QUELS SAVOIRS MATHEMATIQUES DANS LES PROBLEMES POUR CHERCHER A L'ECOLE ELEMENTAIRE ? LE CAS DES PROBLEMES D'OPTIMISATION AU CYCLE 3.

Magali HERSANT
IUFM des Pays de Loire, CREN, Université de Nantes
Yves THOMAS
IUFM des Pays de la Loire, Université de Nantes

Résumé

Notre atelier s'est appuyé sur les travaux du groupe « Des problèmes pour chercher à l'école primaire » (Groupe PPC, 2006 et Thomas, 2008). L'objectif était d'amener les participants à une réflexion sur les savoirs mathématiques qui peuvent être en jeu dans la résolution de ces problèmes. Pour cela, après un bref rappel du cadre officiel (MEN, 2005), nous avons d'abord invité les participants à résoudre des problèmes d'optimisation élaborés au sein de notre groupe de travail et destinés à des élèves de cycle 3. Puis, le travail a concerné les savoirs mathématiques en jeu dans ces problèmes : nous avons demandé aux participants quels savoirs mathématiques ils identifiaient dans ces problèmes et avons précisé notre point de vue sur cette question, en l'illustrant par des observations que nous avons effectuées dans des classes.

Dans ce compte-rendu, nous présentons les problèmes étudiés lors de l'atelier et les savoirs mathématiques que nous y identifions.

Introduction

Depuis quatre années, nous élaborons des « problèmes pour chercher » (PPC dans la suite du texte) et des scénarii pour ces problèmes au sein au sein du groupe « Problèmes pour chercher » composé d'enseignants du premier degré, de formateurs et d'enseignants chercheurs[1]. L'évolution de notre questionnement nous a conduit à travailler ces deux dernières années sur des problèmes (discrets) d'optimisation pour le cycle 3 qui mettent en jeu à la fois :

- des savoirs mathématiques relatifs à la recherche et à la résolution de problème ;

[1] Ce groupe, dont la responsable est Magali Hersant, rassemble en 2007-2008 Catherine Argant, Valérie Aubry, Marie Boudeau, Denis Butlen, Geneviève Dron, Yves Thomas, Raymond Torrent. Ses travaux s'inscrivent dans la recherche INRP dirigée par Christian Orange « Pratiques et mises en textes des savoirs ».

• des savoirs que nous nommons curriculaires plus clairement identifiables dans l'une des rubriques du programme de mathématiques à l'école élémentaire (par exemple : sur l'alignement, sur l'aire…).

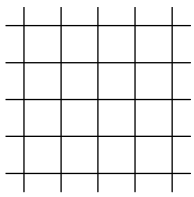
L'identification des savoirs en jeu dans ces problèmes n'est pas toujours évidente et notre objectif, dans cet atelier, était d'amener les participants à réfléchir sur cette question. Pour cela nous nous sommes appuyés sur quatre problèmes. Nous avons demandé aux participants d'abord de les résoudre puis d'indiquer les savoirs mathématiques qu'ils y identifiaient comme enjeu d'apprentissage pour des élèves de cycle 3. Lors de l'échange qui a suivi ce travail, prenant en particulier appui sur des observations réalisées en classes, nous avons précisé les savoirs que nous considérons comme enjeu d'apprentissage dans ces problèmes soit parce que les élèves doivent les mobiliser, soit parce qu'ils doivent les construire ou soit parce qu'ils doivent les modifier. Ce texte reprend ces éléments après une présentation des problèmes et des commentaires sur ces problèmes, relatifs aux conclusions auxquelles on peut aboutir avec les élèves et aux mathématiques.

1. Présentation des problèmes

Les formulations des problèmes sont les mêmes que celles utilisées avec des élèves de cycle 3. Nous encourageons vivement les lecteurs à les résoudre avant de poursuivre leur lecture.

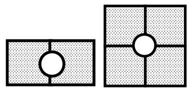
Pas trois points alignés.

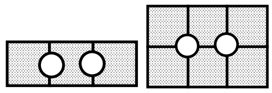
Placez le plus possible de points sur les intersections de cette grille sans former aucun alignement de trois points.



Gommettes

On dispose d'un grand nombre de carrés en carton et de gommettes rondes collantes avec lesquelles on assemble ces carrés.

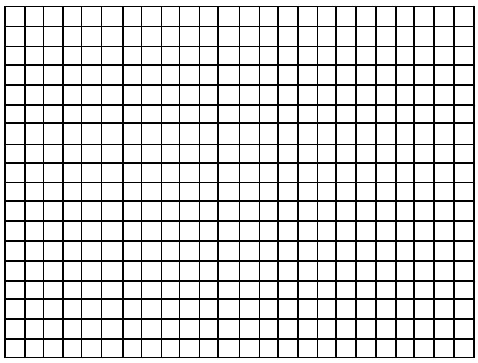
Voici deux assemblages possibles avec une seule gommette : 

Voici deux assemblages possibles avec 2 gommettes : 

Vous disposez de 6 gommettes, assemblez le plus possible de cartons en un seul bloc avec ces 6 gommettes.

Etiquettes

Dans cette grille 18×24, découpez le plus possible d'étiquettes 5×7.



Neuf nombres.

On écrit une suite de 9 nombres entiers différents supérieurs à 1, respectant la contrainte suivante : quand deux nombres sont voisins, l'un des deux est multiple de l'autre.

Le but est que le plus grand nombre de la liste ne soit pas trop grand.

Les formulations des énoncés orientent volontairement d'abord vers l'action, la réalisation d'essais, c'est-à-dire vers une sorte de « bricolage ». Toutefois, *in fine*, la résolution de ces problèmes repose sur une articulation et des allers-retours entre des essais effectifs pour proposer ou améliorer une solution et un raisonnement en partie détaché de l'action qui permet d'envisager des raisons intellectuelles et une preuve. Pour résumer cette dynamique, nous parlons d'articulation entre démarche empirique et démarche déductive. Ce caractère commun des problèmes permet d'envisager un scénario en trois temps pour leur réalisation en classe :

1. une recherche empirique (individuelle, en petits groupes puis en groupe classe) permet d'obtenir une ou des meilleure(s) solution(s) de la classe ;
2. lorsque l'amélioration empirique de la ou des solutions s'essouffle, il s'agit de savoir si « ça vaut la peine de chercher encore » pour basculer vers la recherche de raisons et le raisonnement déductif, au besoin articulé avec la recherche empirique précédente ;
3. la conclusion permet de faire la synthèse sur l'état de résolution du problème, selon les problèmes et les travaux des élèves, elle permet de clore ou pas le problème.

2. Conclusions possibles au cycle 3 et remarques mathématiques

Certains de ces problèmes appellent des commentaires soit par rapport à l'état des recherches en mathématiques à leur sujet, soit par rapport à leur passation en classe, ce que nous faisons dans ce paragraphe. Nous indiquons aussi les conclusions auxquelles peut parvenir une classe de cycle 3, en une ou deux séances. Cela ne signifie pas que chaque élève est capable de produire cette conclusion sur le problème, mais qu'elle est élaborée collectivement par la classe. La rédaction de la conclusion proposée ici ne respecte pas la chronologie de résolution du problème en classe et d'élaboration des différents éléments de la solution. Cette conclusion sur le problème correspond le plus souvent à une preuve mais pas toujours, comme nous le verrons pour *Etiquettes*.

Pour les problèmes *Gommettes* et *Etiquettes*, nous invitons aussi le lecteur à consulter l'article de Thomas (Thomas, 2007) dans la revue *Grand N*.

Pas trois points alignés

Conclusion. Sur chacune des lignes, on peut placer au plus deux points. Donc on peut placer au plus $2 \times 5 = 10$ points sur la grille 5×5. De plus, comme, on peut effectivement placer 10 points, par exemple de la façon suivante (figure 1), la solution du problème est 10.

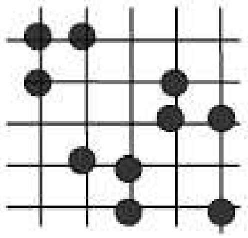


Figure 1

Commentaires. Ce problème, sous sa forme générique (*i.e.* avec une grille $n \times n$) est connu des mathématiciens sous le nom de *No Three in line.* Il n'est pas résolu pour n grand ; on dispose seulement d'une conjecture (voir par exemple le site : http://wwwhomes.uni-bielefeld.de/achim/no3in/readme.html).

Pour les classes de CE2, on peut proposer d'abord une grille 4×4 où il est plus facile de trouver une disposition qui correspond à la solution optimale.

Gommettes

Conclusion. Avec chaque gommette on peut assembler au plus 4 carrés. Ainsi, la première gommette permet d'assembler 4 carrés. Avec la deuxième, puisqu'il faut que les nouveaux carrés tiennent ensemble et soient reliés au bloc déjà constitué, on ne peut ajouter que trois nouvelles gommettes et ainsi de suite. Donc avec 6 gommettes, on peut assembler au plus 4 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 soit 19 gommettes, par exemple de l'une des façons suivantes (figure 2).

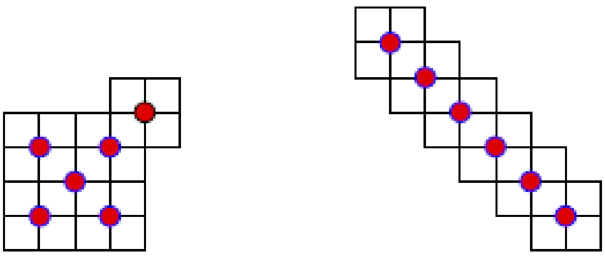


Figure 2

Commentaires. Dans ce problème, la taille relative des gommettes et des cartons joue un rôle essentiel (Thomas, 2007) et détermine d'une certaine façon un axiome de base sur lequel il faudra se mettre d'accord avec les élèves : avec une gommette on peut associer au plus 4 carrés.

On peut modifier le nombre de gommettes dont on dispose mais cela n'est pas très intéressant puisqu'une généralisation du problème est possible.

Etiquettes

Conclusion. On peut placer 11 étiquettes de la façon suivante (figure 3). On ne sait pas si on peut en placer 12. En effet, le nombre de carreaux de la grille est 432 et pour placer 12 étiquettes, 420 carreaux sont nécessaires, mais cela ne suffit pas pour dire qu'on peut effectivement placer 12 étiquettes. Par exemple, on ne peut placer aucune étiquette sur une grille de 4 carreaux sur 100 alors qu'il y a 400 carreaux.

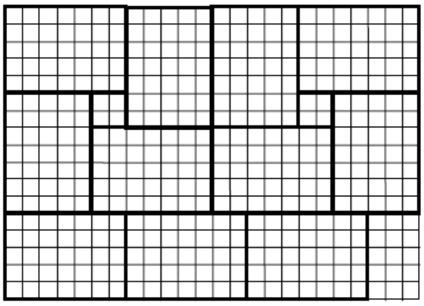


Figure 3

Commentaires. Nous avons toujours renoncé à fournir une preuve de l'impossibilité de placer 12 étiquettes dans les classes. Pour les élèves, le problème 18×24 reste donc ouvert tandis que le problème 17×24 (avec les mêmes étiquettes) est clos. La preuve réside dans l'impossibilité d'obtenir 18 comme somme de 5 et de 7. Chaque rangée de 18 carreaux comporte donc (du moins si on convient que les étiquettes sont découpées en suivant le quadrillage) au maximum 17 carreaux occupés par les étiquettes. Le nombre de carreaux occupé par les étiquettes est donc inférieur ou égal à 17 × 24, ce qui ne permet pas d'en placer 12.

Plus généralement, les problèmes de ce type, avec une grille de taille $n \times n'$ et des étiquettes de taille $p \times p'$ (avec n, n', p et p' entiers et p (resp. p') inférieur à n (resp. n')), sont connus sous le nom de « rectangles packing ». Ils sont classés comme des problèmes Non déterministes Polynomiaux Durs (NP durs) c'est-à-dire qu'ils sont résolubles (en théorie) en un temps polynomial si l'on dispose d'une infinité d'ordinateurs qui travaillent en parallèle ! Cependant, pour certaines valeurs numériques, la résolution à la main est possible, comme nous venons de le voir.

Neuf nombres

Conclusion. Il y a 11 entiers compris entre 2 et 12. 7 et 11 n'ont ni multiple ni diviseur parmi ces entiers, il reste donc 9 entiers possibles : 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 et 12. Par ailleurs, la suite 5, 10, 2, 8, 4, 12, 6, 3, 9 convient. La solution du problème est donc 12.

3. Pourquoi avoir choisi ces problèmes ?

Les solutions de ces problèmes reposent principalement sur une articulation entre des arguments du registre (au sens de Orange, 2005) empirique et des arguments du registre déductif. Ceci provient d'une part de la formulation des consignes qui favorise une approche expérimentale des problèmes et d'autre part de la nature même des problèmes qui permet un encadrement progressif dans N de la valeur numérique maximale qui répond au problème. Ces caractéristiques ont été déterminantes dans notre choix de ces problèmes pour deux types de raisons.

Nous souhaitons permettre à tous les élèves de s'engager dans la résolution du problème et de faire des mathématiques un peu différentes de celles qu'ils fréquentent le plus souvent (c'est à dire la plupart du temps dans une classe) pour contribuer à réassurer certains élèves « modestes » en mathématiques et, plus généralement, à élargir la représentation que les élèves ont des mathématiques.

Ces problèmes discrets d'optimisation permettent de répondre à ces objectifs d'abord car ils ne ressemblent pas tous à des problèmes d'arithmétique ou de géométrie et risquent donc, moins que certains autres PPC (comme par exemple celui où connaissant le nombre de têtes et de pattes, il faut trouver le nombre de poules et de lapin, cité dans les documents d'accompagnement), d'être rejetés par des élèves « modestes » en mathématiques. Mais surtout, ces problèmes peuvent être initialement formulés de façon à inciter les élèves à « bricoler », expérimenter, manipuler… comme nous l'avons fait, ce qui leur permet de proposer une solution au problème. Dans les classes, nous avons en effet observé que tous les élèves proposent une « solution » et que la majeure partie d'entre-eux s'autorise à parler lors des phases collectives. Enfin, par leur nature et leur formulation, ces problèmes permettent de dépasser l'opposition juste / faux pour entrer dans une démarche de problématisation qui articule trois possibilités : pertinent au regard des contraintes du problème, non pertinent et optimal (meilleure solution possible).

Nous avons aussi choisi ces problèmes car ils permettent de travailler au cycle 3 sur l'argumentation et la preuve en accord avec notre représentation de l'activité de recherche en mathématiques. Il nous semble en effet essentiel que les élèves rencontrent dès l'école primaire, puis en 6ème et 5ème, des situations de mathématiques où ils sont amenés à argumenter, sans quoi leur idée de la preuve mathématique risque de se réduire à celle de démonstration formelle. Pour nous, l'activité de recherche d'un problème de mathématiques est une articulation entre « expériences mathématiques » (au sens de Chevallard, 1992), conjectures et preuves, qui situe la résolution de problèmes mathématiques comme une activité expérimentale complémentaire de la maîtrise d'un certain nombre de savoirs plus techniques (Perrin, 2007).

Pour autant, nous sommes réservés quant aux possibilités de développer chez les élèves de cycle 3 des compétences méthodologiques, valables pour tous les problèmes de mathématiques à partir d'un travail sur des problèmes assez différents. C'est pourquoi, nous nous sommes restreints à un seul champ, celui des problèmes discrets d'optimisation, qui permet de travailler plus spécifiquement certains savoirs liés à la résolution d'un problème de mathématiques.

4. *Quels savoirs dans ces problèmes ?*

La recherche de ces problèmes nécessite de mettre en œuvre, d'une part des savoirs relatifs à la résolution d'un problème mathématique communs aux quatre problèmes et, d'autre part, des savoirs curriculaires plus spécifiques à chacun des problèmes.

Savoirs sur la recherche et la résolution d'un problème de mathématiques

• *Dépasser sa conviction, son intuition, pour établir et formuler une conjecture qu'on cherchera à prouver*

Ces problèmes sont choisis pour que les élèves « expérimentent » dans un premier temps pour poser le « vrai » problème et se faire une idée de la solution. Par exemple, dans *Pas trois* *points alignés*, cela consiste à placer le plus possible de points sur la grille, à vérifier qu'il n'y a pas d'alignements de trois points, et à recommencer ou essayer de placer encore plus de points sur la grille. Après un temps de recherche plus ou moins long, des élèves pensent que sur la grille 5 × 5 distribuée, on ne peut pas disposer plus de 10 points sans en aligner 3. Cela permet de formuler une conjecture. Nous souhaitons que les élèves ressentent l'intérêt et les limites de leurs expériences empiriques.

• *Comprendre que l'impossibilité mathématique est autre chose que l'impossibilité empirique.*

Il s'agit plus précisément de savoir que l'argument « c'est impossible car j'ai beaucoup cherché et je n'ai pas trouvé » n'est pas recevable comme une preuve mathématique, ce qui n'est pas si évident pour des élèves de cycle 3, en particulier au début du cycle. Là encore, nous souhaitons que les élèves ressentent les limites de leur démarche empirique et la nécessité de passer à un raisonnement déductif.

• *Une preuve mathématique ne correspond pas toujours à un raisonnement hypothético-déductif*

Il s'agit d'éviter que les élèves aient une idée stéréotypée de la preuve en mathématiques en les faisant travailler sur des problèmes différents de ce point de vue.

