivement ne restent encore, néanmoins, que des comptes-rendus des réorganisations successives de la collection,
- pour que le résultat numérique final ($5 \times 6 + 2$) soit identifié par les élèves comme ayant un statut particulier – celui de l'écriture d'une division, autrement dit d'une opération qui à deux nombres, 32 et 5, en fait correspondre deux autres, 6 et 2 –, il est nécessaire de préciser sa spécificité par rapport aux résultats intermédiaires. Ainsi, 6 est le plus grand nombre par lequel on peut multiplier 5 pour s'approcher de 32, en s'appuyant par exemple pour cela sur le résultat de l'expérience matérielle – c'est le nombre maximum de nougats que l'on peut mettre dans chacun des 5 tas –, et s'appelle le quotient ; et la différence entre 5×6 et 32 est appelée le reste, car c'est ce qu'il reste après partage,
- pour que le résultat numérique apparaisse comme pouvant informer sur la question posée dans « la situation des nougats », le lien entre le quotient comme plus grand nombre par lequel on peut multiplier 5 pour s'approcher de 32, et le nombre maximum de nougats que l'on peut mettre dans chacun des 5 tas, ainsi que le lien entre le reste de la division et ce qu'il reste après partage, doivent être rendu visibles. Ces liens permettent d'envisager la division de deux entiers comme technique pour prévoir le

résultat d'un partage équitable. Pour justifier l'utilisation d'une telle technique, le recours à des situations où l'usage de techniques empiriques est fastidieux serait assurément souhaitable. On rencontre en ce point l'une des dimensions technologiques de la technique, qui a pour fonction de la justifier et la rendre compréhensible, et dont l'escamotage ne peut guère que rendre plus difficile l'apprentissage.

L'élaboration des techniques que la résolution de ce problème aura permis de faire émerger sous la conduite du professeur n'en est encore qu'au stade de l'ébauche et nécessite, pour un apprentissage effectif, d'être poursuivie. Un assortiment d'activités et d'exercices permet d'assurer l'accompagnement de ce moment didactique. Les savoir-faire à travailler sont essentiellement les suivants :

- reconnaissance d'une situation qui pourra se résoudre en cherchant le quotient et le reste d'une division (question Q' 2),
- recherche du quotient et du reste de la division d'un entier par un autre entier grâce à des multiplications successives (question Q' 1).

Les exercices proposés dans le livret élève peuvent, à cet effet, être utilisés après une indispensable analyse préalable permettant de préciser quels objectifs d'entraînement ils autorisent la réalisation.

II. 2. Dans une autre collection :

Nous nous intéressons à la séquence des pages 96 et 97 de l'ouvrage « J'apprends les maths », CE2, édition Retz, 2001.

Voir document de référence en ANNEXE 3.

Dans le livre du maître correspondant, page 132, on relève l'information suivante : « *L'enseignant annonce aux élèves qu'ils vont apprendre aujourd'hui une nouvelle opération. …On va calculer 163 divisé par 25.* »

Dans ce cas, le type de tâches que l'on apprend à accomplir appartient donc clairement au domaine numérique : « chercher combien de fois b dans a » ou « diviser a par b ». Dans cette proposition d'ouvrage, on s'intéresse d'entrée de jeu à la réponse à la question Q' 1.

La technique du calcul du quotient et du reste dans la division euclidienne de deux entiers se construit en s'appuyant sur une situation de partage en éléments identiques ; mais celle-ci n'est qu'un outil technologique permettant d'élaborer la technique de calcul du quotient et du reste. La technique numérique de recherche des multiples du quotient qui sont inférieurs au dividende, est immédiatement utilisée. Elle est facilitée par le choix de quotients égaux à 25, 10 ou 5, et le vocabulaire utilisé : « *On cherche combien de fois la petite longueur est contenue dans la grande* » soit, «*combien de fois il y a 25 mm dans 163 mm* ». La technique de partage grâce au compas a déjà été travaillée dans des leçons précédentes. Elle est très vite disqualifiée et, en cours de séance, le recours au compas n'est utilisé que pour valider les résultats numériques ; la situation de référence assure le rôle d'échafaudage qui permet la construction visée. Elle est abandonnée lorsque la construction est achevée.

En revanche dans cette séquence, la question Q' 2 n'est pas travaillée explicitement, et il faudra chercher dans d'autres séquences l'étude de classes de problèmes auxquels la modélisation par la division euclidienne permet de répondre ; en justifiant alors le recours à cet outil.

II. 3. Ce que nous montrent les fragments d'analyses de ces deux séquences :

Dans ces séquences, comme dans la séquence sur l'introduction de la multiplication, l'enseignant doit **organiser le passage des élèves du problème initial,** portant sur une expérience matérielle, **à un autre problème**, portant quant à lui sur une expérience numérique. Il s'agit donc d'un changement de cadre correspondant au **passage du système étudié à son modèle mathématique.**

L'organisation didactique qui permet de mettre en place un tel changement de cadre doit amener les élèves à **se détacher du contexte du problème initial à résoudre,** tout en s'appuyant sur le travail fait dans ce contexte pour produire des éléments technologiques permettant l'élaboration des techniques numériques visées. Elle doit aussi permettre d'**identifier la catégorie de problèmes auxquels appartient le problème initial** afin de **motiver la construction de praxéologies propres au modèle et qui le constituent.**

B. Un phénomène récurrent

Dans le cadre de l'élaboration d'un contenu de formation mathématique des professeurs d'école, les analyses qui ont pu être conduites à partir d'extraits d'ouvrages scolaires de

collections variées, et sur l'ensemble des thèmes abordés à l'école primaire, font apparaître des similitudes importantes quant aux schémas d'étude proposés.
Donnons rapidement un dernier exemple : il porte sur l'introduction des fractions. Que l'introduction soit faite :

- à partir de la construction d'une nouvelle unité de mesure, comme le préconise la séquence 22, extraite de l'ouvrage « Place aux maths ! », CM1, éditions Bordas, 2004, ANNEXE 4, ou,
- à partir de l'évocation d'une nouvelle opération, « la division où on partage le reste », comme le préconise la séquence de la page 58, extraite de l'ouvrage « J'apprends les maths », CE2, édition Retz, 2001, ANNEXE 5,

le détachement du contexte ayant donné lieu à des comptes rendus sous forme de fractions reste à assurer afin que ces écritures deviennent des nombres ; c'est-à-dire des « êtres mathématiques » que l'on peut comparer, additionner, soustraire, …
Dans le premier cas, même si Sami affirme que des symboles comme ¾ permettent de « mesurer la longueur des sauts des enfants », ces symboles ne sont, à ce point de l'étude, que des comptes rendus de partages d'un segment à l'aide d'un guide âne, élaboré lors de la leçon précédente, et permettant de repérer et garder en mémoire la position d'un point sur ce segment. Un travail didactique reste à mener pour que ces ostensifs deviennent des mesures.

Dans le second cas, l'écriture 7/3 = 2 + 1/3 est aussi le compte rendu d'une expérience de partage équitable où le reste est, à son tour, partagé. Si, dans cette séquence un début de travail sur l'étude de la question Q″ 2, « comment déterminer qu'une situation peut donner lieu à un compte rendu avec une division fraction ? », est amorcé, il faudra attendre que le symbole a/b soit identifié à « a fois 1/b », quelques leçons plus loin, pour pouvoir utiliser les expériences matérielles qui ont été faites, comme des éléments technologiques pour construire l'arithmétique des rationnels.

Dans les différentes organisations didactiques évoquées plus haut :

- un problème que les élèves savent en général résoudre dans le cadre matériel où il est posé leur est proposé mais il pourrait aussi se résoudre, après modélisation numérique, en ayant recours à l'opération ou aux nouveaux nombres dont l'étude est visée,

- les manipulations matérielles conduisant à la résolution du problème permettent l'introduction d'un **compte rendu d'activité utilisant des nombres entiers et dont l'écriture est la même que celle de l'opération ou des nouveaux nombres dont l'étude est visée**.
- un certain travail doit être fait pour **justifier la pertinence de l'usage d'un certain type de compte rendu numérique pour un certain type de problème** : quels sont les caractères spécifiques des situations pouvant donner lieu à un tel compte rendu ? C'est l'objet des réponses à des questions de type Q 2,
- un certain travail doit être fait pour **détacher ces ostensifs du contexte qui a permis leur émergence et débuter la construction d'une organisation praxéologique dans le cadre numérique** ? C'est l'objet des réponses à des questions du type Q 1.

Dans la progression proposée par N. et G. Brousseau (1987), pour la construction des décimaux, le maître annonce explicitement le passage de l'expérience matérielle – en ce cas la reconnaissance de l'épaisseur de feuilles de papiers – à des expériences numériques. Il annonce, page 20 de la brochure, « *8/100, 9/45, … sont-ils des nombres ? Ce que nous avons fabriqué pour mesurer des épaisseurs est-ce que c'est des nombres ?* », et plus loin : « *pour décider si ce sont des nombres, il faut essayer de faire des opérations, par exemple des additions, proposez m'en* ». Dans un premier temps, les élèves accumulent les expériences matérielles leur permettant de trouver la somme et la différence de deux fractions, ainsi que le produit et la division par un entier ; tout ceci dans le cadre où les fractions représentent des épaisseurs de feuilles de papier, et sans qu' « *aucune technique dans le cas de fractions quelconques ne soit encore formulée* ». Ces fractions serviront ensuite pour mesurer différents types de grandeurs et résoudre des problèmes de manipulation de grandeurs : comparaison, égalité, évaluation de réunions… Au cours des activités proposées durant cette longue progression, le maître fait émerger les règles de comparaison et d'opérations sur les fractions. Le passage du cadre matériel au cadre numérique est de ce fait géré par le maître qui enseigne, en collaboration avec les élèves qui affrontent les situations choisies par le maître.

Les analyses didactiques que nous avons menées sur les manuels scolaires et les livres du maître font apparaître le caractère lacunaire des éléments mis à disposition des professeurs d'école par les auteurs d'ouvrages pour la gestion des séquences qu'ils proposent. Ce n'est pas l'essentiel de notre propos : nous le répétons nous ne visons pas l'évaluation du travail des auteurs qui se situe dans un champ de contraintes éditoriales et de culture didactique qui n'est pas le nôtre.

Nous souhaitons montrer que **l'utilisation des outils que la didactique des mathématiques** met à disposition des enseignants permet d'analyser les matériaux qu'ils ont à leur disposition. Cette analyse nous apparaît incontournable **pour orienter les choix d'enseignement des mathématiques**, conjointement avec d'autres considérations : connaissance de ses élèves, organisation des classes en cours unique ou non, possibilités offertes ou refusées par la ou les écoles dans lesquelles on exerce, choix personnels, etc.

Une des dimensions attachées au métier d'enseignant réside en ce qu'il engage celui qui s'y livre dans des **tâches de conception préalable de l'enseignement –** les préparations – dispensé aux élèves ; en cela il se distingue des métiers d'exécution. Pour ces tâches de conception, les manuels scolaires constituent l'un des types d'outils, parmi d'autres, mis à disposition des enseignants et très largement utilisés : citons aussi les programmes et documents d'accompagnement ou d'application, les revues à destination des enseignants de l'école élémentaire, les ouvrages plus théoriques qu'ils soient de mathématiques ou de didactique des mathématiques, etc. **Disposer, en tant que savoir professionnel pour l'exercice du métier, de connaissances mathématiques et didactiques, permet un usage réfléchi et des choix raisonnés parmi les propositions d'enseignement rencontrées** au gré des lectures ; et notamment des lectures de manuels scolaires. Le problème de la définition du cadre institutionnel permettant l'acquisition, en formation initiale et/ou continue de ce type de connaissances, reste posé.

Bibliographie

BLANC J.-P., BRAMAND P., DEBU P., GELY J., PEYNICHOU D., VARGAS A. (2002) *Pour comprendre les mathématiques CE1,* Paris : Editions Hachette.

BLANC J.-P., BRAMAND P., DEBU P., GELY J., PEYNICHOU D., VARGAS A. (2002) *Pour comprendre les mathématiques CE2,* Paris : Editions Hachette.

BROUSSEAU N. et G. (1987) *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire, comptes rendus d'observations de situations et de processus didactiques à l'école Jules Michelet de Talence,* Bordeaux : Edition IREM de Bordeaux.

BRISSIAUD R., CLERC P., OUZOULIAS A. (2001) *J'apprends les maths CE2*, Paris : Editions Retz.

BRISSIAUD R., CLERC P., OUZOULIAS A. (2001) *J'apprends les maths CM1*, Paris : Editions Retz.

CHEVALLARD Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* , Vol. 19, n° 2, pp. 221-266.

CHEVALLARD Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique, in *Actes de l'Université d'été de La Rochelle,* pp. 89- 118, édition coordonnée par NOIRFALISE R., Aubière : Edition IREM de Clermont Ferrand.

CIRADE G. (2006) *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel*, Thèse de doctorat, Université d'Aix Marseille I.

HELAYEL J., BOUZY J. P., DEGRET P., DELUCHI-JOUBERT M. C., FAURE A. et B., FOURNIE C., TRESALLET E. (2002) *Place aux maths ! CM1,* Paris : Editions Bordas.

LEBEGUE H. (1956) *Sur la mesure des longueurs*, Paris : Editions Gauthier-Villars.

MATHERON Y. et NOIRFALISE A. (2008) *Formation initiale et continue des professeurs d'école en Mathématiques*, ouvrage à paraître.

MEN (2002) Documents d'application des programmes, Mathématiques, cycle 2 et cycle 3, Scéren CNDP.

Liens entre objets d'enseignement impliquant numération de position ou système métrique.

Christine Chambris,
Équipe Didirem - Université Paris-Diderot (Paris 7),
IUFM de Versailles - Université de Cergy Pontoise
cchambris@free.fr

Objectif visé :

Cette communication est la présentation d'une partie de ma thèse (Chambris, 2008). Elle peut contribuer à la réflexion sur la formation des maîtres dans les domaines de l'enseignement des grandeurs et de la numération de position.

1. Présentation du problème

Nous étudions les relations entre les grandeurs, les nombres et les opérations dans l'enseignement des mathématiques à l'école primaire : elles ont été profondément bouleversées au moment de la réforme des mathématiques modernes[1] (Chevallard, 1992), (Bronner, 1997, chapitre 2), (Chambris, 2007). Dans cette communication, nous regardons cette question via des problèmes élémentaires d'arithmétique relevant du champ de la numération de position des entiers.

Nous avons élaboré un questionnaire et l'avons fait passer à 277 élèves de fin de CM2 (5ème primaire). Il est constitué par une série d'exercices, nous en présentons quelques uns. Nous pensions *a priori* de certains d'entre eux qu'ils poseraient des difficultés aux élèves, les évaluations d'entrée en 6ème et des travaux sur les connaissances des élèves (Parouty, 2005) fournissant une première indication.

L'analyse des réponses aux exercices est l'occasion de poser de nouvelles questions quant à certaines « difficultés ». Sans être hors programme, certaines tâches vivent apparemment mal ou pas du tout dans l'enseignement actuel. Ceci ne semblait pas être le cas dans l'enseignement ancien d'où nous avons tiré certains de nos exercices. Pourquoi ? Nous tentons de présenter les « conditions de vie » de ces tâches, leur environnement didactique, dans l'enseignement ancien et actuel. Ce sont en grande partie des questions d'écologie didactique (Artaud, 1997) qui nous préoccupent.

[1] Pour faire court, nous désignons par « enseignement ancien » ce qui est antérieur à la réforme.

1.1. Premiers éléments sur les connaissances des élèves

Nous donnons d'abord quelques éléments sur les connaissances des élèves actuels. Parouty (2005) propose à des élèves de cycle 3 de résoudre des problèmes de numération « en contexte ». Au CE2, le problème est : « Pour carreler une pièce, il faut 8564 carreaux. Les carreaux sont vendus par paquets de 100. Combien de paquets faut-il commander ? » (R=10%). Elle pose le même genre de problème au CM1 (avec des paquets de 200) et observe la même réussite. Au CM2 avec des paquets de 2000, elle observe des progrès (R=30%). Elle indique que ce progrès n'est pas dû à une meilleure utilisation de la numération, mais au fait que les élèves posent la division (à plusieurs chiffres) qu'ils ont apprise.[2] Elle interroge les enseignants. Ils considèrent que le problème est (en%)[3] très facile : 0, assez facile : 13, difficile : 85, inabordable : 5.

Parouty propose aussi aux enseignants des exercices à faire travailler à leurs élèves. En évaluant ensuite les élèves, elle constate qu'ils ont progressé, non seulement dans la résolution de ces problèmes ce qui ne serait pas particulièrement remarquable mais dans toute la numération (et le calcul). (La méthodologie prévoit un groupe témoin).

Les évaluations d'entrée en 6ème proposent, chaque année, depuis 2005 des exercices de conversion.

5 kg = ………… g			
réponse	2005	2006	2007
5000	61,41	60,38	62,0
Autre	34,05	34,70	33,8
Absence	4,54	4,92	4,2

La réussite est donc relativement stable sur les 3 ans, un peu moins des deux tiers des élèves réussissent une conversion simple de kilogrammes en grammes.

1.2. Premiers éléments sur les relations entre le système métrique et la numération avant la réforme

En 1970, dans le programme de l'école primaire est créé le domaine « mesure ». Avant, la réforme des mathématiques modernes, l'étude du système métrique apparaît « mêlée » à celle des nombres. Dans le programme, à partir de 1970, numération et système métrique vivent dans deux domaines

[2] Parouty (2005) n'indique pas le mode de calcul de la réussite. Nous ne savons pas, en particulier, comment les réponses à « 1 près » sont comptabilisées. Dans notre étude, nous avons proposé aux élèves un problème du même type. Nous présentons ci-après les répartitions observées pour les réponses et les procédures. Dans (Chambris, 2008, p. 324), nous donnons en outre des éléments sur la répartition des réponses en fonction des procédures.

[3] Le total est différent de 100 dans (Parouty, 2005)

différents. En prenant l'exemple d'un manuel scolaire de la fin des années 50 (Bodard, CE1, CE2, 1957), nous présentons les relations entre système métrique et numération de position des entiers telles qu'elles ont probablement existé avant la réforme (et depuis 1923). Nous avons étudié plusieurs manuels et celui-ci est loin d'être exemplaire. Néanmoins, nous observons des éléments récurrents relativement à cette question de l'articulation entre système métrique et numération de position dans les différents manuels étudiés.

Au CE1, dans la leçon « Le billet de mille francs », le mémo indique 10 centaines = 1000. Dans les exercices, on trouve : 1000 F – 9 centaines de F = …F ; 500 F + 500 F = …F et aussi : « Combien de paquets de 100 enveloppes faut-il acheter pour avoir 1000 enveloppes ? »

Toujours au CE1, dans la leçon « Le kilogramme. Le kilomètre », le mémo indique 1 kg = 10 hg = 1000 g. Dans les exercices, on trouve : 600 g + 400 g = …g ou …kg et 1 hg + 9 hg = …hg ou …kg

Au CE2, dans la leçon « Le kilogramme », le mémo indique 1 kg = 1000 g. Dans les exercices, on trouve : « Complétons : 1 kg = 800 g + … » et aussi « Avec 1 kg de graines de betteraves, combien un grainetier peut-il faire de sachets de 100 g ? »

On observe ainsi un parallèle assez net entre les leçons de numération et de système métrique.

1.3. Éléments complémentaires sur les connaissances des élèves actuels

Pour préciser les éléments relatifs aux connaissances des élèves actuels nous avons proposé d'autres exercices du champ : numération / système métrique. Plutôt que repérer des niveaux « absolus », nous croisons les réussites aux différents exercices afin d'identifier des liens ou des absences de liens dans les connaissances des élèves. Nous utilisons plusieurs sources pour les exercices : des manuels anciens et actuels. Les manuels anciens fournissent de nombreux exercices qui mêlent grandeurs et nombres. Les manuels actuels proposent des tâches dont on peut penser qu'elles sont assez familières aux élèves actuels.

Des exercices proposés aux élèves

Notre questionnaire a été passé par 277 élèves de CM2 (en mai-juin 2005). Parmi les exercices, nous avons proposé :

> Pour faire les photocopies de l'école, il faut 8564 feuilles de papier. Les feuilles sont vendues par paquets de 100. Combien de paquets faut-il acheter ?
>
> Complète chacune des lignes : - Le chiffre des dizaines de 6529 est …
> - Le nombre de centaines de 8734 est …
>
> Combien de sachets de 100 g de farine peut-on remplir avec un sac de 4 kg de farine ?
>
> Complète chacune des lignes : 5 kg = ………g

8 kg = ………. hg

Nous avons aussi proposé d’autres exercices, du même type, de conversion de mm en cm en contexte et hors contexte que nous ne présentons pas ici.

Résultats bruts

Pour le « nombre de centaines de 8734 », on a les réponses suivantes :

réponse	87	7	700 ou 734
pourcentage	21%	46%	23%

8 kg = … hg : 71% de réussite

5 kg = … g : 66% de réussite

Pour le « nombre de paquets de 100 feuilles pour avoir 8564 feuilles » :

réponse	86	85	85,64
pourcentage	20%	19%	3%

Pour le « nombre de paquets dans 100 g dans 4 kg », la réussite (réponse 40) est de 32%. Les procédures susceptibles d’aboutir (qui ne sont éventuellement pas menées à terme) sont :

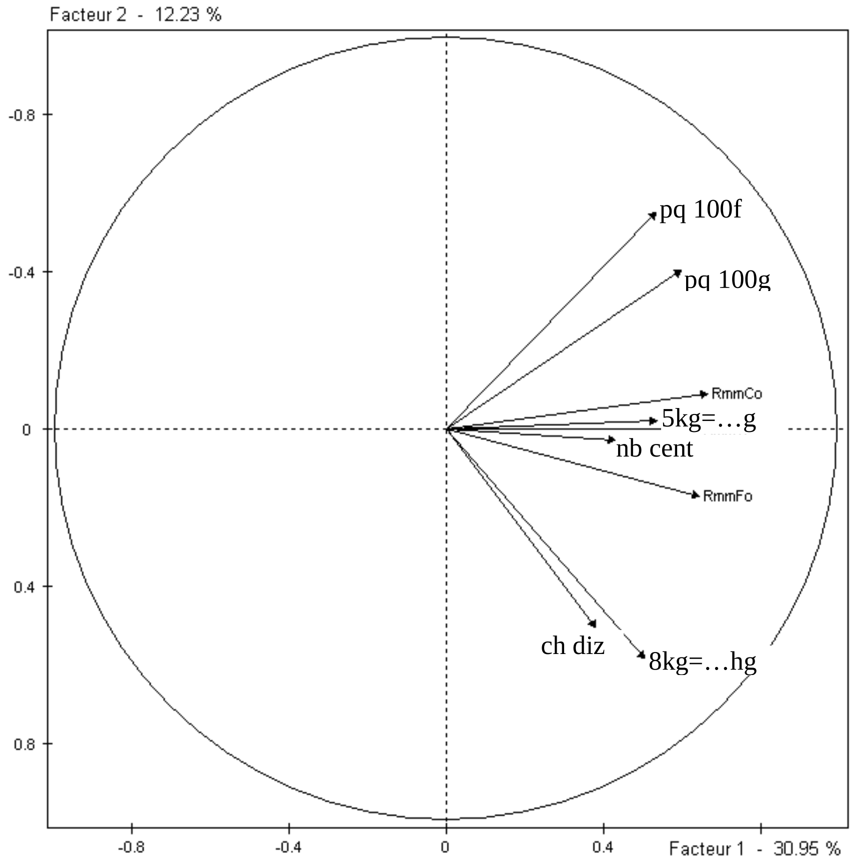
Procédures	réussite sans procédure visible	réussite et 1000 g = 1 kg	division en ligne	division posée	40×100	présence de 10	100 : 4
%	17%	1%	3%	5%	9%	3%	11%

38%

Mise en relation des réponses aux différents exercices

Pour mettre en relation les réponses aux différents exercices, nous effectuons une analyse factorielle. Il en ressort notamment que :

- Les réussites aux deux problèmes concrets relatifs aux milliers et centaines sont assez corrélées,
- Les réussites aux deux exercices « formels » (8 kg en hg et chiffre des dizaines) sont assez corrélées.
- Les réussites au problème « 4 kg en paquets de 100 g » et à la conversion « 8 kg en hg » semblent être indépendantes.Les réussites aux trois exercices relatifs aux conversions de mm en cm sont assez corrélées, qu’ils soient en contexte et hors contexte (nous n’étudions pas ce point dans cette communication).



1.4. <u>Questionnement de nature écologique : ce que nous retenons des éléments précédents</u>

Nous retenons de ces différents éléments les faits suivants :

- l'indépendance des procédures de résolution pour deux questions en contexte et formelle, susceptibles d'être résolues par une même technique (le nombre de paquets de 100 g dans 4 kg et convertir 8 kg en hg),
- la proximité des réussites dans les tâches formelles,
- la relative proximité dans les tâches en contexte,
- le fait que les élèves progressent, dans toute la numération, quand on leur propose des problèmes de numération en contexte,
- les réussites relativement médiocres à des questions *a priori* élémentaires de numération et de système métrique.

Nous considérons qu'on peut les interpréter d'un point de vue écologique comme nous allons le voir.

Cadre théorique et méthodologie

L'écologie des savoirs est une facette de la théorie anthropologique du didactique (TAD) qui englobe la théorie de la transposition didactique, développée par Chevallard (1991, 1999). L'écologie des savoirs (Artaud, 1997) permet d'étudier des questions telles que : comment les objets d'enseignement vivent-ils, avec qui ? Comment naissent-ils ? Pourquoi meurent-ils ?

Dans cette communication, nous faisons référence aux notions de praxéologie et d'ostensif. Une praxéologie est un moyen de décrire une pratique. Elle se décline en quatre composantes :

- le type de tâches est un ensemble de tâches qui se ressemblent,
- la technique est un moyen de traiter le type de tâches (« comment on fait),
- la technologie est une justification de la technique (« pourquoi ça marche quand on fait comme ça »),
- la théorie est un ensemble dans lequel s'inscrit la technologie, c'est un discours justificatif sur la technologie.

Les ostensifs sont des systèmes de signes utilisés dans les praxéologies. On parlera de l'instrumentalité d'un ostensif pour évoquer ce « qu'on peut ou non faire avec lui ».

Pour étudier les éléments que nous avons pointés, nous avons utilisé la méthodologie suivante. À travers des manuels scolaires du cours élémentaire et des textes pour l'école destinés aux enseignants ou aux formateurs, nous recherchons des techniques et technologies pour résoudre un même type de tâches de numération (et de système métrique) pour l'enseignement ancien et l'enseignement actuel, avec un intérêt particulier pour les ostensifs. Outre le fait que les ostensifs sont des éléments importants pour décrire les praxéologies, cet intérêt pour les ostensifs est notamment dû au fait qu'il est connu qu'au moment de la réforme on a, à la fois, introduit de nombreux symboles et formulé diverses interdictions relatives à l'utilisation de certains symboles ou mots.

Hypothèse

Ces faits nous amènent à formuler une hypothèse de nature écologique. La réforme des mathématiques modernes pourrait avoir détruit des liens qui n'ont pas été reconstruits jusqu'à aujourd'hui (des liens nouveaux et pertinents n'ayant pas non plus été inventés ou implémentés). Il s'agit de liens qui peuvent être internes au système métrique, internes à la numération, ou encore dans les relations entre numération et système métrique. Par suite, le travail dans chacun des deux domaines pourrait apparaître aux élèves (voire au professeur) comme indépendant. Cela pourrait avoir deux types de conséquences : les connaissances ne se renforcent pas entre les deux domaines, elles sont juxtaposées ; chacun des domaines est affaibli car il n'est pas nourri par l'autre.

2. Éléments d'interprétation d'ordre écologique

Nous commençons par donner des invariants relatifs à l'étude de la numération de position. Nous poursuivons par des éléments caractéristiques de cette étude dans l'enseignement ancien, puis par des éléments relatifs à l'enseignement actuel. Nous essayons ensuite de comprendre les raisons des changements. Finalement, nous nous intéressons à un aspect particulier, peut-être particulièrement sensible aux bouleversements vécus par l'enseignement de la numération de position depuis 40 ans.

2.1. Types de tâches de la numération de position en primaire

L'étude des manuels scolaires anciens et nouveaux permet de repérer une certaine stabilité des tâches enseignées en numération. Certaines d'entre elles sont « emblématiques », probablement liées à la nature même de l'objet étudié, à sa fonction dans les sociétés qui ont des pratiques numériques développées. D'autres tâches sont plus « conjoncturelles ».

Nous avons repéré cinq tâches emblématiques. Autour de ces tâches se rattachent éventuellement d'autres tâches, pour former des types de tâches.

1) Dénombrer une grande collection

2) Dire écrire les nombres

3) Les suites écrites et orales (de 1 en 1, de 10 en 10, etc.)

4) Comparer des nombres

5) Combien de paquets de 100 dans 3500 ?

Nous relevons aussi un ensemble de tâches particulières, nous les rassemblons sous l'intitulé « décomposer, recomposer un nombre ». Ces tâches sont importantes mais il est difficile de les considérer comme emblématiques. Par ailleurs, bien que très présentes, elles apparaissent sous des formes éventuellement différentes selon les époques.

2.2. Écologie de la numération dans l'enseignement antérieur à la réforme

Dans les manuels anciens, on observe une série de technologies stables, elles sont organisées autour d'un ostensif : la « numération en unités » que nous présentons en indiquant certaines de ses propriétés.

La numération en unités : un ostensif à tout faire

Il s'agit d'exprimer les nombres avec ce que nous appelons les « unités de la numération » (les mots : unités, dizaines, centaines, etc.) et les noms des nombres (d'abord de un à neuf) : par exemple, le nombre *trois milliers cinq centaines*.

Cet ostensif permet de régulariser l'oral : *trois dizaines* pour *trente*, mais pas seulement. En effet, il possède une plus grande instrumentalité que la numération orale. Il n'y a « pas d'oral » pour dire *56 centaines* (ou *cinquante six centaines*) ou pour dire *trente dizaines*. Ces désignations relèvent de la numération en unités et non de la numération orale dans laquelle on dirait : cinq mille six cents et trois cents.

Technologies anciennes

Nous présentons maintenant la série des cinq technologies anciennes stables. Nous les désignons par une lettre significative :

C) Comptage par unités de la numération : « On compte par dizaines (centaines, unités de mille) comme on compte par unités. »

R) Relations entre unités de la numération : « 1 centaine = 10 dizaines, 1 centaine = 100 unités »

O) Relations entre oral et unités de la numération. Il s'agit d'une traduction mot à mot : « 3 centaines = trois cents, 5 dizaines = cinquante ; donc 3 centaines 5 dizaines = trois cent cinquante »

P) Relation entre position et unité de la numération : « Dans un nombre, les centaines s'écrivent au 3ème rang à partir de la droite ».

Ce discours s'accompagne éventuellement du discours suivant complémentaire : « Le zéro ne représente pas d'unité, il marque simplement un rang. »

M) Relation entre unités de la numération et unités métriques, traduction mot à mot : « 1 hectomètre = 1 centaine de mètre »

Nous donnons maintenant l'exemple du traitement de deux tâches emblématiques (des techniques donc) à partir des technologies classiques. Sauf mention contraire, ces techniques ne sont pas explicites dans les livres, ce sont des reconstructions que nous proposons.