Certaines preuves demandent d'articuler les registres empirique et déductif. Par exemple, la preuve de *Pas trois points alignés* repose d'une part, sur le fait qu'il est impossible de placer plus de 10 points sur une grille 5×5 (résultat d'un raisonnement hypothético-décuctif) et d'autre part, sur le fait qu'on dispose effectivement d'une solution à 10 (résultat empirique). Cela est étroitement lié aux problèmes d'optimisation. Dans le problème *Gommettes,* cette articulation n'est pas aussi évidente car la démarche de résolution peut être plus axiomatisée, comme on l'observe chez certains élèves. Il est convenu avec les élèves qu'avec une gommette on peut associer au plus 4 cartons. Certains élèves en déduisent le corollaire suivant (plus ou moins explicité par les élèves) « avec chaque nouvelle gommette on peut ajouter 3 cartons à l'assemblage existant ». La preuve repose alors entièrement sur un raisonnement hypothético-déductif.

• *Distinguer le possible, l'impossible et l'indéterminé.*

Les problèmes *Etiquettes* et *Pas trois points alignés* peuvent rester non résolus à la fin de la séquence avec les élèves de cycle 3. C'est le cas pour *Pas trois points alignés* si les élèves n'ont pas réussi à positionner 10 points sur la grille. Nous pensons qu'il n'est pas alors souhaitable de leur livrer immédiatement la solution et préférons les laisser chercher encore quelques jours avant de la donner. Par ailleurs, nous précisons aussi aux élèves que ce problème est encore non résolu par les mathématiciens pour les grandes grilles. Pour *Etiquettes* (grille 18 × 24), nous indiquons aux élèves trois choses : on est sûr qu'on peut découper 11 étiquettes (on a trouvé une disposition qui le permet), on est sûr qu'on ne peut pas en découper 13 (13×7×5 = 455 et 18×24 = 432), on ne sait pas si on peut placer 12 étiquettes. Cette distinction entre le possible (mathématiquement prouvé), l'impossible (mathématiquement prouvé) et l'indéterminé, pour une durée plus ou moins longue, qui est très liée à la nature du problème, permet de montrer aux élèves :

- que résoudre un problème ne se résume pas à effectuer un calcul (on le voit en particulier avec *Etiquettes*) ;
- qu'un problème mathématique n'a pas toujours de solution connue ;
- qu'il est autorisé de dire qu'on n'a pas résolu le problème (c'est même préférable à dire n'importe quoi) ;
- que lorsqu'on cherche un problème, il est important de bien distinguer ce dont on est sûr (le possible, l'impossible qu'on a réussi à prouver) et ce dont on doute (la part indéterminée du problème) d'une part car cela permet d'organiser la recherche, et, d'autre part, car cette distinction constitue, du point de vue des mathématiques, une étape de la résolution du problème.

Ces aspects sont fondamentaux dans l'activité mathématique.

- *A propos d'heuristique*

Du point de vue de l'heuristique, ces problèmes sont assez différents. Nous ne donnerons ici que quelques éléments pour permettre une première réflexion.

Dans *Gommettes*, la première disposition qui vient à l'esprit joue un rôle déterminant dans la résolution du problème, à la fois pour l'aspect empirique et pour l'aspect déductif. Ainsi, quand un élève dispose d'emblée les cartons en escalier (ce que nous avons observé chez certains élèves), cela rend plus facile la preuve qui « colle » alors à la démarche empirique : avec la première gommette, j'associe 4 cartons, avec la deuxième, j'en ajoute 3, ….. Au contraire, certains élèves s'enferment dans des dispositions linéaires qui limitent la recherche. Un point à retenir peut être que, lors de la recherche empirique, il est souvent fécond d'avoir des exemples assez différents, de regarder les fonctionnements aux limites.

Pour *Neuf nombres*, les élèves pensent souvent à débuter la suite par un petit nombre et à la multiplier par un petit nombre. C’est une idée intéressante qu’il faut savoir dépasser pour arriver à la solution optimale. Pour *Pas trois points alignés*, le travail préalable sur une grille 4 × 4 n’aide en rien la recherche d’une disposition optimale pour une grille 5 × 5. Cette idée, qui n’est pas aberrante en soi, est une véritable impasse. En effet, si on ajoute une ligne et une colonne à une grille 4×4, on ne peut placer qu’un seul nouveau point sans avoir d’alignement de trois points. Par ailleurs, il est parfois impossible de compléter une grille 5 × 5 à neuf points en une grille à 10 points.

Est-ce que « savoir renoncer à son idée de départ », y compris si elle est heuristiquement fondée, est un savoir sur la résolution de problèmes ? Est-ce que les élèves peuvent apprendre cela avec nos problèmes ?

Savoirs sur des notions mathématiques bien identifiées dans les programmes

Nous venons de le voir, ces problèmes permettent de travailler des savoirs communs sur la résolution de problème. Cependant, ils ne présentent toutefois pas le même intérêt quant aux apprentissages potentiels des élèves en termes de savoirs curriculaires. En effet, comme nous allons le voir, certains d’entre eux permettent, en plus des savoirs sur la recherche et la résolution d’un problème, de revisiter des savoirs curriculaires ou de préparer certains apprentissages futurs. Ces problèmes sont de notre point de vue, et pour les raisons développées en introduction, plus intéressants à réaliser en classe.

Supprimé : -

- *Des savoirs sur l’alignement et la notion de pente dans* Pas trois points alignés

Pour s’engager dans la résolution du problème, il est nécessaire de savoir ce que sont des points alignés ou du moins d’en avoir une première idée. Les échanges entre les élèves amènent le plus souvent à rappeler que deux points sont toujours alignés, même si l’un est sur la Terre et l’autre sur Mars. Nos observations en classe montrent de plus que, pour certains élèves de cycle 3, l’alignement des points correspond à l’alignement selon les lignes, les colonnes ou les diagonales des petits carrés du quadrillage (conception 1). Cette conception de l’alignement est probablement liée à la prégnance des lignes et des colonnes sur un quadrillage, ajoutée au fait que les élèves associent aussi la situation au jeu « puissance 4 ».

Elle émerge souvent au cours du débat entre les élèves sur la validité des propositions et est modifiée (au moins dans le temps de la séance) en « trois points sont alignés s'ils sont sur un même bord d'une règle » (conception 2). Dans une classe, nous avons observé un débat entre deux élèves de conceptions différentes (1 et 2) à ce sujet, qui a clairement amené l'un deux à passer de la conception 1 à la conception 2. Par ailleurs, dans plusieurs classes, des élèves ont posé la question : « a-t-on le droit d'aligner deux points ? ». C'est une autre occasion d'enrichir leurs connaissances sur l'alignement. Ainsi ce problème permet de revisiter une connaissance ancienne et de modifier une conception erronée.

Pour trouver des dispositions de points sur les grilles et vérifier si une production est correcte, il est nécessaire de déterminer, de nombreuses fois, si des points sont alignés. Cela amène les élèves à développer des connaissances nouvelles sur l'alignement. Par exemple, dans une classe où l'enseignante avait rappelé comment vérifier un alignement avec une règle, nous avons observé que, petit à petit, les élèves ont abandonné la règle pour vérifier perceptivement, et de façon correcte, les alignements lors du travail individuel ou en petits groupes. De plus, le travail en groupe classe sur des productions affichées au tableau amène aussi certains élèves à une connaissance « vectorielle » implicite de l'alignement. Nommons A, B, C les trois points qui font l'objet de la vérification et qui sont, par exemple disposés de la façon suivante (figure 5). Les élèves repèrent si les triangles rectangles d'hypoténuse [AB] et [BC] sont superposables et utilisent ainsi implicitement la notion de pente d'une droite pour repérer des alignements.

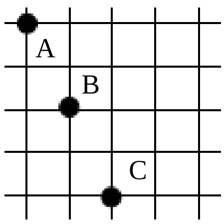


Figure 4

- *Des savoirs algébriques dans Gommettes*

Ce problème, moins riche que les autres du point de vue des savoirs curriculaires qu'il met en jeu, permet toutefois de (re)mettre en relation l'addition itérée et la multiplication. En effet, il est intéressant, et certains élèves le font spontanément, de transformer l'écriture additive 4 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 en une écriture multiplicative du type 4 + 5 × 3 ou encore 4 + (6 – 1)× 3. Avec ces écritures, la récurrence qui permet de résoudre le problème et le caractère algébrique du problème apparaissent. Cela permet d'envisager une résolution du problème en général.

- *Des savoirs sur pavage et aire dans* Etiquettes

Lorsqu'ils cherchent empiriquement à disposer le plus possible d'étiquettes sur la grille, la plupart du temps, les élèves disposent ou représentent les étiquettes en utilisant les mesures des côtés d'une étiquette, mais leur activité consiste à essayer de paver une surface (grandeur) avec une autre surface (grandeur). Un pavage cesse lorsqu'on ne peut plus disposer de nouvelle étiquette sur la grille sans débordement. Ainsi, dans cette étape du travail, des propriétés de comparaison d'aires apparaissent peu et de façon très implicite dans le cadre des grandeurs (Douady, 1986).

Ensuite, lorsqu'il s'agit de savoir si les solutions obtenues empiriquement peuvent être améliorées, le travail bascule vers le cadre numérique. L'aire est alors une mesure obtenue par multiplication et pour savoir combien au plus on pourrait placer d'étiquettes, on effectue soit une suite de multiplications, soit une division euclidienne pour trouver la borne supérieure de l'ensemble des pavages possibles. Mais cela ne donne pas toujours la garantie que l'on puisse effectivement paver la grille avec le quotient obtenu d'étiquettes. En particulier, ce n'est pas parce que l'aire de la grille est de 432 u² et que, par additivité, l'aire de 12 étiquettes est de 420 u² que l'on pourra paver la grille avec 12 étiquettes. Ce problème est donc une occasion de mettre en œuvre l'additivité de l'aire et de montrer que :

- le pavage d'une surface S1 avec une surface S2 n'est pas toujours possible même si l'aire de S2 est inférieure à celle de S1 ;
- si le quotient de la division euclidienne de l'aire de S2 par l'aire de S1 est *n*, il n'est pas sûr que l'on puisse paver S1 avec *n* fois la surface S2.

Cette dernière propriété est particulièrement importante car elle distingue l'aire de la longueur (pour les segments) qui est la première grandeur étudiée en mathématiques.

- *Des savoirs sur les multiples et les nombres premiers dans* 9 nombres

Ce problème demande bien entendu de disposer d'une première définition du mot « multiple ». Nous avons observé que les élèves de cycle 3 interprètent le plus souvent la consigne « quand deux nombres sont voisins, l'un des deux nombres est multiple de l'autre » comme « tous les nombres sont dans la même table » et ne raisonnent pas nombre par nombre. Ainsi, ils arrivent alors à des suites comme 24, 12, 6, 2, 10, 20, 4, 8, 16 où tous les nombres de la liste sont dans la table de 2 et où la liste est composées de trois sous-listes de multiples « pas trop grands » d'un même nombre : d'abord trois multiples de 6, puis trois multiples de 2, puis trois multiples de 4. Pour améliorer la solution, il faut envisager l'énoncé de la façon suivante : « quand deux nombres sont voisins, l'un des deux est dans la table de l'autre », ce qui permet d'envisager chaque voisin d'un nombre soit comme un diviseur, soit comme un multiple de ce nombre et de produire, par exemple la suite : 4, 12, 6, 2, 10, 5, 15, 3, 9. L'amélioration des solutions passe souvent par la décomposition multiplicative de nombres et ce faisant, le constat que certains nombres comme 2, 3, 5, 7, 11… ne sont dans aucune table de multiplication autre que la leur. Les élèves découvrent ou redécouvrent alors des nombres aux propriétés particulières. Pour justifier que 12 est bien le plus petit des plus grands nombres des suites possibles, il faut expliciter cette propriété qui a pu fonctionner de façon implicite lors de la recherche empirique.

Conclusion

L'analyse précédente montre qu'il y a une certaine richesse dans ces problèmes quant aux savoirs curriculaires qu'ils permettent de revisiter, richesse à laquelle nous tenons tant que la question des possibilités d'apprentissages généraux sur la résolution de problèmes n'est pas tranchée (voir les articles de Sarrazy, 1997 et Robert, 1996), sur ce point). Ces problèmes sont aussi riches du point de vue des savoirs sur la recherche et la résolution de problèmes en mathématiques. Cependant, cette double richesse est aussi source de difficultés et de questions, en particulier en ce qui concerne la clôture des séances et les institutionnalisations. Quels savoirs institutionnaliser ? Quels choix faire ? Comment hiérarchiser ces savoirs ? Par ailleurs, les savoirs sur la recherche et la résolution d'un problème mathématique sont peut-être moins faciles à institutionnaliser à l'école primaire, en particulier car ils ne sont pas forcément très familiers des professeurs des écoles.

Références bibliographiques

Chevallard Y., 1992, Le caractère expérimental de l'activité mathématique, *Petit x. 30.* p. 5-15

Douady, 1986, Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherche en didactique des mathématiques, 7.2,* p. 5-31

Groupe PPC, 2006, *Des problèmes pour chercher à l'école primaire*, IUFM des Pays de la Loire et IREM de Nantes

MEN, 2005, Les problèmes pour chercher, *Documents d'accompagnement des programmes*

Orange C., 2005, Problématisation et conceptualisation en sciences et dans les apprentissages scientifiques, Les Sciences de l'éducation. Pour l'ère nouvelle. Vol. 38, n° 3, 2005, p69-94.

Perrin D., 2007, L'expérimentation en mathématiques : quelques exemples, *Actes du XXXIIIème colloque sur la formation des maîtres*, p. 37-72.

Robert A., 1996, Prise en compte du méta en didactique des maths, *Recherches en didactique des mathématiques*, 16. 2, p. 145-175

Sarrazy B., Sens et situations : une mise en question de l'enseignement des stratégies méta-cognitives en mathématiques, Recherches en didactique des mathématiques, 17. 2, p. 135-166

Thomas Y., 2007, Gommettes et étiquettes, des problèmes pour chercher, *Grand N* 80, p. 29-41

DE LA RESTAURATION DE FIGURES A LA REDACTION D'UN PROGRAMME DE CONSTRUCTION. LE PROBLEME DE L'ELEVE, LE PROBLEME DU MAITRE

Marc GODIN

Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN

IUFM Nord - Pas-de-Calais[1]

Résumé
Au cours de cet atelier, après une brève présentation de la problématique et de ce que nous appelons restauration de figure, les participants ont été invités à restaurer des figures pour analyser les variables didactiques d'une telle activité, ses potentialités en termes d'apprentissage des élèves et les choix qui s'offrent au maître pour l'organiser. Les questions ont été discutées à partir de quelques exemples étudiés dans notre groupe de recherche et mis en œuvre au cycle 3.

INTRODUCTION

A propos des figures planes, les programmes d'avril 2007[2] de l'école élémentaire énoncent, en référence au socle commun, les connaissances et « capacités » suivantes à atteindre au cours du cycle 3.

[1] L'atelier présenté ici doit beaucoup au travail d'un groupe de recherche soutenu par l'IUFM Nord - Pas-de-Calais et auquel participent ou ont participé Frédéric Brechenmacher, Jean-Robert Delplace, Raymond Duval, Claire Gaudeul, Bachir Keskessa, Anne-Cécile Mathé, Odile Verbaere ainsi que des maîtres formateurs et conseillers pédagogiques.

[2] Les programmes de 2002 ou de 2007 étaient en vigueur au moment de la réalisation des séances en classe. Les programmes de 2008 ne diffèrent pas beaucoup dans le domaine des figures planes : ils reprennent, sans les détailler, les rubriques des programmes de 2002 en ajoutant le parallélogramme à la liste des figures. Dépourvus de commentaires, ils donnent comme objectif de l'enseignement de la géométrie du CE2 au CM2 « de permettre aux élèves de passer progressivement d'une reconnaissance perceptive des objets à une étude fondée sur le recours aux instruments de tracé et de mesure », phrase extraite presque mot pour mot des documents d'application de 2002. La résolution de problèmes n'étant plus une rubrique à part, ils indiquent aussi des problèmes dans le domaine de la géométrie : « Les problèmes de reproduction ou de construction de configurations géométriques diverses mobilisent la connaissance des figures usuelles. Ils sont l'occasion d'utiliser à bon escient le vocabulaire spécifique et les démarches de mesurage et de tracé. »

5.3 Figures planes : triangle (et cas particuliers), carré, rectangle, losange, cercle - connaître et savoir utiliser à bon escient le vocabulaire suivant : triangle, triangle rectangle, *triangle isocèle, triangle équilatéral*, carré, rectangle, losange, cercle ; sommet, côté ; centre, rayon et *diamètre* pour le cercle.	- reconnaître de manière perceptive une figure plane (en particulier dans une configuration plus complexe), en donner le nom, vérifier son existence en ayant recours aux propriétés et aux instruments ; - décomposer une figure en figures plus simples ; - tracer une figure (sur papier uni, quadrillé ou pointé), soit à partir d'un modèle, soit à partir d'une description, d'un programme de construction ou d'un dessin à main levée ; - tracer un cercle dont on connaît le centre et le rayon ; - *décrire une figure en vue de l'identifier dans un lot de figures ou de la faire reproduire sans équivoque.*

Les activités habituellement proposées aux élèves pour atteindre ces capacités comprennent la reproduction de figures à partir d'un modèle, la rédaction d'un programme de construction à partir d'une figure et la réalisation d'un programme de construction, éventuellement dans un jeu d'échanges entre émetteur et récepteur, le tout en utilisant la règle graduée, l'équerre et le compas[3]. En général, la taille de la figure à obtenir est fixée par la donnée de mesures à moins que la figure ne soit à reproduire à l'identique. Qu'est-ce qui change dans l'activité des élèves et du maître si, au lieu de donner des mesures, on fournit des éléments de la figure cible et qu'au lieu de fournir une règle graduée, on fournit aux élèves une règle non graduée « informable » (i.e. sur laquelle on peut écrire et effacer pour reporter des longueurs) ? Cette activité relève de ce que nous appelons « restauration de figure ».

Quel est le travail de l'élève pour restaurer une figure ? Pour écrire un message permettant à un autre élève de le faire ? Comment peut-on jouer sur les variables didactiques pour amener les élèves à mettre en oeuvre les connaissances géométriques du programme ?

Quel est le travail du maître pour mettre en œuvre et gérer une telle activité dans sa classe ? Comment « piloter » ses choix (au niveau de la préparation et la gestion de sa classe) pour aider ses élèves à acquérir les connaissances et capacités du programme et à développer un rapport opératoire aux figures géométriques ? Quelles connaissances géométriques lui sont utiles, nécessaires pour cela ?

Notre recherche part de l'hypothèse qu'il est possible d'utiliser l'étude, la production ou la reproduction de figures géométriques comme un milieu ou un domaine de travail où peuvent se construire les connaissances attendues à l'école élémentaire mais aussi un rapport à la géométrie et à l'usage des instruments plus conforme à ce qui est attendu au collège ; la restauration de figures, par le jeu sur les variables didactiques qu'elle permet, est un moyen de mise en œuvre de cette hypothèse.

[3] La gomme n'est pas reconnue comme un instrument de géométrie, mais effacer des lignes déjà tracées joue un rôle fondamental pour l'analyse des situations de reproduction ou de restauration. Les dépassements de lignes sont-ils ou ne sont-ils pas acceptés ? La gomme est une variable didactique méconnue.

Après une brève présentation de la problématique et de ce que nous appelons restauration de figure, les participants de l'atelier ont été invités à restaurer des figures pour analyser les variables didactiques d'une telle activité, ses potentialités en termes d'apprentissage des élèves et les choix qui s'offrent au maître pour l'organiser. Les questions ci-dessus ont été ensuite discutées à partir de quelques exemples étudiés dans notre groupe de recherche et mis en œuvre au cycle 3.

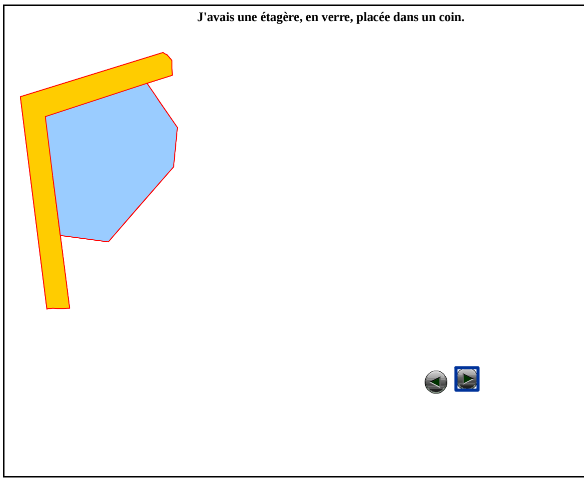
I - LA RESTAURATION DE FIGURE

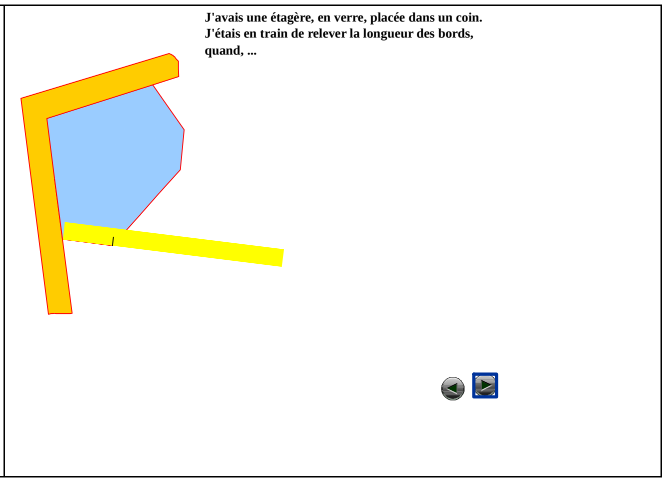
La restauration de figures planes consiste à reproduire une figure modèle à partir d'une amorce à l'aide d'instruments. Il s'agit donc de travailler, non pas sur une figure, mais sur la différence entre deux figures : le modèle et l'amorce (éventuellement en plusieurs morceaux). La reproduction de figure correspond au cas où l'amorce est vide et où les instruments autorisés sont la règle et le compas. Nous parlons de restauration si l'amorce n'est pas vide ou réduite à un point et plus particulièrement si elle est 2D (donc comprend plus qu'un segment) ou si un instrument est 2D (gabarit, morceau de surface voire équerre). Le cas des figures sur papier quadrillé n'est pas considéré ici.

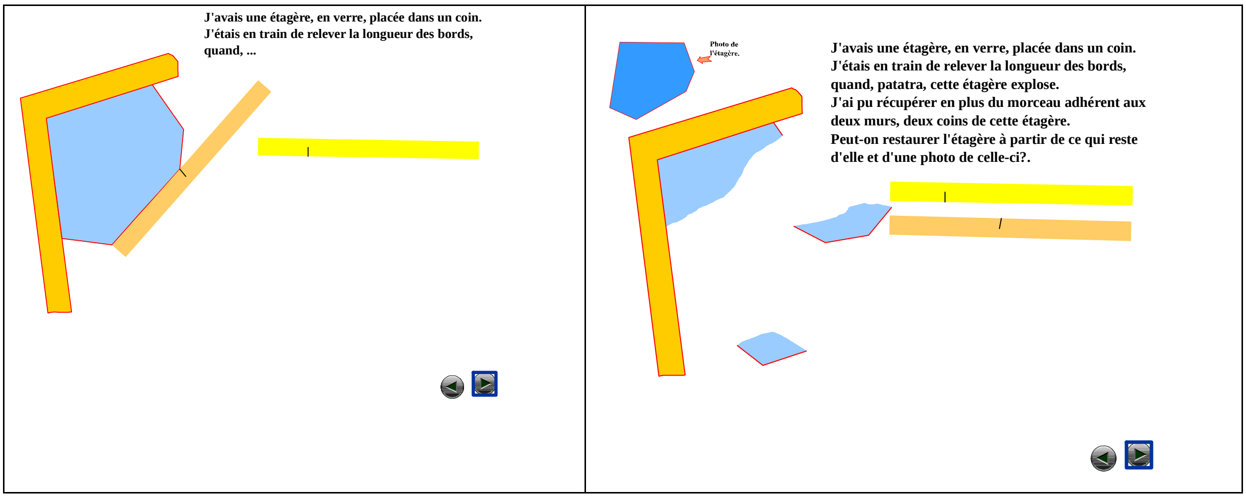
I. 1. Activités proposées aux participants pour entrer dans la restauration de figure

I.1.1. L'étagère

J'avais une étagère en verre placée dans un coin. J'étais en train de relever la longueur des bords quand, patatras, cette étagère explose. J'ai pu récupérer, en plus du morceau adhérent aux deux murs, deux coins de cette étagère. Peut-on restaurer l'étagère à partir des morceaux qui restent et d'une photo ?



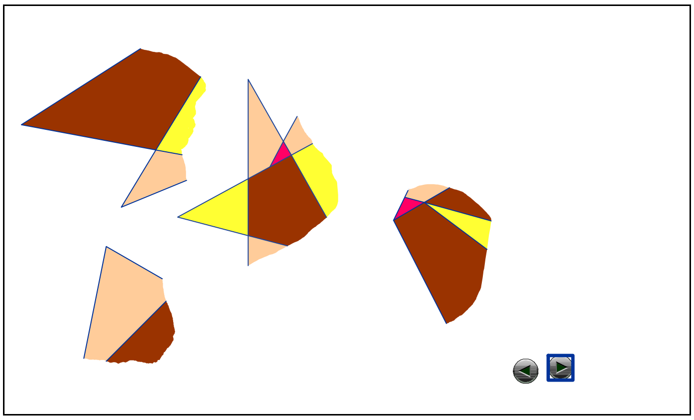




Barème à considérer : tout trait[4] tracé est gratuit, tout trait effacé avec une gomme est gratuit, toute utilisation d'instrument coûte une fortune sauf un instrument qui permette de reporter une longueur.
Bref, qui fera le moins de reports pour restaurer l'étagère ?

I.1.2. Le puzzle par superposition

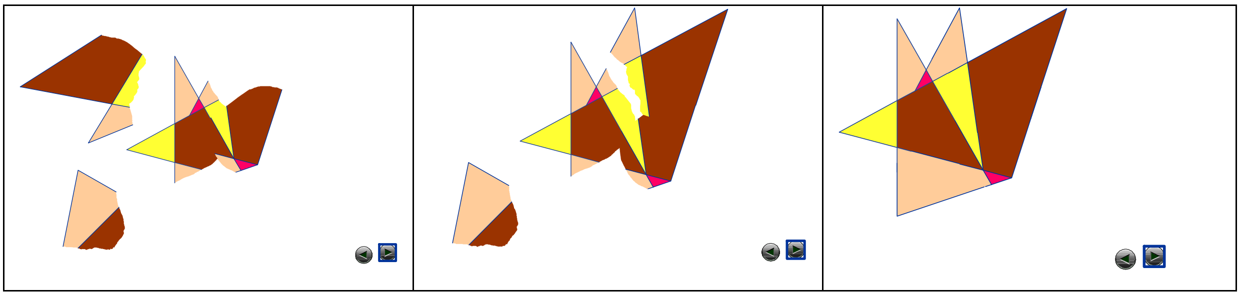
Reproduire une figure (surface) à partir de plusieurs exemplaires déchirés de cette figure.



Les exemples traités nous ont fourni deux cas de restauration de figure.

- Le second cas concerne les puzzles par superposition. La restauration se fait par superposition en utilisant des morceaux qui ne proviennent pas d'un unique modèle. On peut cependant être amené à compléter en traçant des traits à la règle.

[4] Dans tout ce texte, « trait » est à considérer comme synonyme de « trait droit ».



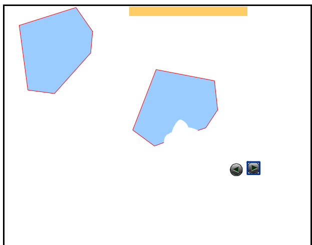
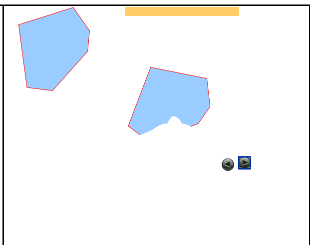
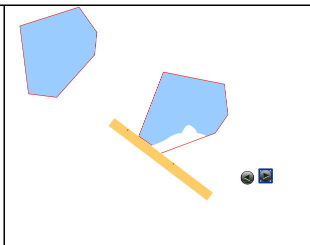
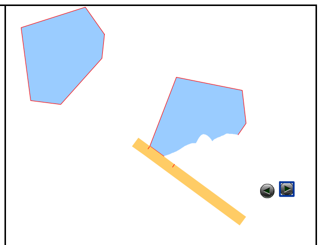
- Le premier cas concerne les puzzles par juxtaposition dont on a perdu un morceau (ou plusieurs) comme pour l'étagère. C'est le cas que nous développerons dans la suite.

I. 2. Les variables des situations de restauration

I.2.1. L'activité de restauration dépend des instruments disponibles et de leur coût

L'introduction d'un coût à l'utilisation des instruments permet la réussite par des procédures diverses, qui demandent plus ou moins de connaissances géométriques, mais incite à utiliser certains instruments plutôt que d'autres et donc à développer des connaissances géométriques, pour obtenir les effets graphiques voulus, avec des instruments dont l'utilisation est moins immédiate, à partir des connaissances anciennes des élèves. En modifiant le barème relatif aux utilisations des instruments de tracé ou d'effacement de tracé, on peut donc agir sur les procédures de tracé des élèves. De même, suivant l'amorce, il y a plus ou moins de connaissances à mettre en jeu pour restaurer la figure.

I.2.2. L'activité de restauration dépend de l'amorce

			
Un trait est nécessaire.	Deux traits sont nécessaires et ça déborde.	Deux traits et un report de longueur.	Trois traits et deux reports de longueur.

Nous reviendrons sur l'analyse des relations entre amorce et figure.

I.2.3. L'activité de restauration dépend du choix de la figure

Pour créer un support, un maître pourrait en plus considérer une figure dans laquelle une relation est cachée et indépendante du choix de l'amorce. Nous verrons, plus loin, des exemples de figures symétriques qui, bien entendu, ont des propriétés cachées.

Les variables, pour une activité de restauration, concernent essentiellement : la figure, l'amorce, les instruments, le barème associé aux instruments pour estimer le coût de la restauration et les exigences d'écriture.

I.3. Analyse des relations amorce - figure

La reconnaissance d'un problème de restauration commence par la reconnaissance d'une figure comme sous-figure d'une autre. La reconnaissance de l'amorce comme une partie de la figure, peut, selon la consigne donnée et selon les procédures mises en œuvre par les élèves, être une reconnaissance visuelle, être acceptée comme une donnée, être vérifiée en utilisant un transparent (par exemple : le transparent de la figure qui servira pour valider l'activité de restauration), être vérifiée en utilisant des instruments. Le choix par le maître de donner à la figure et à l'amorce des orientations différentes écarte la possibilité d'une démarche visuelle par translation.

Les relations entre la figure à restaurer et son amorce orientent l'analyse de la restauration. La détermination de ce que l'on cherche à construire en fonction de ce que l'on a, pose le problème de la restauration qui est fonction non de la figure seule mais de la différence entre l'amorce et la figure, ce que nous appellerons la figure-différence. C'est l'analyse de cette différence qui importe pour choisir une restauration relative à un niveau d'enseignement donné. Évidemment, si l'amorce est insignifiante, les propriétés géométriques de la figure constituent l'essentiel des propriétés à restaurer.

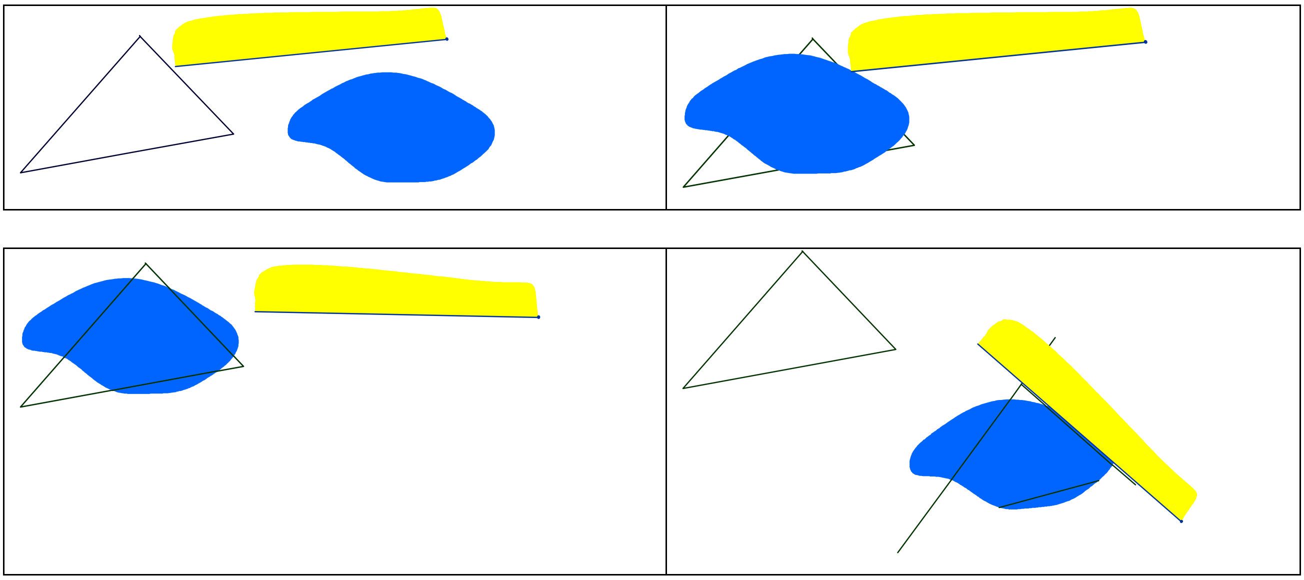
I.4. Réflexion sur les instruments permettant une restauration de figure

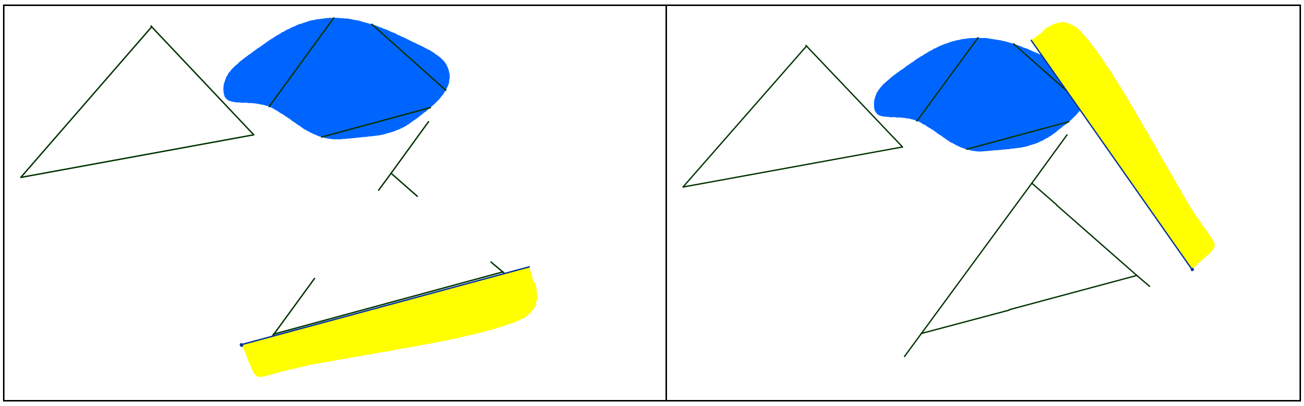
Quand nous parlons d'instrument, nous pensons aux instruments usuels : règle non graduée, équerre, compas, mais aussi aux gabarits, pochoirs, calque, morceau de papier ayant ou non des bords droits, quadrillage. Nous ne mentionnons pas les instruments de mesure car les activités que nous considérons ne nécessitent que des reports de longueurs, sans passer par les nombres. En principe la règle graduée n'est pas disponible. Le report de longueur peut se faire avec une règle informable (sur laquelle on peut écrire). Nous parlons de report de longueur si ce report se fait sur une droite déjà tracée sinon ce report ne peut se faire qu'en traçant un arc de cercle, donc une ligne, avec un compas.