Technique ancienne pour la tâche : « dénombrer » (un tas d'objets dont il faut déterminer le nombre)

- compter dix objets (C), puis appeler dizaine un groupe de dix (R), compter les dizaines (C), s'il y en a moins que dix, itérer le processus, sinon appeler centaine un groupe de dix dizaines (R), itérer le processus en comptant les dizaines (C), etc.[4] ;
- les groupes étant réalisés, les compter (C). On a : 3 dizaines, 5 milliers ;
- (à l'écrit) les milliers occupent la 4ème position, les dizaines la 2ème (P) : le nombre s'écrit 5030 ;
- (à l'oral) 5 milliers se dit 5 mille, 3 dizaines se dit trente (O) : le nombre se dit cinq mille trente.

Technique ancienne pour la tâche : dire un nombre écrit en chiffres, 7020- 7020 comporte un 7 en 4ème position donc 7 milliers, un 2 en 2ème position donc 2 dizaines (P),

- 7 milliers = sept mille, 2 dizaines = vingt (O),
- 7020 se lit sept mille vingt

---

[4] Nous précisons que le processus s'arrête nécessairement quand tous les objets sont groupés. Il y a alors nécessairement moins de dix groupes de chaque espèce. Par ailleurs, on n'a pas mobilisé la division euclidienne dans cette tâche.

Dans les livres anciens, parfois des techniques sont énoncées : « pour lire un nombre de deux chiffres, on énonce d'abord le nombre des dizaines, puis celui des unités. Ainsi 38 se lit trente-huit » (Boucheny, CE, 1930). Souvent elles ne le sont pas. On peut penser que c'est parce qu'elles consistent en fait en un découpage de la tâche en sous-tâches qui peuvent, chacune, être traitées par un des discours élémentaires (les technologies).

2.3. La tâche « dénombrer » dans des manuels scolaires récents

Que peut-on dire des techniques pour traiter ces tâches aujourd'hui ? Pour étudier cette question, nous présentons des exemples tirés de manuels scolaires récents. Comme nous allons le voir, la situation actuelle semble plus hétérogène et, par suite, nous ne présentons que des fragments de tâches.

Nous avons retenu quatre manuels de CE2 :

- Pour comprendre les mathématiques (2004) – PCM (Hachette)
- Maths + (2002) (sed édition)
- Euro Maths (2004) (Hatier)
- Nouvel objectif calcul (1995) – NOC (Hatier)

Techniques actuelles pour la tâche : « dénombrer » (les groupes étant réalisés)

Nos quatre manuels introduisent précocement les écritures chiffrées : 1, 10, 100, 1000. Ils procèdent cependant différemment pour obtenir l'écriture chiffrée du « nombre total ».

Dans PCM, les nombres de paquets de chaque type sont indiqués dans un tableau de numération (les noms des colonnes sont les noms des unités de la numération). Dans Euro Maths, on compte de 1000 en 1000 pour savoir qu'on doit écrire 2000 (en utilisant probablement d'un algorithme de régularité des suites). Dans Maths +, on écrit une multiplication 2×1000. Dans NOC, on écrit un calcul en arbre ou en ligne. Ces différentes techniques permettent *grosso modo* d'obtenir une somme de la forme 2000+300+40 (la situation n'est pas claire dans PCM : on ne sait si on obtient directement le nombre dans le tableau en complétant par des zéros les colonnes vides ou bien si on procède à un calcul pour ce faire).

Les techniques pour réduire la somme sont alors les suivantes :

- une convention explicite d'écriture dans Euro Maths,
- un calcul posé, en prenant soin d'aligner les chiffres à droite dans NOC, on peut sans doute dire qu'il s'agit d'une convention (implicite),
- sans précision dans Maths + (mais nous n'avons pas consulté le livre du maître).

Dans PCM, on a bien une somme mais on ne sait pas si la somme est obtenue *a posteriori* (à partir du tableau) ou indépendamment du tableau, et finalement le tableau serait un moyen de la réduire, d'élaborer une convention (implicite).

Ajoutons les éléments suivants. La leçon « numération : groupements » (livres de l'élève et du maître) de NOC (1995) se passe des noms des unités de la numération ; ce sont des calculs avec des écritures chiffrées qui interviennent. Euro Maths 2004 après avoir donné une règle de calcul pour réduire la somme, formule finalement une règle directe du passage des paquets à l'écriture chiffrée qui utilise les noms des unités de la numération. Cette dernière règle ressemble fortement à la technologie P. Il y a toutefois une différence non négligeable entre l'approche classique et celle d'Euro Maths c'est que, dans l'approche classique, l'écriture 1000 dépend de P alors que, dans Euro Maths, P dépend de l'écriture 1000. Cette différence implique que, dans l'approche actuelle (Euro Maths), les règles initiales de manipulation ne sont pas élaborées sur les unités de la numération mais sur les écritures chiffrées.

La décomposition additive : un nouvel ostensif

On voit que, dans cette tâche, les écritures chiffrées des puissances de dix semblent *grosso modo* jouer le rôle que jouait les unités de la numération. Toutefois, les règles de fonctionnement sont loin d'être aussi explicites que celles qui régissaient la numération en unités. Les présupposés des différents manuels semblent être différents, même si finalement tout revient au même…

Pour résumer, que voit-on aujourd'hui ?

- une omniprésence des « décompositions additives » et une grande raréfaction voire une quasi disparition (à une époque peut-être révolue) de la numération en unités,
- pas d'harmonisation des techniques et technologies entre les manuels,
- des raisonnements inversés d'un manuel à l'autre à cause de « présupposés » différents (qui laissent en tout cas planer une grande ambiguïté),
- des implicites.

2.4. Des raisons du changement ?

D'où cela vient-il ? Nous formulons quelques hypothèses.

La réforme des mathématiques modernes

La réforme des mathématiques modernes (en 1970) amène à un net affaiblissement des unités de la numération à l'école primaire. Les raisons semblent être multiples, notamment :

- le caractère « générique » des bases s'oppose à celui, « spécifique », de la base dix (or à cette époque on veut montrer la généralité),

- les **manipulations** en base **remplacent les discours** en unités de la numération (on a une sorte de « toute croyance » en la manipulation),
- en outre, les unités de la numération semblent être discréditées notamment pour cause d'« ambiguïté ». Combien y a-t-il d'unités dans 234 ? Cette question est considérée comme ambiguë car on ne sait s'il faut répondre 4 ou 234 (APMEP, 1976).

Finalement, on peut penser que la réforme a fait « exploser » la numération en lui supprimant son ostensif fondamental, la numération en unités, qui permet de formuler les explications (et des tâches dans un registre symbolique) et en ajoutant de nouvelles tâches avec les changements de base notamment.

Contre réforme (ERMEL 1978)

Nous faisons maintenant référence à un ouvrage dont on peut penser qu'il a eu une influence assez forte sur les formateurs d'enseignants de primaire pendant les années 80. Il s'agit de la première édition de la publication des travaux de l'équipe ERMEL. Nous considérons qu'il est emblématique de la contre-réforme en primaire. Nous avons consulté le tome 2 du cours élémentaire.

Il semble qu'assez rapidement après la réforme est repérée la nécessité d'un registre symbolique pour le travail sur les nombres. En effet, si les élèves sont capables de coder et décoder des collections en base, les écritures chiffrées en base n'auraient tendance qu'à évoquer cette action de groupement (Perret, 1985). La contre-réforme ajoute des manipulations symboliques dans l'étude de la numération : « Le point fondamental est de familiariser les enfants au travail direct sur les écritures. » en utilisant en particulier 1, 10, 100, 1000.

Outre le fait que la progression d'ERMEL (pour le CE) est d'une très grande complexité, il n'est pas sûr que le lien entre ces manipulations d'écriture et les tâches emblématiques de numération soient complètement pris en charge, notamment pour la tâche « dénombrer ».

Plus précisément, ERMEL fait référence aux décompositions polynomiales : $a\times10^3+b\times10^2+c\times10+d$. Elles sont indispensables pour traiter les changements de base introduites au moment de la réforme. ERMEL propose en fait d'appuyer l'étude de la base dix sur les petites bases, sur les changements de bases. Ainsi, par « calcul mental » en base dix : on transforme des « nombres d'objets » écrits en bases, en base dix : $(213)_4=16+16+4+3$. Ceci doit servir à identifier le rôle des coefficients. En base dix, on écrira « de même » : 213=100+100+10+3 sans faire référence à une collection d'objets. C'est probablement complexe et cela ne semble pas véritablement repris dans les manuels de l'époque que nous avons étudiés (ça l'est d'autant moins que les bases disparaissent assez vite).

ERMEL va plus loin, en proposant des « technologies » pour les « numérations hybrides » (oral : « trois cent huit » s'écrit « 3 100 8 » qui devient « $3\times100+8$ »), pour les numérations d'addition » (romains : « CCV » devient « 100+100+5 »). Elles constituent des moyens qui permettent plus ou moins de se passer des technologies classiques.

Et les décompositions – recompositions ?

Ces éléments nous amènent à évoquer les « décompositions recompositions » à trois époques. Cette tâche est incluse en général dans la tâche dénombrer, comme nous venons de le voir. Elle en constitue une partie. Signalons toutefois le manuel Math Elem (1996) qui propose une autre façon que celles nous avons présentées pour réduire une somme (4000+60+2) :
« Certains élèves utilisent l'addition (…). La discussion les aidera à prendre conscience que la lecture seule permet de retrouver le nombre qui a été décomposé. » Il s'agit donc de s'appuyer sur la numération orale.
En fait, cette tâche est aujourd'hui généralisée dans l'ostensif : 300+40+7. Hier, elle n'existait pas dans cet ostensif, il s'agissait toujours de l'ostensif « numération en unités » : 3 c 4 d 7 u. Sous cette forme, après avoir plus ou moins disparu, elle semble revenir, elle cohabite avec celle en écriture chiffrée. Toutefois, comme le laisse penser Euro Maths, il semble qu'on puisse considérer qu'en unités de la numération, elle est seconde. C'est-à-dire que ce sont les « calculs » sur les écritures chiffrées des puissances de dix qui justifient la position des « unités », « dizaines » et « centaines ».
Il est bien possible que cette tâche ait eu un statut tout à fait particulier au moment de la contre-réforme : avant la réforme elle est intermédiaire pour « dénombrer », au moment de la réforme apparemment elle disparaît. À cette époque, on écrit directement le nombre dans le tableau quand on veut dénombrer une collection. La nécessité de restaurer un registre de manipulation symbolique semble la faire vivre plus ou moins indépendamment des tâches de dénombrement (au moment de la contre-réforme, ces dernières tâches semblent être fort rares dans certains manuels et souvent à réaliser directement dans le tableau). Finalement, l'évolution de l'enseignement de la numération pourrait progressivement lui avoir rendu sa niche habituelle : un intermédiaire pour dénombrer les grandes collections, ce qui était le cas dans l'enseignement ancien. Ces « décompositions – recompositions » correspondent grosso modo au travail de la technologie (P).

Une quête écologique

Au moment de la contre-réforme, on introduit beaucoup de tâches autour des « écritures » - les manipulations symboliques -. Ce qui est fascinant c'est que finalement, ce qui reste de ces tâches semble principalement se trouver dans les décompositions - recompositions de la numération où les écritures chiffrées des puissances de dix (ECPD) ont plus ou moins remplacé la numération en unités Par ailleurs, il ne semble pas qu'on puisse faire « tout » ce qu'on faisait avant la numération en unités. En effet, la manipulation des écritures chiffrées demande de se passer de mots et donc de disposer d'outils symboliques beaucoup plus sophistiqués que la numération en unités. Par ailleurs, comme nous allons le voir, certaines tâches, notamment les conversions, n'ont pas véritablement de correspondance avec les ECPD.

Nous interprétons l'hétérogénéité dans les manuels actuels comme le produit de ces bouleversements. Nous voyons plusieurs raisons à cette hétérogénéité. Celle que avons montrée ici consiste à dire que le travail de « transposition », d'élaboration de technologies, qu'on observe dans ERMEL 1978 n'y est pas véritablement abouti, d'autant moins que le livre fait l'hypothèse d'un travail en bases qui a disparu des programmes peu de temps après sa parution. Il nous semble qu'un certain nombre de questions relatives à des technologies ou des techniques pour les différentes tâches de numération y sont laissées en suspens.

Cet aspect n'est peut-être pas le plus important. En effet, fondamentalement, il n'est pas sûr qu'on puisse se passer de la numération en unités pour étudier la numération. Il semble bien qu'ERMEL CE 1978 a eu ce projet. On peut interpréter le travail des manuels récents comme une recherche de mise en cohérence de la numération à destination de jeunes élèves en redonnant notamment un peu de légitimité à la numération en unités. Nous donnons maintenant un dernier exemple des bouleversements attachés à une tâche emblématique de la numération. La légitimité de l'ostensif « numération en unités » nous semble particulièrement cruciale pour comprendre les modifications dans la vie de ce type de tâches.

2.5. Les conversions : un type de tâches controversé

La dialectique « nombre de » - « chiffres des » n'existe pas dans l'enseignement ancien. En revanche, existe un type de tâche qui semble avoir aujourd'hui disparu. Il s'agit des « conversions » : convertir 3 centaines en dizaines, par exemple. Le « nombre de » est un cas particulier de conversion, quand un des nombres est exprimé dans l'unité « unité ».

Les conversions dans l'enseignement ancien

Dans l'enseignement ancien, nous pensons avoir repéré des conversions variées, plus ou moins élémentaires. Nous en distinguons trois sortes.

1) Les conversions simples ou la relation dix pour un : 1000F – 9 centaines de F = …F et aussi : 500F + 500F = …F

2) Les conversions « multiples de la relation », les nombres en jeu ont un seul chiffre non nul :

Combien y a-t-il d'unités dans 3 centaines ?

Combien 30 dizaines font-elles de centaines ?

Combien y a-t-il de décamètres dans 4 hectomètres ? ou 4 hm = … dam

3) Les conversions où plusieurs ordres de la numération sont impliqués, plusieurs chiffres non nuls.

Combien y a-t-il de centaines dans 35 dizaines ? (rép : 3 c 5 d). Pour traiter cette tâche, on peut utiliser le type précédent, 35 dizaines sont 30 dizaines et 5 dizaines soit 3 centaines et 5 dizaines.
Ces trois sortes de conversions semblent constituer une progression dans l'étude du type de tâches. Par ailleurs, la progression permet d'élaborer une technique pour traiter les tâches les plus complexes du type sans utiliser directement la propriété de la troncature.

Les conversions aujourd'hui

Aujourd'hui, les conversions sont quasiment inexistante dans les manuels du cours élémentaire. Il est possible que, le « nombre de » ait remplacé « les conversions » au moment de la réforme. Toutefois, depuis la réforme et jusqu'en 1995, même le « nombre de » est très peu répandu dans les livres. Ceci peut s'expliquer par la volonté de se passer des unités de la numération et sans cet ostensif, ce type de tâches ne peut exister.
Il n'est pas rare, dans des manuels actuels, que les relations entre unités (une centaine = dix dizaines par exemple) ne soient pas citées (ou seulement dans le livre du maître) alors que la propriété de la troncature, « nombre de », l'est. On trouve, des fois, des « calculs » autour des relations entre unités dans les leçons de numération ou de calcul : 800 + 200 =…. On trouve aussi de nouvelles tâches autour du « nombre de », par exemple : « calcule 3 c + 21 d ». Un type de tâches semble être en train d'émerger autour du « nombre de ».
Toutefois, en numération, la substitution des « nombres de » aux conversions affaiblit probablement la connaissance des relations entre unités et ne permet pas véritablement de traiter des tâches justificatives connexes, par exemple la retenue dans l'étude des techniques opératoires. Une façon élémentaire de justifier une retenue au rang des dizaines est d'utiliser la numération en unités. On a alors 13 dizaines = 1 centaine 3 dizaines. De même pour justifier l'algorithme de l'écriture chiffrée, il faut pouvoir exprimer la relation entre deux unités successives.L'émergence du type de tâches autour du « nombre de » apparaît assurément comme une nécessité écologique pour que la tâche vive. Néanmoins, il n'est pas sûr que les tâches qui se développent alors soient les plus adaptées pour satisfaire les besoins de l'étude de la numération.
Paradoxalement, le système métrique pourrait avoir « moins bougé » que la numération pendant ces 40 dernières années. Peut-être la raison en est qu'il possède un ostensif équivalent à la numération en unités : les unités km, hm, dam, m… et peut-être à cause de cela, il n'a pas perdu ses conversions. En revanche, il est assez clair qu'il s'est désolidarisé de la numération.

3. Conclusions

L'étude des manuels scolaires actuels semble montrer une grande hétérogénéité des technologies et des techniques. Hier, on constatait une grande homogénéité.

L'étude de l'enseignement ancien permet de mettre en évidence un ostensif probablement crucial : la numération en unités. Il a quasiment disparu au moment de la réforme mais revient progressivement. Il semble néanmoins avoir perdu certaines de ses propriétés « manipulatoires ». Sa marginalisation est susceptible d'expliquer la faiblesse du type de tâches « conversion » dont il semble pourtant qu'il est essentiel, notamment pour satisfaire des besoins connexes à l'étude de la numération de position. En fait, il a été plus ou moins remplacé par les écritures chiffrées des puissances de dix. Ces écritures permettent de faire les « mêmes » choses que la numération en unités à condition de maîtriser un formalisme qui n'est probablement pas disponible chez des jeunes élèves.

Ces éléments permettent-ils d'expliquer les résultats relatifs aux connaissances des élèves actuels ? Les problèmes que nous avons proposés sont principalement des problèmes de conversion. Est-ce parce que cette tâche a « disparu » qu'elle n'est pas réussie ? Ou bien, est-ce que les éléments que nous avons relevés dans les manuels sont plutôt le signe d'une désorganisation assez grande de l'enseignement de la numération et, finalement, les résultats des élèves seraient symptomatiques de cela ? Ou encore, est-ce parce que la numération est difficile et qu'il faut du temps aux élèves pour qu'ils la maîtrisent ?

4. Références bibliographiques

APMEP ; 1976 ; Mots. T.3 : vocabulaire de l'enseignement des mathématiques ; Paris : APMEP

Artaud, Michèle ; 1997 ; Introduction à l'approche écologique du didactique - l'écologie des organisations mathématiques et didactiques ; *Actes de la 9ème école d'été de didactique des mathématiques ;* 100-139

Bronner, Alain ; 1997 ; *Étude didactique des nombres réels : I-décimalité et racines carrées* ; Thèse nouveau doctorat ; Saint-Martin-d'Hères : Université de Grenoble 1

Chambris, Christine ; 2007 ; Petite histoire des rapports entre grandeurs et numérique dans les programmes de l'école primaire ; *Repères – IREM* ; 69 ; 5-31

Chambris, Christine ; 2008 ; *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20^e^ siècle. Connaissances des élèves actuels.* ; Thèse ; Paris : Université Paris-Diderot (Paris 7) ; http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00338665/fr/

Chevallard, Yves ; 1992 ; Une réforme inaccomplie ; *La gazette des mathématiciens* ; 54 ; 17-21

Parouty, Véronique ; 2005 ; Compter sur les erreurs pour compter sans erreurs : état des lieux sur l'enseignement de la numération décimale de position au cycle 3 ; *Actes du XXXIème colloque sur la formation des maîtres. Foix mai 2004. Quelles mathématiques faire vivre à l'école ? Quels outils pour les maîtres ?* ; Toulouse : IREM de Toulouse

Perret, Jean-François ; 1985 ; *Comprendre l’écriture des nombres.* ; Exploration « recherches en sciences de l’éducation » ; Berne : Peter Lang.

COMMUNICATION C5

CREATION D'ENONCES DE PROBLEMES PAR LES ELEVES

Jiří Bureš, Université Charles de Prague

Hana Hrabáková, Université Charles de Prague

1. Introduction

La création d'énoncés de problèmes représente un moyen efficace et bien adapté pour développer la créativité des élèves de tous âges et influencer leur attitude envers les mathématiques. Au cours de la création d'un énoncé de problème, les élèves doivent surmonter différentes difficultés, ce qui peut contribuer au développement de leurs connaissances et aussi de leur culture mathématique. Au cours de cette création, l'autonomie dans le travail permet aux élèves de savourer le vrai travail d'un mathématicien (Silver, 1994). En plus, la production ou la formulation de questions et de problèmes influence, en général d'une manière positive, la capacité des élèves à résoudre les problèmes et peut aider les enseignants et les chercheurs à pénétrer dans la conception des notions et dans les processus mathématiques des élèves. (Bonotto, 2006).

La première partie de notre contribution consiste à définir et à caractériser la notion de *problem posing* et à expliquer son rapport avec la créativité. Dans la deuxième partie, nous décrirons le «Concours d'originalité de problèmes». Il s'agit de l'exemple d'une activité éducative où les élèves produisent les énoncés de problèmes. Dans la troisième partie, nous montrerons des extraits de la discussion en classe, les exemples des énoncés créés et nous proposerons quelques conclusions.

Comme nos recherches ont été menées dans le cadre du système scolaire tchèque, nous allons donner une brève description des enseignements primaire et secondaire en République tchèque. La scolarité obligatoire dure 9 ans, les élèves commençant à l'âge de 6 ans à fréquenter l'école fondamentale (elle correspond à la fois à l'école élémentaire et au collège en France). Ils peuvent y rester 9 ans, les bons élèves pouvant passer les examens d'entrée soit aux collèges-lycées de 8 ans (après 5 ans d'école fondamentale), soit aux collèges-lycées de 6 ans (après 7 ans d'école fondamentale). Ceux qui restent 9 ans à l'école élémentaire peuvent ensuite passer les examens d'entrée à un lycée de 4 ans (général ou professionnel) ou à un établissement d'enseignement professionnel de 3 ou 5 ans. Le nombre d'heures de mathématiques à l'école fondamentale varie entre 3 et 5 séances hebdomadaires de 45 minutes chacune et au lycée entre 2 et 4 séances hebdomadaires de 45 minutes chacune.

2. Production ou formulation de questions et de problèmes en général (*Problem posing*)

La notion anglaise de *problem posing* recouvre plusieurs activités plus ou moins différentes liées à la production ou formulation de questions et de problèmes. C'est la raison pour laquelle nous utilisons cette notion dans ce texte. D'après Leung (1997), le *problem posing* représente la création de nouveaux problèmes dont les résolutions ne sont pas connues au moins pour celui qui les crée. [...] Et ainsi, le *problem posing* consiste en la modification de la formulation d'un problème donné dans différentes représentations. Selon Bonotto (2006), le *problem posing* est considéré comme un processus dans lequel les élèves créent leurs propres interprétations des situations particulières basées sur leurs expériences mathématiques et les formulent comme un problème mathématique. Ceci leur permet d'interpréter et d'analyser la réalité, c'est-à-dire de distinguer les données pertinentes et non-pertinentes, de découvrir les relations entre les données et décider de l'(in)suffisance des informations disponibles pour la résolution du problème.

Sous la notion de *problem posing*, Silver (1993) distingue trois types d'activités plus ou moins différentes. Le premier type consiste à créer les énoncés avant la solution d'un problème (*presolution posing*). Il s'agit d'une situation donnée (par exemple issue de la vie courante) à partir de laquelle on crée de nouveaux énoncés. Dans le deuxième type d'activités, on modifie ou reformule l'énoncé de problème au cours de la résolution du problème (*within-solution posing*). Cette interprétation de l'énoncé aide à mieux comprendre l'énoncé et à faciliter la résolution du problème. Le troisième type d'activités vise à changer les données de l'énoncé original, ce qui intervient après la résolution du problème (*postsolution posing*). Ainsi, de nouveaux énoncés naissent à partir de l'énoncé original. Pour illustrer chacun des trois types d'activités, nous présentons un exemple.

Considérons la situation où M. Funès possède une somme d'argent de 1320 €. A partir de cette situation, nous pouvons, sans en chercher la solution, créer l'énoncé suivant:

Monsieur. Funès partage 1320 € entre Monsieur Cruchot, Monsieur Septime et Monsieur Duchemin. Monsieur Duchemin reçoit six fois plus d'argent que Monsieur Cruchot et Monsieur Septime 4 fois plus d'argent que Monsieur Cruchot. Combien d'argent reçoit chacun d'entre eux?

Lorsque nous voulons résoudre le problème proposé ci-dessus, nous faisons des interprétations des données de l'énoncé : il s'agit de 3 personnes, le total est divisé en 11 parties etc. Après avoir résolu le problème, nous pouvons modifier les données et obtenir ainsi de nouveaux énoncés : en faisant varier le nombre de personnes (4 ou 5), en choisissant une somme différente, etc.

Silver (1993) propose aussi plusieurs points de vue sur le *problem posing*. Nous reprenons ceux que nous avons utilisés dans la préparation de notre expérience.

Le *problem posing* est ainsi considéré comme :

- un outil pour améliorer la capacité des élèves à résoudre des problèmes,
- un moyen de pénétrer dans la conception des mathématiques des élèves et des concepts mathématiques construits par les élèves,
- un outil pour améliorer l'attitude des élèves envers les mathématiques,
- un indice de la créativité ou du talent pour les mathématiques.

Le *problem posing* est aussi étroitement lié à la créativité. Selon Silver (1997) et Leung (1997), la créativité caractérise non seulement les personnes ayant du talent, mais elle est aussi liée à des connaissances approfondies sur un domaine particulier. Ceci implique que les élèves ayant déjà acquis les connaissances sur un ou plusieurs domaines des mathématiques scolaires peuvent s'en servir pour développer leur créativité. Torrance (1966) a défini trois composantes clés de la créativité qui permettent de la mesurer :

- *Continuité/fluidité (fluency)* : se rapporte au nombre d'idées produites en répondant à une tâche.
- *Flexibilité (flexibility)* : se rapporte aux changements d'approches qui apparaissent en répondant à une tâche.
- *Nouveauté (novelty)* : se rapporte à l'originalité des idées produites en répondant à une tâche

Le tableau suivant (Leung, 1997) montre les relations entre la formulation de problèmes, la résolution de problèmes et la créativité.

Résolution de problèmes	**Créativité**	**Formulation de problèmes**
Les élèves explorent les problèmes « à fin ouverte », avec de nombreuses interprétations, manières de résolution et réponses ou solutions possibles.	→Fluidité←	Les élèves produisent beaucoup de problèmes et partagent les problèmes produits. Les élèves produisent les problèmes pour lesquels existent de nombreuses procédures de résolution.
Les élèves résolvent (expriment ou justifient) les problèmes d'abord d'une manière puis, d'autres manières. Les élèves discutent de nombreuses manières de résolution.	→Flexibilité←	Les élèves utilisent l'approche «S'il n'y avait pas... » pour produire les problèmes.
Les élèves examinent de nombreuses manières de résolution ou des réponses (expressions ou justifications), ensuite, ils en produisent une autre, différente des précédentes.	→Nouveauté←	Les élèves examinent quelques problèmes produits et ensuite, ils produisent un problème différent.

Dans le cadre de notre expérience, nous nous sommes concentrés sur le développement de la première des composantes - la fluidité. Les élèves ont du créer un problème original par rapport aux autres problèmes créés. Nous décrirons le déroulement de l'activité dans la partie suivante.

3. Description de l'expérience

Cette activité fait partie d'une recherche complexe en cours, menée par Guy Brousseau et Jarmila Novotna - *Contribution de la culture scolaire et des situations didactiques à l'éducation mathématique.* L'outil de recherches est le problème « verbal » et son traitement par les élèves. Parmi les questions que nous nous posons dans le cadre de la recherche, nous allons citer celles qui sont liées à notre expérience :

- Les élèves sont-ils capables d'identifier et d'expliquer les ressemblances et les différences entre les problèmes donnés; d'identifier les problèmes relevant du même modèle mathématique ?
- Les élèves sont-ils capables de créer les problèmes d'après une consigne spécifique ?
- Comment cette activité peut-elle contribuer à la motivation des élèves pour l'apprentissage des mathématiques ?
- Quelles compétences mathématiques peuvent être développées au cours de cette activité ?

La partie de cette recherche que nous allons décrire est l'expérience que nous avons appelée « Concours d'originalité de problèmes ». Ce concours a été réalisé dans une classe d'un collège-lycée pragois de 8 ans avec les élèves de 13-14 ans (8^{e} année de scolarité).
Les objectifs du concours étaient :

- attirer l'attention des élèves vers les problèmes en tant que lien entre les mathématiques et la fiction de la vie réelle,
- faire créer par les élèves des énoncés de problèmes correctement formulés,
- faire résoudre par les élèves des problèmes insolites,
- faire discuter les élèves sur les problèmes,
- savoir classer les problèmes d'après le modèle mathématique.

Dans le « Robert quotidien », un modèle mathématique est défini comme un « modèle formé par des expressions mathématiques et destiné à simuler un certain processus ». Pour l'exemple d'énoncé de problème que nous avons cité ci-dessus, il s'agit de la relation de la partie à un tout qui en est le modèle mathématique. Nous montrerons d'autres exemples plus tard.
Le concours comporte trois séquences. **La première séquence** vise à introduire l'activité. Elle dure 45 minutes. Son objectif est d'introduire les notions de base qui sont utilisées dans le cadre du concours - le problème original, les problèmes de la même famille. Le professeur propose trois problèmes aux élèves qui travaillent par deux et leur tâche est de les résoudre. Ensuite, ils écrivent les solutions au tableau. Le professeur leur demande d'identifier les différences et les similarités dans les résolutions des problèmes proposés pour ensuite en discuter en classe. Ensuite, il est demandé aux élèves d'inventer d'autres problèmes originaux et de la même famille en lien avec les trois problèmes proposés. A la fin de la première séquence, il est demandé aux élèves d'inventer un problème original pour participer au concours des problèmes originaux.

Avant de présenter les problèmes qui ont été proposés pendant la première séquence, nous donnons les définitions des notions de base que nous avons inventées pour cette activité : le problème original, les problèmes de la même famille. Le problème original est un problème dont le modèle mathématique nécessaire pour la solution diffère des modèles des problèmes donnés. Les problèmes de la même famille sont les problèmes dont le modèle mathématique est partiellement ou totalement le même que le modèle d'un problème donné. Il faut souligner deux aspects importants de ces catégories. Le classement est toujours relatif à un groupe spécifique de problèmes et, dans certains groupes de problèmes, plusieurs variantes de classement peuvent apparaître.

Pour illustrer les notions de base pour les élèves, le professeur a proposé les problèmes suivants :

1. Hier, dans un bistrot, 188 croque-monsieurs, croque-madames et sandwichs ont été vendus au total. Nous savons qu'il y avait sept fois plus de croque-monsieurs que de sandwichs et de huit croque-madames de plus que de sandwichs. Combien de croque-monsieurs, croque-madames et sandwichs ont été vendus?
Croque-Madames........ $x + 8$; Croque-Monsieurs.....7. x; Sandwichs................. x;

Total................................188
$x + 7x + x + 8 = 188$ $\underline{x = 20}$

On a vendu 140 croque-monsieurs, 28 croque-madames et 20 sandwichs.

2. M. Funès partage 1320 € parmi M. Cruchot, M. Septime et M. Duchemin. M. Duchemin reçoit six fois plus d'argent que M. Cruchot et M. Septime 4 fois plus d'argent que M. Cruchot. Combien d'argent reçoit chacun d'entre eux?

M.Cruchot........ x; M.Septime..........4 x; M.Duchemin......6.x; Total............1320 €

$x + 4x + 6x = 1320$ $\underline{x = 120}$ €
M.Cruchot reçoit 120 €, M.Septime reçoit 480 € et M.Duchemin 720 €.

3. Un bus et une voiture partent en même temps pour Pilsen à 8h. Le bus roulant à la vitesse moyenne de 60 km/h arrive à Pilsen à 10h précises. A quelle heure arrive à Pilsen la voiture roulant à la vitesse moyenne de 90 km/h. Le bus et la voiture ont suivi le même chemin.