Duval (1995) a pointé l'importance de la notion de dimension dans l'appréhension perceptive des figures : les surfaces, unités visuelles 2D apparaissent plus directement au premier coup d'œil ; l'appréhension des unités visuelles 1D (lignes) ou 0D (points) nécessite une déconstruction de la figure. Cette sensibilité aux dimensions se retrouve dans l'utilisation des instruments.

Le gabarit et le pochoir permettent de reproduire une surface, nous dirons que ce sont des instruments 2D. La règle et le compas sont des instruments qui permettent de tracer des lignes (1D) ; un point, unité visuelle sans dimension (0D), est obtenu par l'intersection de deux lignes. L'équerre est plus ambiguë : elle permet de contrôler et de produire des angles droits (coins de carrés ou de rectangles, unités visuelles 2D) mais aussi de tracer une droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné, soit la production d'un élément 1D avec 2 contraintes, l'une portant sur un élément 1D (alignement à contrôler), l'autre sur un élément 0D (point qui doit se trouver sur l'autre côté de l'angle droit). Remarquons d'ailleurs que le compas est lui aussi un instrument multiple : il permet de tracer des lignes (1D) et, quand on ferme le tracé, de produire un cercle, unité visuelle 2D, et aussi de reporter des longueurs donc de placer des points (0D) sur une ligne déjà tracée. Ces différents usages des instruments sont à construire chez les élèves. On peut envisager une progression de situations de restauration pour aider les élèves à passer des instruments 2D aux instruments 1D.

Pour illustrer ce propos, nous donnons ci-dessous un exemple d'états montrant l'évolution d'une procédure de reproduction d'un triangle, unité visuelle 2D déconstruite en trois unités visuelles 1D et reconstruite à partir de ces trois unités visuelles. Pour plus d'informations, on pourra se reporter à Duval et Godin (2006) et Duval, Godin et Perrin (2005).





Un objectif de l'école primaire est d'amener les élèves à décomposer une figure en unités visuelles de dimensions 1 et 0, et cet objectif peut être atteint par la donnée des « instruments de tracé » qui permettent de tracer des lignes et d'en obtenir des intersections.

II - LE TRAVAIL DU MAITRE

Le travail du maître qui met en œuvre une activité de restauration, en tenant compte des capacités des élèves, pour les aider à construire des connaissances géométriques est multiple. Regardons dans quelques directions :

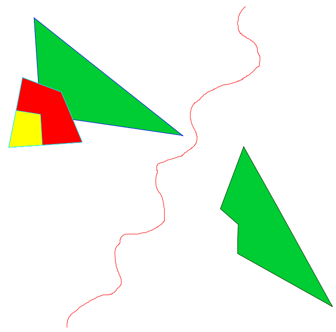
- le choix de l'activité de restauration : la figure, l'amorce, les instruments, les consignes, …
- la gestion de l'analyse de la restauration par les élèves (collective ou non),
- la gestion des écritures additives du coût de fabrication d'une figure restaurée (comparaison ou non),
- la gestion des demandes d’écrits relatifs à une restauration et des exigences relatives à ces écrits : rédaction d'un programme de restauration, de reproduction ou de construction (rédaction d'un algorithme de tracé, et ou, rédaction d'une description).

II. 1. Préparation par le maître de l’analyse d’une restauration

Avant de regarder la gestion de l'analyse d'une restauration menée par un élève, il faut regarder l'analyse à mener pour générer une restauration, pour choisir une restauration ou pour modifier une restauration. Nous avons vu, dans le paragraphe précédent, que l'analyse d'une restauration suppose l'analyse de la figure, l'analyse des relations amorce-figure et l'analyse des relations figure-amorce-instruments. Le maître a besoin de ces analyses pour choisir une restauration et se préparer à aider certains élèves (ceux qui seraient en difficulté) à analyser la restauration sans le faire à leur place. Aux choix guidés par l’analyse purement didactique que nous avons menée, il pourra ajouter des éléments matériels pour aider les élèves à respecter les consignes de la restauration ; par exemple, la séparation entre la figure modèle et la figure à restaurer peut être matérialisée par une frontière et les activités de chaque côté de cette frontière ne seront pas les mêmes, des couleurs peuvent aider à repérer les éléments qui se correspondent sur le modèle et l'amorce, etc.

II. 2. Gestion de l'analyse d'une restauration par les élèves. Exemple en CE2

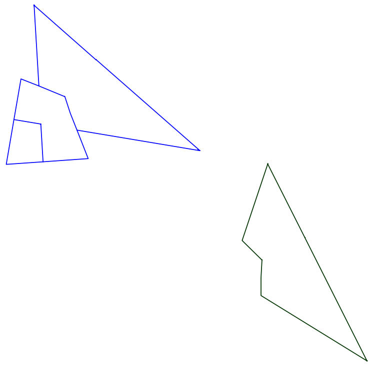
Ici la figure modèle et la figure à restaurer sont séparées par une frontière.



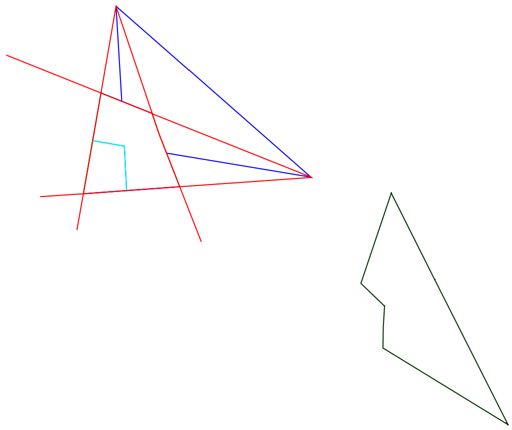
Comment un enseignant peut-il aider un élève dans sa tâche d'analyse de la restauration ? Le premier problème est d'amener un élève, ayant deux figures devant lui, à comprendre la consigne (donc à distinguer figure-modèle, figure-amorce, figure-différence). Un moyen d'aider les élèves, mis en place dans cette classe, est l'utilisation de couleurs : les élèves cherchent les éléments qui se correspondent sur l'amorce et la figure modèle et les tracent de la même couleur. Les segments sont portés par des droites, les élèves ont l'habitude de prolonger les segments pour voir les droites. Les aides apportées (questionnement), comme la mise en commun, portent sur l'explicitation de la différence : identification des droites qui manquent sur l'amorce puis, sur les moyens de les obtenir (sur le modèle) à partir d'éléments déjà présents sur l'amorce (décomposition de la différence) avant de les construire (recomposition de la différence). La décomposition de la différence en vue de sa recomposition est orientée par les instruments disponibles qui imposent une déconstruction dimensionnelle.

Quelques étapes sur un exemple de restauration :

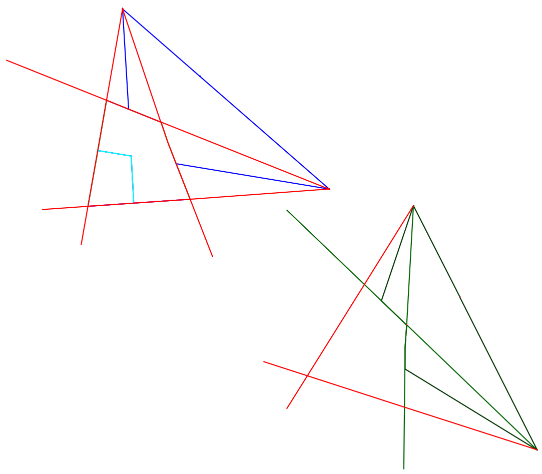
- Décompositions de la figure-différence (orientées par la présence des instruments disponibles et d'un coût d'utilisation de ces instruments, *exemple : 1 euro pour une règle permettant de tracer un trait, 5 euros pour un report de longueur,…*)



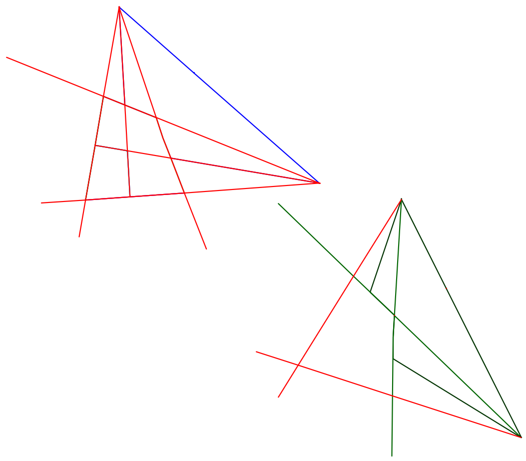
- Détermination de relations entre la figure-différence et les deux autres figures.



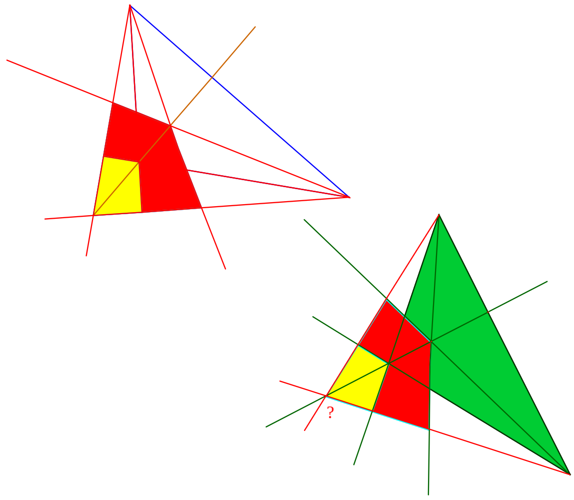
- Déconstruction, de ces relations et des figures, en unités visuelles (ou en propriétés géométriques) compatibles avec les instruments disponibles (ou avec les théorèmes disponibles).



- Reconstruction de cette figure-différence (enrichissement de la figure-amorce) à l'aide des instruments disponibles.



- Validation en utilisant un transparent conçu par le maître et mis à disposition de l'élève au moment opportun.



- Coût qui s'exprime par une écriture additive générée au fur et à mesure de l'enrichissement de l'amorce.

1 + 1 + 5 + …

- Moindre coût, il est question d'envisager un gain du coût en mettant en cause une première procédure.

1 + 1 + 1 + …

- Écriture d'un algorithme de restauration, à partir d'une écriture additive du coût, élaborer un récit des tracés réalisés.

J'ai tracé la droite… puis …

La dernière étape correspond à la formulation qui prépare l'écriture d'un programme de construction en utilisant le vocabulaire de la géométrie. Si la capacité de restaurer une figure montre une capacité à décomposer une figure en unités visuelles de dimension 1, cette capacité doit en effet être complétée par une expression d'un algorithme de restauration, l'expression du coût en termes d'instruments joue un rôle d'intermédiaire pour l'expression en termes géométriques.

II.3. la gestion des écritures additives du coût de fabrication d'une figure

Demander aux élèves d'évaluer le coût de leur production permet de :

- produire l'ossature d'un algorithme,
- déterminer un algorithme de moindre coût,
- modifier l'algorithme par modification du coût des instruments.

L'activité d'évaluation du coût d'une procédure est particulièrement intéressante dans la gestion d'un groupe d'élèves, chacun cherchant un minimum. Mais l'activité de rédaction ne va pas de soi. Quand rédiger ? Pendant ou après les actions de tracé ? Il y a nécessité dans l'autocontrôle de cette rédaction d'une réflexion sur un algorithme mis en jeu. Les activités de notre groupe de recherche sont insuffisantes pour affirmer d'autres propos.

Nous présentons maintenant un exemple de l'effet que peut avoir le calcul du coût : il s'agit d'une séquence menée sur la symétrie en CM2 en mai 2008.

III - UN EXEMPLE AU CM2

Avant la séquence relative aux figures symétriques

Le maître de cette classe a, entre autres, développé plusieurs activités de restauration :

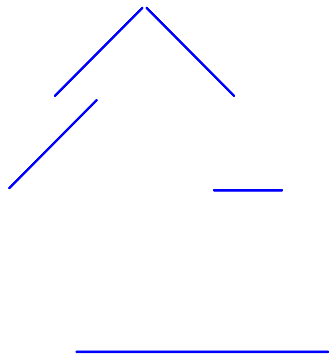
- d'un polygone à la règle et à l'équerre,
- de patrons à la règle et au compas : patron de l'octaèdre régulier,
- d'une figure composée de cercles : le yin et le yang qui, pour certains élèves, amène à la construction du milieu au compas.

Quelques éléments sur la séquence

La notion de figure symétrique a été introduite avec un calque et avec un pliage à la première séance. Les figures proposées sont triées : il y a celles qui, dessinées sur un calque, sont superposables à elles-mêmes, à l'endroit comme à l'envers du calque, ces figures peuvent être aussi pliées en deux parties qui viennent l'une sur l'autre.

Pour la deuxième séance de trois quarts d'heure en demi groupe, le maître a prévu deux activités :

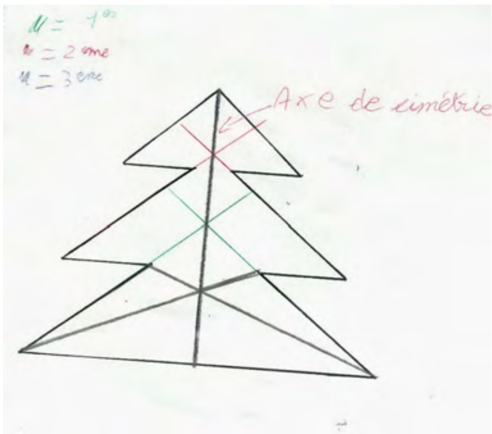
- la première pour rappeler la séance précédente : un élève est envoyé au rétroprojecteur avec un stylo et un transparent pour compléter la figure ci contre et la rendre symétrique ;



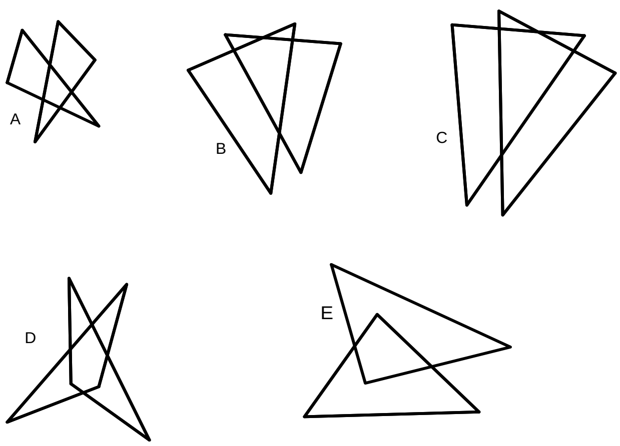
- la seconde sur la construction de l'axe de symétrie d'une figure symétrique : on vérifie que la figure (le sapin) est symétrique en retournant le calque. Dans la classe on sait que cette figure possède un axe de symétrie. Il est question de tracer cet axe avec le barème ci-contre.