60 km/h.................... 120 minutes; 90 km/h....................... x minutes

$x : 120 = 60 : 90$ $\underline{x = 80}$ 8h + 1h20 = <u>9h20</u>
La voiture arrive à Pilsen à 9h20 .

Le modèle mathématique des deux premiers problèmes est la relation de la partie à un tout, donc il s'agit de problèmes de la même famille. Le troisième problème est du modèle de la proportion inverse donc c'est un problème original par rapport au cadre du groupe de problèmes donné.

La deuxième séquence dure deux semaines. Les élèves créent d'abord des problèmes, se familiarisent avec les problèmes proposés par les autres élèves et les résolvent. Au bout d'une semaine, tous les élèves apportent leurs énoncés de problèmes puis le professeur les rassemble sur un document qu'il distribue aux élèves. Pendant une semaine, chacun a le droit de remplacer, une fois, le problème qu'il a proposé par un autre. Ensuite, la classe est divisée en groupes de 4 – 5 élèves, les élèves devant se répartir entre eux tous les problèmes et les résoudre à la maison.

Les deux premières séquences constituent la préparation pour **la troisième séquence** - le concours d'originalité de problèmes. Le concours se déroule pendant deux cours consécutifs. Les élèves doivent classer les problèmes en familles et chercher le ou les problèmes originaux. Pendant la première partie, les élèves travaillent en groupes, ils discutent des problèmes, ils s'adressent aux auteurs dont les énoncés ne sont pas bien faits pour les amener à préciser ou à reformuler les énoncés. Ensuite, ils discutent en groupes et répartissent les problèmes en familles. Au cours de la deuxième partie, chaque groupe présente un problème, le classe dans une famille ou pas et doit justifier sa décision : chaque groupe participe au classement et chaque groupe parvient à des catégories en partie différentes. Dans la discussion finale, les élèves échangent sur les familles établies et proposent des modifications dans la classification des problèmes.

4. Evaluation de l'activité

L'expérience est composée de plusieurs activités. Nous en avons choisi deux qui nous semblent avoir contribué à développer la culture mathématique des élèves - la création d'énoncés de problèmes et la discussion en classe sur la classification de problèmes.

Remarques sur les énoncés créés

Les élèves ont produit 23 énoncés qui varient selon plusieurs caractéristiques. Les élèves ont pu être influencés par la notion d'originalité et ils l'ont recherchée dans différents aspects et non dans le modèle mathématique. La longueur des énoncés varie, des plus courts (26 mots) aux plus longs (208 mots). Le contexte et les actants des énoncés étaient surtout proches du manuel scolaire ou du milieu quotidien des élèves ; le registre de langue était plutôt standard en dehors de quelques énoncés contenant des expressions familières. La difficulté des problèmes à résoudre était adéquate au niveau des élèves, à l'exception d'une devinette et d'un problème exigeant des procédures inconnues des élèves. Pour la plupart des énoncés, le modèle mathématique était la relation de la partie à un tout.

Les élèves ont aussi créé quelques énoncés qui n'étaient pas clairs et univoques ou encore dont la solution n'existait pas. Nous allons donner deux exemples d'énoncés qui illustrent les erreurs les plus fréquentes.

<u>Les boîtes de jus</u>
Dans un magasin, il y avait une offre spéciale «Jus d'orange en boîtes». Le 1er jour, on a vendu <u>9/18</u>, le 2e jour 40 boîtes de jus et le soir, ils ont découvert <u>3/36</u> derrière un casier. Combien de boîtes de jus y avait-il au départ ?

Les fractions citées dans l'énoncé représentent les parties d'un tout qui n'est pas explicitement défini. Après les questions des autres élèves, l'auteur a corrigé l'énoncé de la manière suivante :

Dans un magasin, il y avait une offre spéciale «Jus d'orange en boîtes». Le 1er jour, on a vendu 9/18 <u>du nombre total</u>, le 2e jour 40 boîtes de jus du nombre total et le soir, ils ont découvert 3/36 du nombre total derrière un casier. Combien de boîtes de jus y avait-il au départ ?

L'autre exemple illustre le cas d'énoncés de problèmes dont la solution n'existait pas.

Les champignons

Trois copines - Pauline, Caroline et Monique - ont ramassé des champignons. Pauline a trouvé 4 champignons de plus que Caroline et Monique deux champignons de moins que Pauline. Elles on trouvé 53 champignons au total. Après le retour à la maison, Pauline a réalisé qu'elle avait 5 champignons véreux, Caroline 6 et Monique 3. Combien de champignons avait chacune d'elles à la fin?

$$3x + 6 = 53 \qquad x = 47/3$$

L'auteur a aussi modifié l'énoncé en choisissant 51 comme nombre total de champignons.

La classification des problèmes

Pendant le travail en groupes, plusieurs familles sont apparues : fractions, pourcentages, temps, transformation d'unités, mélange des problèmes non classés...Le travail en classe a commencé par la création d'un grand nombre de familles. Au cours de la discussion, certaines de ces familles ont été réunies et les élèves se sont mis d'accord sur la classification finale. Certains problèmes ont été classés dans plusieurs familles selon les différentes procédures de résolution des problèmes. La discussion a aidé certains élèves à comprendre les similarités et différences des modèles mathématiques, ainsi que le montre l'extrait suivant :

Il précède une discussion sur quelques problèmes concernant les fractions et les pourcentages.
P - professeur, E - élève (s)

- E Dans certains groupes (de problèmes), on travaille non seulement avec les pourcentages, mais aussi avec les fractions.
- P Et... Certains de ceux-ci?
- E En plus, par exemple dans le problème (*appelé*) Řáholec, il y a aussi la proportionnalité.
- P Dans le problème Řáholec, on travaille aussi avec la proportionnalité. Alors, qu'est-ce que vous avez fait avec cela?
- E Classer Řáholec dans deux catégories.
- P Classer Řáholec dans deux catégories. Et où le classer?
- E Classer Řáholec dans deux catégories et le classer aussi dans *le rapport*.
- P Bon, on va le séparer *(créer une nouvelle catégorie)*, il n'y a pas de catégories comme ça.
- E Mais je pense classer dans deux catégories ceux qui ont des fractions …
- P C'est une question…. Qu'en pensez-vous ?
- E Classer dans deux catégories.
- P Classer dans deux catégories?
- E Classer dans deux catégories.

- P Les problèmes avec des fractions.....vous avez dit....un groupe a dit qu'il y a des problèmes avec des pourcentages et des problèmes avec les fractions...Alors, on les garde tous dans une catégorie ou on les classe dans deux catégories ?
- E Mais c'est la même chose...
- P Honzo…
- E ...que c'est la même chose...
- P Et pourquoi c'est pareil?
- E Parce que quand on travaille avec des pourcentages, on peut faire pareil avec des fractions, avec les mêmes nombres.
- P Bien…. Báro, tu partages cette opinion ? Oui. Tout le monde est d'accord ?
- *(E sont d'accord)*
- P D'accord, on met dans une seule catégorie tout ce qui est avec les pourcentages et les fractions. D'accord ? oui? Katko...
- E Ben, on y ajoute encore...

Le travail se poursuit par un reclassement de problèmes concernant les fractions et pourcentages dans la même catégorie. La découverte de l'analogie entre le calcul avec les pourcentages et avec les fractions constitue, pour les élèves, un nouvel exemple de relations entre différents domaines mathématiques. Certains énoncés dont il était question dans l'extrait de discussion sont présentés ci-dessous:

- *Les boîtes de jus*

Un magasin a proposé une offre spéciale «Jus d'orange en boîtes». Le 1er jour, il a vendu 9/18 du nombre total, le 2e jour, 40 boîtes de jus du nombre total et le soir, il restait 3/36 du nombre total derrière un casier. Combien de boîtes de jus y avait-il au départ ?

- *Le plat*

Sur la carte d'un restaurant, les prix ont été indiqués pour 500 grammes. La portion prévue pour les enfants était deux fois plus petite et encore réduite de 28%. Combien de grammes de nourriture reçoit un enfant?

- *La forêt Řáholec*

Křemílek et Vochomůrka sont allés ramasser des champignons dans la forêt Řáholec. En rentrant, ils ont rencontré Manka et Rumcajs qui avaient 50 champignons. Křemílek et Vochomůrka avaient 16% de moins qu'eux. Křemílek et Vochomůrka ont trouvé les champignons de quatre espèces : amanites, cèpes, chanterelles, bolets rudes dans le rapport 3:2:5:4. Combien d'exemplaires de chaque espèce de champignons ont trouvé Křemílek et Vochomůrka?

- *Les escargots*

Julián a 1/4 du nombre total des escargots. Krasoslav en possède 1/8, Mirka a 1/4 de plus que Tupmila qui, malheureusement, n'a pas d'escargots. Milada a toute une moitié du nombre total des escargots, à la différence de Jarda qui n'appartient pas du tout à ce qroupe, parce qu'il collecte les limaçons et les pélicans. Exprime à l'aide d'un rapport lequel des groupes a le plus d'escargots? Julián, Milada et Mirka, ou Krasoslav et Tupmila

Conclusion

Le concours d'originalité de problèmes représente un moyen pouvant contribuer à développer la culture scolaire des élèves. Il permet aux élèves d'analyser les énoncés de problèmes différents, de les comparer et d'en chercher les ressemblances et différences. Il contribue aussi à développer une attitude plus positive envers les problèmes « verbaux ». La validation des résultats fait partie de la discussion et devient ainsi indépendante du professeur. En plus, la création d'énoncés de problèmes représente une part essentielle du travail des mathématiciens. L'aspect motivant de l'activité est favorisé par la compétition et par l'apprentissage en groupes.

L'activité a été assez bien acceptée par les élèves. D'après le questionnaire d'évaluation qu'ils ont rempli après le concours, ils ont apprécié surtout la possibilité de communiquer leur propre opinion, de devoir justifier les décisions, de pouvoir réviser la résolution de différents problèmes et surtout de pouvoir réfléchir aux procédures de résolution, pas seulement aux solutions des problèmes.

Le concours nous a fourni quelques réponses aux questions que nous nous sommes posées auparavant. Les élèves ont su créer des énoncés de problèmes dans des domaines différents de leur connaissance mathématique préalable, ont été capables de découvrir les ambiguïtés de la formulation des énoncés, d'en discuter et de reformuler les énoncés, ce qui représente un travail sur la précision mathématique et sur l'utilisation de la langue. Au cours de la discussion, les élèves se sont mis d'‘accord sur la classification finale des problèmes et ils ont découvert la ressemblance entre les fractions et les pourcentages.

Pourtant, il reste encore des questions ouvertes concernant surtout l'évaluation de l'activité et l'introduction de l'activité dans l'enseignement :

-Comment évaluer cette activité? Qu'est-ce qu'on peut mesurer/évaluer?

-Quand et comment introduire cette activité dans l'enseignement?

-Quels en sont les avantages et inconvénients pour le professeur et pour les élèves?

-Quelles sont les relations de cette activité avec la connaissance mathématique préalable des élèves, la maîtrise de la langue maternelle, la mention en mathématiques etc?

Bibliographie

[1] Bonotto, C. (2006): Extending students' understanding of decimal numbers via realistic mathematical modeling and problem posing, Paru dans: Novotna, J., Moraova, H., Kratka, M. & Stehlikova, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2. 33-40. Prague: PME.

[2] Brousseau, G. (1998): Théorie des situations didactiques. Grenoble: La pensée sauvage. 395 p. coll. Recherches en Didactique des Mathématiques.

[3] Novotna J. (2000): Analyza reseni slovnich uloh [kapitoly z didaktiky matematiky]. Praha: Univerzita Karlova. 23 p.

[4] Sarrazy, B. (2002): Effects of variability of teaching on responsiveness to the didactic contract in arithmetic problem-solving among, Paru dans: *European Journal of Psychology of Education*. 2002. vol. XVII. 3. 321-341.

[5] Silver, E.A. (1994): On Mathematical Problem Posing, Paru dans: *For the Learning of Mathematics*. 2002. vol. 14. 1. 19-28.

[6] Silver, E.A., Cai, J. (1996): An analysis of aritmetic problem posing by middle school students, Paru dans: *Journal for Research in Mathematics Education* vol. 27. 5. 521-539.

L’évolution des connaissances qu’ont les enfants des fonctions cognitives de l’écriture des nombres : apport de l’épreuve DENORECO[1]

Christelle Delaplace & Annick Weil-Barais

Laboratoire de Psychologie « Processus de Pensée et Interventions »
Université d’Angers[2]
christelle.delaplace@univ-angers.fr
annick.weil-barais@univ-angers.fr

Résumé

Nous présentons ici une épreuve (DENORECO) conçue dans la perspective d’évaluer la capacité des enfants à utiliser leur notation numérique des quantités pour résoudre des problèmes. Les résultats présentés comparent les réponses d’élèves du CP au CM2. Ils mettent en évidence les difficultés qu’ont les enfants à comprendre que l’écriture numérique des quantités préalablement dénombrées peut être ultérieurement réutilisée pour effectuer des calculs. Ils attirent l’attention sur un aspect jusqu’alors peu pris en compte dans les études concernant le développement des compétences numériques des enfants, à savoir leur connaissance des fonctions cognitives des systèmes de notation. Lorsque les notations sont produites par l’enfant à la demande, on n’est pas assuré que l’enfant comprenne bien la nature du lien entre ce qui est noté et les aspects de la réalité qui sont notés.

1 Introduction

Du point de vue anthropologique et psychologique, un certain nombre d’auteurs (en particulier, Olson, Goody, Vygotski) ont attiré l’attention sur le fait que l’écriture fait partie de ce qui a le plus transformé le psychisme humain. Par exemple, le fait de noter des informations permet de dépasser nos capacités de mémorisation, de communication, de réflexion et de raisonnement. L’écriture libère en partie des contraintes spatio-temporelles et cognitives (limitation de la mémoire de travail et de l’accès aux connaissances en mémoire à long terme). Ce qui est écrit peut être repris, retravaillé et réfléchi, à condition que les traces fassent sens pour la personne qui y est confrontée.
Si à l’échelle du développement de l’espèce l’idée d’une transformation des modes de pensée associée à l’invention, la transformation et l’instrumentation des systèmes d’écriture (l’imprimerie, les formalismes logiques, algébriques, les logiciels de traitements de texte, etc.) est étayée par un certain nombre de faits (par exemple, le développement des sciences et des technologies), on manque de données au plan psycho-génétique. De fait, on connaît mal les transformations des conduites des enfants associées à l’appropriation des différents systèmes d’écriture qu’ils apprennent à l’école. De manière générale, comme nous l’avons relevé dans

[1] La réalisation de cette recherche a bénéficié du soutien du programme de recherche « Ecole et Sciences Cognitives » de la MRT et du programme de recherche « OuForEP, Outils pour la Formation, l’Education et la Prévention » de la région des Pays de La Loire.

[2] Laboratoire de Psychologie « Processus de Pensée et Interventions »
Université d’Angers, Maison des Sciences Humaines
11 boulevard Lavoisier, 49045 Angers Cedex 01

une précédente publication (Weil-Barais, Gaux & Iralde, 2007), la connaissance par les enfants des fonctions pragmatiques et cognitives qu'assurent les notations a été très peu étudiée. Quelques travaux ont pu mettre en évidence une émergence de la fonction référentielle des notations vers l'âge de 6 ans (Bialystok, 2000 ; Bialystok & Martin, 2003 ; Tolchinsky Landsmann & Karmiloff-Smith, 1992). Ce n'est que vers 8-9 ans, voire même 11 ans que les enfants acquerraient la capacité à produire des notations adéquates, le contexte social pouvant par ailleurs avoir un effet sur ces productions (Schubauer-Leoni & Perret-Clermont, 1980.)

Concernant la connaissance du système numérique qui nous occupe dans cet article, les tests existant (l'UDN-II de Meljac & Lemmel, l'Échelle d'apprentissages scolaires primaires (ECHAS) de Simonart, le Numérical de Gaillard, le Tedi-Math de Van Nieuwenhoven, Grégoire & Noël, le Péda 1C (tests pédagogiques de 1er cycle primaire) de Simonart n'évaluent pas la connaissance des fonctions cognitives de l'écriture des nombres, en premier lieu la fonction référentielle. Or, l'une des fonctions essentielles de l'écriture des nombres est de représenter des quantités qui peuvent faire ensuite l'objet de traitements (comparées, combinées, etc.) en l'absence des collections d'objets.

Les compétences numériques évaluées par les tests existants (niveaux maternelle et école primaire) concernent la classification et la sériation, la conservation des quantités (en référence à la théorie de Piaget), la connaissance de la suite des numéraux, le dénombrement, la lecture des nombres, leur écriture sous dictée, la connaissance des signes opératoires et des opérations arithmétiques (en référence aux travaux qui mettent l'accent sur l'importance de la connaissance de la suite numérique, des procédures de dénombrement et des algorithmes de calcul). Les rares items qui pourraient évaluer ce que les enfants se représentent à propos des nombres concernent l'estimation de grandeurs. Par exemple, on demande à l'enfant de comparer deux collections d'objets (sans pouvoir les compter), ou on lui pose des questions du type : « une lettre de 20 pages, est-ce beaucoup ? » (Épreuve d'estimation en contexte du test Numerical ; Gaillard, 2000).

L'absence d'épreuves concernant la connaissance de la fonction référentielle des nombres, nous a conduits à construire une épreuve spécifique que nous allons dans un premier temps décrire. Dans un second temps, nous présenterons les données obtenues dans deux études exploratoires. En conclusion, nous indiquerons les évolutions possibles de l'épreuve en fonction de ces données.

2 Présentation du test

Les questions qui ont orienté la conception du test sont les suivantes : quel lien existe-t-il entre la capacité à écrire les nombres et l'usage des quantités notées pour faire des calculs ? A quelle période du développement les enfants utilisent-ils spontanément leurs notations ?

Le test DENORECO (« DENO » pour dénombrement et « RECO » pour réunion de collections) a été créé pour répondre à ces questions (Weil-Barais, Gaux, Iralde & alli, 2004). Il a été initialement conçu pour être intégré à une batterie de tests destinée à l'évaluation de la maîtrise des systèmes de notation chez l'enfant âgé de 6 à 12 ans[3].

La situation présentée aux enfants permet, d'une part, d'observer comment, à la demande de l'observateur, les enfants notent spontanément les quantités. D'autre part, elle a pour but de rendre compte de l'utilisation spontanée que font les enfants des notations qu'ils ont produites, afin de réaliser un calcul simple (addition de deux quantités inférieures à 10, de façon à ce que les enfants n'aient pas de difficulté à effectuer les opérations mentalement).

[3] La conception de cette batterie a été réalisée dans le cadre d'un programme de recherche COGNITIQUE ECOLE & SCIENCES COGNITIVES : Pratiques d'écriture et instrumentation du psychisme : approches psychologiques et didactiques (2001-2003).

Les quatre premiers items ont pour but de vérifier les capacités de dénombrement et d'écriture des nombres de l'enfant. Les deux derniers items sont ceux qui nous intéressent particulièrement puisqu'ils sont liés à la fonction référentielle de la notation. Ce sont ces deux items qui nous permettent d'observer si les enfants utilisent spontanément leurs notations.

2.1 Matériel

Il est composé de boîtes remplies de petits objets en bois peint (environ 2 cm) représentant des animaux marins (figure 1), d'un sac pour recevoir le contenu des boîtes lorsqu'ils sont mélangés (items 5 et 6) et du matériel pour écrire, dessiner ou découper. Il s'agit d'une trousse d'écolier comprenant des crayons (noir et de couleur) et une gomme, une paire de ciseaux, un double-décimètre et un rapporteur ainsi que d'une feuille de papier au format A4.
Les boîtes sont au nombre de quatre. La boîte n°1 contient 6 poissons, la boîte n°2, 8 poissons, la boîte n°3, 2 poissons, 2 étoiles de mer et 3 oiseaux et, enfin, la boîte n°4, 4 poissons, 4 étoiles de mer, et 4 oiseaux. Pour chaque boîte, une gommette différente est collée sur le couvercle permettant de l'identifier.

Insérer ici la figure 1

Sur la feuille de papier sont dessinées six cases (trois lignes comprenant chacune deux cases), identifiées de telle sorte que les quantités à additionner ne soient pas disposées l'une en dessus de l'autre. Cette présentation vise à ne pas induire une réponse mécanique.

2.2 Conditions d'administration du test

Cette épreuve est individuelle. La consigne générale de l'épreuve est énoncée par l'expérimentateur. Il montre à l'enfant les différentes boîtes et la feuille de réponse. Il attire son attention sur les différentes gommettes apposées sur les couvercles. Il explique qu'il mettra les contenus des différentes boîtes sur la table et que la tâche demandée sera d'abord de dire combien il y a d'objets et ensuite de noter la quantité sur la feuille fournie, à l'endroit correspondant au dessin du couvercle de la boîte (montré du doigt à chaque item).
Les items 1 à 6 sont présentés successivement, sans limitation de temps.
Item 1 : l'expérimentateur renverse le contenu de la boîte n°1 sur la table, en prenant soin qu'il n'y ait pas de recouvrement entre les objets (6 poissons). La gommette sur le couvercle de la boîte reste visible. L'expérimentateur demande alors à l'enfant combien il y a d'objets, et de noter sa réponse sur la feuille de papier mise à sa disposition dans la case correspondante qu'il pointe du doigt (cf. figure 2).
Si la quantité indiquée est incorrecte, l'expérimentateur aide l'enfant jusqu'à ce qu'il fournisse oralement la quantité exacte d'objets. En effet, il ne s'agit pas de tester la capacité à dénombrer, mais d'évaluer l'écriture des quantités.
Item 2 : la boîte n°2 est utilisée. La procédure est sensiblement la même que pour l'item 1 mis à part que les objets (8 poissons) sont disposés en ligne sur la table avec un intervalle d'environ 1 cm entre deux objets.
Item 3 : les objets de la boîte n°3 (2 poissons, 2 étoiles de mer, 3 oiseaux) sont disposés en désordre sur la table mais sans recouvrement. Si l'enfant commence par indiquer oralement le nombre d'objets par catégorie, l'expérimentateur lui demande d'indiquer combien il y a d'objets en tout.
Item 4 : les objets sont disposés sur la table en lignes par catégorie (4 poissons, 4 étoiles de mer, 4 oiseaux). La correspondance terme à terme entre objets est respectée. Cette fois encore, si l'enfant indique le nombre d'objets par catégorie, on lui demande de dire combien il y a d'objets en tout.

Items 5 et 6 : Pour l'item 5, l'expérimentateur indique à l'enfant qu'il va maintenant mélanger le contenu des boîtes 1 et 2 et que ce dernier devra dire et noter combien il y a d'objets en tout. Pour l'item 6, ce sont les contenus des boîtes 3 et 4 qui sont mélangés. Deux variantes de disposition du matériel ont été expérimentées : ensemble des objets visible ou non visible (*cf.* § 2.4).
Dans le contexte des études rapportées ci-après, l'enfant est informé qu'il participe à une étude, que ses propres résultats ne seront pas divulgués, qu'il doit répondre du mieux qu'il peut aux questions qui lui seront posées mais qu'il a le droit de ne pas savoir faire. Il a par ailleurs tout le temps qu'il souhaite pour répondre. Le livret utilisé où sont notées les consignes et les réponses des enfants comporte le titre « écrire », ce dont l'enfant peut prendre connaissance, mais son attention n'est pas attirée sur cette information.

2.3 Grilles d'observation

Pour chacun des items, l'expérimentateur note sur une grille d'observation les réponses de l'enfant. Les informations relevées sont les suivantes : 1) la quantité verbalisée, 2) la quantité notée, 3) le type de notation et 4) les stratégies utilisées.
Les différents types de notations répertoriés dans les grilles sont : la réponse numérique – la notation utilise les chiffres arabes ; la réponse numérale – nombres écrits alphabétiquement ; la réponse graphique figurative – les quantités sont représentées à l'aide de dessins figuratifs (par exemple, l'enfant dessine des poissons, des oiseaux et des étoiles) ; et enfin la réponse graphique non figurative – l'enfant utilise des signes ou symboles (par exemple, il dessine des bâtons ou des croix).
Les différents types de stratégies référencés dans les grilles sont le dénombrement (par comptage oral ou pointage), l'addition, la multiplication, et enfin le calcul à partir des quantités notées. Dans ce dernier cas, l'enfant regarde ou pointe du doigt les quantités qu'il a notées sur sa feuille de réponses, calcule mentalement ou en verbalisant. Dans certains cas, l'enfant pose l'opération.

Insérer ici la figure2

Chaque item donnant lieu à des ensembles de stratégies particuliers, les différents types de stratégies répertoriés diffèrent sensiblement d'un item à l'autre. Par exemple, la stratégie « utilisation des notations » ne vaut que pour les items 5 et 6 pour lesquels les notations précédentes peuvent être utilisées. La grille d'observation de l'item 5 est présentée à titre d'exemple en figure 2.

2.4 Variantes

Dans la mesure où il s'agit d'un test en cours de validation, à l'heure actuelle deux versions du test ont été expérimentées. Nous précisons ci-après les variantes (DENORECO-0 et DENORECO 1) et les raisons qui nous ont conduits à procéder à des modifications.

- Dans la version 0, pour les items 5 et 6, les contenus des boîtes sont vidés dans un sac en toile ; dans la version 1, les contenus sont déversés directement sur la table. Cette modification vise à éviter que les enfants pensent que la tâche relève d'actions matérielles à accomplir, ce qui peut être induit par l'action de mettre dans le sac. Elle nous a été suggérée par les données d'un premier recueil de résultats montrant la persistance à un âge avancé des conduites de dénombrement.
  Pour la version 0, l'enfant n'est pas incité à vider le sac. Le sac est néanmoins posé sur la table de travail et l'enfant est autorisé à le manipuler s'il le souhaite. Ainsi, la consigne reste la même pour les deux versions de l'épreuve, c'est-à-dire indiquer le nombre d'objets en tout, et le noter sur la feuille de réponse.

- Dans la version 0, les gommettes collées sur les couvercles des boîtes représentent des animaux en couleur et stylisés de manière enfantine, alors que dans la version 1, elles représentent des symboles et figures géométriques de couleur noire. Cette modification a été introduite, les données de la première étude nous ayant laissé penser que le caractère enfantin des dessins pouvait induire des réponses peu élaborées.

3 Données développementales

Nous présentons ci-après les données relatives aux deux recueils de données réalisés utilisant successivement les deux variantes du test, à deux années d'intervalle.

3.1 Sujets

La première version de l'épreuve (DENORECO-0) a été soumise à 80 enfants scolarisés du CE1 au CM2. Vingt enfants étaient en CE1, 20 en CE2, 20 en CM1 et enfin, 20 en CM2.
Dans la seconde version (DENORECO-1), l'échantillon est constitué de 145 enfants non redoublants de CP, CE1, CE2, CM1 et CM2, âgés de 6 à 11 ans. Les caractéristiques de cette population sont présentées dans le tableau 1. Notons que les élèves de CM1 sont peu représentés dans cette étude. S'agissant d'une étude exploratoire, nous n'avons pas cherché à constituer un échantillon représentatif de la population scolaire française. Les résultats de nos études seront indiqués en pourcentages de façon à permettre une comparaison entre les différentes classes dont les effectifs ne sont pas équivalents.

Insérer ici le tableau 1

3.2 Ecriture des quantités

Nous présenterons dans cette partie les résultats concernant les quatre premiers items de l'épreuve qui avaient pour but de vérifier que les enfants savaient écrire une quantité dénombrée.
Dans les deux versions de l'épreuve, les items 1 à 4 ont été massivement réussis par les enfants : ils écrivent numériquement les quantités et ce qu'ils écrivent correspond à la quantité dénombrée. Les pourcentages de réussite par classe et par item sont compris entre 90 % et 100 %, ce qui est conforme à nos attendus : que les enfants n'aient pas de problème de dénombrement et qu'ils savent noter les quantités, de façon à pouvoir isoler ce qui relève uniquement de la connaissance de la fonction référentielle des nombres.
Dans les deux recueils de données, ce sont les enfants de CE1 qui réussissent le moins bien l'épreuve, même si les scores de réussite restent toutefois très élevés (94 % avec DENORECO-0 et 95 % avec DENORECO-1). Les autres classes, y compris la classe de CP du recueil de données de la version DENORECO-1, plafonnent à 98 % de réussite minimum.
Les stratégies de comptage utilisées pour les items 1 à 4 ont été plus particulièrement analysées concernant la version DENORECO-1. Les enfants de CP utilisent préférentiellement la stratégie de dénombrement pour compter les objets (1,2,3,4,5…). A partir du CE1, les stratégies de comptage changent radicalement. Les enfants vont utiliser beaucoup plus fréquemment l'addition. Cette stratégie se manifestait différemment en fonction des items. Par exemple, pour les items 1 et 2 où une seule catégorie d'objets était présente, l'addition pouvait se manifester par un regroupement deux par deux ou trois par trois des objets (ex : 2+2+2). Pour les items 1 et 4 qui présentent des collections hétérogènes d'objets, certains enfants additionnent les quantités correspondant à chacune des catégories d'objets (ex : 2 poissons + 2 étoiles + 3 oiseaux).

A partir du CM1, une autre stratégie entre en jeu pour dénombrer les objets de l'item 4 (disposition en ligne de collections égales de trois catégories d'objets) : les enfants multiplient la quantité par le nombre de catégories (3x4).

Insérer ici le tableau 2

Les données principales concernant les procédures utilisées sont récapitulées dans le tableau 2 : de 77 % à 82 % des enfants de CP utilisent le dénombrement. Cette stratégie est encore utilisée par 25 à 38 % des enfants de CE1 et 55 à 59 % des enfants de CE2. Ils ne sont plus que 15 à 31 % à utiliser le dénombrement en CM1, et 9 % à 54 % en CM2.
On relèvera que cet ensemble de résultats est compatible avec ceux obtenus par d'autres auteurs auprès d'enfants des classes d'âge considérées (par exemple Camos, Fayol & Barrouillet, 1999)

3.3 Utilisation des quantités notées

Nous appréhendons la connaissance de la fonction référentielle des notations à partir des analyses des conduites aux items 5 et 6. Le but est de voir si les enfants utilisent spontanément les quantités qu'ils ont notées sur leur feuille de réponse pour faire face aux problèmes posés (de type « composition de collections »). Nous analysons séparément la justesse des réponses et la procédure employée pour y parvenir.
Dans nos deux recueils de données et toutes classes confondues, les items 5 et 6 ont engendré 83 à 99 % de réponses correctes (quantités correctement écrites). Les taux de réussite sont donc globalement élevés.
Il faut cependant noter que, tout comme pour les items 1 à 4, les enfants de CE1 du second recueil de données sont ceux qui ont le moins bien réussi les items 5 et 6 (66 % et 69 % de réussite respectivement). Dans le premier recueil de données, les performances des CE1 étaient largement supérieures (85 % de réussite pour l'item 5 et 80 % pour l'item 6). Cette différence de réussite pourrait peut-être être attribuée à un effet classe que, dans le cadre de cette étude, nous sommes incapables de contrôler, faute de disposer d'informations sur les pratiques pédagogiques et le niveau général des élèves.

Insérer ici le tableau 3

Si nous nous intéressons maintenant à la stratégie utilisée par les enfants pour additionner le contenu des boîtes, relevons tout d'abord qu'il existe des différences entre nos deux recueils de données : avec DENORECO-0 (voir tableau 3), bien que les objets soient placés dans un sac et ne soient pas directement dénombrables (l'enfant doit en effet choisir de vider le sac pour dénombrer), très peu d'enfants de CE1, CE2 et CM1 ont pensé à utiliser leurs notations pour fournir leurs réponses aux items 5 et 6 : ils sont entre 25 et 35 % seulement à avoir utilisé ce qu'ils avaient noté précédemment pour faire une addition. C'est en CM2 seulement que les enfants utilisent majoritairement leurs notations, même s'ils ne sont encore que 60 % à le faire.

Insérer ici le tableau 4

Avec DENORECO-1 (voir tableau 4), l'utilisation majoritaire des notations est plus précoce. En effet, c'est à partir du CE2 que les enfants utilisent préférentiellement ce qu'ils ont écrit pour répondre aux items 5 et 6 : ils sont entre 62 et 77 % à partir de ce niveau scolaire à utiliser leurs notations. En CP et CE1, seulement 9 à 14 % des enfants ont recours à cette stratégie.
On assiste donc à un changement de stratégie de résolution à partir du CE1 avec l'épreuve DENORECO-1 alors que ce changement a lieu à partir du CM1 seulement avec DENORECO-0.

3.4 Interprétation des résultats

Afin d'affiner les analyses, nous avons croisé la réussite aux items 5 et 6 et la procédure de résolution, afin de déterminer si la justesse des réponses est dépendante de la stratégie que l'enfant utilise pour donner sa réponse. Il pourrait en effet être envisagé que les enfants qui commettent le plus d'erreurs sont ceux qui font des calculs à partir des notations.
Cette analyse a été réalisée uniquement à partir du recueil de données de la version DENORECO-1 qui concerne davantage d'enfants.
Dans un premier temps, nous avons étudié le lien entre stratégie de résolution et réussite toutes classes confondues. Dans un second temps, nous avons observé ce lien à l'intérieur de chaque classe : nous pouvons en effet supposer que les plus jeunes qui calculent à partir des notations auront tendance à plus se tromper que les plus jeunes qui recomptent. De même, les plus jeunes qui calculent à partir des notations pourraient plus facilement commettre des erreurs que les plus âgés qui calculent également à partir de ce qu'ils ont inscrit sur leur feuille de réponse.
Les résultats, toutes classes confondues, montrent d'abord que la réussite aux items 5 et 6 est plus importante chez les enfants ayant utilisé leurs notations. En effet, 95 % des enfants utilisant leurs notations écrivent correctement sur leur feuille la réponse correspondant à l'addition des quantités des deux boîtes désignées. Parmi les enfants qui recomptent les objets, 80 % fournissent la réponse correcte. Ainsi, contrairement à notre idée première, le dénombrement serait ici plus source d'erreurs que le calcul à partir des notations.
Ensuite, pour examiner le lien entre procédure de résolution et réussite en fonction du niveau scolaire de l'enfant, nous avons effectué des regroupements de classes. Etant donné que le changement de stratégie (du dénombrement au calcul à partir des notations) se situe entre le CE1 et le CE2 avec DENORECO-1, nous avons regroupé les CP et les CE1 d'un côté et les CE2, CM1 et CM2 d'un autre côté.
Le tableau 5 confirme que les enfants qui ont utilisé leurs notations sont ceux qui réussissent le mieux les items 5 et 6, et cela même chez les plus jeunes : nous avons chez ces enfants des

performances de réussite qui sont de l'ordre de 92 à 100 %. C'est en dénombrant, et non pas en calculant, que les enfants font le plus d'erreurs. Effectivement, les pourcentages de réussite sont compris entre 74 et 93 %. Ceci renvoie aux difficultés liées au dénombrement décrites par de nombreux auteurs (par exemple, Fuson, 1991 et Van Nieuwenhoven, 1999).

Insérer le tableau 5 ici

Plus précisément, chez les plus jeunes, l'écart de performances entre ceux qui utilisent leurs notations et ceux qui recomptent est plus important que chez les plus âgés. En effet, les enfants les plus jeunes qui dénombrent le tout sont enclins à faire plus d'erreurs que les plus âgés qui utilisent cette procédure. Les plus jeunes qui dénombrent réussissent l'épreuve à hauteur de 74 % (item 5) et 78 % (item 6), alors que les plus âgés qui utilisent cette même stratégie réussissent l'épreuve dans des proportions supérieures, de l'ordre de 93 % (item 5) et 82 % (item 6). Chez les enfants qui utilisent leurs notations, on ne trouve pas de différence en fonction du niveau scolaire. Contrairement à ce à quoi nous nous attendions, les plus jeunes qui calculent à partir de leurs notations ne commettent aucune erreur (100 % de réussite pour les deux items mais ils ne sont que 7 sur 54 à le faire).[4] Ces données sont difficiles à interpréter mais on peut faire l'hypothèse suivante : ne se lancent dans les calculs que les élèves très sûrs d'eux. Toutefois, comme nous l'évoquerons en conclusion, il conviendrait de conduire une étude plus extensive de façon à mieux cerner les déterminants de l'usage des nombres dans leur fonction de représentation.

4 Conclusion et discussion

Bien qu'au cours de l'enseignement (de l'école maternelle à l'école primaire) les enfants soient entraînés à noter toute sorte d'informations, ils ne pensent pas toujours à les utiliser. En effet, nous avons vu avec cette épreuve que les performances évoluaient avec l'âge : l'utilisation spontanée des notations devient plus fréquente que le dénombrement à partir du CE2. Néanmoins, de 30 à 40 % des élèves en CM2 n'ont pas un usage spontané des notations et ont recours au dénombrement des objets plutôt qu'à l'addition des quantités notées numériquement. Les modifications de la présentation de la tâche (sac présent ou non) n'introduisent pas de variations importantes dans les conduites des enfants. Ceci conforte l'idée qu'il y aurait une difficulté cognitive fondamentale liée à l'usage des nombres dans leur fonction de représentation. Les enfants peuvent savoir noter numériquement des quantités et faire des opérations mais ne pas penser à utiliser leurs notations pour résoudre des problèmes. C'est une observation que nous avions faite de manière fortuite en contexte de classe et qui, à l'époque, nous avait rendus perplexe, faute de bien saisir que la fonction référentielle des notations numériques n'était pas immédiate pour les enfants. Le fait de demander à l'enfant d'écrire une quantité préalablement dénombrée ne garantit pas que l'enfant comprenne le lien entre les aspects de la réalité représentée et sa représentation symbolique. Les chiffres qu'écrit l'enfant n'auraient au départ qu'un statut de code graphique et ce n'est que progressivement que ces codes prendraient sens par rapport à un système de notations qui permet, entre autres, de faire des additions.

Ce constat peut paraître surprenant, surtout chez les élèves les plus âgés. Cependant, il est possible que notre épreuve ne soit pas adaptée à ces élèves, qui ont pu la trouver trop facile, et par là-même saugrenue. Effectivement, les quantités à additionner étant faibles, ces élèves ont pu se demander ce qu'on attendait d'eux. Dans ce genre de contexte où le contrat expérimental n'est pas clair pour les enfants, il est fréquent d'observer des réponses

[4] Les effectifs d'enfants ayant utilisé leurs notations étant faibles, les pourcentages n'ont qu'une valeur indicative.

inattendues de leur part. Il conviendrait sans doute d'adapter notre épreuve pour qu'elle soit plus en adéquation avec les capacités des élèves les plus âgés, par exemple en augmentant les quantités à dénombrer. Ceci permettrait de préciser les contraintes en termes de quantités à dénombrer qui poussent les enfants à utiliser les nombres dans leur fonction référentielle.
Si on s'attarde plus spécifiquement aux erreurs en fonction de la procédure de comptage choisie par l'enfant, il apparaît que les erreurs sont commises en majorité par les enfants les plus jeunes qui ne savent pas bien dénombrer. Effectivement, les enfants qui utilisent leurs notations font moins d'erreurs que ceux qui comptent les objets, et ce, même chez les plus jeunes. Il semblerait donc que lorsque les enfants utilisent la fonction référentielle des nombres, ils savent bien calculer : ils font dans ce cas très peu d'erreurs de calcul, indépendamment de leur âge. Par contre, les enfants les plus jeunes qui utilisent le dénombrement font plus d'erreurs que les plus âgés qui utilisent cette même procédure.
Les données obtenues attirent l'attention sur la connaissance des fonctions des nombres qui n'est pas nécessairement acquise lorsque les enfants en maîtrisent l'écriture. Des investigations sont à poursuivre dans deux directions. D'une part, il serait nécessaire de dupliquer l'étude sur un plus grand nombre d'enfants, en recueillant des indications sur la sensibilité des maîtres à cet aspect de la connaissance des nombres. Nous avons en effet observé des différences de résultats entre les deux études conduites. Ces différences pourraient être attribuables soit aux modifications intervenues dans le matériel (matériel plus scolaire dans la seconde étude), soit à des différences de niveau ou de pratiques pédagogiques. Ces aspects seraient à contrôler. D'autre part, il serait également nécessaire de procéder à des investigations plus approfondies, en interrogeant l'enfant après-coup, en utilisant par exemple la technique de l'ECA (entretien cognitif à visée d'apprentissage) mis au point par Perraudeau (2002) : comment l'enfant justifie-t-il la procédure employée pour résoudre les problèmes, est-il capable d'envisager d'autres procédures que celle qu'il a mise en œuvre spontanément, comment réagit-il à une suggestion qui lui serait faite d'utiliser les nombres déjà écrits ?
On relèvera, pour terminer, que le caractère tardif de l'accès à la fonction de représentation des nombres n'a rien de surprenant en regard des travaux mentionnés en introduction relatifs au développement de l'usage des représentations externes. Il conviendrait de mieux connaître les modalités éducatives et pédagogiques qui permettent aux enfants de la maîtriser. Quoi qu'il en soit, il s'agit d'un aspect à faire travailler aux enfants dans le cadre de l'enseignement des mathématiques puisque comme nous l'avons établi, les enfants peuvent savoir écrire numériquement des quantités et ne pas penser à faire usage de ce qu'ils ont noté pour résoudre des problèmes.
Malgré le caractère encore inachevé de la conception du test, il permet de cerner la disponibilité de la connaissance (« en actes »[5]) de la fonction référentielle des nombres. Des études sont à poursuivre pour identifier les déterminants cognitifs et sociaux de l'usage des notations numériques.

5. Références

Bialystok, E. (2000). Symbolic representation across domains in preschool children. *Journal of Experimental Child Psychology, 76*, 173-189.

Bialystok, E. et Martin, M. M. (2003). Notation to symbol : development in children's understanding of print. *Journal of Experimental Child Psychology,86*, 223-243.

[5] Comme le rappelle Vergnaud (1996), toute connaissance a une composante opératoire et prédicative. DENORECO teste la composante opératoire de la connaissance des nombres.

Camos, V., Fayol, M., & Barrouillet, P. (1999). L'activité de dénombrement chez l'enfant : Double tâche ou procédure? *L'Année Psychologique*, *99*, 623-645.

Fuson, K. (1991). Relations entre comptage et cardinalité chez les enfants de 2 à 8 ans. In J. Bideaud, C. Meljac & J.P. Fischer (eds) : *Les chemins du nombre* (pp. 159 – 179). Lille : Presses Universitaires de Lille.

Gaillard, F. (2000). Numerical. Test neurocognitif pour l'apprentissage du nombre et du calcul. *Actualités Psychologiques, édition spéciale*.

Goody, J. (1977). *La raison graphique*. Paris : Editions de Minuit. Traduction française en 1979.

Meljac, C., & Lemmel, G. (1999). *UDN-II. Construction et utilisation du nombre*. Paris : ECPA.

Olson, D. R. (1998). *L'Univers de l'écrit. Comment la culture écrite donne forme à la pensée.* Paris : Retz.

Perraudeau, M. (2002). *L'entretien cognitif à visée d'apprentissage : un dispositif pour aider l'élève en mathématique.* Paris : L'Harmattan.

Schubauer-Leoni, M.-L. & Perret-Clermont, A.-N. (1980). Interactions sociales et représentations symboliques dans le cadre de problèmes additifs. *Recherches en didactique des mathématiques, 1(3),* 297-350.

Simonart, G. (2006). *Echelle d'apprentissages scolaires primaires*. Namur : AFAPMS.

Simonart, G. (1998). *Péda-1c. Tests pédagogiques de premier cycle primaire*. Braine-le-Château : ATM.

Sinclair, H. (1988). *La production de notations chez le jeune enfant ; langage, nombre, rythmes et mélodies*. Paris : Presses universitaires de France.

Tolchinsky Landsmann, L. et Karmiloff-Smith, A. (1992).Children's understanding of notations as domains of knowledge versus referential-communicative tools. *Cognitive development, 7*, 287-300.

Van Nieuwenhoven, C. (1999). *Le comptage. Vers la construction du nombre*. Bruxelles : De Boeck.

Van Nieuwenhoven, C., Grégoire, J., & Noël, M.-P. (2001). *Tedi-Math. Test diagnostic des compétences de base en mathématiques*. Paris : ECPA.

Vergnaud, G. (1996). Au fond de l'action, la conceptualisation. In J.M. Barbier (Edit.), *Savoirs théoriques et savoirs d'action* (pp. 275-292). Paris : PUF.

Vygotski, L. S. (1934/1997). *Pensée et langage*. Paris : La Dispute.

Weil-Barais, A., Gaux, C., & Iralde, L. (2007). Développement des fonctions pragmatiques et cognitives de l'écriture. In J.-P. Gaté, & C. Gaux (Edits.), *Lire-écrire de l'enfance à l'âge adulte* (pp. 57-76). Rennes : PUR.

Weil-Barais, A., Gaux, C., Iralde, L., Bouchafa, H., Charrier, M., & Nogues, L.M. (2004). *Ecrire : protocole d'observation*. Laboratoire de psychologie, Université d'Angers.

Boîte n°1 et item 1 (●) : 	Boîte n°2 et item 2 (■) : 
Boîte n°3 et item 3 (▲) : 	Boîte n°4 et item 4 (♥) : 

Figure 1 : Contenu des boîtes dest items 1 à 4.

Dénombrement des objets	❑
Dénombrement des notations graphiques	❑
Calcul à partir des notations numériques	❑
Quantité notée	…
Type de notation	…

Figure 2 : Grille d’observation de l’item 5

Classe	Effectif	Garçons	Filles	Âge moyen
CP	22	8	14	6 ans 8 mois
CE1	32	15	17	7 ans 6 mois
CE2	22	10	12	8 ans 9 mois
CM1	13	5	8	9 ans 11 mois
CM2	56	28	28	10 ans 8 mois

Tableau 1 : Echantillon de l'étude 2

	Item 1		Item 2		Item 3		Item 4		
	Dénb.	Add.	Dénb.	Add.	Dénb.	Add.	Dénb.	Add.	Multip.
CP (N=22)	82 %	18 %	77 %	23 %	82 %	18 %	82 %	9 %	5 %
CE1 (N=32)	38 %	63 %	25 %	75 %	34 %	66 %	38 %	50 %	0 %
CE2 (N=22)	55 %	41 %	59 %	41 %	59 %	41 %	55 %	41 %	5 %
CM1 (N=13)	31 %	69 %	23 %	77 %	31 %	69 %	15 %	23 %	62 %
CM2 (N=56)	21 %	50 %	54 %	46 %	37 %	63 %	9 %	46 %	41 %

Dénb. = dénombrement ; Add. = addition ; Multipl. = multiplication

Tableau 2 : Stratégies de comptage utilisées (en pourcentages) en fonction de la classe pour les items 1 à 4 (DENORECO-1)

	Item 5	Item 6	Moyenne
CE1 (N = 20)	30 %	35 %	32,5 %
CE2 (N = 20)	35 %	35 %	35 %
CM1 (N = 20)	25 %	25 %	25 %
CM2 (N = 20)	60 %	60 %	60 %
Moyenne	37,5 %	38,75 %	

Tableau 3 : Pourcentages d'enfants ayant utilisé leurs notations pour les items 5 et 6 (DENORECO-0)

	Item 5	Item 6	Moyenne
CP (N=22)	14 %	9 %	12%
CE1 (N=32)	13 %	13 %	13%
CE2 (N=22)	68 %	68 %	68%
CM1(N=13)	62 %	62 %	62%
CM2 (N=56)	64 %	77 %	71%
Moyenne	46 %	50 %	

Tableau 4 : Pourcentages d'enfants ayant utilisé leurs notations en fonction de la classe pour les items 5 et 6 (DENORECO-1)

	Item 5		Item 6	
	CP & CE1	CE2, CM1 & CM2	CP & CE1	CE2, CM1 & CM2
Dénombrement	74 % (N = 47)	93 % (N = 30)	78 % (N = 46)	82 % (N = 22)
Utilisation des notations	100 % (N = 7)	96 % (N = 59)	100 % (N = 6)	92 % (N = 66)

Tableau 5 : Pourcentages d'enfants ayant réussi l'item en fonction de la procédure utilisée et en fonction du niveau scolaire.

« Il ne faut pas désarticuler un nombre »

Mise en œuvre du dispositif CESAME en primaire

Maryse Maurel, Catherine Sackur, Jean-Philippe Drouhard,

Odile Perriollat, Florence Ciaravola

GECO-IREM de NICE

Les auteurs expérimentent en cycle 3 le dispositif CESAME qu'ils utilisent habituellement au lycée ou à l'université. Ils présentent deux séances en CM1 sur la technique opératoire de la soustraction et une séance en CM2 sur l'ordre des décimaux, pour lesquelles ils ont suivi les quatre étapes du dispositif.
Une comparaison entre le travail ordinaire de la classe et les spécificités du dispositif CESAME leur permet de relever les apports positifs de ce travail.
Mots-clés
dispositif CESAME ; connaissance locale ; connaissance expérientielle ; travail sur les réponses fausses ; ordre sur les décimaux ; écart ; retenue.

Cet exposé relate et analyse des séances que nous avons menées à l'école primaire en CM1 et CM2.

Par rapport à nos travaux antérieurs, ce travail présente deux particularités.

La première concerne le cycle d'enseignement. Nous avions envie, depuis longtemps, de tester le dispositif CESAME à l'école primaire. Ce cycle 3 est pour nous un territoire inconnu, tant en ce qui concerne les sujets mathématiques et les connaissances mises en œuvre que les élèves et leur capacité à jouer le jeu d'un tel dispositif. En faisant ces expériences, nous nous sommes donc aventurées hors de notre domaine habituel, celui pour lequel le dispositif CESAME a été conçu, les années de lycée et les premières années d'université.

La deuxième différence porte sur notre présence dans les classes. Jusque là, nous expérimentions dans nos propres classes avec éventuellement l'aide d'autres membres de l'équipe comme observateurs. Nous n'avions ainsi pas besoin de former des maîtres à la théorie et à la pratique du dispositif CESAME. Nous en sommes des spécialistes, ce qui n'a pas toujours évité les erreurs, mais en minimisait les risques et la fréquence. Avec le travail en primaire, nous avons dû déléguer la mise en œuvre du dispositif à des enseignantes qui le découvraient en même temps que leurs élèves. Avec ce travail, nous avons centré notre attention sur les effets pour les élèves et leur apprentissage. Nous n'avons pas fait d'étude spécifique de l'effet sur les enseignantes.

Le dispositif CESAME

Nous exposons ici le déroulement du dispositif tel qu'il a été conçu dans le cadre de nos recherches. Nous exposerons au fur et à mesure, les difficultés que nous avons rencontrées pour sa mise en œuvre au cours moyen. Le but de ce dispositif est de faire vivre expérientiellement aux élèves la nécessité des énoncés mathématiques en leur faisant rencontrer la réalité mathématique. Cette réalité résiste au même titre que résiste la réalité physique. On ne peut pas modifier un énoncé mathématique et son contenu n'est jamais le résultat d'un consensus ou d'un vote. Les bases théoriques du dispositif se trouvent dans les recherches CESAME et en particulier dans le modèle des trois niveaux de connaissances tel qu'il est exposé dans l'article Sackur et al (2005).

Notre dispositif expérimental s'inspire du débat scientifique de Legrand (Legrand, 1993) avec des finalités différentes : nous souhaiterions que chaque élève, et pas seulement le groupe comme chez Legrand, ait une activité mathématique proche de l'activité d'un mathématicien. Nous essayons de travailler, non pas pour un groupe d'élèves mais pour chaque élève individuellement car nous pensons que nous avons à apprendre de la façon dont chacun pense et construit ses connaissances. C'est cela qui nous permet de travailler sur les connaissances locales, de les identifier et de pouvoir agir pour les modifier. C'est le parcours personnel de chaque élève qui nous intéresse, ce que nous appelons sa singularité.

Le débat scientifique de Legrand donne aux élèves la responsabilité des mathématiques construites dans la classe. Cela se fait sous le contrôle du professeur, bien sûr, car on ne valide jamais un résultat faux, mais tout au long du débat, ce sont les élèves qui ont en charge la détermination du vrai et du faux. Ainsi nous rejoignons Legrand sur la conviction que les mathématiques sont un lieu où chacun peut exercer sa liberté, sans soumission à une autorité extérieure.

Une autre différence avec le débat scientifique de Legrand est que nous travaillons sur des notions anciennes et non dans la construction de nouvelles connaissances.

Le dispositif expérimental est constitué de quatre étapes :

1. Un *travail personnel* assez court de 10 minutes. Cette phase de *travail individuel* permet l'activation des connaissances locales (Léonard et Sackur, 1991) et la production d'erreurs. L'un de nos principes est que les élèves ne répondent pas au hasard. Sachant qu'ils auront à défendre leur travail dans le petit groupe puis à produire un résultat commun face au grand groupe, ils ont une responsabilité personnelle. C'est ici que se mettent en place les "opinions", qui ne sont encore que des "intimes convictions". Ce temps de travail personnel est essentiel à nos yeux.

2. Un *travail en groupes de 3 ou 4 personnes* ayant donné des réponses différentes, lorsque cela est possible ; les membres du groupe doivent se mettre d'accord pour donner une seule réponse que chacun pourra défendre devant la classe complète (le grand groupe). Nous leur demandons d'arriver à une certitude solide et personnelle, qui soit la même pour les quatre personnes et qui ne soit pas seulement un accord public formel. L'obligation d'une justification mathématique de leur réponse s'impose d'elle-même, en général, à cette étape. Le petit groupe rédige un compte-rendu collectif des étapes de son travail. Ce travail permet :

   - de déterminer le résultat exact,
   - de mettre en échec les *connaissances locales* qui donnent des résultats faux,
   - de faire l'expérience de la contradiction (par l'obligation à se mettre d'accord avec un *autrui* extérieur) et de la résistance de la réalité mathématique,

- de construire une nouvelle connaissance (ou de réactiver la connaissance exacte),
- de faire l'expérience du caractère nécessaire (ou d'autres caractéristiques) de la connaissance mathématique.

C'est à cette étape que les opinions personnelles laissent la place à un savoir partagé de nature mathématique. Le professeur ne s'interdit pas d'intervenir auprès des élèves pour demander des explicitations et les aider à faire le point sur leur travail, mais il ne donne pas les réponses mathématiques qui restent à la charge des élèves.

3. Dans une *phase de synthèse en grand groupe*, le porte-parole de chaque groupe, choisi par le professeur, raconte ce qui s'est passé dans son groupe, l'état des choses au début du travail, les étapes de l'évolution des connaissances, la conclusion sur laquelle il y a eu accord et les raisons de cet accord ; les autres complètent éventuellement. La *séance de synthèse* en grand groupe est l'occasion pour les élèves de faire un premier retour réflexif sur leur travail. Le compte-rendu de chaque petit groupe est préparé à la fin de la phase de travail en petits groupes afin que chacun de ses membres soit en mesure de l'exposer. Cette phase permet une confrontation entre les groupes et élargit la palette des problèmes rencontrés et de leurs solutions. Elle est l'occasion de l'explicitation de certaines connaissances et de certains raisonnements, justes ou faux. Enfin elle permet au professeur de faire vivre, pour ceux qui ne les ont pas vécues dans leur petit groupe, les expériences des petits groupes qui méritent d'être partagées dans le grand groupe. Le professeur commente à partir de ce qu'il a observé et relevé sur les comptes-rendus et fait les démonstrations nécessaires si elles sont absentes.
4. *La phase d'institutionnalisation* porte sur les différentes propriétés des connaissances mathématiques : énoncé de la connaissance visée (connaissance d'ordre I), règles du jeu du travail mathématique mises en œuvre par les étudiants (connaissance d'ordre II), le fait que faire des mathématiques c'est établir des énoncés nécessaires en respectant certains principes (connaissance d'ordre III).

Pour des illustrations du dispositif à l'université ou au lycée, on peut voir Maurel (2001) ou Sackur et Maurel (2000).

La soustraction

En CM1 nous avons travaillé deux fois avec les élèves, d'abord sur la technique opératoire de la soustraction puis sur celle de la multiplication. Nous ne donnons ici que les résultats concernant la soustraction.

Le dispositif s'appuie sur les connaissances locales des élèves. Connaître des erreurs ne signifie pas connaître les connaissances locales qui conduisent à ces erreurs. Pour passer des unes aux autres un travail d'analyse est nécessaire, car il faut identifier les limites de la connaissance locale et déterminer de façon précise quelle est la connaissance mathématique qui lui a permis d'émerger. Ce travail n'a pas été fait sur les notions du primaire. Nous l'avons commencé, avec nos co-chercheurs et avons fait l'hypothèse d'une connaissance locale que nous présentons ici. Nous avons observé qu'elle était effectivement présente chez un certain nombre d'élèves.

La principale difficulté de la soustraction est la retenue. Ainsi qu'on peut le voir ci-dessous, dans le travail demandé par l'enseignante à ses élèves, les soustractions sont posées en colonnes. Dans la soustraction 939 - 721, tous les chiffres d'en haut sont plus grands que les chiffres correspondants d'en bas. Il n'y a pas de problème : colonne par colonne, les soustractions sont toujours possibles. Par contre, dans 917 – 738, il y a nécessité de faire des retenues. Nous ne savons pas comment procèdent les élèves qui se trompent.

Une connaissance locale pourrait être : on fait la soustraction dans le sens où c'est possible, en retranchant le plus petit au plus grand, quelle que soit sa place dans la soustraction posée, en haut ou en bas.

Pour 917 - 738, en appliquant la connaissance locale, on obtient 8 moins 7 ça fait 1, 3 moins 1 ça fait 2 et 9 moins 7 ça fait 2, et le résultat est 221. Un autre exemple intéressant est le suivant : 800 - 425 où la connaissance locale fait écrire 425 comme résultat. La fiche de travail présente des soustractions avec et sans retenues. Elle est conçue pour favoriser la production des connaissances locales et la dispersion des résultats dans la phase de travail personnel.

Voici les soustractions proposées aux élèves :

Résous ces opérations :

(1)
```
  9 3 9
- 7 2 1
…………………
```

(2)
```
  9 1 7
- 7 3 8
…………………
```

(3)
```
  3 5 4 7 8
- 1 2 3 2 5
……………………
```

(4)
```
  8 0 0
- 4 2 5
…………………
```

(5)
```
  5 0 0
-   3 2
……………..
```

Justifie tes réponses en expliquant comment tu as procédé.

Déroulement de la séance

Odile fait rappeler aux élèves qui nous sommes, pourquoi nous venons leur rendre visite, puis elle rappelle les consignes et lance le travail individuel.

Travail individuel

Nous observons les résultats des élèves de façon à constituer des groupes dans lesquels apparaissent des résultats différents pour qu'il y ait discussion.

Les soustractions 1 et 3 sont réussies par tous les élèves (au nombre de 25) sauf deux pour la première soustraction. Pour chacune des soustractions 2, 4 et 5, la réussite est de l'ordre de 50%. Le tableau ci-dessous donne les résultats précis ; la ligne "retenue" concerne des oublis de retenue pour lesquels nous n'avons pas identifié de connaissance locale. Pour le faire, il faudrait pouvoir mener des entretiens ou disposer de plus de données. La ligne "autre" correspond, le plus souvent, à une erreur de soustraction élémentaire telle que 4-3 égale 2.

Soustraction	939-721	917-738	35478-12325	800-425	500-32
Bonne Réponse	23	9	25	10	13
Connaissance locale	0	4	0	4	4
Autre erreur de retenue	0	6	0	10	7
Autre réponse	2	5	0	1	1

Sur les trois soustractions qui ont donné lieu à des erreurs, la connaissance locale représente 15% des réponses, l'oubli de retenue 30% et il y a 47% de réponses exactes. Très souvent les élèves n'inscrivent sur leur feuille qu'une partie des retenues ce qui conduit à des oublis de retenue dans une ou deux colonnes. On remarque qu'aucun élève n'a expliqué sa méthode pour faire les soustractions

Travail en petits groupes

Pour l'essentiel, pendant ce temps de travail en petits groupes, les élèves ont comparé leurs résultats et ceux qui étaient certains de ne pas s'être trompés ont expliqué aux autres comment faire. Il n'y pas eu discussion sur les erreurs mais simplement correction. C'est un travail très difficile de discuter sur les erreurs et il n'est pas étonnant que dans la première séance, des élèves aussi jeunes n'aient pas réussi à le faire. La consigne de garder trace des erreurs n'avait pas été donnée de façon suffisamment explicite par l'enseignante. C'est une autre des difficultés que nous avons rencontrées dans la mise en œuvre du dispositif.

Synthèse en grand groupe

La discussion sur les erreurs s'est faite dans la synthèse en grand groupe. Ce moment du travail a beaucoup plu aux élèves d'après les retours que nous avons eus.

Il n'y a pas eu de discussion sur la première soustraction.

Pour la deuxième, une première discussion porte sur la retenue.
Adrien passe au tableau pour 917 – 738. Il dit : « dix-sept moins huit, neuf ; il écrit une retenue de 1 à côté du 3 ; à onze on enlève quatre, sept ; et neuf moins sept, un ».
D'après lui, il faut faire une retenue parce que "7 moins 8, on ne peut pas". Nous faisons préciser ce "qu'on ne peut pas".
Marie répond : « 7 est plus petit que 8, on ne peut pas soustraire, on ne peut pas enlever plus que ce qu'on a, alors on met une retenue. Ça veut dire emprunter une dizaine ou une centaine.

7 – 8, je peux pas ; voir qui peut me prêter une dizaine ou une centaine, alors 17 – 8. Après 1 – 4, je peux pas, j'emprunte une centaine et je la rends. Je l'emprunte au 3 la dizaine ».

Une discussion s'engage, car on ne sait pas à qui on emprunte et à qui il faut rendre.

D'après Quentin, cette dizaine vient de nulle part, on ajoute au nombre 917 une dizaine sous la forme de 10 unités. Ensuite, il faut la "rendre" au 3, de façon à conserver l'écart sinon on effectuerait 927-738 au lieu de 917-738. Quentin fait intervenir l'écart qui doit être conservé si on veut que le résultat soit juste.

« La dizaine vient de nulle part, c'est pour pas changer le nombre, c'est comme 927 – 738. Après, on la rend au 3 sinon 917, ça va plus être ce nombre et on aurait plus la même différence. Si tu veux que ton résultat soit juste, il faut qu'il y ait toujours le même écart entre 917 et 738 ».

Une deuxième discussion commence à la suite de l'échange suivant :

Sébastien : la dizaine, on la prend de nulle part.

Jonathan : je sais pas pourquoi on la rend, on l'a même pas empruntée.

Bastien : pourquoi on la rendrait puisqu'elle appartient à personne.

Frédéric : c'est la méthode.