Instruments	**Coûts en euros**
transparent	700
trait passant par deux points de la figure	0
trait obtenu par prolongement d'un trait de la figure	1
report de longueur	5
Equerre	700

Après quelques essais, beaucoup d'élèves réussissent à faire passer le coût de la restauration de 700 à 0 euros.
Voici un écrit de synthèse :

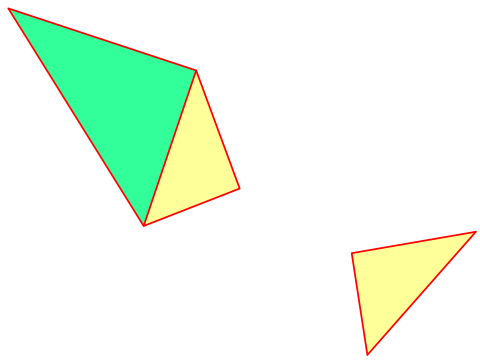


Pour la troisième séance, les élèves ont réalisé deux activités sur le tri de figures symétriques (dans l'une d'elles, il s'agit de voir si des papillons stylisés obtenus par assemblage de triangles sont symétriques ou non).
L'objectif est ici de voir si certaines lignes se croisent bien sur une droite qui serait un axe de symétrie si la figure est symétrique.



Deux figures en forme de papillon ne sont pas symétriques, lesquelles?

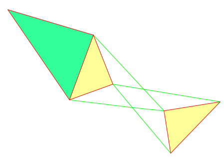
La quatrième séance reprend la restauration d'une figure symétrique mais avec une présentation surface de la figure (voir figure ci-contre). Le barème est le suivant :

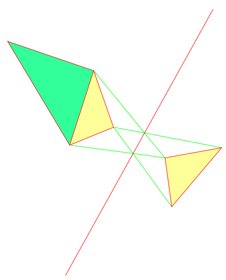


- pliage, calque, équerre : 200 points
- prolongement d'un segment existant : 1 point
- tracé d'un nouveau trait : 0 point
- report de longueur : 5 points

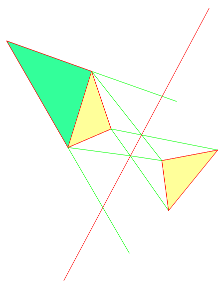
Ici la procédure la plus économique coûte 2 points :

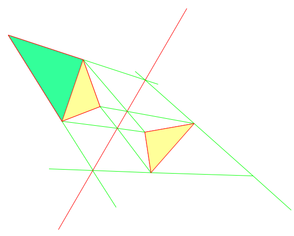
On peut obtenir l'axe de symétrie gratuitement en faisant apparaître les points d'intersection avec leur symétrique de deux segments qui joignent des sommets des petits triangles (un sur l'amorce, un sur le modèle) qui ne se correspondent pas dans la symétrie.





Ensuite le prolongement des deux côtés du grand triangle donne deux points de l'axe qu'il suffit de joindre aux points convenables du petit triangle de l'amorce.





Pour cette restauration de la figure symétrique, signalons la procédure utilisée par une jeune roumaine, très peu scolarisée, (non francophone, le problème lui est montré par geste à l'aide du calque de validation), qui, exceptionnellement présente dans la classe, découpe dans du papier l'assemblage des deux triangles, fait glisser cet assemblage en essayant de superposer les deux triangles jaunes ; n'y arrivant pas, découpe l'assemblage selon le côté commun, se sert du gabarit du triangle vert non retourné pour achever le travail, constate que cela ne convient pas et regarde ce que font les autres.

Dans le premier groupe, la difficulté principale est d'imaginer la position approximative de l'axe de symétrie avant de pouvoir commencer à le construire ; pour le deuxième groupe, le problème est surtout de construire cet axe de symétrie en se remémorant la séance précédente.

Un élève venant d'une école sénégalaise, ayant acquis des pratiques du travail sur les figures symétriques sur quadrillage, trace l'axe de symétrie en construisant des points équidistants de deux points symétriques (remarque : c'est correct mais la résolution du problème en construisant l'axe de cette manière n'est pas la plus économique).

Pendant la mise en commun, trois regards sur la figure à restaurer sont présents : le maître privilégie les points et non les lignes de la figure (pour des raisons de désignation des objets géométriques : c'est en se servant du nom des points qu'il nomme les lignes) alors que la préoccupation des élèves (sauf de la petite roumaine qui cherchait à poser des surfaces) était de construire des lignes. La confrontation de ces trois regards n'est pas explicitée ; il semble bien que personne n'ait perçu le problème comme réduit à la construction d'un point, et la procédure utilisant la construction de l'axe de symétrie semble, pour le maître, la procédure la moins coûteuse pour le barème proposé.

IV - RETOUR SUR LES HYPOTHESES DE LA RECHERCHE

Notre recherche part de l'hypothèse qu'il est possible d'utiliser l'étude, la production ou la reproduction de figures géométriques comme un milieu ou un domaine de travail où peuvent se construire les connaissances attendues à l'école élémentaire mais aussi un rapport à la géométrie et à l'usage des instruments plus conforme à ce qui est attendu au collège.

Dans l'analyse des difficultés des élèves de collège, on oppose souvent la perception à la déduction à partir d'axiomes et de théorèmes. Cependant, l'usage des instruments, peu valorisé au collège, ne relève pas que de la perception : les instruments sont utilisés pour guider, outiller la perception, et leur usage nécessite la mise en œuvre de propriétés géométriques. En effet, les instruments géométriques usuels permettent de produire et de contrôler des propriétés visuelles dans l'espace graphique, propriétés visuelles qui se traduisent par des propriétés géométriques dans le modèle théorique.

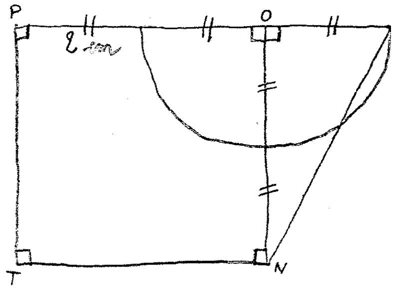
Un autre élément nous a paru important à identifier dans le regard qu'on porte sur les figures, c'est celui de dimension : dans la géométrie pratiquée habituellement à l'école primaire, les figures peuvent le plus souvent être vues comme des assemblages de surfaces, donc composées d'unités visuelles 2D ; les lignes qui interviennent sont le plus souvent des bords de ces surfaces et les points, des sommets. Dans la géométrie du collège, appuyée sur des définitions et théorèmes, avec une axiomatique sous-jacente, la vision en termes de lignes et de points sera essentielle et il faudra être capable de changer de regard sur la figure et, à travers une surface, être capable de voir non seulement les lignes éventuellement infinies (droites, cercles) qui supportent ses bords, mais aussi des lignes qui ne sont pas tracées et sont définies par certains de ses points ou des points non visibles qu'on pourrait obtenir par intersection de telles lignes.

Nous retenons ainsi deux points importants pour l'entrée dans la géométrie et pour faire progresser les connaissances des élèves en primaire et au début du collège : **d'une part, un jeu de cadres entre espace graphique des tracés avec des instruments matériels et espace géométrique des objets et propriétés du modèle théorique de l'espace réel** (comme le décrivent, par exemple, Berthelot et Salin (1992) dans la problématique spatio-géométrique) ; d'autre part, **une éducation au changement de regard et en particulier au changement de dimensions sur les figures**. Le premier terme correspond à des conditions ou contraintes repérées depuis longtemps et appréhendées de différentes manières ; le second a été identifié par notre équipe. Ces deux éléments peuvent être mis en œuvre dans des activités pour les élèves à travers le tracé de figures avec des instruments car les instruments permettent à la fois de jouer entre les cadres de l'espace graphique et de l'espace géométrique et de jouer sur les dimensions des unités visuelles à prendre en compte. Un troisième point important est la place accordée aux mesures : dans l'enseignement usuel, on fixe la taille des figures et il y a un recours massif aux mesures de longueur et donc aux nombres. Nous faisons de plus l'hypothèse que **le travail sur les grandeurs géométriques sans recours à la mesure** (nous distinguons donc le report de longueur avec un instrument de report, de la mesure d'une longueur avec une règle graduée) **amène à conceptualiser les objets géométriques ainsi que les opérations sur les grandeurs.** Nous pensons donc qu'un tel travail aura des effets positifs sur la résolution de problèmes mettant en jeu les mesures de ces grandeurs. Les problèmes et les instruments proposés aux élèves mettent en jeu des reports de longueur plutôt que des mesures.

V - LES QUESTIONS ET PERSPECTIVES POUR LA FORMATION DES MAITRES

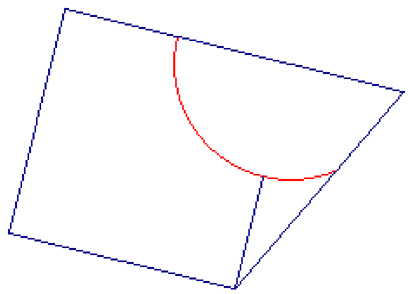
V. 1. Distance avec les pratiques ordinaires

Les observations que nous avons menées montrent que le jeu sur les variables a bien l'effet attendu sur les élèves mais que l'usage de telles situations amène d'une part, un changement du contrat didactique qui nécessite un temps d'adaptation, d'autre part, l'identification par les maîtres des moyens de gestion des situations permettant notamment de faire le lien avec le vocabulaire géométrique et l'usage des instruments usuels. Le travail des élèves est modifié : nous avons pu constater à plusieurs reprises que l'introduction de ce type de tâche, même dans un cas simple, produit une rupture du contrat didactique habituel dans la classe. Par exemple, nous avons préparé avec des PE2 dans le cadre d'Ateliers de Développement de Pratiques Pédagogiques en juin 2006 des séances qu'ils ont mises en œuvre dans une classe de CM2 avec une bonne expertise en géométrie.



Nous avons pu vérifier cette expertise lors de la première séance, menée par le maître formateur titulaire de la classe. Il s'agissait de construire aux instruments, des figures données par un dessin à main levée, codées et portant des indications de mesure « après avoir repéré certaines propriétés selon les indications fournies par les codages et les mesures ». Huit figures étaient proposées ; nous reproduisons ci-contre la figure 7.

L'utilisation de la gomme est découragée dans les habitudes de la classe et le maître, en donnant la consigne, rappelle que normalement elle ne sert à rien. Les connaissances géométriques des élèves se manifestent dans le choix de l'ordre des tracés et l'utilisation experte des instruments. Chaque groupe d'élèves a deux figures à reproduire mais la majorité des élèves de la classe ont traité correctement 3 voire 4 figures de ce type pendant la séance.



Pour la séance suivante les stagiaires ont proposé des restaurations de figures[5]. La première avait été obtenue en apportant une légère modification à une figure trouvée dans un manuel, et qui se trouvait très proche de la figure 7 du maître (non traitée à la première séance). Un côté du carré était fourni en guise d'amorce.

Cette figure, considérée comme simple par les stagiaires, avait été proposée à toute la classe, pour servir d'introduction avant des activités différenciées selon les élèves ; mais elle a pourtant posé des problèmes aux élèves qui se sont trouvés désorientés. Plusieurs éléments de leurs habitudes devaient être remis en question : les propriétés à utiliser n'étaient pas fournies, il fallait les identifier sur la figure et, pour cela, tracer des lignes supplémentaires sur le modèle ; ces lignes devraient aussi être reproduites sur l'amorce et donc, il devenait presque

[5] Nous conservons le terme « restauration », même avec une amorce de dimension 1 comme ici.

nécessaire[6] d'utiliser la gomme puisque, sur la figure finale, il manque une partie du carré qu'on aura tracé pendant la construction. De plus, aucune mesure n'était fournie ; c'est l'identification de rapports et le report de longueurs qui devaient être utilisés pour reproduire la figure. Une des différences fondamentales avec le contrat usuel est donc que l'analyse de la figure en vue de sa reproduction nécessite d'une part, le tracé de lignes définies par les points de la figure donnée mais non visibles sur le modèle, d'autre part, la recherche de rapports de longueurs. Les lignes ajoutées le sont pour permettre la construction de points nécessaires à la réalisation d'une succession de tracés avec les instruments à partir de l'amorce pour obtenir la figure modèle. C'est la mise en évidence de ces lignes, de ces points et de ces rapports qui oblige à un changement de regard sur la figure modèle.

On voit ici qu'un petit changement, apporté à un exercice proposé dans un manuel, peut changer assez nettement la tâche des élèves. Même si l'on n'attend pas que le maître puisse produire lui-même les figures, les amorces ou les règles de coût, il doit avoir une connaissance suffisante de leur effet possible sur les connaissances mises en œuvre par les élèves pour interpréter correctement leurs procédures et gérer la classe dans le sens du progrès de leurs connaissances géométriques. Il doit, en particulier, avoir des connaissances géométriques suffisamment sûres et flexibles pour reconnaître les savoirs géométriques à l'œuvre dans les procédures et productions des élèves, dans leurs formulations incomplètes et maladroites, de façon à pouvoir les faire évoluer sans glisser vers l'obtention d'un résultat final satisfaisant mais non relié aux connaissances initiales des élèves.

V.2. Leviers pour faire évoluer les pratiques des enseignants et points de résistance

V.2.1. Attrait pour la résolution de problèmes et difficulté à repérer les savoirs géométriques en jeu

Les situations proposées en formation continue ou en formation initiale ont en général rencontré beaucoup de succès parce que les maîtres ont été séduits par l'aspect résolution de problèmes : il y a beaucoup de ressources de résolution de problèmes dans le domaine numérique, mais les maîtres sont souvent démunis pour trouver des situations problématiques en géométrie.

[6] Ne pas l'utiliser reste possible mais c'est beaucoup plus complexe au niveau de l'ordre des tracés à réaliser et de la conception des tracés eux-mêmes : il ne s'agit plus de figures (carré, triangle, demi-cercle) et de leur disposition spatiale mais de segments liés par des relations.

Cependant, au-delà du premier enthousiasme, les maîtres s'interrogent sur les contenus des programmes qu'ils peuvent travailler de cette façon. Ils ont du mal à identifier des savoirs à formuler avec les élèves, à écrire dans le cahier et à réinvestir.

V.2.2. Difficulté à distinguer la grandeur géométrique « longueur » de sa mesure

Cette difficulté peut se manifester de deux manières, par une confusion et par une pratique.

Une confusion fréquente entre reporter une longueur et mesurer une longueur

Alors qu'un maître fait disparaître volontairement, dans sa classe, les règles graduées, celui-ci pourra utiliser inconsciemment l'expression « mesure de longueur » pour « report de longueur ».

Hypothèse pour comprendre ce lapsus persistant : certes, la règle graduée peut être utilisée pour reporter une longueur, celle-ci portant suffisamment d'inscriptions peut se substituer à une règle sur laquelle on devra porter des inscriptions pour reporter une longueur. Mais, il y a un risque de confusion pour des élèves de Cycle 2 car ils ont souvent une pratique limitée de la mesure : une pratique non pas comme un rapport de longueur (un segment de 3 cm est trois fois plus grand qu'un segment de 1 cm, ce qui implique des reports de longueur) mais comme un repérage d'un trait par un nombre d'une graduation (ici 3 sur une règle graduée en cm).

Une pratique banalisée : accepter la construction du milieu d'un segment en utilisant la mesure

Si les élèves vérifient qu'un point partage un segment en deux segments de même longueur, la construction d'un milieu est le plus souvent obtenue par une procédure non géométrique de type mesure-calcul-mesure et bien que des textes officiels de 2002 ou 2007 indiquent des procédures géométriques possibles, ces pratiques non géométriques persistent et sont même souvent les seules présentes.

V.2.3. Une première piste : introduire de petites modifications dans les pratiques usuelles

Nous avons d'abord pris en compte les contraintes de la formation, tant initiale que continue, qui ne donne que des durées très courtes de formation. Nous avons ainsi pensé que l'introduction d'une petite modification dans les pratiques usuelles, telles qu'on peut les observer dans les manuels, pouvait amener les maîtres à s'interroger sur leurs pratiques et à les faire évoluer. Cette piste a été tentée en formation initiale et en formation continue (voir ci-dessus). Même si nos résultats sont trop ponctuels pour qu'on puisse en tirer des conclusions générales, il nous semble que l'étude peut être poursuivie en formation initiale mais que c'est sans doute tout à fait insuffisant en formation continue pour faire évoluer des pratiques installées : une déstabilisation des pratiques usuelles ne peut être profitable que si elle contient les moyens de rééquilibrer assez vite sur une nouvelle pratique stable.

V.2.4. Perspective : mettre en place et étudier des modules reliés explicitement aux programmes du primaire

Cette année, le travail avec les maîtres d'une école d'application nous a permis de mieux cerner les besoins des maîtres et les possibilités d'évolution des pratiques. Cela nous amène à considérer la nécessité d'étudier la mise en œuvre de progressions sur quelques sujets comme nous avons commencé à le faire avec la symétrie orthogonale.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Berthelot R. et Salin M.H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire.* Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne : Peter Lang.

Duval R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* n° 10, 5-53.

Duval R. & Godin M. (2006). Les changements de regard nécessaires sur les figures *Grand N* n° 76.

Duval R., Godin M. & Perrin-Glorian M.-J. (2005). Reproduction de figures à l'école élémentaire in Castela et Houdement (éds) *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques*, 5-89, ARDM, IREM Paris 7.

Keskessa B., Perrin-Glorian M.J. & Delplace J.R. (2007). Géométrie plane et figures au cycle 3. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie. *Grand N,* n° 79, 33-60.

Offre B., Perrin-Glorian M.J. & Verbaere O. (2006). Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2. *Grand N* n° 77, 7-34, et Petit x n° 72, 6-39.