Cette dernière réponse est une réponse en conformité, or tout montre ici que plusieurs élèves ont peut-être à peu près acquis la technique opératoire mais ne savent pas du tout pourquoi on procède de la sorte. Nous ne pouvons donc nous satisfaire de cet argument d'autorité.

Catherine va au tableau et propose la connaissance locale comme une "autre méthode" que certains ont utilisé pour faire leurs soustractions. Il y a alors un certain flottement. La discussion ne peut véritablement s'engager car il est 11h30 et c'est l'heure de partir déjeuner. Catherine a été obligée de proposer cette connaissance locale car elle n'est pas apparue dans la discussion. Il peut y avoir plusieurs explications à cela : la consigne de garder trace des erreurs n'a pas été assez explicite ; les élèves ne l'ont peut-être pas identifiée lors du travail en petit groupe, ce qui n'est pas très étonnant, c'est un travail difficile ; comme nous l'avons dit, à ce moment du travail, ils se sont surtout attachés à corriger les soustractions fausses.

Certains élèves discutent avec Maryse puis avec Odile dans l'escalier en sortant de la classe.

Bastien et Jonathan : Je suis d'accord avec ce qu'a fait la dame au tableau puisqu'on peut le faire avec la multiplication et l'addition.

Odile : Qu'est-ce qu'on peut faire ?

Eux : On peut changer la place des nombres, sans changer le résultat.

Odile : Est-ce que ce qu'on peut changer dans l'addition et la multiplication, c'est ce qu'a changé la professeure ?

Bastien : Ah non ! On ne peut pas désarticuler un nombre !

La suite de la discussion en grand groupe et l'institutionnalisation

La discussion ne reprend que le lendemain, avec Odile. Catherine et Maryse ne sont pas présentes. Dans un premier temps, il y a discussion sur la conservation de l'écart. Odile rappelle à ce moment une connaissance mise à jour dans le travail sur les problèmes : « on peut prendre plusieurs chemins pour trouver le résultat, mais le résultat sera toujours le même puisque l'énoncé ne change pas et qu'on ne peut pas le transformer. Ici, c'est pareil, il ne faut pas changer l'énoncé donc il ne faut pas changer l'écart ». Pour nous cette connaissance est une connaissance d'ordre II.

Puis Bastien raconte l'échange qu'il a eu dans l'escalier avec Odile sur la non "désarticulation" d'un nombre. Utiliser la connaissance locale revient à échanger le 7 et le 8 des unités et le 1 et le 3 des dizaines.

Odile pose $\begin{array}{r} 9\ 1\ 7 \\ -\ 7\ 3\ 8 \\ \hline 2\ 2\ 1 \end{array}$ qui devient avec les explications de Bastien $\begin{array}{r} 9\ 3\ 8 \\ -\ 7\ 1\ 7 \\ \hline \end{array}$

On a donc changé les nombres, on a changé l'énoncé et ce n'est pas possible de faire ça. Un nombre ne se "désarticule pas", sinon on le change. Ce n'est pas à proprement parler le nombre qui a été désarticulé, mais la soustraction dans son ensemble. Nous avons conservé ici l'expression de Bastien qui nous a paru très imagée.

L'institutionnalisation se poursuit avec le rappel de la connaissance : « on ne peut pas enlever si on n'a pas assez, donc il faut toujours que le nombre du haut soit le plus grand ».

Quelques soustractions de contrôle sont effectuées et la classe travaille ensuite sur les différentes techniques possibles pour faire la preuve que la soustraction est juste.

En résumé, les connaissances institutionnalisées sont les suivantes :

- Dans une soustraction, l'écart entre les nombres doit être conservé,
- On ne peut pas enlever plus que ce qu'on a, il faut faire des retenues,
- On ne peut pas changer l'énoncé, donc on ne peut pas changer les nombres.

Les décimaux

Le travail s'est fait dans une classe de CM2. L'ordre des décimaux est une connaissance du CM1.

Sur les décimaux nous avons identifié, lors d'un travail précédent (Léonard et Sackur 1981), deux connaissances locales, la règle 1 et la règle 2. La règle 1 découle directement de la comparaison des entiers : deux décimaux de même partie entière sont rangés dans le même ordre que leurs parties décimales considérées globalement comme des entiers. Ainsi 12,89 est plus petit que 12,143 parce que 89 est plus petit que 143. La règle 2 donne un résultat inverse : toujours pour des décimaux de même partie entière, un nombre est d'autant plus petit que sa partie décimale est longue.

Il s'agit pour nous, dans ce travail en CM2, de vérifier l'existence de ces connaissances locales, éventuellement d'en découvrir d'autres, mais c'est peu probable car nous connaissons bien la question qui a été souvent reprise par des enseignants. C'est surtout l'occasion d'expérimenter le dispositif. Nous avons affaire à une autre institutrice, Florence, qui travaille beaucoup avec Odile et qui a suivi ses propres élèves de CM1 en CM2. Elle pratique le même genre de pédagogie active, qui laisse une très grande place à l'expression des élèves.

La fiche de travail a été préparée par Florence seule.

Range les nombres décimaux suivants par ordre croissant

- 2,17 - 2,348 - 3,1 - 2,5 - 2,096 - 10,2 - 1,97

....

- 11,68 - 11,898 - 11,8 - 11,75 - 17,15

....

- 15,5 - 15,078 - 15,349 - 15,41 - 15,36 - 15,708

....

- 5,125 - 4,996 - 5,02 - 5,027 - 5,2 - 5,004

....

- 1,414 - 1,4 - 1,05 - 1,054 - 1,504 - 1,44

....

Justifie tes réponses en expliquant comment tu as procédé pour ranger les nombres décimaux.

Déroulement de la séance

Travail individuel

Nous avons relevé les erreurs correspondant aux connaissances locales identifiées pour la comparaison des décimaux. Aucun élève n'a fait d'erreur sur les parties entières. Les erreurs proviennent presque toutes de l'application de la règle 1, très peu de celle de la règle 2. Ce qui frappe, dans le travail des élèves, c'est leur grande cohérence : ceux qui utilisent une règle, bonne réponse ou connaissance locale, le font dans les cinq séries de nombres à classer. Il n'y a que 9 élèves sur 25 qui donnent des réponses variables et dans certaines de ces réponses il y a l'oubli d'un nombre ou une série inachevée. 11 élèves donnent la bonne réponse partout, 6 utilisent la règle 1 et 1 utilise la règle 2.

Comme dans nos travaux précédents, nous constatons que la règle 1 fournit l'essentiel des réponses inexactes. En ce qui concerne les explications sur la façon de procéder, 18 élèves écrivent qu'ils comparent d'abord les parties entières puis les parties décimales. Parmi ces 18, 6 écrivent qu'ils comparent les dixièmes, puis les centièmes, puis les millièmes, ce qui n'est pas forcément ce qu'ils font, mais ils l'écrivent ; 3 écrivent qu'ils ajoutent des zéros (pour avoir des parties décimales de même longueur). Ces deux façons de faire donnent la bonne réponse.

Les autres ne disent pas comment ils comparent les parties décimales. Celui qui a utilisé la règle 2 sur les cinq séries, l'explique : "d'abord j'ai pris la plus petite unité parce que c'est par ordre croissant (du plus petit au plus grand). Puis j'ai regardé les chiffres après la virgule et j'ai pris le plus grand qui en fait est le plus petit".

Il y a donc près de la moitié des élèves, 10 sur 25, qui sont capables d'expliciter une façon de procéder. Ce point est important car il conditionne une partie du travail fait dans les petits groupes. Comme toujours, nous avons constitué les groupes pendant le temps de travail individuel en observant ce qu'écrivaient les élèves de façon à créer les conditions du débat. Ce travail, un peu acrobatique, a fourni ici des groupes qui permettaient la confrontation de procédures différentes.

Travail en petits groupes

Le travail en petits groupes a duré environ 25 minutes. Nous avons eu beaucoup de mal à négocier ce temps de travail. Plusieurs groupes ont refusé, par leur attitude, d'entrer dans le contrat ; dans deux groupes, les groupes 2 et 6, un élève corrigeait le travail de ses camarades, sans les laisser s'exprimer et sans donner d'explication. Il (c'était un garçon) était certain de ses résultats et ne voyait pas l'utilité de faire autre chose qu'une correction de ce qui était faux chez les autres.

En travaillant de façon très proche avec d'autres groupes, nous avons réussi à les conduire vers une attitude correspondant plus à ce que nous souhaitions. Ce fut le cas pour un groupe avec Maryse, le groupe 4, qui a bien identifié les procédures personnelles. Un groupe avec Catherine, le groupe 7 a avancé sur ce chemin. Le groupe 3 a plutôt bien travaillé tout seul. Les groupes 1 et 5 ont réussi à exprimer leur manière de faire juste sans lancer de discussion sur les procédures de chacun.

Revenons sur le travail du groupe 4 : si on regarde les fiches, deux élèves de ce groupe figurent parmi ceux qui ont le mieux exposé leur procédure par écrit.

Maryse rapporte la discussion à laquelle elle a assisté (c'est elle qui parle) :

« Ils comparent leurs résultats, ils sont très différents.

Benjamin : Plus il y en a (des chiffres) après la virgule, plus c'est petit (*règle 2*)

Caroline : Moins il y en a (des chiffres) après la virgule, plus c'est petit (*règle 1*)

Baptiste : Ni l'un, ni l'autre, il faut mettre les dixièmes, les centièmes, les millièmes, exemple pour c), 15,5=15,50 donc 15,41<15,50

Paul : J'ai fait comme ça aussi

Alors tous ensemble, ils reprennent les exercices et les refont, en vérifiant qu'ils sont d'accord ; je demande de rappeler la règle qu'ils utilisent pour vérifier qu'ils utilisent bien tous la même. C'est Paul qui la dit.

Paul : Je regarde d'abord avant la virgule, puis après la virgule

Benjamin : Je prends un exemple (il écrit au verso de la feuille),

18,300 et 18,34

18, 300 et 18, 340

mais j'aurais pu faire

18, 30 et 18,34

Baptiste : moi, j'aurais écrit

18,3 et 18, 34

18,30 et 18,34

Ils sont bien d'accord et reprennent ensemble tous les exercices. Baptiste et Paul avaient déjà les bons résultats. Caroline et Benjamin refont les leurs. Ils disent ce qu'ils font et Paul et Baptiste veillent pour que Caroline et Benjamin s'attendent mutuellement quand l'un distance l'autre. »

Mise en commun en grand groupe

C'était la première fois que nous mettions en œuvre le dispositif CESAME dans cette classe. Nous y avons rencontré des difficultés d'origines diverses que nous pouvons analyser ici.

Il y a eu, tout d'abord, des difficultés liées aux relations entre élèves qui n'ont rien à voir avec le dispositif ni avec les mathématiques mais qui ont fait que certains n'ont pu se mobiliser pour travailler selon un dispositif qu'ils ne connaissaient pas. Cette situation, qui est toujours susceptible de se produire, nous échappe complètement.

Ce dont nous sommes responsables, c'est de l'appropriation du dispositif par l'enseignante. Visiblement, ici, nous n'avions pas clairement explicité à Florence comment doit se passer la mise en commun en classe entière. De ce fait, elle a commencé à demander des explications et à fournir des contre exemples aux élèves avant que l'ensemble des résultats sur une série ait été posé au tableau. Elle est entrée dans un fonctionnement qui lui est familier au lieu de respecter le protocole CESAME que nous, les chercheuses, n'avions pas posé de façon assez claire. Ceci nous donne une occasion supplémentaire de constater que le dispositif a des spécificités précises qui permettent d'obtenir les résultats souhaités et qu'il ne consiste pas en un dialogue argumenté avec les élèves ou des élèves entre eux. Une très grande rigueur est nécessaire pour son application. On retrouve ici une des difficultés que nous avions anticipées pour ce travail avec des enseignantes non spécialistes du dispositif.

Le groupe 4 est venu exposer son travail au tableau et a été capable de dire quelles avaient été les erreurs observées. Par contre, ils n'ont pas énoncé, face au grand groupe, la conclusion à laquelle ils étaient arrivés dans le travail en petit groupe ; ainsi l'enseignante ne dispose de rien pour procéder à l'institutionnalisation et la séance se termine sans qu'on arrive à une quelconque conclusion sur une connaissance juste. Il faut remarquer, une fois de plus, que nous n'avons pas eu suffisamment de temps pour mener à bien les quatre temps du dispositif. La plage entre la fin de la récréation et la sortie, qui dure à peu près une heure et quart, pourrait être suffisante si les élèves étaient bien entraînés. Remarquons que les étudiants du DEUG MASS travaillaient systématiquement avec le dispositif en séance de travaux dirigés de deux heures. C'est sans doute ce vers quoi nous devrons tendre si nous reprenons cette expérience en primaire, même si les deux heures sont coupées par la récréation.

Institutionnalisation

Florence a pu reprendre la mise en commun en classe entière quelques jours après cette séance, prenant prétexte de l'absence d'un élève le jour de la séance pour demander aux autres de lui raconter ce qui s'était passé.

Les trois temps du dispositif ont été bien rappelés ; deux élèves qui utilisaient la règle 1 ont pris la parole pour dire comment ils faisaient “avant”, c'est à dire avant qu'il y ait confrontation dans les petits groupes ; un élève explique l'ajout des zéros et un autre expose la méthode par comparaison des dixièmes, centièmes, millièmes. À ce sujet, Florence reprend une remarque passée un peu inaperçue lors de la séance :

« Aurélie : On regarde le chiffre des dixièmes et celui qui a le plus petit est le plus petit

Alix : Et ceux là, 11,8 et 11, 898 ils ont tous les deux 8 comme chiffre des dixièmes

Alexis : 11,898 c'est presque 11,9 tandis que 11,8, c'est seulement 8 dixièmes »

Lors de la séance suivante, Alix dit que même si on rallonge 2,19699999999 il ne sera jamais plus grand que 2,5.

Plusieurs connaissances auraient pu être institutionnalisées mais nous ne savons pas si elles l'ont été.

Quelques éléments de comparaison entre le dispositif CESAME et le travail ordinaire de la classe

Florence et Odile sont deux enseignantes très à l'écoute de leurs élèves. Cela ne tient pas seulement à une disposition de leur personnalité, il s'agit de choix réfléchis. Tout leur enseignement est construit de façon que les élèves s'approprient un certain nombre de règles de fonctionnement de la classe et prennent des responsabilités dans leur mise en œuvre. Ainsi, des séances comme « ça va, ça va pas » qui ont lieu tous les soirs chez Odile permettent aux élèves un travail de retour sur ce qui s'est passé dans la journée et une mise en commun qui les oblige à une réflexion au delà de l'anecdotique. Le respect de l'autre, qui est constamment mis en avant, les habitue à s'écouter et à laisser circuler la parole tout en maintenant leur attention en éveil. De leur côté, les enseignantes sont aussi très attentives à ce que chaque enfant trouve sa place dans le groupe et soit valorisé dans ses efforts. Sur le plan purement pratique, les tâches matérielles sont réparties entre les élèves, chacun ayant un rôle précis et les responsabilités qui vont avec. Le travail en petits groupes n'est pas très fréquent. Les enseignantes lui préfèrent le travail par groupe de deux car la communication entre les élèves est plus facile lorsqu'ils sont assis côte à côte que lorsqu'ils se font face, ce qui est obligatoire quand ils sont plus de deux. D'autre part, se mettre par quatre nécessite de tourner les tables ce qui prend beaucoup de temps car elles sont lourdes. Dernière spécificité des petits groupes CESAME, ils sont construits pour permettre la confrontation ; les élèves sont susceptibles de changer de place : ceci a créé des problèmes dans la classe de Florence car certains élèves en ont profité pour fouiller dans les affaires personnelles de leurs camarades qui ont alors eu l'esprit distrait de leur travail.

Que va apporter de nouveau le dispositif CESAME à une telle classe ?

Pour les élèves, la nouveauté majeure consiste à s'occuper des réponses fausses au lieu de se contenter de rechercher et d'expliquer la bonne réponse. Il faut identifier les réponses fausses, comprendre leur origine et en garder mémoire pour les exposer à la classe entière ainsi que les raisons pour lesquelles on les rejette.

Pour l'enseignante, la nouveauté se situe aussi dans la gestion des réponses fausses, mais évidemment pas de la même façon que pour les élèves. Odile et Florence ont l'habitude de faire débattre les élèves pour réussir à identifier la réponse exacte à un exercice. Ce qu'elles ont observé, c'est que, au moins en mathématiques, elles dirigent la discussion vers cette réponse, sans toujours laisser le temps aux élèves de comprendre et de discuter des autres réponses.

Lors de la discussion en classe entière, dans le dispositif CESAME, le rôle de l'enseignante est de choisir, parmi tout ce qui est dit par les élèves, ce qu'elle garde et ce qu'elle laisse de côté pour que la solution émerge : elle coupe des branches ou choisit des briques selon la nature de métaphore que l'on préfère. Le travail en petits groupes du dispositif CESAME oblige les élèves à puiser dans les connaissances qu'ils possèdent pour résoudre le problème auquel ils font face : qu'est ce qui est juste et qu'est ce qui est faux dans ce que nous avons faits les uns et les autres ? Ils ont à mettre en commun leurs connaissances qui, avec des différences de degré, sont les mêmes puisqu'ils ont suivi le même cursus, pour résoudre les contradictions qu'ils ont amenées dans le petit groupe. C'est à partir d'un socle commun, dont ils sont sûrs, qu'ils vont pouvoir comprendre les erreurs et se mettre d'accord sur la bonne réponse. Ceci, ils l'apportent ensuite dans la mise en commun en classe entière. Ce qu'ils apportent comme connaissances pour se convaincre, chacun individuellement et tous ensemble, n'est pas forcément ce que l'enseignante aurait apporté. L'enseignante doit respecter le choix des briques et des branches pour amener le débat vers une solution ; c'est un travail difficile car il ne faut pas faire cheminer les élèves par un autre chemin que celui qu'ils ont choisi. Il faut voir, dans ce qu'ils proposent si c'est un chemin susceptible d'aboutir, mais il ne faut pas les obliger à le laisser et à en choisir un autre que l'enseignante juge plus adapté, sinon on risque de tirer à côté du but. C'est dans ce travail qu'Odile et Florence ont identifié une différence entre leur pratique habituelle et ce qu'impose le dispositif CESAME.

Citons Odile : « Quant à ma "méthode" d'enseignement, je réalise que depuis quelque temps, j'usais de "l'argument d'autorité" à savoir : « c'est comme ça, on vous l'a déjà expliqué l'an dernier, en zappant de plus en plus les étapes de décomposition et de distributivité dans la technique opératoire de la multiplication, croyant gagner du temps, pensant que ça les "embrouillait" plus qu'autre chose, n'ayant pas fait le lien entre les différentes erreurs rencontrées jeudi, et surtout en ne laissant pas vraiment la possibilité aux élèves d'expliquer leurs erreurs, de leur laisser s'en rendre compte et trouver les solutions eux mêmes. Je croyais le faire, eh bien non ! »

Ainsi, Odile a été surprise par certaines erreurs faites par ses élèves, qu'elle n'avait jamais identifiées auparavant. En cherchant à conduire ses élèves vers la bonne réponse, elle se privait de certaines informations qu'ils pouvaient lui donner. Le dispositif CESAME, en obligeant les élèves à travailler sur les différentes solutions qu'ils apportent donne ces informations et d'autre part il met en évidence les différences mathématiques entre les réponses justes et les réponses fausses. Les élèves ayant une raison mathématique de choisir la réponse juste sont dans une meilleure situation pour la comprendre et la mémoriser.

De plus, Odile nous dit qu'elle sait mieux maintenant interroger les élèves sur ce qu'ils ont ou n'ont pas compris. Il s'est trouvé qu'en parallèle du travail avec le dispositif CESAME dans sa classe, Odile a lu des articles sur l'entretien d'explicitation. Cette réflexion personnelle, en liaison avec le travail que nous avons fait ensemble, l'a conduite à modifier la façon dont elle interroge les élèves : elle remplace les questions en « pourquoi » par une interrogation qui amène les enfants à travailler sur leurs erreurs ; avec des relances telles que « qu'est-ce que tu fais quand tu fais ça ? » elle constate qu'on peut amener les élèves à dire ce qu'ils savent faire, ce qu'ils ont compris et qu'ainsi ils réfléchissent suffisamment à leurs erreurs pour trouver leur solution.

Si on s'intéresse maintenant aux acquis des élèves après les séances CESAME, on constate qu'ils sont plus solides qu'avec le travail habituel de ces enseignantes. Odile en a été enthousiasmée :

« Je leur propose d'effectuer sur l'ardoise 900 – 32. Deux résultats sont faux. Sans désigner les enfants je dis : “Nous n'avons pas tous les mêmes résultats, tout le monde pense à tout ce qu'on vient de dire et vérifie.” Tous les résultats sont corrigés sur l'ardoise. »

« Par rapport aux autres années : après la séance de « recherche redécouverte », j'avais au minimum 8 enfants à revoir en groupes de besoin. Aujourd'hui j'en ai donc 2 et encore je ne suis pas sûre qu'ils en aient vraiment besoin ; quand je reprends leurs recherches de mardi ce n'était pas aussi mauvais que ça. Résultat à confirmer lundi, après avoir fait brièvement rappeler à l'oral la technique opératoire, notamment pour les 2 élèves en « échec », avant de faire un groupe de besoin pour eux. »

Nous pouvons étudier un effet plus global du dispositif sur les élèves. D'après les observations de Florence, les enfants sont davantage enclins à confronter leurs réponses. Elle l'a constaté avec trois procédures qu'ils ont utilisées pour résoudre un problème de proportionnalité. Pour elle, auparavant, les élèves savaient dire : « je trouve pareil mais je n'ai pas fait pareil » avec une idée vague que si la méthode n'était pas celle proposée par le maître, cela ne devait pas être tout à fait juste. Elle nous dit que les élèves savent qu'on peut faire juste par différents chemins mais « qu'il y a une différence entre le fait de le dire et le fait de leur faire vivre ». Elle pointe ainsi ce que nous appelons une connaissance expérientielle. Dans la théorie CESAME, les connaissances d'ordre II sont des connaissances qu'on ne peut enseigner par un discours mais dont il faut que élèves fassent l'expérience, ce qui est exactement le cas ici.

Dans les deux classes, les élèves ont réinvesti les connaissances discutées et acquises pendant le travail avec le dispositif CESAME, dans un travail ultérieur. En CM1, la connaissance locale est réapparue lors de la soustraction avec les nombres décimaux si on soustrait un nombre à virgule d'un entier : 120-8,14 donne 112,14. En écrivant 120 comme 120,00 les élèves de CM1 ont retrouvé l'argument « il ne faut pas désarticuler un nombre » pour corriger leur erreur. En CM2, toujours pour les opérations sur les décimaux, les résultats acquis lors de la comparaison ont été rappelés et il n'y a eu que très peu d'erreurs. Ces séances CESAME servent donc de référence pour la suite des apprentissages. Les connaissances institutionnalisées à cette occasion sont des points d'ancrage pour des apprentissages futurs.

Dernière remarque sur des effets des expériences CESAME dans les classes :

Les élèves font en sorte que tout le monde écoute les explications, surtout au CM1. Ils ont, plus qu'auparavant, le sentiment que leur parole est prise en compte et ils jouent tous le jeu de l'écoute : « ils en usent et abusent ». Il s'agit pourtant d'une classe où l'écoute de la parole des élèves est particulièrement libre et où le respect mutuel est très important. Il se peut que le dispositif CESAME ait transféré aux activités de mathématiques des modes de fonctionnement qui y étaient moins habituels et que les enseignantes aient été plus attentives à ces phénomènes.

Bibliographie

LEGRAND M. (1993), Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse, *Repères-IREM*. 10, pp 123-158.

LEONARD F. & SACKUR-GRISVARD C. (1981), Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs, *Bulletin de l'APMEP* 327, pp 47-60.

LEONARD F. & SACKUR C. (1991), Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 10(2/3), pp.205-240.

MAUREL M. (2001), Derrière la droite, l'hyperplan. *Repères-IREM* 42, pp.83-114

SACKUR C., ASSUDE T., MAUREL M., DROUHARD J-P., PAQUELIER Y. (2005), L'expérience de la nécessité épistémique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 25/1 pp.57-90.

SACKUR C. & MAUREL M. (2000), Les inéquations en classe de seconde. Une tentative pour enseigner la nécessité des énoncés mathématiques. *Petit x* 53, pp. 5-26.

UN EXEMPLE DE FORMATION CONTINUE À LA MODÉLISATION DANS LE CADRE DU PROJET LEMA : DESCRIPTION ET PROBLEMES RENCONTRES

Richard CABASSUT
PIUFM, IUFM d'Alsace
Didirem Paris 7
richard.cabassut@alsace.iufm.fr

Résumé[1]
En janvier 2008 s'est déroulée à l'IUFM de Strasbourg une formation continue de cinq jours sur l'enseignement de la modélisation à destination de professeurs d'école. Cette formation a été préparée dans le cadre d'un projet européen Comenius et comprend cinq modules : modélisation (c'est quoi et pourquoi, tâches (explorer, classifier, créer), leçons (méthodes, compétences, contenus), évaluation (formative, sommative, rétroaction), réflexion et validation. On présentera la formation proposée, en l'illustrant par quelques extraits. On évoquera ensuite quelques problèmes rencontrés dans la mise en oeuvre de la formation.

Avec le soutien financier de la commission européenne, un projet Comenius européen LEMA[2] rassemble différents partenaires européens, universités ou instituts de formations d'enseignants. « Ce projet propose de soutenir chez les professeurs l'essor de pratiques pédagogiques de modélisation et d'application des mathématiques, par le développement d'un cours de formation pour enseignants. Le but serait, tout en développant une approche commune, de proposer un cours flexible et adaptable aux besoins des pays partenaires actuels ou ultérieurs. La diversité des bonnes pratiques courantes parmi les pays partenaires sera prise en compte pour le développement du cours. Les groupes cibles sont les professeurs de l'école primaire et du début de l'école secondaire, en formation initiale ou en formation continue ». (LEMA 2006)

---

[1] Cette communication est dans le prolongement des ateliers de la Copirelem de Dourdan (Cabassut 2006) et de Troyes (Adjiage, Cabassut 2007)

[2] Le projet LEMA (Learning and education in and through modelling) est cofinancé par l'Union Européenne comme action Comenius 2-1. Des informations se trouvent sur le site www.lema-project.org . Le projet dure d'octobre 2006 à septembre 2009. Les représentants des partenaires du projet sont : Katja Maaß & Barbara Schmidt, University of Education Freiburg, Richard Cabassut, IUFM, Strasbourg, Fco. Javier Garcia & Luisa Ruiz, University of Jaen, Nicholas Mousoulides, University of Cyprus, Anke Wagner, University of Education, Ludwigsburg, Geoff Wake, The University of Manchester, Ödön Vancso & Gabriella Ambrus, Eötvös Lorand University, Budapest.

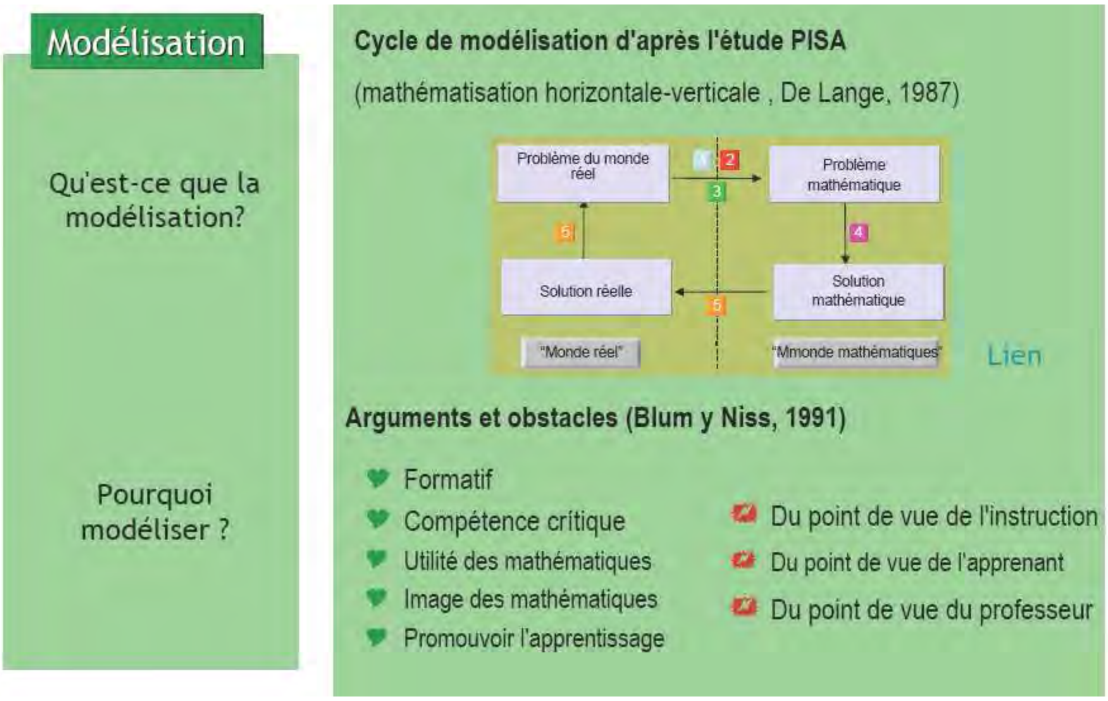
Décrivons le contenu de la formation qui a été élaborée par l'équipe du projet LEMA[2] et expérimentée en France en formation continue, auprès de professeurs d'école, sur une durée de cinq jours.

I – EXEMPLE DE FORMATION A LA MODELISATION

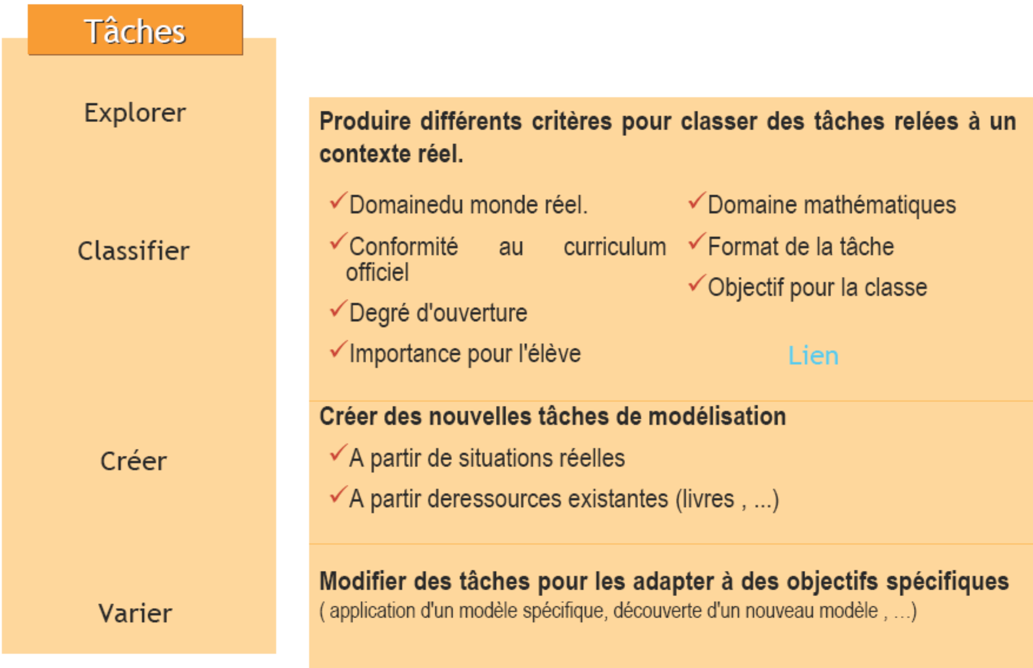
Avant la formation un questionnaire a été diffusé dans les différents pays partenaires pour préciser les besoins en formation. Cette analyse des besoins a permis de constituer une formation en cinq modules indépendants.

I – 1 Structure de la formation

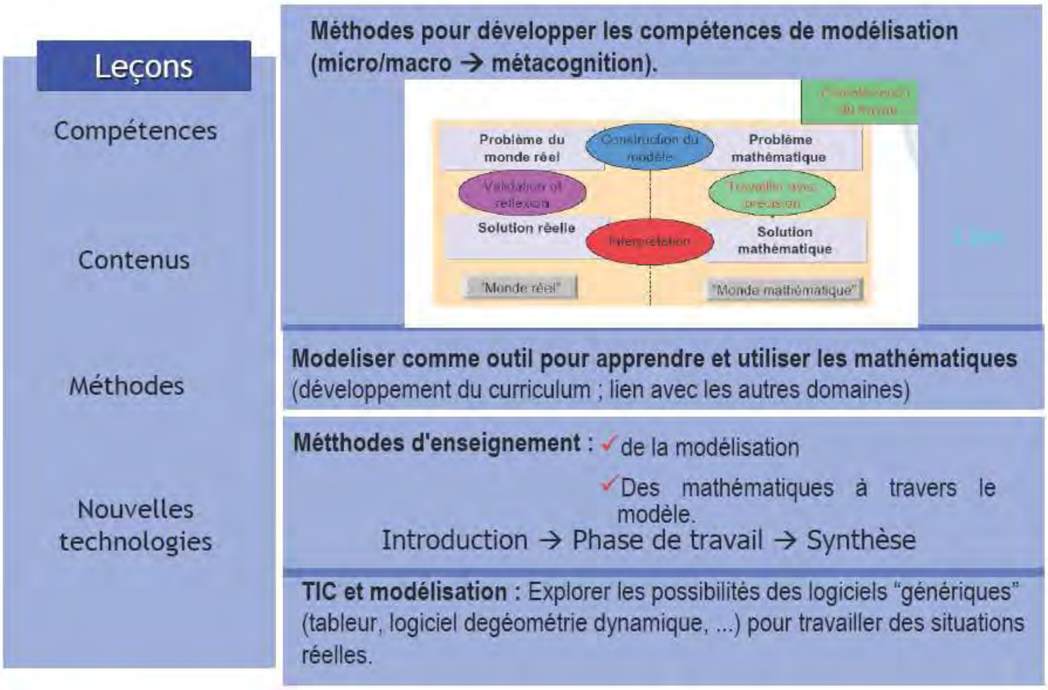
Le **module « modélisation »** propose aux professeurs en formation de travailler sur différentes tâches du monde réel, de réfléchir aux caractéristiques de ces tâches et de penser à des critères permettant de différencier les tâches de modélisation des autres tâches du monde réel. Ensuite est encouragée la réflexion sur l'inclusion d'un nombre plus important de tâches de modélisation et d'application dans l'enseignement, ses bénéfices pour les élèves, mais également les difficultés et les obstacles à surmonter.



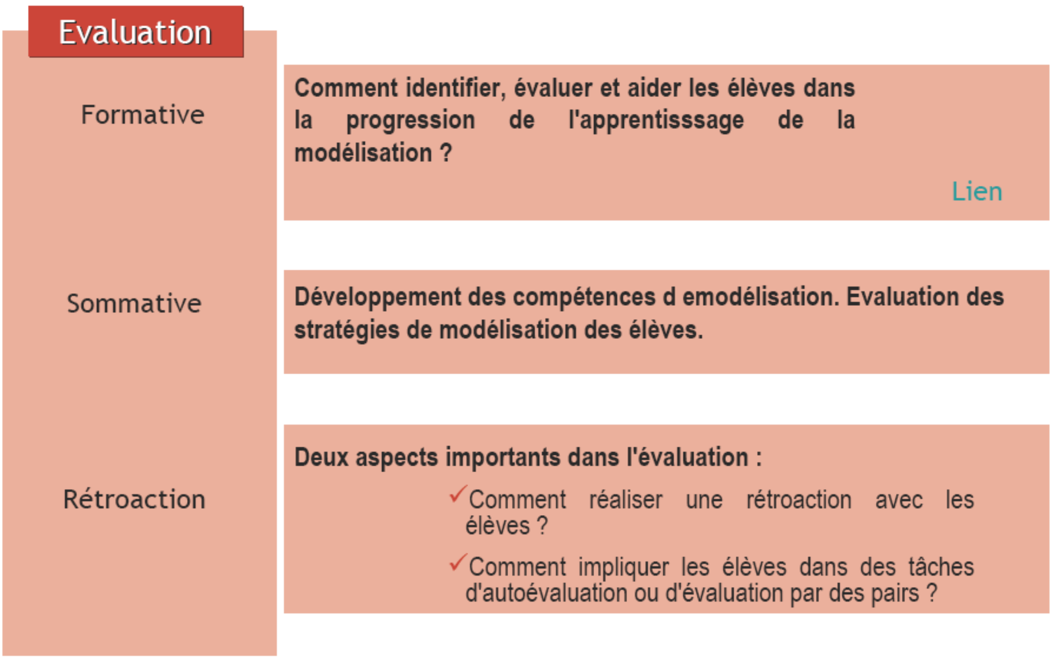
Le **module « tâches »** doit permettre d'autres expériences du processus de modélisation à partir de différentes tâches, de prendre connaissance de tâches variées pour en faciliter la classification, de réfléchir à l'influence de la présentation des tâches sur les stratégies des élèves. Le professeur en formation réfléchit à la façon de préparer de nouvelles tâches à partir de situations réelles, et de réécrire ou adapter des exercices de manuels pour les transformer en tâches de modélisation en fonction des objectifs de ses leçons, de réfléchir à la façon de classifier différentes tâches liées à un contexte et d'avoir une vue d'ensemble de la gamme étendue des tâches qui peuvent être utilisées avec des élèves. Dans le module on considère comment varier les tâches pour s'assurer qu'elles aient toutes les chances de répondre aux objectifs d'un cours.



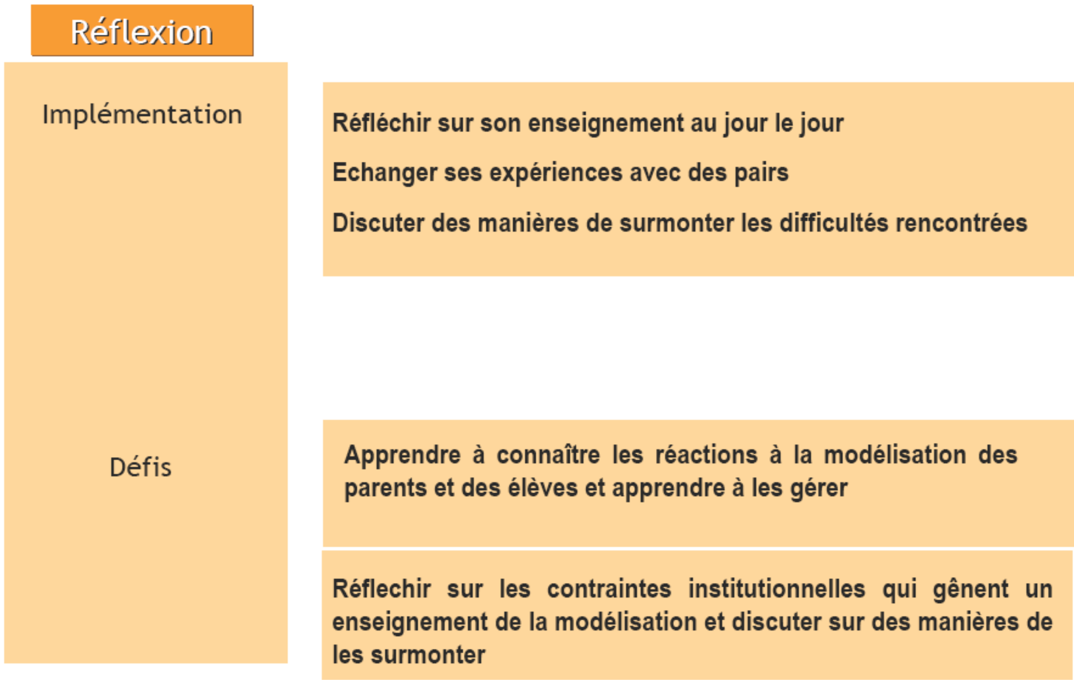
Le **module « leçons »** permet de réfléchir aux questions et aux problèmes importants qui peuvent survenir dans les modélisations en classe, d'envisager plusieurs méthodes et stratégies pouvant être utilisées dans des leçons de modélisation ; de réfléchir aux compétences acquises par les élèves lors de la modélisation, à la façon de concevoir des leçons pour aider les élèves à développer certaines compétences en modélisation et à la façon d'aider les compétences des élèves en matière de raisonnement. On réfléchit à l'importance pour les élèves d'une vue d'ensemble du cycle de modélisation, à la façon d'aider les élèves à développer des stratégies métacognitives et à la façon d'utiliser une approche de modélisation dans l'enseignement en se concentrant sur un contenu mathématique spécifique.



Le module « évaluation » permet de réfléchir à la façon d'identifier, d'évaluer et d'aider les progrès des élèves en modélisation mathématique, de questionner aussi bien l'évaluation formative que sommative, de réfléchir à la rétroaction à donner aux élèves en tant qu'enseignant, lorsqu'ils exécutent en groupes des tâches de modélisation, enfin de réfléchir à des stratégies qui encouragent l'apprentissage de l'auto-évaluation chez les élèves.



Le module « réflexion » examine d'éventuelles réactions à la modélisation des élèves et des parents, la façon de traiter avec eux. Il permet d'examiner la façon dont les caractéristiques de l'institution dans laquelle le professeur formé travaille peuvent le gêner dans ses tentatives pour intégrer la modélisation dans sa pratique de classe. On examine les moyens de surmonter les obstacles. On réfléchit aux expériences de modélisation avec les classes et aux discussions qu'elles peuvent susciter entre collègues dans les écoles où les expériences sont conduites.



I – 2 Matériel mis à la disposition du formateur et des formés

Les ressources suivantes sont mises à disposition du formateur de professeurs et des professeurs formés :

une description schématique de la formation pour le formateur et les formés,

une introduction pour les formateurs,

une introduction pour les formés,

des évaluations initiale, au jour le jour, et finale pour les formés,

pour chaque module : un diaporama du formateur, qui sera également mis à disposition des formés, un guide pour les formateurs, du matériel pour les formés, et un journal du formé.

I – 3 Exemples d'activités de formation et de production

Il n'est pas possible de rendre compte de tous les modules. Nous allons donc extraire quelques exemples d'activités de formation, qui sont bien entendu à replonger dans la progression de la formation.

I – 3.1 module « modélisation »

Proposons un extrait d'activités de formation appartenant au module « modélisation ». D'abord les objectifs et résultats attendus sont indiqués en début de module :

Objectifs	Résultats
Vous devrez : • travailler sur différentes tâches du monde réel. • réfléchir sur les caractéristiques de ces tâches. • penser à des critères permettant de différencier les tâches de modélisation des autres tâches du monde réel.	• Critères d'identification des tâches de modélisation • Vue d'ensemble du processus de modélisation

La structure de la session « module » est précisée :

Lors de la première activité, les professeurs en formation résolvent les six tâches suivantes en groupes de quatre à cinq personnes (6 groupes en tout).

Ensuite on opère trois regroupements de deux groupes. Les solutions trouvées sont comparées, suivant les quatre critères : contexte de la tâche, solutions attendues, connaissances mathématiques utilisées, activités de celui qui cherche la solution. Les similarités et les différences sont dégagées sur une affiche.

Une discussion collective s'ensuit qui permettra de dégager les caractéristiques d'une tâche de modélisation.

Tâche 1 : “Pétition contre une nouvelle loi”

Le parti espagnol d'opposition a récemment présenté au Congrès, le 25 avril 2006, 4 millions de signatures contre une nouvelle loi soutenue par le gouvernement.

Tous les journaux espagnols ont publié des photos des grandes caisses et des 10 camionnettes nécessaires pour transporter les feuilles de papier au Congrès. Pensez-vous qu'il y avait une intention politique derrière cette mise en scène ou bien croyez-vous que toutes ces caisses et ces camionnettes étaient vraiment nécessaires pour transporter ces 4 millions de signatures?

Tâche 2 : “Battement du cœur”

Pour des raisons de santé, il faut limiter ses efforts, comme par ex. en sport, afin que la fréquence cardiaque ne dépasse pas un certain seuil.

Longtemps, la relation entre la fréquence cardiaque maximum recommandée pour une personne et son âge était donnée par la formule suivante :

Fréquence cardiaque maximum recommandée = 220 – âge

Des études récentes ont montré qu'il fallait légèrement modifier cette formule. On obtient ainsi la nouvelle formule :

Fréquence cardiaque maximum recommandée = 208 – (0,7 x âge)

Un article de journal déclarait : “*En utilisant la nouvelle formule à la place de l'ancienne, on voit que le nombre maximum recommandé de battements du cœur par minute diminue légèrement pour les personnes jeunes alors qu'il augmente un peu pour les personnes âgées.*”

À partir de quel âge voit-on une augmentation de la fréquence cardiaque maximum recommandée selon la nouvelle formule ? Présentez votre travail.

Extrait de .oecd.org/dataoecd/46/14/33694881.pdf

Tâche 3 : Festival de musique

Le **Festival des arts du spectacle de Glastonbury** est le plus grand festival de musique et d'arts du spectacle au monde en pleine nature. En 2005, le festival recouvrait une zone clôturée de plus de 3,6 km² et comptait plus de 385 spectacles en direct. Beaucoup de festivaliers viennent avec leurs propres tentes pour dormir à l'intérieur de la zone du festival.

Les organisateurs doivent limiter le nombre de billets et le nombre de tentes autorisées pour garantir la sécurité. Quel conseil pourriez-vous donner ?

Tâche 4 : Gaz naturel

En 1993, les réserves mondiales de gaz naturel étaient estimées à 141,8 milliards de mètres cubes. Depuis cette date, on a utilisé chaque année en moyenne 2,5 milliards de mètres cubes. Calculez à quelle date les réserves de gaz naturel seront épuisées. Utilisez différentes hypothèses et modèles. Expliquez toutes vos étapes.

© Maaß, Katja (2007) : *Mathematisches Modellieren im Unterricht.* Cornelsen Verlag, Berlin

Tâche 5 : Œufs de Pâques

Danielle a trouvé 23 œufs. Elle a un large sourire car elle a trouvé neuf œufs de plus que Chris. Jennie sourit encore plus. Elle a trouvé exactement autant d'œufs que Chris et Danielle réunis. Comment d'œufs a trouvé Jennie ?

Tâche 6 : Les voisins

À votre avis, combien de gens habitent dans cet immeuble ?

Étiquettes des sonnettes dans le hall d'entrée :

© Maaß, Katja (2009) : *Mathematisches Modellieren im Grundschulunterricht.* Cornelsen Verlag, Berlin

Volontairement les tâches sur lesquelles travaillent les professeurs formés ne sont pas toutes du niveau des classes qu’ils ont en charge. Il s’agit d’abord de réfléchir à la modélisation, sans rentrer directement dans la mise en œuvre dans les classes des formés.

I – 3.2 module « leçons », sous-module « méthodes »

Voici quelques activités extraites du module « leçons », sous module « méthodes ».

Objectifs

Vous devrez :

- réfléchir sur les questions et les problèmes importants qui peuvent survenir dans les modélisations en classe.
- envisager plusieurs méthodes et stratégies pouvant être utilisées dans des leçons de modélisation

Déroulement

Vous proposerez dans une première activité vos méthodes.

Vous simulerez ensuite une méthode (par un jeu de rôle).

Vous discuterez enfin de ces méthodes à la lumière de quelques recommandations issues de textes officiels.

Une première activité permet aux formés de proposer individuellement ou en paire leurs méthodes.

Proposer le résumé d'une fiche de préparation en travaillant individuellement ou en paire (comme vous le ressentez) sur une tâche proposée depuis le début de la formation ou sur une tâche que vous avez faite en classe.

Dans ce résumé de fiche de préparation il doit apparaître clairement les méthodes pour :

- introduire la séance
- organiser le travail (déroulement, forme de travail, productions attendues, rôle du professeur, rôle des élèves)
- conclure la séance

Vous pointerez les endroits où vous prévoyez des difficultés et indiquerez quelles solutions vous proposez.

Production attendue : une affiche format A3

Chaque affiche est présentée et une affiche de synthèse des différentes méthodes rencontrées est rédigée et sera discutée ultérieurement.

Dans une seconde activité, un jeu de rôle est proposé dans lequel le formateur joue le rôle du professeur et les formés ceux des élèves.

Jeu de rôle :

- Imaginez que vous êtes un élève d'une leçon de mathématique.
- La leçon commence maintenant.
- Agissez comme un élève le ferait ; par ex., demandez à l'enseignant de vous aider, dites que vous ne savez pas comment procéder, faites une mauvaise réponse … mais…
  observez et analysez attentivement les méthodes d'enseignement utilisées.

La tâche proposée par le professeur (joué par le formateur) est la suivante :

Économiser l'eau

Brossage des dents

Un fait connu mais étonnamment d'actualité. En laissant l'eau couler en se lavant les dents, une famille de 4 personnes gaspille 26.000 litres d'eau par an.

(extrait du Schwarzwälder Bote, édition de Rottweil, journal du week-end 16/03/06)

- Cet article de journal indique que chaque famille peut économiser 26.000 litres d'eau chaque année en arrêtant l'eau quand on se brosse les dents.
  Qu'en pensez-vous ? Est-ce vraiment possible ? Donnez vos raisons !

© Maaß, Katja : Mathematisches Modellieren – Aufgaben für die Sekundarstufe, Cornelsen Scriptor 2007

Les modalités proposées par le guide du formateur sont les suivantes :

Un objectif important de l'intégration de la modélisation dans les leçons de mathématiques est de voir la pertinence des mathématiques dans la vie et dans la société. C'est pourquoi le contexte d'une tâche est important.

- introduire et diriger un débat sur le contexte de la tâche
- essayer de ne pas donner trop d'informations à l'avance,

- résumer les résultats importants à la fin de la discussion.

Les élèves (joués par les formés) se répartissent par ordre alphabétique en groupes de cinq à six élèves et essaient de résoudre la tâche.

- Une brève session de réflexion en groupe entier pour présenter des idées pour résoudre la tâche. Ceci permet d'aider les groupes en difficulté. On écrit les idées sur une affiche sans les commenter.

- Retour au travail en groupes. Eviter de trop aider les groupes. Si un groupe demande de l'aide, l'encourager à étudier la tâche et à surmonter les problèmes. Une méthode consiste à demander à un groupe d'expliquer ce qu'ils ont fait jusque-là et comment ils envisagent de continuer.

- Demander à chaque groupe de présenter son travail sur une affiche.

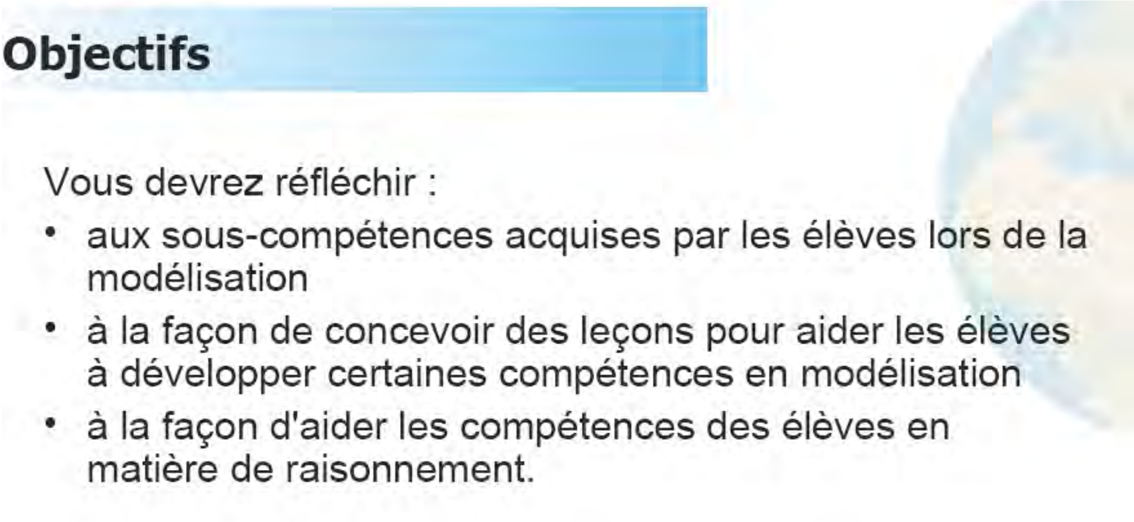
- La dernière activité consiste à réfléchir puis discuter, en groupes puis en collectif, sur les différentes méthodes rencontrées dans les activités précédentes.

Réfléchissez en groupes sur les méthodes d'enseignement utilisées dans le jeu de rôle ou proposée par les collègues (voir les affiches).

- Concentrez-vous sur chaque phase :
  - Introduction
  - Phase de travail
  - Phase de conclusion

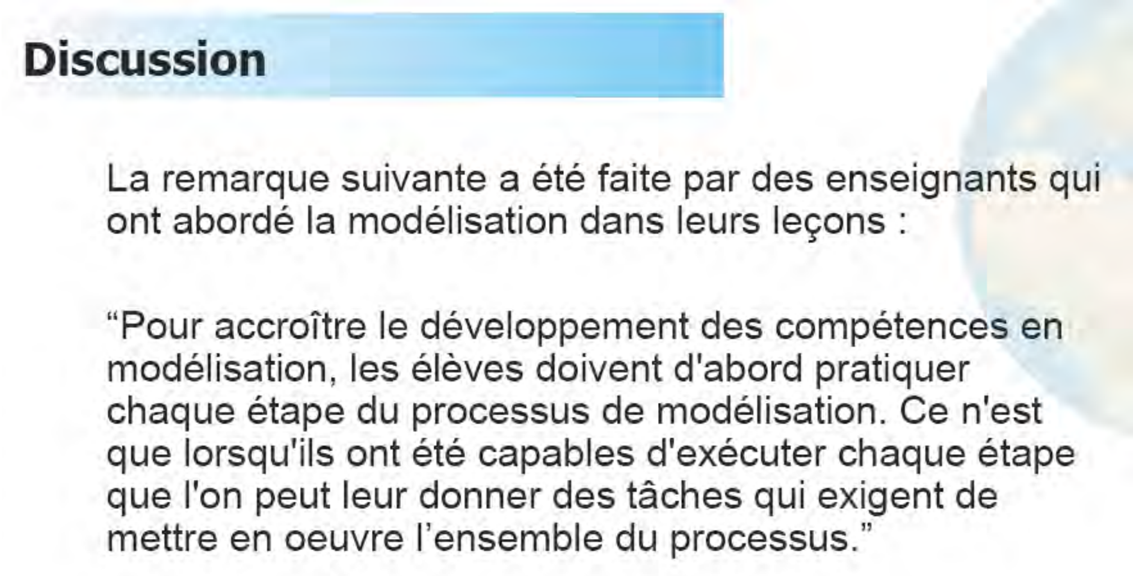
Mettez en relief les difficultés que vous avez decelées et suggérez quelques éventuels moyens de les surmonter. Indiquez les points observés qui, par expérience, semblent fonctionner bien. Synthétisez vos réflexions sur une affiche fixée au mur.

I – 3.3 module « leçons », sous-module « compétences »



Le module débute par un exposé du formateur sur le cycle de modélisation de PISA et les compétences qu'il repère[3].

Ensuite il est proposé une discussion sur le thème suivant :



---

[3] On pourra trouver des informations dans CABASSUT R. (2008) Articulation entre réel et mathématiques : spécificité et généricité de la modélisation. *Acte du colloque Didirem "Approches plurielles en didactique des mathématiques Apprendre à faire des mathématiques du primaire au supérieur : quoi de neuf ? »*. Université Paris 7. Paris, 4 - 6 septembre 2008. A paraître.

On trouvera également des informations sur le site www.lema-project.org au plus tard en septembre 2009.

A la suite de cette discussion, différentes activités de formation ciblées sur certaines sous-compétences, sont proposées. Concernant l'étape « construire un modèle » l'activité suivante est proposée.

Imaginez qu'avec un groupe d'élèves vous utilisiez la tâche de la "pétition" que nous avons vue dans "Qu'est-ce que la modélisation ?". Vous voulez aider vos élèves à "construire le modèle".Imaginez maintenant que vous êtes à la place des élèves. On vous donne un jeu de cartes. Répartissez les cartes en trois groupes. Ces groupes contiennent :
1 les faits que vous avez besoin d'utiliser
2 les faits dont vous n'avez pas besoin
3 les hypothèses que vous avez besoin de faire.
Décrivez votre tri en inscrivant 1, 2 ou 3 sur chaque carte.

Les cartes ci-dessous sont distribuées aux formés.

Un fourgon Ford Transit a une longueur inétrieure de 2458mm	Les ventes de fourgons Ford Transit ont augmenté en Europe d e2005 à 2006 d'environ 20%	Il y a 25 signatures sur chaque feuille de papier
Une feuille d epapier A4 a différentes qualités. Le poids peut varier entre 70, 80 ou 90 grammes par mètre carré	Il y a 500 feuilles de papier par rame	Un fourgon Ford transit est à l'intérieur large de 1719mm
Un fourgon Ford Transit a une hauteur intrieure de 1338mm	Le poids maximum de charge d'un fourgon Ford Transit est de 1000 kg	Une feuille de papier A4 est longue de 297 mm
16 feuilles A4 couvrent un mètre carré	5 rames sont vendues en boîtes de 305x 220x300 (longueur en mm)	Les signaturessont sur les deux faces de la feuille
Un fourgon Ford Transit a une hauteur de porte arrière de 1566 mm	Un fourgon Ford Transit pèse 3300 kg	Une feuille de papier A4 est large de 210 mm

Les formés doivent ensuite concevoir des cartes en rapport avec des tâches déjà rencontrées.

Répartissez vous en groupe et construire sur une affiche A3 des cartes pour une des trois tâches « le tour en ballon », « la queue à Europapark » et « la course dans la cour »

Les tâches évoquées[4] sont les suivantes.

---

[4] La tâche 3 est inspirée d'un article de Serge Petit « Le tilleul et le marronnier » parue dans le n°466 du Bulletin Vert de l'APMEP, p.597.

Tâche 1 Tour en ballon

Une classe de CP de 23 élèves et une classe de CE1 de 25 élèves vont visiter Europapark. Ils arrivent à 14h au park. Tous les élèves veulent aller dans le manège « Le vol d' Icare » avec des ballons et des nacelles.

Peuvent-ils faire un tour de ce manège tous ensembles ?

Photo capturée sur le site http://www.[illegible]/

Vous êtes à Europa Park et vous souhaitez entrer dans une attraction où la file d'attente est de 20 mètres de long.

Combien de temps devrez-vous attendre ?

Tâche 3 La course

Dans une cour d'école se trouvent deux arbres : l'un petit, l'autre grand.

Il y a aussi une clôture rectiligne.

Un groupe d'élèves organisent une course : chaque élève commence au petit arbre puis va toucher la clôture avant de courir jusqu'au grand arbre pour terminer la course.

Quel est le meilleur endroit pour toucher la clôture ?

II – QUELQUES PROBLEMES RENCONTRES

II – 1 organiser le stage

Expérimenter cette formation continue en France est complexe, compte tenu de l'organisation du plan départemental de formation des professeurs d'école de l'académie dont dépend l'IUFM partenaire du projet : il faut s'inscrire dans les priorités académiques, satisfaire les contraintes de format des formations (projet déposé en février de l'année précédente, durée de la formation : par exemple certains stages doivent durer les trois semaines de stage R3 pour lesquelles le professeur formé sera remplacé par un professeur stagiaire PE2 en responsabilité dans sa classe), être sélectionné dans le plan académique de formation, avoir suffisamment d'inscrits (une vingtaine) pour que le stage puisse avoir lieu. C'est pourquoi le stage a été conçu de manière modulaire : le formateur peut choisir de traiter seulement une partie des modules ; l'ordre des modules est libre ; leur contenu peut être modifié par le formateur. Il faut savoir que suivant les pays la formation continue est facultative ou obligatoire, gratuite ou payante, organisée sur le temps scolaire ou en dehors, rémunérée ou pas, à l'initiative d'un formateur ou sur commande d'une institution ...

Dans le cas français, deux projets avaient été proposés. Le premier était une formation à distance, avec rencontre en présentiel et utilisation d'une plate-forme collaborative dans un dispositif analogue à celui décrit en (Cabassut et al. 2006). Cette proposition n'a pas été acceptée. Un autre projet a inscrit cette formation à la modélisation de cinq jours dans un stage plus long de trois semaines (durée du R3) sur la résolution de problèmes en mathématiques à l'école primaire. Les objectifs annoncés pour cette formation de trois semaines étaient les suivants :

- s’inscrire dans les axes prioritaires du plan de formation départemental : maîtrise de la langue, développement de l'enseignement scientifique (mathématiques), maîtrise des TICE ;

- repérer les objectifs spécifiques et les objectifs transversaux (maîtrise de la langue) aux activités de résolutions de problème et de modélisation mathématiques proposées par différentes ressources (manuels, documentation en ligne, ...) ;

- concevoir différents types de séances de résolution de problème et de modélisation : situation-problème, structuration, entraînement, évaluation ;

- concevoir une progression sur la résolution de problème ou la modélisation ;

- savoir intégrer les TICE dans des activités de résolution de problème ou de modélisation ;

Le projet a été accepté mais a imposé que les professeurs formés soient tous enseignants en cycle 2, ce qui a nécessité une adaptation des tâches proposées. Le nombre d'inscrits (29 inscrits et 23 participants effectifs) a permis la réalisation effective de la formation.

II – 2 évaluation de la formation

L'évaluation de la formation a donné lieu à plusieurs passations de questionnaires :

- un questionnaire d'analyse des besoins auprès d'enseignants : on observe une très grande difficulté à obtenir un retour des questionnaires qui permettent de garantir une certaine représentativité des réponses ;

- un même questionnaire en début de stage et en fin de stage : il permet d'observer les changements ; il est reposé 6 mois après le stage mais dans ce cas les retours sont peu nombreux ; de même le questionnaire a été passé auprès d'une population de contrôle et on obtient peu de retour ;

- un questionnaire après chaque jour de stage ;

- une discussion en fin de stage et quelques entretiens approfondis pour certains stagiaires ;

Il est très difficile d'effectuer une évaluation approfondie sous forme de questionnaires : elle apparaît très coûteuse en temps de passation et pas assez représentative.

Cette partie du projet n'est pas encore accessible.

II – 3 adaptations françaises

Certaines tâches pour les professeurs en formation et certaines tâches pour les élèves ont du être adaptées en prenant en compte le cycle 2.

Le temps insuffisant pour dérouler toute la formation prévue a obligé à supprimer certains modules, le module « réflexion » et le sous-module « évaluation par rétroaction ». Les modules « argumentation » ou « TIC » ont été supprimés mais les thématiques ont été traitées, plus généralement que dans le cadre de la modélisation, dans la suite du stage sur la résolution de problèmes.