Eugène COMIN
Lycée Arnault Daniel
DAESL Bordeaux 2

Proportionnalité et fonction linéaire

Effets didactiques des dépendances entre école, collège et lycée

Introduction et problématique

Proportionnalité et fonction linéaire sont deux approches de la linéarité qui se réfèrent à deux cultures différentes : l'arithmétique des grandeurs enseignée à l'école et au collège, l'algèbre initiée au collège puis au lycée. Or il semble que l'enseignement secondaire peine à construire une clôture des savoirs arithmétiques élémentaires tout en préparant les apprentissages futurs de l'algèbre. Dans ces conditions, les connaissances développées par l'enseignement secondaire permettent-elles aux futurs professeurs des écoles d'avoir un contrôle sur ce qu'ils ont à enseigner à l'école primaire ? En particulier, l'enseignement des fonctions apporte-t-il des connaissances algébriques aux élèves qui reformulent et prolongent les savoirs arithmétiques de la proportionnalité ?

Dans cet atelier, nous avons repris des questions et des exercices ayant fait l'objet d'enquêtes auprès de professeurs des écoles et d'élèves de seconde pour alimenter une réflexion sur les questions suivantes :

1) Peut-on enseigner la proportionnalité sans les grandeurs, sans la notion de rapport ?
2) Les connaissances des élèves de seconde sur les fonctions linéaires et affines peuvent-elles pallier la disparition de tout un pan de culture de l'arithmétique des grandeurs ?
3) Une introduction des fonctions en seconde qui clôture les connaissances sur la proportionnalité est-elle possible ?

Sans reprendre les discussions qui ont eu lieu lors de l'atelier, cet article explicite les éléments sur lesquels nous nous sommes appuyés, à savoir les résultats de ces enquêtes et leur analyse.

1 Peut-on enseigner la proportionnalité sans les grandeurs ? sans la notion de rapport ?

Au collège, la réforme des « mathématiques modernes » avait exclu des programmes les notions de grandeur, de rapport et de proportionnalité. La linéarité, réduite à l'étude de relations numériques, n'avait pas suppléé à cette disparition comme le montre les résultats d'une enquête (Comin 2000-2002) que nous reprenons partiellement ci-après.

1 - 1 Les conceptions des professeurs

Les questions construites autour des concepts de rapport, de nombre et de proportionnalité ont été soumises, au mois de février 1997, à des instituteurs et professeurs des écoles en activité qui ont remis 38 questionnaires complétés.

Dans cet atelier nous avons analysé certaines de ces questions et commenté les réponses obtenues lors de l'enquête. Les fréquences de réponses aux différents items sont données en pourcentages calculés sur les 38 réponses. Nous ne reproduisons ici que quelques résultats accompagnés de quelques commentaires.

1 – 1 - 1 Rapports et nombres

Les déclarations suivantes sont-elles acceptables pour le professeur ?	
"6 est la règle qui permet de passer de 9 à 54. "	OUI **32** NON **58**
"6 est le coefficient de proportionnalité des nombres 9 et 54."	OUI **66** NON **21**
"Un rapport peut toujours être représenté par une fraction."	OUI **79** NON **11**

Les maîtres qui ne disposent pas du terme « rapport »[1] utilisent soit un terme trop général : « règle » soit un terme trop spécifique : « fraction, coefficient de proportionnalité ».

La confusion entre « rapport » et « fraction » (confortée par l'expression « écriture fractionnaire » qui figure dans les programmes de collège depuis 1985) a une incidence sur la compréhension des structures numériques comme le montrent les questions suivantes :

Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case de votre choix :			
$\frac{5}{7}$ est un nombre rationnel.	VRAI **42**	FAUX **11**	JE NE SAIS PAS **45**
$\frac{5}{7}$ est un nombre décimal.	VRAI **50**	FAUX **37**	JE NE SAIS PAS **11**
Tout rationnel est décimal.	VRAI **11**	FAUX **47**	JE NE SAIS PAS **39**
Tout décimal est rationnel.	VRAI **39**	FAUX **18**	JE NE SAIS PAS **39**

Comment expliquer qu'un nombre est rationnel ou ne l'est pas, qu'un rapport est décimal ou ne l'est pas si l'on ne dispose pas du concept de fraction et de pratiques opératoires pour écrire ces nombres sous différentes formes : fraction irréductible, fraction décimale, écriture de position, etc.,

De même, la confusion entre « rapport » et « coefficient de proportionnalité » ne permet pas de discriminer les différentes fonctions des nombres dans un tableau de proportionnalité :

Cochez les cases de votre choix:

8	12	16
24	36	48

Dans le tableau ci-contre, chacun des nombres suivants est :	3	2	6	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
un coefficient de proportionnalité	**79**	**18**	**11**	**37**	**8**	**11**
un rapport	**11**	**3**	**0**	**50**	**18**	**16**
un quotient	**29**	**5**	**3**	**16**	**8**	**5**

[1] Dans les manuels scolaires du siècle dernier, les définitions de rapport ressemblent à la suivante : « Le rapport de deux éléments d'une même grandeur est le nombre qui mesure l'une d'elles quand on prend l'autre pour unité ». Par conséquent un rapport n'est pas nécessairement rationnel. Or une fraction est une écriture où figurent deux entiers séparés par un trait appelé « barre de fraction ». Un nombre est rationnel s'il admet une telle écriture.

Rapport : 47% des maîtres interrogés n'ont jamais choisi le mot « rapport », ce mot tend à disparaître de leur vocabulaire. 11% des maîtres interrogés ont appelé à tort « coefficient de proportionnalité » le nombre « 6 » mais aucun d'eux ne lui attribue le nom de « rapport ».

Coefficient de proportionnalité : 79% des maîtres interrogés disent que 3 est un coefficient de proportionnalité alors que seulement 37% disent que $\frac{1}{3}$ en est un ; par conséquent au moins 42% ne voient de coefficient de proportionnalité dans une application linéaire que si celui-ci est un entier naturel.
21% des maîtres interrogés appellent « coefficient de proportionnalité » au moins un des quatre nombres : $2; 6; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}$, qui n'en sont pas.

Il est difficile de discriminer une situation de proportionnalité d'une situation de non proportionnalité en utilisant le vocabulaire de la proportionnalité. Ce sont les situations qui fixent le vocabulaire ; un rapport peut s'appeler : « coefficient de proportionnalité », « opérateur », « quotient », « multiplicateur », « mesure », etc. …, en fonction du rôle qu'il joue dans la situation.

Conclusion :

Le concept de rapport devient déliquescent. La disparition du mot « rapport » rend difficiles les explications qui permettent de différencier la nature des nombres et leurs fonctions dans différentes situations.
On va voir que ce vide va être en partie comblé par un usage inadéquat du vocabulaire de la proportionnalité, ce qui va engendrer des conceptions fausses de la proportionnalité[2].

1 – 1 – 2 Proportionnalité et fonction linéaire

Voici un exercice qui a été proposé à des élèves de CM2 : "Pour obtenir 10 kilogrammes de sel marin, il faut faire évaporer 310 litres d'eau de mer. Quelle quantité d'eau de mer faut-il faire évaporer pour obtenir 15 kilogrammes de sel marin ? "	
Les déclarations suivantes sont-elles acceptables pour le professeur ?	
"Le nombre de kilogrammes de sel marin est proportionnel au nombre de litres d'eau de mer."	OUI **74** NON **8**
"La proportion de sel dans l'eau est 1 pour 31."	OUI **63** NON **13**
"La situation est de proportionnalité : car on peut trouver la réponse avec une règle de trois. car on peut faire un tableau de proportionnalité. car on décide qu'il en est ainsi. "	 OUI **68** NON **11** OUI **74** NON **5** OUI **11** NON **47**
Si vous aviez à rédiger une solution de l'exercice, que proposeriez-vous à vos élèves ? proportion : **0** ; retour à l'unité : **21** ; fonction linéaire : **0** ; tableau de proportionnalité : **34**	

[2] La proportionnalité décrit une relation entre grandeurs. Une grandeur est tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution. Une grandeur est mesurable si le rapport entre deux de ses éléments a du sens (est numérisable). La température n'est pas une grandeur mesurable alors que masse et volume le sont. Deux grandeurs mesurables sont proportionnelles si tout rapport entre deux éléments de l'une d'elles est égal au rapport des deux éléments homologues de l'autre.

Les maîtres ont du mal à justifier le choix du modèle proportionnel. La méthode de réduction à l'unité porte en elle sa propre justification par les calculs qu'elle conduit à effectuer sur les grandeurs accompagnées de leurs unités. Le tableau de proportionnalité n'est pas directement constructible sans un repérage des grandeurs. La compréhension d'une situation de proportionnalité nécessite un raisonnement sur les grandeurs et dans une vérification, le tableau sert à rejeter mais pas à valider le choix de la proportionnalité.

Aucun maître ne propose une stratégie qui fasse appel à la notion de fonction linéaire pour résoudre l'exercice. Les différents systèmes d'ostensifs ne sont pas interchangeables mais attachés aux situations qui les ont fait naître comme le montre aussi l'exemple suivant.

3	7
f(3)	f(7)

Si f désigne une fonction linéaire alors le tableau ci-contre est un tableau de proportionnalité. VRAI **47** FAUX **11** JE NE SAIS PAS **32**

La reconnaissance d'un tableau de proportionnalité dans le tableau d'une fonction linéaire quand les valeurs numériques n'y figurent pas explicitement, nécessite l'interprétation du mot linéaire sans avoir recours aux nombres. Pour certains maîtres un tableau de proportionnalité ne doit contenir que des valeurs numériques explicites. (13% des maîtres interrogés estiment même que dans un tableau de proportionnalité ne peuvent figurer que des nombres entiers.)

D'autres résultats montrent la nécessité d'une transposition didactique entre les différents modèles.

Les déclarations suivantes sont-elles acceptables **:**

"$\frac{4}{6}, \frac{18}{27}$ et $\frac{14}{21}$ déterminent la même proportion." OUI **76** NON **13** JE NE SAIS PAS **11**

"Les suites (4, 18, 14) et (6, 27, 21) sont proportionnelles." OUI **53** NON **24** JE NE SAIS PAS **21**

"$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ est une proportion". VRAI **47** FAUX **11** JE NE SAIS PAS **29**

L'analyse des réponses montre qu'au moins un tiers des maîtres interrogés connaissent les deux acceptions du mot « proportion » mais ils attribuent néanmoins à ce mot le sens courant de rapport dans un contexte mathématique.

Remarque : dans les programmes actuels (de collège ou de STG), le mot « proportion » désigne le rapport de l'effectif d'une sous population A de E à l'effectif de la population E ($p = \frac{n_A}{n_E}$) nommé aussi fréquence (nombre qui résulte de ce rapport).

Conclusion :

La disparition des grandeurs comme objet d'enseignement en mathématiques limite la proportionnalité à l'étude des relations entre nombres. Mais, les analyses montrent l'indépendance du modèle « fonction linéaire » et des modèles issus de « l'arithmétique élémentaire ». La fonction linéaire n'a pas permis de reformuler les savoirs sur la proportionnalité contrairement à ce que laissaient espérer les programmes de 1968.

1 – 1 - 3 Nombres et proportionnalité

Les déclarations suivantes sont-elles acceptables pour le professeur ?	
"Le quotient de 54 par 9 est 6."	OUI **92** NON **3**
"54 est un multiple de 9. "	OUI **97** NON **0**
"54 et 9 sont proportionnels. "	OUI **55** NON **29**
"6 est le coefficient de proportionnalité des nombres 9 et 54."	OUI **66** NON **21**
"Quand le reste de la division euclidienne de deux nombres naturels est nul, ces deux nombres sont proportionnels."	OUI **63** NON **26**
"Un coefficient de proportionnalité est un entier."	OUI **16** NON **76**

Si une fraction représente un entier alors :			
le numérateur est un multiple du dénominateur.	VRAI **95**	FAUX **3**	JE NE SAIS PAS **3**
le numérateur est un diviseur du dénominateur.	VRAI **13**	FAUX **82**	JE NE SAIS PAS **5**
le numérateur et le dénominateur sont proportionnels.	VRAI **63**	FAUX **18**	JE NE SAIS PAS **13**

Nombres proportionnels

Les notions de multiple et diviseur perdurent mais le vocabulaire de la proportionnalité vient se superposer à celui spécifique de ces notions pour décrire les relations entre familles de nombres entiers. Il s'ensuit une confusion d'où émerge une conception fausse de « nombres proportionnels » qui cohabite avec les concepts de multiples et diviseurs.

Seulement 18% des maîtres rejettent clairement l'idée que deux nombres puissent être proportionnels. A une exception près, les maîtres qui répondent « VRAI » à « le numérateur et le dénominateur sont proportionnels », ont répondu « VRAI » à « le numérateur est un multiple du dénominateur ». Ces deux formulations ne s'excluent pas. Certains maîtres acceptent d'utiliser le vocabulaire de la proportionnalité pour dire que deux nombres sont dans un rapport multiple alors qu'ils connaissent les mots « diviseur » et « multiple ». Les différents vocabulaires cohabitent et s'interpénètrent.

Coefficient de proportionnalité

Une utilisation erronée de l'expression « coefficient de proportionnalité » s'inscrit dans cette conception fausse de l'idée de proportionnalité. Les réponses aux questions précédentes sont corrélées entre elles ; leur groupement caractérise cette conception de proportionnalité entre entiers.

Il est important de remarquer que les questions ne séparent pas les individus. En particulier, on ne peut pas isoler une sous population qui utiliserait systématiquement le vocabulaire de manière correcte. Les difficultés observées ne caractérisent pas les maîtres.

L'absence d'une culture précise conduit chacun d'eux à faire un usage inapproprié de termes sur une question ou sur une autre.

Conclusion :

La proportionnalité a son origine dans l'étude des grandeurs. L'expression très ancienne « nombres proportionnels » faisait référence à des mesures de grandeurs[3] mais lue par des gens qui ne connaissent pas l'arithmétique des grandeurs elle peut être perçue comme signifiant une relation particulière entre nombres abstraits. En particulier, le primaire étant le lieu privilégié de l'étude des entiers et de la proportionnalité, il s'ensuit l'idée que la proportionnalité doit décrire une relation particulière entre entiers.

1 - 2 Bilan et explications

Les professeurs ne disposent plus de mots précis pour décrire les notions de rapport, de proportionnalité et les pratiques qui les incluent. Il en résulte une grande ambiguïté dans l'usage qu'ils font de certains termes comme « proportion, rapport, proportionnalité, coefficient de proportionnalité, fraction, … » allant jusqu'à des confusions dans les concepts.

On voit apparaître l'interpénétration des vocabulaires de l'arithmétique actuelle d'une part (multiple, diviseur, quotient, reste, fraction, …) et ce qui reste de l'arithmétique ancienne d'autre part (proportion, proportionnel, …). Or le vocabulaire de l'arithmétique ancienne qui traitait des grandeurs ne peut pas être repris dans le vocabulaire moderne puisque la notion de grandeur a disparu des mathématiques modernes. Le vocabulaire de substitution aurait dû être celui des fonctions linéaires (application, image, antécédent, coefficient de linéarité, …), mais les insuffisances de la transposition didactique des mathématiques dites modernes et les réactions qu'elles ont provoquées, ont fait disparaître du vocabulaire de l'école primaire, les termes qui lui seraient nécessaires : élément, classe, couple, graphe, etc.

Les difficultés observées ne sont pas des caractéristiques de professeurs mais un fait culturel. Pour l'expliquer, nous avons étudié l'évolution des conditions d'enseignement de la proportionnalité.

a) Evolution de l'histoire de la proportionnalité
La construction moderne des nombres et des fonctions ignore totalement la proportionnalité et les grandeurs. Les mathématiciens définissent les nombres par les structures algébriques. La définition formelle de fonction privilégie l'idée de correspondance terme à terme entre éléments de deux ensembles. La fonction linéaire résume toutes les relations de proportionnalité ; elle n'est qu'un exemple banal de fonction. L'algèbre rend caduque l'usage et le vocabulaire de la proportionnalité.

b) Evolution des programmes

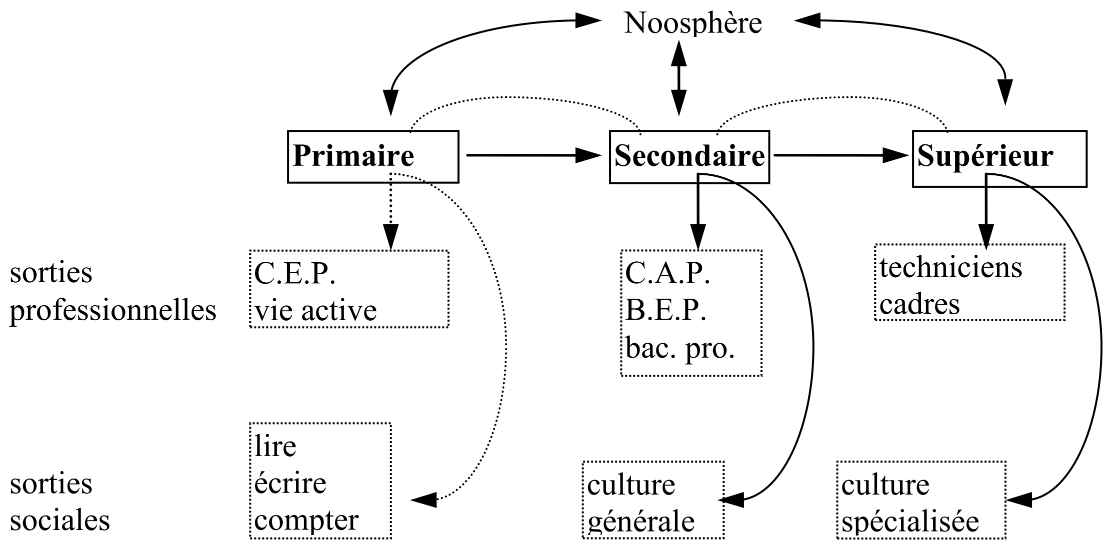
[3] Deux grandeurs mesurables sont proportionnelles si la correspondance entre leurs mesures est une fonction linéaire. Le coefficient de cette fonction linéaire est aussi appelé « coefficient de proportionnalité » ; il dépend des unités de mesures.