Le formateur a souhaité changer certaines activités du module « leçons » en travaillant sur les programmes français et les contenus de certains manuels, car les programmes et les manuels ont un rôle important en France. Pour le module « leçons » sous-module « méthode », une activité préliminaire a été introduite : chaque formé exprime ses méthodes, avant que ne lui soient « imposées » dans le jeu de rôle les méthodes du formateur.

De même, dans le module sur les compétences, des activités en référence au socle commun et aux programmes officiels de l'école, ont été introduites.

IV – CONCLUSION

Nous avons présenté un exemple de formation à la modélisation à destination des professeurs d'école. L'ensemble de ces ressources sera téléchargeable sur le site du projet www.lema-project.org avant octobre 2009, date de fin du projet

Un rapport récent de l'Inspection Générale de l'Education Nationale précisait : « L'action de l'école primaire contribue à l'acquisition de la « littératie » mathématique. La vie courante offre des situations de niveau de complexité variable : le maître doit les sélectionner de façon à ce que l'élève puisse mettre en jeu les outils mathématiques qu'il possède et des raisonnements logiques. De nombreux exemples pourraient être cités, notamment en s'appuyant sur l'environnement de la classe (coût d'une sortie scolaire, dépenses liées à une impression de documents, durée de certains trajets scolaires, gestion de la coopérative scolaire…) qui peuvent donner naissance à des activités riches, surtout si elles sont pratiquées à partir de documents authentiques » (IGEN 2006, p.40). A travers l'étude de rapports d'inspection et d'entretiens avec les enseignants, le rapport conclut que « les problèmes de vie courante tiennent une place insuffisante dans nombre de classes » (Ibid. p.59).

En France, le socle commun de connaissances et de compétences a été mis en œuvre à l'école primaire dès la rentrée 2007. Parmi les capacités mathématiques, « à la sortie de l'école obligatoire, l'élève doit être en mesure d'appliquer les principes et processus mathématiques de base dans la vie quotidienne, dans sa vie privée comme dans son travail. Pour cela, il doit être capable : [...] - de saisir quand une situation de la vie courante se prête à un traitement mathématique, l'analyser en posant les données puis en émettant des hypothèses, s'engager dans un raisonnement ou un calcul en vue de sa résolution, et, pour cela : savoir quand et comment utiliser les opérations élémentaires ; contrôler la vraisemblance d'un résultat ; reconnaître les situations relevant de la proportionnalité et les traiter en choisissant un moyen adapté ; utiliser les représentations graphiques ; utiliser les théorèmes de géométrie plane [...]. L'étude des sciences expérimentales développe les capacités inductives et déductives de l'intelligence sous ses différentes formes. L'élève doit être capable de pratiquer une démarche scientifique : savoir observer, questionner, formuler une hypothèse et la valider, argumenter, modéliser de façon élémentaire ; comprendre le lien entre les phénomènes de la nature et le langage mathématique qui s'y applique et aide à les décrire » (BOEN 2006 pVIII-IX).

Nous espérons que cette formation à la modélisation participera à une prise en compte des problèmes de la vie courante dans l'enseignement, et à une formation aux capacités mathématiques décrites dans le socle commun. Bien entendu, les problèmes de la vie courante sont depuis longtemps mis en œuvre à l'école primaire, et les problèmes de modélisation ne constituent pas la seule voie pour développer les capacités mathématiques.

BIBLIOGRAPHIE

ADJIAGE R., CABASSUT R. (2008) La modélisation dans une perspective de formation et d'enseignement. In *Actes du 34e colloque Copirelem,* Troyes.

BOEN (2006) S*ocle commun de connaissances et de compétences,* bulletin officiel de l'éducation nationale n° 29 du 20 juillet 2006.

CABASSUT R., RIEMLINGER P. ET TRESTINI M. (2006) Les TIC dans la formation et l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. In *Actes du 32e Colloque Copirelem* .IREM de Strasbourg, mai 2006, p.103.

CABASSUT R. (2007) Exemples de modélisation à l'école primaire allemande : quels enjeux pour la formation des maîtres? In *Actes su 33e colloque Copirelem,* Dourdan, p. 119 - 120.

CABASSUT R. (2008) Enseigner la modélisation dans un contexte européen. B*ulletin vert de l'APMEP.* N°477. Juillet août 2008.

IGEN (2006) *L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire.* Rapport de l'inspection générale sur l'enseignement des mathématiques n° 2006-034, juin 2006. Ministère de l'Education Nationale.

LEMA **L**earning and **E**ducation in and through **M**odelling and **A**pplication http://www.lema-project.org

Conditions et contraintes « internes » de l'introduction des TICE dans les pratiques mathématiques à l'école élémentaire.

IMBERT Jean-Louis
IUFM Midi-Pyrénées
Doctorant ADEF UMR Université de Provence

Cette communication porte sur une partie de ma thèse qui traite des conditions et contraintes de l'intégration des TICE dans les pratiques mathématiques à l'école élémentaire. Elle fait suite à la communication présentée à Troyes (2007) sur les contraintes externes à l'introduction des TICE J'aborde ici un deuxième aspect, les contraintes internes (classe).

La première partie de ma recherche porte sur trois influences institutionnelles que j'ai qualifiées d'externes à la vie de la classe et qui constituent des contraintes à l'intégration des TICE : les programmes de l'école, les équipes de circonscriptions et les manuels. Elle m'a conduit au constat de la faible intégration des Technologies d'Information et de Communication pour l'Enseignement (TICE).

Dans la deuxième partie je me suis intéressé aux contraintes internes que peuvent constituer les pratiques mathématiques, les situations d'apprentissage, le rôle de l'enseignant et l'instrument TICE. La théorie des situations didactiques, la théorie anthropologique du didactique et l'approche instrumentale m'ont permis d'éclairer ces notions. Elles m'aident à comprendre les pratiques de cinq enseignants d'école primaire que j'ai observés pendant plusieurs mois.

Pour expliquer le peu d'utilisation des TICE dans l'enseignement des mathématiques à l'école primaire il faut donc répondre à la question :

« Quelles sont les conditions et les contraintes internes à la classe que l'enseignant doit prendre en compte pour intégrer les TICE dans les pratiques mathématiques à l'école élémentaire? » En restant dans le champ de la didactique, cette question globale m'amène à poser les questions suivantes :

- Comment comprendre et décrire les pratiques mathématiques à l'école élémentaire ?
- Quelle est la position de l'enseignant dans le pilotage de l'activité mathématique intégrant des TICE ?
- Quels sont la place et le statut des TICE dans les situations d'apprentissage mathématiques ?

Je vais présenter succinctement le cadre théorique et l'outil d'analyse, puis je présenterai l'étude des pratiques d'un des cinq enseignants observés.

1 Le cadre théorique

Pour comprendre et décrire **des pratiques mathématiques ordinaires, dans des classes ordinaires**, j'ai utilisé les notions de milieu et de contrat didactique associés aux situations d'apprentissage mises en œuvre. Ces éléments de la théorie des situations définie par BROUSSEAU permettent d'expliquer un *« système minimal de conditions nécessaires dans lesquelles une connaissance (mathématique) déterminée, peut se manifester par les décisions aux effets observables (des actions) d'un actant sur un milieu »*. (BROUSSEAU, 2002). Pour affiner la notion de contrat didactique et de milieu dans des situations ordinaires j'ai utilisé des éléments de réflexion apportés par HERSANT et PERRIN-GLORIAN (2003).

Enfin, les TICE n'étant pas encore un objet naturalisé[1] dans la classe, je les étudie comme un artefact dans le milieu matériel, comme pourrait l'être une équerre. Je m'attache à dégager à partir des travaux d'ASSUDE et de TROUCHE les apports spécifiques des environnements informatiques en lien avec les différents acteurs de la classe et avec le savoir étudié, en d'autres termes identifier si les TICE acquièrent un statut d'instrument dans les autres milieux de l'enseignant et de l'élève.

1.1 L'apport d'une approche par la Théorie des Situations Didactiques

Faire des mathématiques à l'école élémentaire peut se décrire à travers les quatre composantes de l'activité d'apprentissage : le savoir, l'élève, l'enseignant et les relations entre ces différentes composantes, ce que BROUSSEAU (1986, 2002) qualifie de situation didactique. A l'intérieur de celle-ci, le contrat implicite entre l'élève et l'enseignant conditionne la situation. Enfin, la notion de milieu permet de caractériser les positions respectives de l'élève et de l'enseignant, en particulier dans les situations a-didactiques qui sont celles où l'enseignant n'intervient pas par rapport aux connaissances en jeu et dans lesquelles l'apprenant agit sur un « *milieu antagonique en fonction de ses propres motivations* ». (BROUSSEAU, 1996)

1.1.1 Le contrat didactique

Les éléments du milieu qui caractérisent la situation sont le résultat de la mise en place d'un dispositif dont le but est l'apprentissage des élèves. Les attentes réciproques de l'enseignant et des élèves, **concernant le savoir en jeu dans la situation**, s'organisent sous la forme de ce que BROUSSEAU (1986) a nommé « **contrat didactique** ».

Pour les contrats didactiques, ceux où l'on peut déceler *« une action où quelqu'un tente d'enseigner quelque chose à quelqu'autre qui ne veut pas l'apprendre »* (BROUSSEAU, 2002, p.32), sont

1 J'utilise naturalisé dans un sens proche de celui de Assude et Chevallard c'est-à -dire, ici, dans ce contexte les TICE sont reconnues comme un outil utilisable dans la classe pour faire des mathématiques, et en ce sens sont identifiées comme un savoir de l'enseignant concernant ses pratiques.

compréhensibles si on peut identifier les systèmes en jeu et leurs rapports (BROUSSEAU, 1995, pp. 22-23). Pour l'étude des séances ordinaires, j'ai repris la caractérisation qu'en ont faite PERRIN-GLORIAN et HERSANT (2003) en lien avec le déroulement du temps didactique. En plus du partage de responsabilité, elles retiennent trois autres composantes pour affiner les contrats étudiés : le domaine mathématique, le statut didactique du savoir (ancien / nouveau), la nature et les caractéristiques de la situation, *« à savoir l'existence ou non d'un milieu adidactique capable de rétroactions interprétables au niveau des connaissances élèves »*.

J'utiliserai le repérage, dans le temps didactique, des différents types de méso-contrat[2] (*Reconnaissance du savoir, Rappel, Réinvestissement des savoirs, Reprise, Revue de savoirs,...)* pour évaluer le rapport entre la tâche logicielle (TAL) et la tâche mathématique (TAM). D'autre part au niveau local *« le partage des responsabilités entre l'enseignant et l'apprenant caractérise le micro-contrat didactique. »* PERRIN-GLORRIAN et HERSANT en identifient sept qu'elles regroupent en trois catégories : les micro-contrats où l'enseignant garde toute la responsabilité ; ceux où la responsabilité est partagée entre l'enseignant et la classe ; enfin ceux dans lesquels la responsabilité est partagée entre l'enseignant et chaque élève de la classe.

Cela me fait dire d'une part que la recherche d'un hypothétique contrat constitue pour l'enseignant une condition nécessaire, une contrainte, lors de la mise en œuvre de pratiques mathématiques à l'école élémentaire. D'autre part, le modèle de la structuration du milieu permet de comprendre les contraintes et les conditions que devra gérer l'enseignant pour piloter la situation d'apprentissage des mathématiques. Se pose donc la question de la place des TICE dans ce modèle.

En réponse au « contrat didactique » qui lui confère un statut d'élève, il va agir sur le milieu matériel. Les réponses à ses actions définissent le milieu objectif où l'élève peut produire des jeux d'essais. C'est dans ce milieu que les techniques de l'élève peuvent être visibles.

Parmi ces contrats didactiques, j'ai retenu ceux où l'enseignant a un rôle important c'est-à-dire les moments de dévolution et d'institutionnalisation.

1.1.1 La dévolution

Les gestes de l'enseignant devraient mettre en évidence des ruptures de contrat liées au paradoxe de la dévolution : *« tout ce qu'il [l'enseignant] entreprend pour faire produire par l'élève les comportements qu'il attend, tend à priver ce dernier des conditions nécessaires à la compréhension et à l'apprentissage de la notion visée : si le maître dit ce qu'il veut, il ne peut plus l'obtenir. [...]. Apprendre, implique, pour lui, qu'il accepte la relation didactique mais qu'il la considère comme provisoire et s'efforce de la rejeter. »* (BROUSSEAU, 2002)

2 PERRIN-GLORRIAN et HERSANT (2003)

Dans ces conditions, si le milieu pour une dévolution existe et qu'il permet les rétroactions, alors on pourra identifier un élève apprenant. En revanche, si le milieu n'offre pas cette possibilité, alors l'enseignant devra assumer la responsabilité de tous les gestes de l'élève qui ne pourra plus être en position d'apprenant. L'enseignant devra alors utiliser d'autres stratégies didactiques comme les « ostensions » (BERTHELOT & SALIN, 1992) pour justifier des conditions d'usage des TICE.

Ces conditions de réalisation d'une dévolution réussie doivent être repérées par l'enseignant comme étant des contraintes et anticipées dès la phase de construction. Elles sont les obstacles qu'il devra dépasser pour la mise en œuvre de la situation d'apprentissage des élèves.

1.1.2 L'institutionnalisation

Du côté de l'apprenant, le deuxième moment fort de l'intervention de l'enseignant est l'institutionnalisation des connaissances comme référence pour la classe, c'est-à-dire un savoir réinvestissable dans d'autres tâches.

1.2 L'approche par la dimension instrumentale et praxéologique

Un élément particulier dans le milieu étudié est l'objet informatique. Il prend des places différentes du point de vue du savoir étudié, de l'élève ou de l'enseignant. Comment est-il orchestré, intégré, reconnu dans les différents milieux par les différents acteurs ? Pour répondre à cette question, je m'appuie sur l'approche instrumentale proposée par RABARDEL et les développements en mathématiques étudiés par ASSUDE (2001, 2002, 2005) et TROUCHE (2005).

L'idée que l'usage des instruments est transparent, c'est-à-dire qu'il laisse voir ce qu'il y a à faire pour les utiliser, est une idée très répandue : voir ASSUDE et al. (1996). Dans ses travaux, TROUCHE (2005) la décrit *« comme la possibilité de comprendre les traitements réalisés par la machine sur la base de son expérience des techniques papier-crayon. »*

L'approche d'ASSUDE (2002, 2005, 2007) place l'objet TICE dans un rapport global à la situation d'apprentissage. Elle caractérise l'intégration des TICE dans les séances de mathématiques.

1.2.1 Les modes d'intégration

A propos de l’intégration du logiciel Cabri, je retiens que l’enseignant va devoir gérer deux ruptures, l’une dans l’usage des techniques de résolution de problèmes, l’autre dans l’usage social de l’ordinateur par les élèves. L’enseignant aura donc à sa charge les choix d’activités avec la prise en compte de ces conditions. Il devra faire des choix de types de tâches pour qu’une connaissance instrumentale apparaisse en tant qu’outil pour résoudre une question. Cette modélisation caractérise le mode d'intégration instrumentale et le mode d'intégration praxéologique résumés ci-après.

Le mode d’**intégration instrumentale** est caractérisé par quatre types, *« l’initiation instrumentale, l'exploration instrumentale, le renforcement instrumental et la symbiose instrumentale »* ASSUDE

(2007), par plusieurs critères, le niveau de connaissance de l'outil « Cabri » et l'existence dans le travail de l'élève d'une “*Tache de type Cabri*” (TAC), une “*Tâche de type Mathématique*” (TAM) ou son absence, une “*connaissance instrumentale*” (IK), une “*connaissance Mathématique*” (MK) et le “*rapport entre la connaissance Mathématique et la connaissance Instrumentale*” (MK/IK).

Le mode d'**intégration praxéologique** a pour objectif de décrire l'activité des élèves en termes de praxéologies mathématiques c'est-à-dire en termes de “Tâches, Techniques, Technologie et Théorie” dont les deux éléments tâches et techniques seront essentiellement rencontrés à l'école primaire, ASSUDE identifie d'une part les rapports entre les praxéologies dans l'environnement “papier-crayon” ou “Cabri” et d'autre part leur statut en termes d'ancien ou de nouveau.

Ce modèle constitue un outil, pour situer les usages d'intégration des TICE par rapport à ces critères. Pour les usages des TICE que j'ai observés, il existe des logiciels qui ne disposent pas de la possibilité de réaliser une tâche différente de celle que l'on peut réaliser en environnement « papier-crayon ». Ce qui m'a fait introduire un nouveau mode d'intégration instrumental que j'ai appelé “Détournement” et qui caractérise une situation où l'on observe la mise en jeu d'une connaissance mathématique et d'une connaissance instrumentale avec une certaine indépendance entre elles. D'autre part, par similitude avec la notation d'ASSUDE, j'ai substitué l'appellation “Tâche Logicielle” (TAL) à “Tâche Cabri” (TAC) dans le tableau descriptif des différents modes d'intégration instrumentale :

	Débutants			Non débutants	
	Initiation	Exploration	Détournement	Renforcement	Symbiose
TAM		x	x	x	x
TAL	x				
IK	x	x	x		x
MK			x	x	x
IK/MK		MK prétexte pour IK	IK indépendant de MK	IK outil pour MK	Max

1.2.2 Praxéologie d'intégration et méso-contrats

ASSUDE identifie cinq modes d'intégration praxéologique et le lien entre les pratiques anciennes et les pratiques nouvelles. Pour structurer notre compréhension des conditions que l'enseignant doit prendre en compte dans l'intégration des TICE, je les interroge à partir des types de situation et des types de méso-contrat[3] qui résultent du statut didactique du savoir.

3 PERRIN-GLORIAN (2003)

1.2.3 Gestion de la transparence

La diversité des environnements numériques ne favorise pas une démarche simple d'identification. Plus l'environnement est complexe, plus il contient d'artefacts spécifiques, plus l'analyse des éléments constitutifs du milieu matériel devra être approfondie au risque de rencontrer des incidents successifs lors de la mise en œuvre. Cette prise en compte de la transparence peut être globale, mais aussi dans l'utilisation d'une technique logicielle associée à une sous tâche.

1.3 Deux contrats spécifiques : la dévolution et l'institutionnalisation

1.3.1 Organiser la dévolution en favorisant un environnement

La mise en œuvre d'une séance et l'élaboration du milieu matériel de la situation devrait conduire l'enseignant à envisager l'influence de l'ordre de rencontre de la connaissance mathématique dans un environnement ou dans l'autre. Ces choix d'introduction de la TAL antérieurement à la TAPP ne peuvent porter que sur l'hypothèse qu'elle favorise une connaissance ou un savoir mathématique que la TAPP ne permet pas de construire simplement ou de façon aussi pertinente ou efficace d'un point de vue didactique.

1.3.2 Gestion de l'institutionnalisation

L'organisation d'une institutionnalisation après un passage dans la résolution de deux tâches, une papier-crayon et l'autre TICE, nécessite l'organisation des deux mémoires successives des activités de résolution pour aboutir à une mise en relation. De plus cette mémoire porte sur la connaissance mathématique dans ses deux aspects, TAL et TAPP, les techniques « papier-crayon » et/ou logicielles et les rapports entre elles.

2 Un outil pour repérer l'intégration et son évolution

Pour caractériser l'évolution de la pratique d'un enseignant, les TICE étant intégrées comme les autres artefacts didactiques, j'ai choisi de m'intéresser à plusieurs indicateurs qui facilitent le repérage de ses actions. A partir des rétroactions que produit sa mise en œuvre, j'observe son évolution vers ce que j'ai appelé une intégration « optimale », c'est-à-dire ce que **l'outil TICE permet de réaliser que les autres outils n'auraient pas permis de mettre en œuvre du point de vue des mathématiques**. Cela correspond, pour l'enseignant, à la reconnaissance de l'outil TICE dans le milieu matériel et aux usages qui en seront faits dans la situation d'apprentissage.

Je vais donc utiliser les critères qui reprennent les éléments associés au cadre théorique de cette partie : la dimension instrumentale, l'intégration praxéologique, les types de contrats mis en œuvre et sur la gestion de la dévolution et l'institutionnalisation.

2.1 L'outil d'analyse « Toile »

Pour obtenir une lisibilité des éléments retenus dans le cadre théorique, j'ai synthétisé les indicateurs dans un outil graphique que j'ai nommé "Toile". Il se construit à partir du cadre théorique présenté sur les différentes entrées.

Pour la **dimension instrumentale** j'ai choisi de retenir deux critères :

L'usage des techniques

- Les techniques utilisées ou potentiellement utilisables dans l'environnement numérique.
- TEPP (pour techniques « papier-crayon »)
- TEL (pour techniques «logicielles »)
- TEPP et TEL indépendantes, elles sont juxtaposées dans l'activité
- TEPP et TEL induites par l'enseignant
- TEPP et TEL interagissent

A propos d'une TAM, le rapport entre les tâches dans l'environnement numérique et papier-crayon

Pour prendre en compte la **dimension praxéologique** j'ai retenu deux critères :

Les niveaux d'intégration instrumentale

- le détournement, niveau le moins adapté
- l'initiation,
- l'exploration,
- le renforcement
- le niveau le plus adapté : la symbiose.

La gestion de la transparence de l'outil et des techniques logicielles

- Non gérée
- Localement non gérée : par exemple un artefact intervenant dans une technique n'est pas pris en compte
- La connaissance des problèmes ne donne pas lieu à une anticipation dans la séance d'où des

Pour caractériser les contrats en jeu, j'ai retenu trois critères :

Le statut du savoir

- Ancien
- Institutionnalisé à consolider
- En cours d'institutionnalisation
- Nouveau après une première rencontre
- Nouveau

Les caractéristiques de la situation

- Ostension assumée ou Transmission du savoir
- Ostension déguisée : lorsque le professeur assume la responsabilité dans la production des connaissances et l'évaluation des réponses alors qu'il a mis en place une situation d'action, de formulation ou de validation.
- Situation non antagonique
- Situation antagonique non exploitée
- Situation antagonique

Le partage de responsabilité entre l'élève et l'enseignant

- Non partagée : l'enseignant assume totalement la transmission du savoir et la façon de le mettre

Pour caractériser **la mise en place des contrats** de dévolution j'ai choisi de retenir

Les points d'appui de la dévolution
- Elle n'existe pas
- Elle s'appuie sur des TICE qui sont un objet culturel (Je considère que l'image sociale n'a pas de fonction par rapport à la TAM)
- Elle s'appuie uniquement sur la tâche mathématique en ne prenant pas en compte la dimension instrumentale
- Elle s'appuie uniquement sur la TAL
- Elle entrelace le problème mathématique et l'artefact

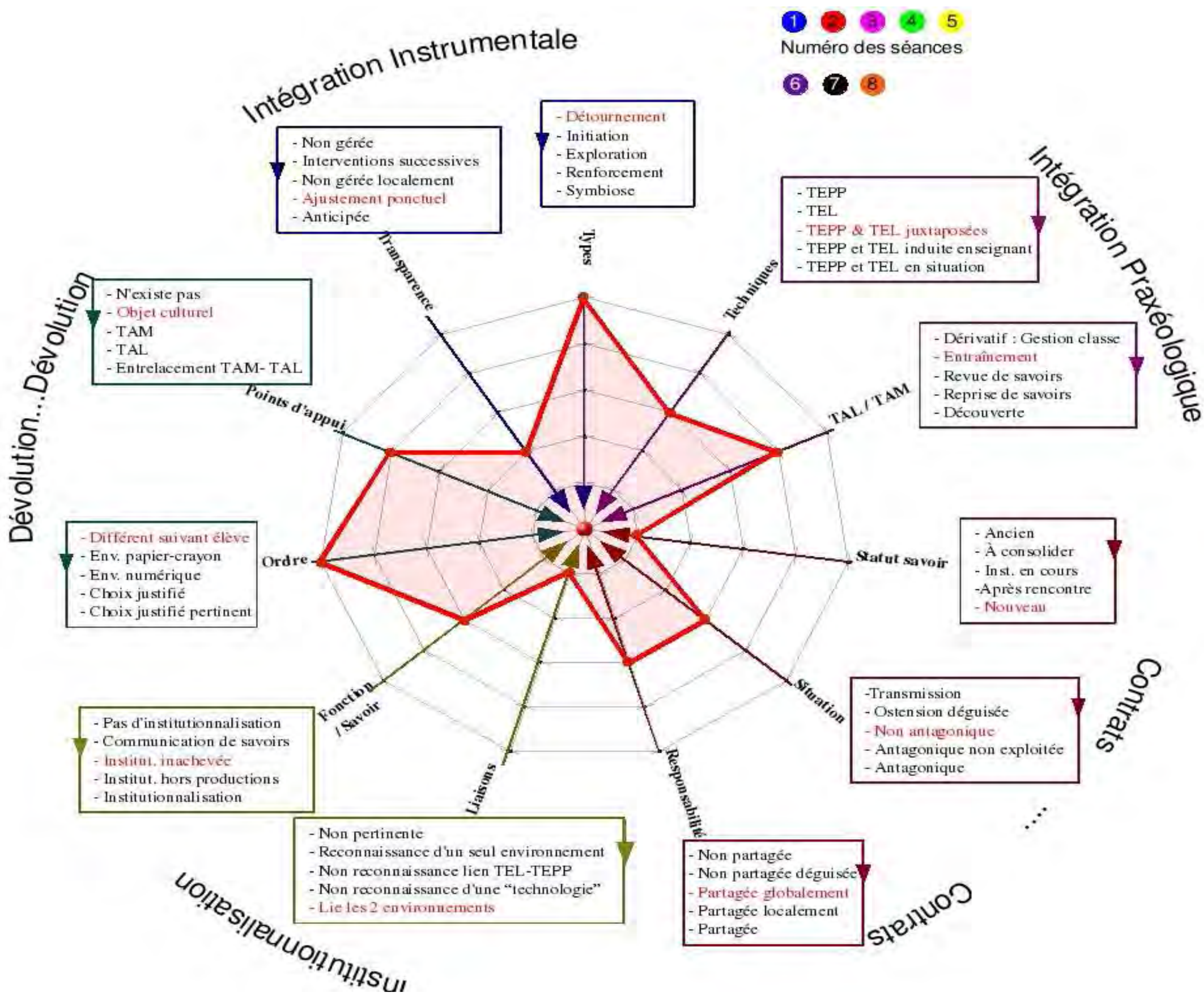
L'ordre d'introduction de l'environnement
- les élèves ne rencontrent pas les environnements dans le même ordre
- le savoir ou la situation est introduit en environnement “papier-crayon”

Pour prendre en compte un contrat spécifique, **l'institutionnalisation**, j'ai retenu :

Sa fonction par rapport au savoir
- Pas d'institutionnalisation ou ne correspond pas avec l'objectif initialement visé
- Une communication de savoirs : l'enseignant reformule des savoirs déjà là, sans lien réel avec les productions des élèves
- Une institutionnalisation inachevée où les connaissances engagées par les élèves ne sont que partiellement reconnues, partiellement débattues sans validation...
- Une institutionnalisation hors des productions : l'enseignant n'établit pas le lien explicite avec les connaissances engagées.
- Une institutionnalisation

La liaison entre connaissance et technique
- N'est pas pertinente en regard des connaissances en jeu ou absence d'institutionnalisation
- N'est réalisée qu'en référence à un environnement
- Alors qu'il existe un potentiel de justification qui lie les deux techniques, la liaison n'est pas réalisée

Ce repérage d'un mode d'intégration est schématisé sur la “Toile”, à la manière de la cible, où le point central constitue le voisinage de l'intégration “optimale”. Chaque hendécagone régulier représente un niveau ordonné. Les niveaux sont ordonnés, c'est-à-dire plus le point de repérage s'éloigne du centre, plus l'intégration est éloignée de l'intégration “optimale”. J'ai simplifié le texte des critères et des niveaux et je les ai reportés autour de la “Toile” dans des cadres rectangulaires. Ce codage est renforcé par une flèche sur le cadre donnant le sens de l'intégration optimale. J'utilise une ligne polygonale de couleur pour désigner le positionnement de la pratique de l'enseignant lors d'une séance ou d'une séquence. Sur la “Toile” ci-après j'ai présenté un codage fictif où j'ai écrit en rouge le niveau pour un critère, codé sur la “Toile” par un point rouge, le polygone représentant globalement la séance.



3 Les contraintes attachées aux situations mathématiques : l'exemple de la classe de l'enseignante Coralie

Je vais présenter comment mon outil "Toile" souligne les résultats d'observations que j'ai réalisé dans la classe de l'enseignante Coralie. Ces observations ont été mémorisées à partir d'un enregistrement vidéo pour garder la dimension collective des actions des élèves et de l'enseignant ce qui m'a permis de décrire le synopsis de chaque séance.

Pour capturer les échanges particuliers, que la caméra ne peut pas saisir, j'ai utilisé un enregistreur audio qui permet d'observer les adaptations de l'enseignant en réponse aux questions des élèves ou aux observations particulières.

Chaque séance a donc donné lieu à un entretien ante et un entretien post séance. L'objectif principal de l'entretien “ante” est de repérer les éléments de préparation de la séance. L'entretien “post” reprend les points qui invitent l'enseignant à se situer par rapport à ce qu'il retient de la séance.

3.1 La séance “calcul en arbre”

Coralie a une classe double niveau CM1-CM2. J'ai choisi de présenter ici l'étude concernant l'intégration des TICE avec les CM1. La séance que je vais analyser est la séance qui se situe dans la troisième séquence observée. Elle porte sur du calcul réfléchi. Le support logiciel est le logiciel « calcul » et l'activité exploitée s'appelle “Calcul en arbre”.

3.1.1 Le dispositif de travail

Pendant que les cinq élèves de CM1 travaillent sur l'ordinateur, les dix élèves de CM2 effectuent une activité « autonome » de recherche sur des problèmes de mathématique pour lesquels il s'agit de donner du sens au texte (recherche de questions, reformulation de données,...) à partir de documents photocopiés.

L'orchestration générale des activités est assez stable et est liée à la particularité des classes multi-niveaux. La classe est spatialement partagée pour séparer les deux niveaux CM1 et CM2, mais aussi pour pouvoir provoquer et gérer des moments collectifs. Au fond de la salle, Coralie dispose de trois ordinateurs équipés de “Windows 98”. Bien sûr, ces conditions ne sont pas idéales pour intégrer les TICE.

Pour comprendre la séance, voyons maintenant le logiciel “calcul en arbre”, peu connu, qu'elle a utilisé dans la séance.

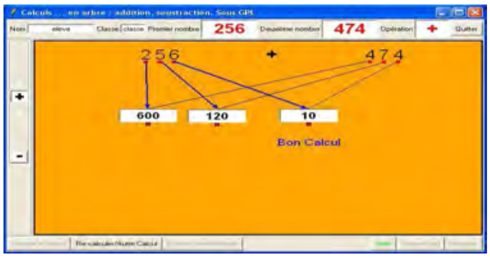
3.1.2 La situation point de départ et l'objectif

Au cours du cycle, 2 les élèves ont résolu des problèmes additifs sans totalement maîtriser la technique opératoire. Les techniques personnelles sont alors utilisées. L'arbre de calcul permet de garder la mémoire des associations réalisées entre les termes en utilisant implicitement l'associativité et la commutativité pour arriver à une expression contenant le plus possible de nombres “faciles” pour organiser la suite des calculs. Repris dans d'autres problèmes, l'arbre de calcul, utilisé dans de nombreux manuels, permet de mettre en relation les données d'un problème sous forme schématique et d'en garder une trace permettant une explicitation par exemple dans les mises en commun. En fin de cycle 2, il est devenu un schéma qui permet l'explicitation et aide à la formulation d'une technique de calcul réfléchi, par exemple pour mettre en relation les différentes unités dans l'écriture linéaire d'additions ou de soustractions. L'objectif déclaré lors des entretiens est un renforcement de la technique opératoire de l'addition et de la numération de position.

3.1.3 Le dispositif de travail : Présentation générale de l'outil logiciel

Les élèves s'identifient par leur nom et leur classe et doivent saisir deux nombres et l'opération à effectuer. Il n'y a que deux types de tâches possibles : calculer une somme, calculer une différence.

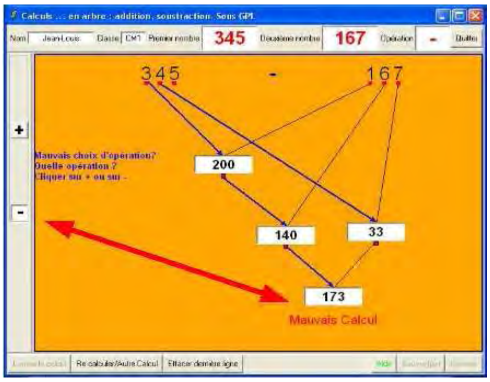
Après avoir cliqué sur le bouton « lancer le calcul », la somme ou la différence apparaît dans la zone orange de calcul. La tâche se décompose en plusieurs sous-tâches :



***T₁* :** choisir deux unités pour les additionner

***T₂* :** associer à la souris les deux chiffres choisis en un point de la zone de l'espace de calcul.

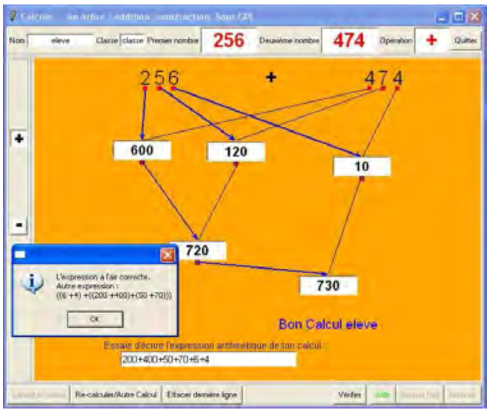
Chaque chiffre est souligné par un carré. L'association entre plusieurs carrés par des « flèches » désigne les termes d'une ou plusieurs sommes (ou différences) par rapprochement avec un arbre de calcul en environnement “papier-crayon”.



***T₃* :** activer une zone de saisie à la pointe des deux « flèches » et sélectionner l'opération à effectuer

***T₄* :** calculer la somme ou la différence

***T₅* :** saisir dans la zone la valeur du calcul. Si la valeur est exacte le logiciel affiche « Bon Calcul » sinon il faut saisir une nouvelle valeur. On ne peut continuer que si le résultat est exact. La validation est fonction de l'opération choisie sur la partie gauche de l'écran.



***T₆* :** Lors de la dernière étape de calcul il est demandé d'écrire globalement la technique de calcul.

***T₇* :** la validation de cette écriture est réalisée par un clic sur le bouton « vérifier ». Ce qui provoque l'affichage d'un message de validation de l'expression.

3.1.4 Le potentiel a-didactique du logiciel[4], les types de tâches, tâches et techniques associées

Dans les manuels, l'arbre de calcul apparaît comme une pratique de formulation d'une technique de calcul réfléchi ou comme un outil méthodologique pour conduire un calcul réfléchi suivant les phases de l'apprentissage. Dans ce logiciel, les deux aspects, support pour une formulation d'une technique et outil méthodologique de calcul réfléchi, se renforcent pour contraindre l'élève à un usage réfléchi de techniques de calcul et de compréhension du nombre. Ce sont eux qui devraient définir la consigne qui pourrait être « calculer la somme ou la différence de ces deux nombres en utilisant des calculs simples à faire de tête dont vous garderez la mémoire en utilisant les “flèches” du logiciel. »

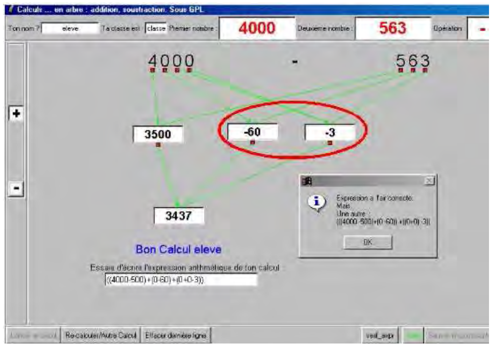
4 Le logiciel est un élément du milieu matériel qui peut favoriser la rencontre d'un obstacle dans des conditions qu'il reste à préciser et qui détermineront les niveaux des situations.

Les principales compétences mises en jeu dans "calcul en arbre" relèvent de la numération et du calcul. Dans le domaine de la numération, il s'agit de savoir déterminer la valeur d'un chiffre selon sa position dans le nombre et décomposer le nombre sous la forme de sa décomposition canonique en puissance de 10. Dans le domaine du calcul, il s'agit de connaître les tables d'addition et savoir additionner ou soustraire des dizaines entières ou des centaines entières.

L'usage du calcul en arbre pour la soustraction est en rupture avec la technique traditionnelle et s'apparente avec la technique de calcul anglo-saxonne présentée dans les documents d'accompagnement de l'école primaire.

La disposition des “flèches” peut rendre illisibles les liens entre les calculs intermédiaires si l'élève n'a pas anticipé suffisamment l'organisation spatiale de l'arbre de calcul.

Enfin, lors de la préparation, la documentation de ce module est porteuse d'une technique qui n'a pas à être enseignée et qui ne relève pas de l'école primaire, puisqu'elle utilise un passage par les nombres entiers relatifs négatifs, comme le montre cette copie d'écran extraite de la documentation diffusée avec le logiciel. Ce type de document pèsera sur les pratiques des enseignants s'ils n'ont pas beaucoup de temps à consacrer à la préparation de leur séance.



Dans la gestion de la situation, l'enseignante va être confrontée à d'autres problèmes :

- Les élèves de CM1 disposent d'un algorithme de calcul de la soustraction posée qui n'est pas directement ré-investissable ici, et les élèves n'ont pas de raison immédiate d'en chercher un autre puisque, à propos de l'addition, ils ont pu utiliser l'algorithme de l'addition posée.
- Cette technique complexifie la tâche de calcul des élèves sans apporter des éléments de connaissances nouvelles, ni par rapport au calcul, ni par rapport à la connaissance du système de numération. Dans tous les cas, l'usage que pourrait en faire l'enseignante pour confronter les élèves à la décomposition des nombres selon les unités devrait être associé à la résolution de problèmes.
- Enfin, l'enseignante devra gérer des mises en commun où les élèves vont devoir expliquer les difficultés qu'ils rencontrent. Les conditions matérielles et logicielles ne sont pas favorables à une mise en commun efficace.

Pour comprendre l'organisation générale de la séance je vais présenter un synopsis réduit.

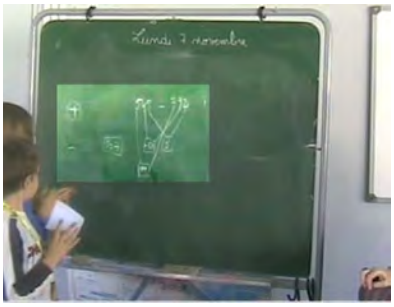
3.2 Synopsis de la séance 5

Episode 1 jusqu'à la 2e minute : Les CM1 finissent un choix d'images sur l'ordinateur pour une présentation pendant que Coralie passe les consignes aux CM2. Les CM1 sont répartis en deux groupes de deux et un élève seul.

Episode 2 jusqu'à la 6e minute : Passage de la consigne *« On va faire le même travail que la semaine dernière chut ! Sur le calcul en arbre, mais... hou ! Hou ! Mais cette semaine avec des soustractions. D'accord ! L'autre fois on avait fait des additions cette semaine des soustractions. On va ouvrir le logiciel. »* Puis elle donne la soustraction qu'ils vont faire au départ. Première réaction des élèves à l'impossibilité de réaliser le calcul *« 40 moins 80 »*.

Episode 3 jusqu'à la 23e minute : A la 9e minute un élève suggère la possibilité de faire « *140 – 90* » ; 10e minute, un élève demande « *On peut aller sur Aide ?* » ; 11e minute nouvelle suggestion : « *il faudrait qu'on mette une retenue* »

A la 18e minute l'enseignante procède à la mise en commun, avec écriture au tableau, de la technique de deux élèves qui ont utilisé le signe “-” *« avec le moins en dessous de zéro quoi ! »*



Les élèves reviennent à leur place et Coralie interpelle Ey pour lui demander sa démarche mais il n'a pas la possibilité de développer ses arguments. Échec de la formulation de la technique de Ey.

Episode 4 jusqu'à la 30e minute : *« Je vais vous en donner une autre et vous allez voir si vous avez une autre façon de faire »* sous entendu « qu'avec des nombres négatifs » mais cela peut s'entendre « autrement que la dernière proposition » ! Puis elle se reprend pour dire : *« on n'a plus le droit de mettre de signe moins dans les nombres ! [...] donc il faut faire autrement. »*

Episode 5 jusqu'à la 55e minute : Devant l'impasse des échanges des élèves, la séance se termine par un échange collectif pour résoudre 832 – 198 en utilisant un arbre de calcul.

3.3 Analyse a posteriori de la séquence d'apprentissage

3.3.1 Le mode d'intégration instrumentale

Pour toutes les séances "calcul en arbre", le logiciel est un prétexte à la rencontre avec une connaissance mathématique qui aurait pu être traitée sans environnement numérique. On a une intégration que l'on qualifie de détournement instrumental.

3.3.2 La gestion de la transparence

J'observe comment les questions d'usage restent non explicitées en s'appuyant sur deux exemples parmi tous ceux observés.

Dans la zone de saisie, le logiciel valide le résultat à partir de l'opération sélectionnée sur la gauche de l'écran. C'est en cours d'utilisation, en réaction à la remarque d'une élève, que Coralie donnera l'information. Elle n'a pas d'importance dans le cas de la somme de deux nombres (initialement le choix d'opération est positionné sur l'addition) mais elle en aura dans le cas d'une soustraction.

La gestion de l'espace de la fenêtre est l'occasion pour les élèves de jouer avec l'organisation spatiale (symétrie, alignement) mais ce type de présentation n'est pas forcément compatible avec une lisibilité dans l'organisation des calculs, ce que Coralie n'a pas anticipé. C'est dans la rencontre avec cette difficulté qu'elle en avertira les élèves.

La répétition sur trois séances de l'utilisation du même environnement permettra de passer d'interventions successives à une intervention ponctuelle pour celle-ci et les suivantes.

3.3.3 L'intégration praxéologique : des techniques anciennes à l'environnement logiciel

Je vais présenter quelques éléments permettant de comprendre mes repérages.

La situation de départ est donnée par la consigne : *« On va faire le même travail que la semaine dernière sur le "calcul en arbre" mais cette semaine avec des soustractions. Je vous donne la soustraction que vous allez faire au départ : "545 – 392". Ça fonctionne exactement pareil sauf qu'il faut mettre moins ! »* Il faut bien sûr entendre « l'interface est la même et l'opération mathématique est la soustraction ». Je retiens que les élèves auront peut-être entendu *« qu'il faut mettre moins »* mais où ?

Au bout de cinq minutes les élèves sont bloqués par l'impossibilité de retrancher 90 de 40. Coralie sollicite l'ensemble des CM1. En faisant cela elle fait passer l'obstacle du statut d'une difficulté personnelle à celui d'une difficulté de tous.

Les tentatives sont nombreuses, infructueuses, de plus en plus magiques. Coralie choisit de faire une mise en commun au tableau pour favoriser la formulation. C'est la première fois qu'elle sort de l'environnement ordinateur. La proximité de la technique en arbre dans l'environnement papier-crayon et dans l'environnement numérique laisse croire à Coralie qu'elle pourra mieux faire expliciter les opérations en jeu sur le tableau plus grand, plus lisible que l'écran de l'ordinateur dans une interaction avec tous les élèves. Alors que la difficulté est d'ordre mathématique, Coralie cherche une réponse dans les outils de gestion de la classe qu'elle connaît le mieux, la « mise en commun » autour du tableau.

Elle va essayer d'exploiter la proximité entre les techniques instrumentales et les techniques "papier-crayon" pour faire verbaliser leurs techniques nouvelles. Cependant elle ne pose pas la question du sens de ces calculs. Et lorsqu'elle évoque la possibilité de rechercher du sens, elle reste dans les outils TICE et tableau au détriment des mathématiques.

Les éléments que je viens de présenter me semblent fixer le mode d'intégration sur le critère "Techniques" au niveau d'une juxtaposition de techniques des deux environnements sans que l'une enrichisse l'autre comme je l'ai dit dans l'analyse du logiciel.

3.3.4 Rapport entre la TAL et la TAM

La tâche logicielle utiliser « un calcul en arbre pour calculer une différence » se confond avec la tâche mathématique, elle peut être réalisée comme c'est le cas ici en environnement “papier-crayon” ou sur le tableau. Pour des élèves de cycle 3, il s'agit d'un problème complexe, plusieurs étapes sont nécessaires, les tâches intermédiaires sont des tâches maîtrisées depuis le début du cycle 3. Il s'agit globalement d'organiser une suite de calcul qui structure, une technique particulière, « le calcul en arbre ».

C'est la rupture entre les situations antérieures où l'arbre de calcul avait un sens et celle-ci qui empêche les élèves de le réinvestir dans cette situation, l'utilisation de l'environnement numérique ne favorisant pas ici le retour vers des situations déjà rencontrées.

Les élèves doivent donc réinvestir leurs savoirs dans une situation nouvelle et n'ont pas les outils pour y réussir.

3.3.5 Les contrats

Pour le savoir engagé, les situations et la responsabilité des acteurs je reprends ici les éléments clés qui permettront au lecteur de les situer sur notre “Toile”.

La recherche d'une technique de calcul intégrant les propriétés des nombres place les élèves en situation d'utiliser des savoirs déjà rencontrés mais qu'il faudra organiser pour résoudre le problème proposé.

Comme je l'ai dit à propos des tâches, Coralie n'a pas su exploiter les limites des techniques de calcul posé, bien maîtrisées par la plupart des élèves, qui, ici, ne peuvent pas être appliquées directement, ce qui crée une situation antagonique.

Mais les échecs dans la conduite de la séance font que Coralie organise davantage l'activité, oriente davantage le choix d'une technique, contrôle davantage les productions. C'est Coralie qui garde la responsabilité générale de la dévolution et la validation.

3.3.6 Les points d'appui pour réaliser la dévolution de la situation

Le fait que la première séance réalisée en environnement logiciel n'apporte qu'une surcharge dans la complexité de la gestion d'une séance me fait dire que Coralie utilise l'image sociale positive de l'ordinateur pour impliquer les élèves dans la tâche mathématique.

On peut dire qu'elle fait le choix d'exploiter la dimension logicielle pour revisiter des savoirs.

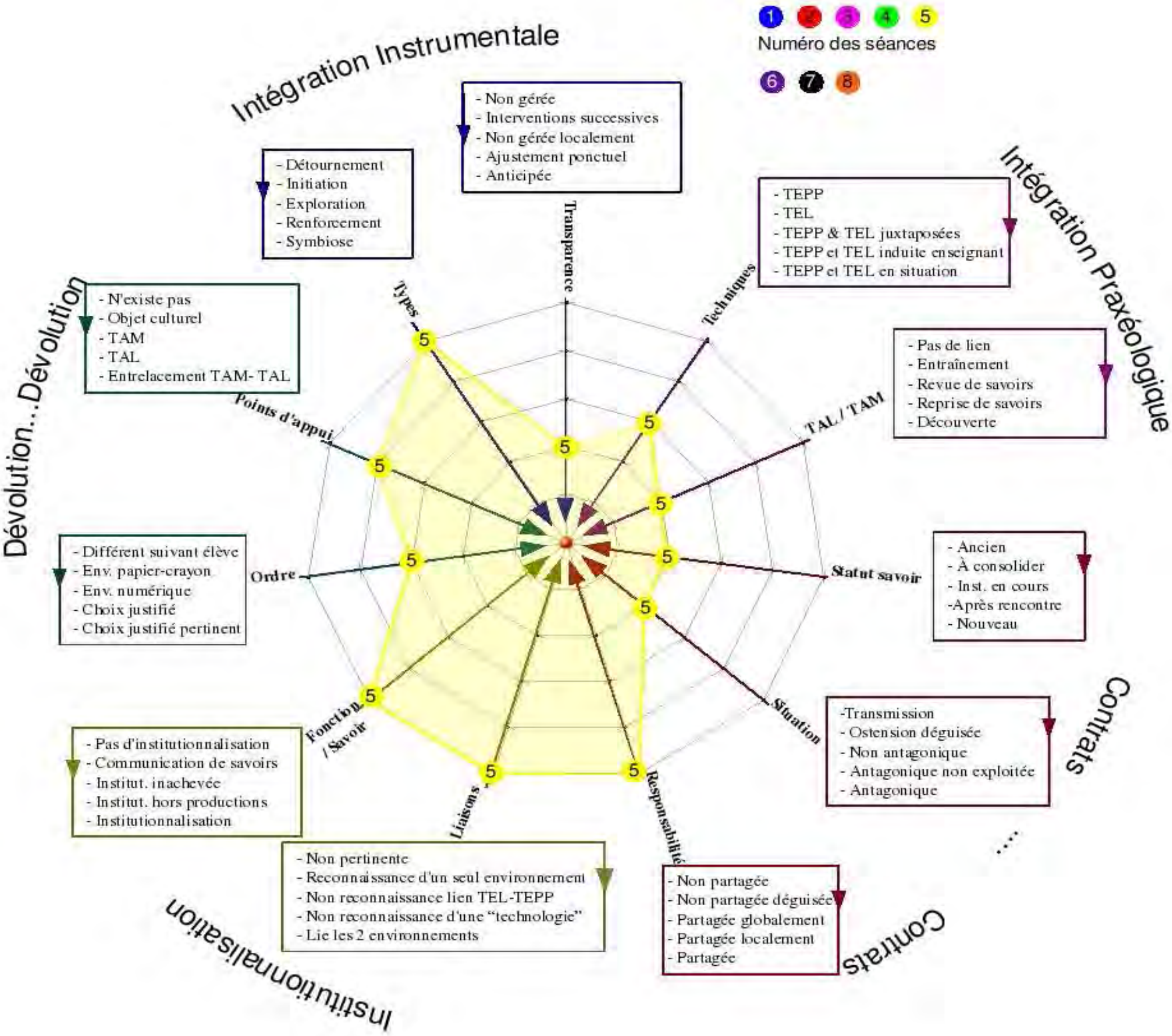
Mais l'échec relatif de cette séance conduit Coralie à placer la recherche individuelle dans la tâche logicielle, où les moments de formulation, d'explicitation s'appuient sur la trace du tableau qui regroupe les élèves.

Une telle organisation ne peut pas être le fruit du hasard et, même si les résultats n'ont pas l'efficacité escomptée, elle me semble avoir des éléments de pertinence.

3.3.7 L'institutionnalisation réalisée et les environnements

Ici l'institutionnalisation se résume à une mise en commun d'impressions sur la séance sans contenu mathématique réel. Elle ne donne pas un statut de savoir aux connaissances étudiées, elle va même à l'encontre de ce qui est attendu dans la mise en commun intermédiaire. Elle est plus une réponse à notre présence comme le confirment les entretiens ante, qu'une nécessité réfléchie pour la classe.

Ce repérage me permet de situer cette séance sur la “Toile” par rapport à nos critères d'intégration



des pratiques en environnement TICE.

3.4 Comparaison de la séance □ aux autres séances de Coralie

J'utilise le principe de la superposition de mes “Toiles” pour identifier les signes d'une évolution possible d'une séance à l'autre.

J'utilise la “Toile des critères” pour repérer les évolutions à partir des éléments de lecture suivants :

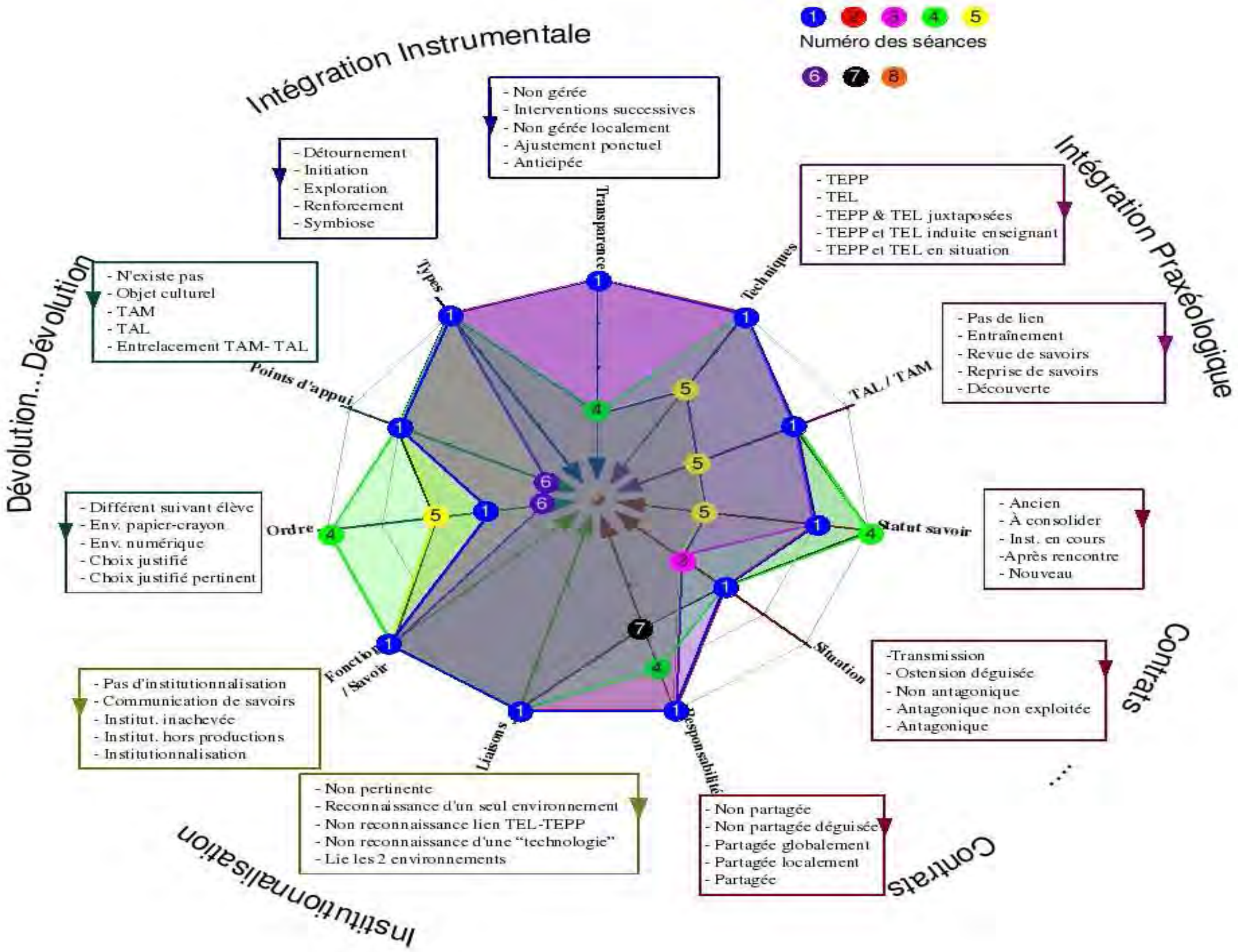
- Chaque séquence est identifiée par une ligne polygonale portant un numéro correspondant à l'ordre dans lequel elle a été réalisée.
- Les pastilles, sommets de la ligne polygonale, portant le numéro de la séquence, situent, pour un critère ou un contrat, les indicateurs sur une position qui, lorsqu'elle se rapproche du centre de la toile, traduit un rapprochement de ce que j'appelle “intégration optimale”.
- La superposition des lignes polygonales permet de situer les évolutions vers une “intégration optimale”. Dans l'empilement, la couche la plus profonde est celle qui décrit la dernière séquence (ou séance). S'il y a superposition de pastilles, dans ce cas la pastille visible portera le numéro de la première séquence où cette position a été prise. Pour faciliter la lecture, lorsque la surcharge graphique de la “Toile” est trop importante, je superpose partiellement les pastilles pour qu'elles soient visibles.
- Dans le cas où le recouvrement des pastilles ne permet pas d'identifier l'évolution des positions, ce sont les côtés de la ligne polygonale qui les identifient.

La lecture de la “Toile” traduit les tendances évolutives des enseignants sur les différents critères, selon leurs changements ou non de positions, que j'identifie de la façon suivante :

- Il y a évolution s'il y a plus de deux positions différentes sur notre “Toile”. Elle est progressive si l'évolution est marquée par des positions qui se rapprochent au moins deux fois du centre de la “Toile”. Elle est régressive si l'évolution est marquée par des positions qui s'éloignent au moins deux fois du centre de la “Toile”.
- Un critère est stable, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'évolution, si les pastilles n'occupent pas plus de deux positions. La stabilité est totale lorsque les pastilles occupent la même position ou des positions voisines dans l'ordre des séances sans changement de sens. La stabilité est relative si les positions sont éloignées ou si j'observe un va et vient sur les deux positions.

Remarque : Ces variations sur un critère sont identifiées plus simplement par une représentation graphique qui facilite l'interrogation sur le type d'évolution. Il ne s'agit pas de donner au schéma un statut de preuve. Pour des raisons de lisibilité, j'ai choisi d'établir une équidistance entre les niveaux et entre les critères. Cependant il ne s'agit pas de mesures mais de repères.

Cette superposition des “Toiles” permet de représenter les critères sur lesquels Coralie évolue et ceux sur lesquels elle a une stabilité d'usage. Il est alors plus facile d'identifier que les critères portant sur la dévolution, les types d'intégration instrumentale, ceux de l'intégration praxéologique et le statut du savoir sont susceptible d'une évolution tandis que les autres restent stables.



J'ai alors repris cette réponse de BROUSSEAU à VERGNAUD « *Je suis entièrement d'accord pour admettre que le professeur se trouve devant le triplet "situation, connaissance, sujet" un peu comme l'actant devant une "situation objective"* » pour ouvrir le débat sur la question : Peut-on prolonger cette réflexion par la question : A partir des rétroactions du milieu classe les enseignants apprennent-ils ? À laquelle je tente de répondre dans la suite de la thèse.

4 Conclusion

La conclusion de cette communication aurait dû émerger du débat à la suite de ma dernière question : Est-ce que l'outil « Toile » permet d'identifier chez les enseignants des pratiques d'auto-apprentissage lors de l'intégration des TICE dans les pratiques mathématiques ?

Les questions qui ont suivi cette communication ont principalement porté sur des éclaircissements à propos de l'élaboration de l'outil « Toile », ainsi que sur la pertinence qu'il y a à utiliser de tels logiciels mais la question de l'auto-apprentissage n'a pas été abordée.

Concernant l'usage « de tels logiciels » ma communication en termes de contraintes internes n'y répond pas. En effet, elle ne peut pas être étudiée du seul point de vue interne des pratiques dans la classe, les influences externes que j'ai identifiées dans la première partie de ma thèse donnent un éclairage sur les choix de tels logiciels par les enseignants.

Concernant l'outil « Toile » la durée de la présentation n'a pas permis de développer une explicitation des éléments qui m'ont conduit à retenir onze critères et les niveaux pour caractériser une échelle vers une « intégration optimale ».

J'ai cependant essayé de présenter :

- Quels sont les cadres théoriques qui m'ont permis de retenir ces critères. Ils apparaissent alors comme un bon compromis entre leur utilisabilité et la complexité des pratiques mathématiques à décrire.
- Comment leur représentation sur la « Toile » favorise alors un repérage des conditions et des contraintes qui pèsent sur la pratique. En cela, comment elle facilite dans un premier temps, dans un contexte donné, la compréhension du sens, c'est ma démarche à propos de la pratique de Coralie, puis dans un deuxième temps comment elle permet d'interroger la stabilité de ces évolutions chez d'autres enseignants.

L'utilisation de cet outil à propos des pratiques de Coralie permet bien d'identifier ses évolutions qui révèlent des obstacles qu'elle rencontre dans l'intégration des TICE. Ces évolutions caractérisent ses techniques pour introduire les TICE dans les pratiques mathématiques de sa classe.

Je formule alors l'hypothèse que l'on dispose d'un outil pour décrire la situation objective de l'enseignant lorsqu'il tente de résoudre le problème de l'intégration des TICE en mathématique. Cette position justifie alors que j'ouvre le débat sur « l'auto-apprentissage » des enseignants et notamment sur les conditions pour construire un milieu d'auto-apprentissage.

1 BIBLIOGRAPHIE

ASSUDE T. CAPPONI B. BERTOMEU J.F. BONNET J.F. (1996), De l'économie et de l'écologie du travail avec le logiciel Cabri-géomètre, *Petit x n° 44*, IREM Grenoble, pp. 53-79.

ASSUDE T. & GRUGEON B. (2002), Intégration de logiciels de géométrie dynamique à l'école primaire, *Actes du XXIXème Colloque de la COPIRELEM, IREM des Pays de la Loire*, pp. 227-253.

ASSUDE T. & GELIS J-M (2002), La dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de Cabri-géomètre à l'école primaire, *Educational Studies in Mathematics*, pp. 259-287.

ASSUDE T. (2005), Time management in the work economy of a class. *Educational Studies in Mathematics*. 59.1, pp. 183-203.

ASSUDE T., MERCIER A., SENSEVY G. (2007), L'action didactique du professeur dans la dynamique des milieux, *27/2*, pp. 221-252, Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble.

BERTHELOT R. et SALIN M.H. (1992), L'enseignement de l'espace et la géométrie dans la scolarité obligatoire, Thèse Université Bordeaux I.

BROUSSEAU G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique, *Revue de Didactique des Mathématiques*, Vol. 7, n°2, La pensée sauvage éditions, pp. 33-115.

BROUSSEAU G. (1995), L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. In NOIRFALISSE R., PERRIN-GLORIAN M.J., (Éd.) *Actes de la VIII^e école d'été de didactique des mathématiques*, pp. 3-45, Clermont-Ferrand : IREM.

BROUSSEAU G. (1996), La théorie des situations didactiques, Cours donné lors de l'attribution du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal, disponible en ligne : http://pagesperso-orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/TDS_Montreal.pdf

BROUSSEAU G. (1998), La théorie des situations didactiques. Recueil de textes de Didactique des mathématiques 1970-1990 présentés par BALACHEFF N., COOPER M., SUTHERLAND R. et WARFIELD V., La pensée sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU G. (2002). Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques, DEAST (Didactique et Anthropologie des Enseignements Scientifiques et Techniques),
http://perso.orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/Glossaire_Brousseau.pdf texte en ligne septembre 2007.

BROUSSEAU G. (2005), Réponses à VERGNAUD G, in Sur la théorie des situations didactiques. Questions, réponses, ouvertures Hommage à Guy Brousseau, (Ed.) CLANCHE P, SALIN M.H., SARRAZY B., La Pensée Sauvage.

MARGOLINAS C., 2002, Situations, milieux, connaissances – analyse de l'activité du professeur, *Actes de la 11ème École d'Eté de Didactique des Mathématiques*, pp. 141-156, Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble.

PERRIN-GLORIAN M-J, HERSANT M (2003), Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23/2, pp. *217-276*, Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble.

TROUCHE L. (2005), Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25/1, pp. 91-138, Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble.

Table des matières