Les mathématiques modernes s'imposent à la noosphère et à l'école avec les réformes des années 1970. La noosphère, sous l'influence de la sphère savante n'est plus en mesure d'assurer son rôle de régulateur. Les connaissances de la proportionnalité n'ont plus fait l'objet de transpositions et ont ainsi disparu des contenus de l'enseignement du secondaire.
Les changements de contenus à enseigner auraient nécessité l'explication des réformes correspondantes pour une transposition d'une genèse axiomatique en une genèse didactique avertie.
c) Evolution des contraintes interinstitutionnelles
Chaque institution adapte ses instruments mathématiques aux problèmes qu'elle traite et aux conditions dans lesquelles elle le fait. L'école essaie d'adapter ses pratiques et ses conceptions de la proportionnalité à la nouvelle organisation des savoirs savants tout en assurant la pérennité des connaissances anciennes sous le contrôle de la noosphère.
Les dysfonctionnements que nous avons observés sont l'indice d'une évolution non régulée des rapports entre l'institution savante, l'institution scolaire et la noosphère.
Les changements curriculaires se sont faits sur la base de convictions idéologiques générées par une réorganisation des savoirs savants au détriment d'une réflexion sur ce qui est nécessaire à la culture, à la société, à la genèse des premiers savoirs mathématiques.

d) Pourquoi le système scolaire est-il resté aveugle aux conséquences de ce choix épistémologique ?

L'enseignement de la proportionnalité est conditionné par les attentes des différentes institutions scolaires et sociétales.

Le schéma suivant illustre l'évolution de l'environnement institutionnel de l'école primaire :



<u>Primaire</u> :

Avant la scolarité obligatoire jusqu'à 16 ans, l'école primaire préparait les élèves à la vie active. Les connaissances de l'arithmétique élémentaire et de la proportionnalité étaient adaptées aux différentes professions auxquelles se destinaient ces élèves.

Cette mission conférait à l'école primaire une identité, un statut social, une importance reconnue par la société toute entière. De ce fait les autres institutions scolaires portaient un regard attentif sur les pratiques et les contenus de l'enseignement élémentaire.

Secondaire :
Le secondaire devait assurer la formation des futurs instituteurs et donc tenir compte des contenus d'enseignement du primaire. L'arithmétique avait une place importante dans l'enseignement secondaire. La théorie des rapports et proportions a été maintenue dans les écoles normales jusqu'en 1970. En même temps le secondaire préparait les élèves à l'enseignement supérieur, lieu privilégié de l'algèbre. Ainsi arithmétique et algèbre devaient «cohabiter » dans le secondaire. (Certains manuels scolaires traitaient le même problème séparément par l'arithmétique puis par l'algèbre.)

La société a changé. Tous les élèves entrent en classe de sixième et 80% d'une classe d'âge doit atteindre le niveau du baccalauréat.
La seule sortie du primaire est le collège. L'école primaire n'est plus que la propédeutique du collège ; ce qu'elle fait ou ce qu'elle devrait faire « va de soi » pour les autres institutions scolaires qui de ce fait l'ignorent. Or le primaire ne peut traiter correctement la proportionnalité que si elle est présente dans le secondaire car les connaissances des professeurs des écoles dépendent de ce qu'ils apprennent dans le secondaire.

Mais le secondaire, principalement orienté vers les études longues, est lui-même assujetti au supérieur et n'a aucune raison d'enseigner l'arithmétique élémentaire. Il ne prépare plus les futurs professeurs des écoles.

Cet assujettissement de chaque niveau d'enseignement au niveau supérieur a des conséquences sur le fonctionnement des institutions scolaires. Il contribue à leur isolement et les oblige à un fonctionnement autonome. Or c'est l'usage effectif d'une connaissance à travers des pratiques communes à différentes institutions qui assure sa pérennité et sa diffusion dans la société.

Conclusion
Les changements curriculaires résultent de l'évolution des savoirs savants mais aussi des attentes des différentes institutions scolaires et sociétales. Il en résulte une évolution rapide des contenus d'enseignement qui nécessite une analyse périodique des pratiques des élèves et des professeurs.
En particulier, nous nous demandons si les connaissances actuelles des élèves de seconde sur les fonctions linéaires et affines peuvent suppléer celles de l'arithmétique des grandeurs et de la proportionnalité ?

2 La fonction linéaire reformule-t-elle les connaissances de la proportionnalité?

Il semble qu'on assiste ces dernières années à une résurgence de la proportionnalité dans l'enseignement obligatoire. Sa timide réapparition dans les programmes de collège s'accompagne-t-elle d'une prise en charge des grandeurs par l'enseignement de l'algèbre ?

Pour tester les connaissances des élèves entrant en seconde et plus précisément pour voir s'ils mobilisent des registres spécifiques à l'arithmétique ou à l'algèbre et avec quel succès, l'exercice standard suivant a été soumis à une classe de seconde pendant deux années scolaires consécutives : 2005-06 et 2006-07.

« *Pendant les soldes un magasin accorde 16% de remise sur les prix affichés.*

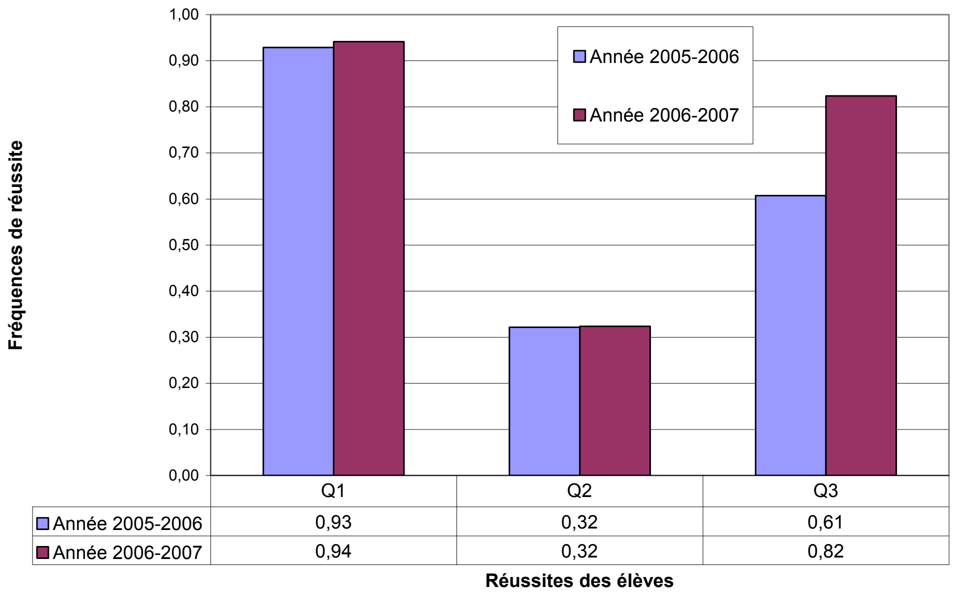
1) *Un article est affiché 35 €, quel sera le prix payé ? Justifier en écrivant vos calculs.*
2) *Un article est payé 21 €, quel était le prix affiché ? Justifier en écrivant vos calculs.*
3) *Le commerçant a accordé 7,2 € de remise sur un article. Quel était le prix affiché de cet article ? Justifier en écrivant vos calculs.* »

Les participants à l'atelier étaient invités à analyser cet exercice et à commenter les techniques résolutoires des élèves.

2 – 1 Stabilité dans les réponses des élèves

Les fréquences de réussite à chacune des trois questions sont très proches pour les deux années scolaires comme le montre l'histogramme suivant :

Comparaison des réussites aux 3 questions de l'exercice



	Q1	Q2	Q3
Année 2005-2006	0,93	0,32	0,61
Année 2006-2007	0,94	0,32	0,82

Seule la question 3 fait apparaître une différence entre les fréquences de réussites des deux années. Un test avec la variable normale donne une probabilité de 0,0574 de dépasser cette différence entre deux échantillons indépendants.[4]

Par contre, on pouvait s'attendre aux écarts de réussite entre les trois questions :

La question 1 peut se résoudre par un calcul direct du prix payé ou par un calcul intermédiaire du montant de la remise.

La question 2 nécessite la mise en œuvre d'une fonction réciproque (l'erreur classique consiste à calculer la remise sur le prix payé) et de ce fait on pourrait penser que les élèves ayant une approche algébrique du problème sont mieux armés pour donner une réponse juste.

[4] Cf. annexe 1 pour détails des résultats statistiques.

La question 3 nécessite aussi la mise en œuvre d'une fonction réciproque mais qui peut-être déterminée directement à partir du pourcentage de remise donné dans la consigne.

2 - 2 Analyse des réponses des élèves de l'année 2006-07

Les réponses des 34 élèves font apparaître une grande diversité de formulations (d'écritures) mais les méthodes de résolution peuvent être groupées autour de quatre techniques :

Fonction linéaire de coefficient 0,84 : (FLP, FLPI)

On peut penser que les élèves qui ont une approche algébrique du problème utilisent la fonction linéaire de coefficient 0,84 (FLP) à la question 1 et sa réciproque (FLPI) à la question 2. Or une seule élève utilise cet opérateur avec succès à la question 1 mais échoue à la question 2. Deux autres élèves prennent conscience de l'intérêt de cette fonction à la question 2 et utilisent directement sa réciproque (FLPI) avec succès.

Fonction linéaire de coefficient 0,16 : (FLR, FLRI)

28 élèves utilisent la fonction linéaire de coefficient 0,16 (FLR) et 17 d'entre eux utilisent la réciproque de cette fonction (FLRI).

Parmi les 28 élèves, 26 réussissent la question 1 en calculant le montant de la remise puis le montant à payer par différence.

Parmi les 17 élèves, 16 réussissent la question 3 ; 15 échouent à la question 2 car presque tous calculent la remise sur le prix payé (c'est-à-dire 16% de 21€).

Fonction linéaire et équation : (FLR et EQ)

Neuf élèves font une mise en équation (EQ) en utilisant la fonction linéaire de coefficient 0,16 (FLR) ; mais six d'entre eux échouent à la question 2 et trois d'entre eux échouent à la question 3.

Proportion et équation : (P et EQ)

Sept élèves écrivent une proportion (P) où figure une inconnue et réalisent ainsi une mise en équation (EQ) pour chacune des trois questions. Ces sept élèves réussissent la question 1 et la question 3 ; mais deux d'entre eux échouent à la question 2 car ils calculent la remise sur le prix payé.

Pour résumer, reprenons les techniques et réussites question par question :

A la question 1, tous les élèves, sauf 2, calculent le montant de la remise, soit avec la fonction de coefficient 0,16 (FLR), soit avec une mise en équation proportionnelle (P et EQ).

La question 2 est réussie soit par ceux qui utilisent la réciproque de la fonction de coefficient 0,84 (FLPI) soit par ceux qui font une mise en équation proportionnelle (P et EQ).

Les élèves qui réussissent la question 3 utilisent soit la réciproque de la fonction de coefficient 0,16 (FLRI), soit la fonction directe de coefficient 0,16 mais avec une mise en équation (FLR et EQ), soit une mise en équation avec une proportion (P et EQ).

La question 3 est mieux réussie que la question 2, probablement parce qu'elle peut être résolue en utilisant la réciproque d'une fonction linéaire donnée dans la consigne.

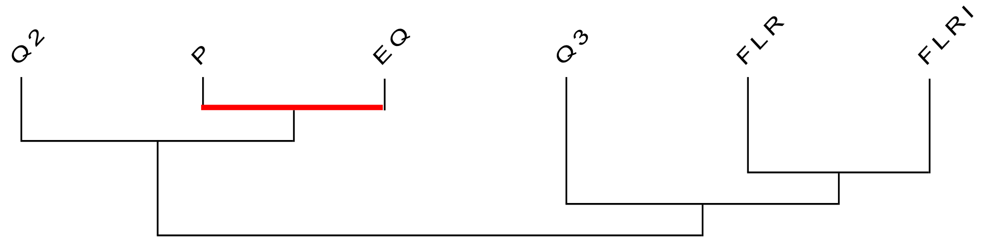
On pourrait espérer, de la part d'élèves de seconde, des techniques utilisant la fonction linéaire :

Question 1 : $35\times0,84=29,4$ (1 seul élève utilise cette technique)

Question 2 : $21\div0,84=25$ (2 élèves utilisent cette technique)

Question 3 : 7,2÷0,16=45 (17 élèves utilisent cette technique)
En fait, peu d'élèves (moins de la moitié) utilisent la fonctionnalité de la réciproque d'une fonction linéaire.

L'arbre de similarité suivant montre une proximité des caractères P et EQ avec la question 2, et une proximité des caractères FLR et FLRI avec la question 3. Ces proximités confirment les remarques précédentes : la question 2 est principalement réussie par les élèves qui font une mise en équation proportionnelle alors que la question 3 est aussi réussie par ceux qui utilisent la fonction de coefficient 0,16 ou sa réciproque.



Arbre des similarités : C:\Documents and Settings\xxxx\Mes documents\test-seconde-2006-chic.csv

L'écriture d'une proportion relève bien d'une technique propre à l'arithmétique, mais l'usage d'une inconnue pour la mise en équation proportionnelle s'apparente davantage à une résolution algébrique car elle utilise le signe « = » et une lettre « *x* ». Les élèves qui ont un « pied dans l'algèbre » ont plus de facilités à faire cette mise en équation proportionnelle que ceux qui sont restés dans une conception arithmétique des mathématiques. Peut-être cette mise en équation proportionnelle pourrait-elle être un outil de transposition entre l'arithmétique et l'algèbre.

Le concept de fonction n'est pas spécifique à l'algèbre. Il peut s'élaborer dans le cadre arithmétique avec les notions de dépendance et de correspondance entre grandeurs. Les élèves utilisent le coefficient de proportionnalité (0,16), sans parler de fonction linéaire, mais de manière adaptée à la question 3.

Nous retiendrons que ces deux objets de savoir que sont « la mise en équation proportionnelle » et « la fonction linéaire » présentent, de par la diversité de leurs praxéologies, une grande adaptabilité autant au cadre arithmétique qu'au cadre algébrique. Ils apparaissent comme des maillons dans la chaîne des connaissances des élèves, suffisamment maniables pour faciliter la dialectique nécessaire au passage de l'arithmétique à l'algèbre.

2 - 3 Conclusion

Ces observations tendent à montrer que ce que l'enseignement de l'algèbre fait gagner en généralité n'améliore pas l'extension du champ d'utilisation de la proportionnalité : les connaissances relatives à la proportionnalité semblent attachées à certaines situations culturellement reconnues, et les techniques utilisées par les élèves semblent dépendantes des problèmes qui les ont vu naître.

Les élèves ne peuvent pas transférer d'eux-mêmes leurs connaissances d'un cadre à un autre.

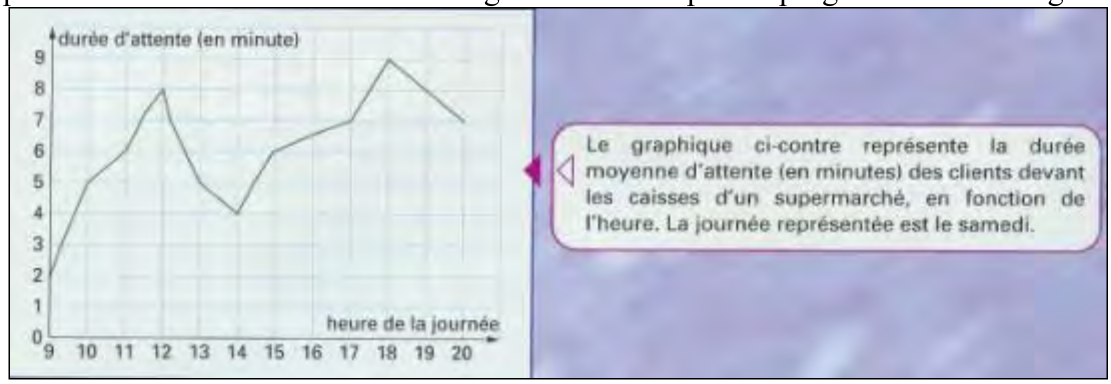
Si la linéarité se limite à l'étude de relations numériques, elle ne peut pas reformuler les connaissances de la proportionnalité. Il incombe donc aux professeurs d'organiser un travail de transposition pour que la fonction linéaire apparaisse comme un objet de savoir qui résume, unifie et réfléchit la diversité des connaissances des élèves sur la notion de proportionnalité.

3 Un enseignement des fonctions en seconde qui clôture les connaissances de la proportionnalité est-il possible ?

Nous avons comparé deux introductions de la notion de fonction en seconde qui révèlent des choix épistémologiques différents ; les pratiques d'enseignement qui en découlent, peuvent générer chez les élèves des connaissances différentes pour un même objet de savoir.

3 - 1 Présentation formelle et institutionnalisation dans le cadre numérique
Le premier exemple est extrait du manuel « Repère, math 2^de^, Hachette Education, 2004 ».
La présentation de deux activités introductives au chapitre « Généralités sur les fonctions » est caractéristique d'une triple classification suivant le cadre, la nature des fonctions et leurs représentations.

Sur la page de gauche figure une activité intitulée « Etude d'une fonction sans calculatrice ». Il s'agit en fait d'un relevé statistique représenté par une courbe où figurent les unités de grandeurs. Il est accompagné d'un commentaire utilisant le vocabulaire des grandeurs et l'expression « en fonction de » dont l'usage est conseillé par les programmes de collège.



La situation est ensuite retraduite en utilisant les ostensifs propres à l'algèbre : $f, t, f(t)$;
puis les questions sont étiquetées avec de nouvelles expressions : ensemble de définition, image, antécédent, etc. Il est probable qu'un élève novice aura des difficultés à les mettre en relation avec les formulations en termes de grandeurs.

Le superviseur d'un supermarché affiche des renseignements à l'entrée de son magasin, notamment le graphique d'une fonction f qui à chaque instant t de la journée, associe le temps d'attente $f(t)$ aux caisses.

1 · Ensemble de définition

Quels sont les horaires d'ouverture du magasin ?

2 · Image par f

Quel est le temps d'attente à 14 h 00 ?
Quelle est l'image de 10 par f ?
Indiquer la valeur de $f(19)$.

3 · Antécédents par f

À quelle heure attend-on 5 minutes ?
Ces heures sont les antécédents de 5.
Quels sont les antécédents de 7 ? de 1 ? de 9 ?

L'introduction du lexique spécifique de l'algèbre n'est pas nécessitée par cette situation puisque les élèves disposent déjà du vocabulaire des grandeurs pour formuler.
L'activité n'est qu'un alibi pour institutionnaliser les éléments de savoir mentionnés dans le programme : *f*, *f(t)*, *ensemble de définition, image, antécédent, équation, inéquation, sens de variation, tableau de variations, min, max*. Ils ne sont pas utiles à l'élève qui peut répondre aux questions en termes de grandeurs, mais ils vont permettre au professeur de décrire, dans le cadre numérique, l'activité suivante qui est en vis-à-vis de la première sur la page de droite.

Cette deuxième activité est intitulée : « Etude d'une fonction avec calculatrice ». Les auteurs y proposent deux exercices sur les fonctions définies par des formules algébriques : $f(x)=\frac{-2x}{x^2+1}$ et $f(x)=\frac{1}{2}(x+\frac{2}{x})$. Ces formules désignent le type de fonctions (fonctions rationnelles) en même temps qu'elles décrivent l'algorithme qui permet la mise en correspondance des nombres. Les auteurs placent ces exercices dans le cadre numérique (x et $f(x)$ sont des variables réelles) en utilisant le vocabulaire introduit dans l'activité précédente. Reprenons le premier exercice :

A. On considère la fonction f définie sur $[-3\,;\,3]$ par $f(x)=\frac{-2x}{x^2+1}$.

1 · Calculer $f(x)$ pour les valeurs de x suivantes :

$0\,;\ 1\,;\ -2$ et 3.

2 · En déduire si les points suivants sont situés sur la représentation graphique de f :

$O(0\,;\,0)\,;\quad A\left(1\,;\,-\frac{1}{6}\right);\quad B\left(-2\,;\,\frac{-6}{5}\right);\quad C(3\,;\,-0{,}6)$.

3 · Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

4 · Pour quelle(s) valeur(s) de x a-t-on $f(x)=1$?

La formule $f(x) = \dfrac{-2x}{x^2+1}$ établit formellement le graphe de la fonction, c'est-à-dire l'ensemble des couples ($x; \dfrac{-2x}{x^2+1}$) lorsque x parcourt **R**. Elle ne résume pas la structure d'une situation ; elle dit à l'élève, qui connaît les règles du calcul algébrique, quelle procédure il doit suivre pour déterminer le correspondant de n'importe quel nombre réel. L'essentiel des tâches consiste à faire ces calculs puis à encadrer et déterminer un minimum.
Cette activité de découverte ne diffère pas des exercices d'application qui suivent le cours.

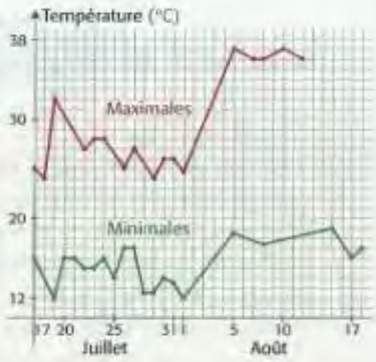
En résumé, dans ce manuel, le passage du cadre arithmétique au cadre numérique, d'une relation entre grandeurs à une relation entre nombres abstraits n'est pas organisé. La première activité institutionnalise d'emblée les objets et le vocabulaire qui vont permettre au professeur de faire fonctionner les algorithmes de la deuxième, mais la signification que l'élève peut donner à cette deuxième activité, qui se limite à un jeu de calcul formel sur les nombres, ne se nourrit pas de la relation entre grandeurs décrite dans la première activité.

3 - 2 Du modèle implicite d'action dans le cadre des grandeurs à l'usage canonique d'une formule algébrique

Le deuxième exemple est extrait du manuel « Maths seconde ; édition 2004 ; collection Indice ; Bordas ». Les deux premières activités qui introduisent le chapitre « Généralités sur les fonctions », marquent la différence d'approche didactique de ce manuel par rapport au précédent.

L'activité 1 intitulée « Canicule », décrit, dans le cadre des grandeurs (dates et températures), une fonction du hasard (des observations), avec des courbes de températures.

Le graphique fournit l'évolution, en un lieu donné, des températures maximales et minimales en degrés Celsius au cours de la période du 17 juillet au 17 août 2003.



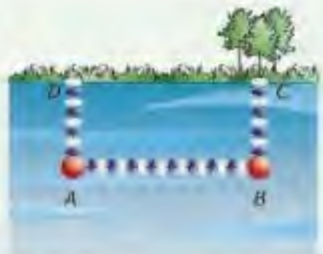
1.a. Quelles sont ces températures et leur écart le 1er août ?
b. Durant quelle période les maximales ont-elles dépassé 30 °C ?
c. Quelle est la température la plus élevée observée ? À quelle date a-t-elle été relevée ? Quelle fut, ce jour-là, la température minimale ?

2. Le 5 août, la température maximale a été de 37 °C et la température minimale de 19 °C. L'écart de température était donc de 18 °C.
a. Calculer l'écart de température le 15 août.
b. Quel jour l'écart de température a-t-il été le plus faible ? Le plus important ?

L'élève doit faire des lectures graphiques de valeurs, d'extrema, d'écarts …
Les questions sont formulées avec le vocabulaire des grandeurs et les réponses attendues sont des grandeurs mesurées. L'idée de variation est sous-jacente. Les auteurs ne cherchent pas à introduire le vocabulaire des fonctions mais restent dans le cadre des grandeurs.

L'activité 2, intitulée « Aire de la baignade », décrit dans le cadre des grandeurs (longueurs et aires) une fonction déterministe (performative). Les questions introduisent progressivement les quatre représentants d'une fonction : programme, formule, tableau, représentation graphique.

Le responsable d'un parc municipal, situé au bord d'une large rivière, veut aménager une aire de baignade surveillée de forme rectangulaire. Il dispose d'un cordon flottant de 160 m de longueur et de deux bouées A et B. On se propose de déterminer comment placer les bouées A et B pour que l'aire de baignade soit maximale.



1. Si la distance de la bouée A à la rive est de 25 m, quelle est la longueur de la zone de baignade ? Quelle est alors son aire ?

2.a. Montrer que la distance x (en m) de la bouée A à la rive varie entre 0 et 80 m.
b. Expliquer pourquoi la longueur de la zone de baignade est égale à $160 - 2x$.
On désigne par $A(x)$ l'aire, en m², de cette zone. Cette aire est donnée en fonction de x. Vérifier que $A(x) = x(160 - 2x)$.

3. Calculer $A(x)$ pour x variant de 0 à 80, de 10 en 10.

4. Dessiner la représentation graphique correspondante.
On choisira, sur l'axe des abscisses, 1 cm pour représenter 10 m et, sur l'axe des ordonnées, 1 cm pour représenter 400 m².

La première question est formulée en termes de grandeurs. Elle conduit l'élève à construire un **programme** pour calculer une aire en fonction d'une longueur dont la mesure est donnée et accompagnée de son unité (25*m*).
La deuxième question est une reprise de la première mais ici la distance inconnue est désignée par la lettre *x* accompagnée de l'unité de grandeur entre parenthèses (*en m*). Les questions intermédiaires conduisent l'élève à **résumer le programme de calcul par une formule arithmétique** : $A(x) = x(160 - x)$.
Dans la question 3, cette formule peut aussi être comprise comme **une formule algébrique** qui résume un algorithme de calcul (on peut oublier les unités de grandeurs) et qui permet de construire un **tableau de valeurs numériques** indépendamment des grandeurs.
La question 4 invite l'élève à récupérer les valeurs numériques de la question précédente pour construire une **représentation graphique**.
On repère bien, dans cette activité, les quatre représentants d'une fonction : programme, formule, tableau de valeurs, courbe représentative. Le passage des grandeurs aux nombres (d'un cadre à l'autre) se fait via la formule en oubliant les unités. On voit que les auteurs tentent d'abstraire une relation numérique d'une relation entre grandeurs en faisant glisser le vocabulaire du cadre des grandeurs vers le cadre numérique.

Commentaires

Ces deux manuels nous semblent caractériser deux approches didactiques différentes de la notion de fonction.

Dans le premier, les auteurs institutionnalisent, dans la première activité, les objets qui permettent de mettre en œuvre le concept numérique de fonction dans la deuxième activité.

Dans le deuxième manuel, les auteurs n'établissent pas de lien entre l'activité 1 et l'activité 2. Dans l'activité 1, ils proposent un recueil de données statistiques représentées par un graphique. Les températures relevées chaque jour sont le fait du hasard ; il n'y a pas de relation de cause à effet entre la date et la température. On ne peut pas prévoir la température qu'il fera tel jour. La représentation d'une telle situation peut se faire a posteriori avec un tableau de valeurs où figurent les unités ou avec une représentation graphique de ces valeurs ; mais une telle situation ne peut pas se résumer par une formule. Il n'y a pas de raison de « passer à l'algèbre » ; l'élève ne peut décrire cette correspondance fortuite avec le vocabulaire des fonctions que s'il a préalablement conceptualisé la notion de fonction. Les situations qui résultent du hasard ne sont pas propices à une dialectique entre l'arithmétique et l'algèbre.

Dans les situations déterministes, cette dialectique est facilitée par les différents rôles que peut jouer la formule. Dans le cadre des grandeurs, elle peut résumer le programme de calcul d'une mesure en fonction d'une autre comme dans l'activité intitulée « aire de la baignade ». Elle peut aussi modéliser une classe de situations, et ainsi, d'outil de calcul devenir un objet de savoir institutionnel ; par exemple la formule qui donne l'aire d'un triangle renvoie à plusieurs situations et questions de géométrie élémentaire. Dans le cadre algébrique, la formule peut décrire une relation numérique particulière en résumant l'algorithme de calcul correspondant ou modéliser une classe de situations (par exemple, la relation $y=ax$ regroupe toutes les situations de proportionnalité). Elle peut aussi être considérée comme l'élément d'un ensemble structuré (par exemple ax est un élément de l'anneau des polynômes).

Ainsi la formule est un outil-objet constitutif de l'organisation mathématique du cadre des grandeurs mais aussi un outil-objet du cadre de l'algèbre. De plus elle permet d'établir un pont entre ces deux cadres. D'outil résolutoire dans le cadre des grandeurs, elle devient un objet de l'algèbre comme dans l'activité « aire de la baignade ». Réciproquement, chaque formule algébrique renvoie à une classe de situations arithmétiques ; par exemple, la fonction linéaire renvoie à toutes les situations de proportionnalité propres au cadre des grandeurs.
La formule est donc un maillon réversible dans des chaînes de connaissances qui permet à l'élève d'entretenir une dialectique entre l'arithmétique et l'algèbre. Elle fonctionne comme un « transposon » qui résume, modélise et « réfléchit » (au sens piagétien d'abstraction réfléchissante) les savoirs sur les grandeurs.

Conclusion

Une analyse succincte des activités des manuels semble confirmer que le passage des grandeurs à l'algèbre est facilité par le recours aux fonctions déterministes, mieux qu'avec des fonctions du hasard. Mais nous avons vu aussi que l'action du professeur est limitée par la culture de l'institution à laquelle il appartient. Ce qu'il peut faire dépend de ses connaissances mais aussi des contraintes institutionnelles.
Il incombe donc à la noosphère d'organiser un curriculum qui permette d'« homogénéiser» les connaissances de la linéarité en arithmétique et en algèbre au collège afin que les futurs professeurs des écoles disposent de moyens de contrôler ce qu'ils ont à enseigner aux niveaux élémentaires.

Bibliographie

Comin E. (2000). *Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire*. Bordeaux : Université de Bordeaux 1.
Comin E. (2002). *L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège*. Recherche en Didactique des Mathématiques, vol 22, n°2-3, p.141.
Comin E. (2005). *Variables et fonctions, du collège au lycée*. Petit x n°67.
Comin E. (2008). *Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans le cadre des fonctions*. Non encore publié.

Annexe : Les résultats des élèves de seconde aux questions sur les pourcentages

Le tableau suivant donne les nombres de réussites en 2005-06 et 2006-07 :

	Réussites	Echecs	Total
2005-06	17	11	28
2006-07	28	6	34

Si P_1 et P_2 désignent les fréquences de réussites des deux années, alors les effectifs permettent de supposer que ces deux variables aléatoires suivent une loi normale de moyenne estimée

$p_0 = \dfrac{17+28}{28+34} \approx 0{,}726$. Alors D=P_1-P_2 suit une loi normale de moyenne 0 et d'écart type

$\sigma(D) = \sqrt{\dfrac{0{,}726 \times 0{,}274}{28} + \dfrac{0{,}726 \times 0{,}274}{34}} \approx 0{,}114$, donc $\dfrac{\mathrm{d}}{\sigma(\mathrm{D})}$ suit une loi normale centrée réduite. Or $\dfrac{d}{\sigma(D)} \approx \dfrac{\frac{17}{28} - \frac{28}{34}}{0{,}114} \approx 1{,}898$

La probabilité que la valeur absolue de la variable normale centrée et réduite dépasse 1,9 est 0,0574.

PENSER LA RÉGULATION D'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES, À L'ÉCOLE PRIMAIRE ET AU DÉBUT DU COLLÈGE

Florence ESMENJAUD-GENESTOUX
DAESL Université Bordeaux 2
florencegenestoux@free.fr

1 INTRODUCTION

L'atelier a été l'occasion[1] pour les participants d'exprimer certaines difficultés récurrentes du côté des élèves comme de celui des enseignants, à propos du calcul et des répertoires numériques. Ces constats de difficulté ont ensuite été reformulés pour mieux rendre compte du caractère transactionnel de la régulation didactique[2] : elle se négocie entre les protagonistes concernés (même dans le cas où beaucoup d'éléments demeurent implicites). De ce point de vue, les difficultés des élèves et du professeur pointent des entraves aux délégations de responsabilités programmées par l'enseignant. On peut considérer en effet, que conjointement, chacun à sa mesure et sous l'effet de son bon vouloir, le professeur et chaque élève partagent des responsabilités de nature mathématique (pour contrôler une résolution dans certaines conditions) et des responsabilités de nature didactique (pour conduire l'évolution des connaissances). Ainsi, lorsqu'un élève ne porte pas ce dont le professeur voudrait le charger (soit que l'état de ses connaissances ne le lui permette pas, soit qu'il refuse d'assumer le rôle qui est attendu de lui), le processus de transmission des savoirs butte contre une répartition non satisfaisante de ces responsabilités. Il arrive alors que l'apprentissage des mathématiques ne soit pas au rendez-vous du soutien. Il arrive aussi que la relation didactique se rompe brutalement par un rejet global sur autrui de la responsabilité de l'échec : « lacunes trop importantes », « manque de motivation », « milieu culturel inadapté », etc. ; mais aussi « ce prof est nul », « l'établissement n'est pas à la hauteur », etc. Ces critiques généralisantes sans appel, souvent injustes car seulement ponctuellement vérifiées, surgissent lorsque les difficultés persistent malgré les multiples tentatives, lorsque les moyens d'aider viennent à manquer. Approcher les difficultés d'apprentissage et d'enseignement au plus près des connaissances et plus particulièrement sous l'angle d'un partage de responsabilités (ce qui est l'objet de cette présentation), présente l'intérêt (pour l'enseignant ou pour le formateur qui constate des difficultés) d'entretenir l'espoir d'amélioration en intégrant aux perspectives d'interventions didactiques des prises d'information sur les comportements (qui d'ordinaire sont analysés indépendamment des savoirs et de manière exogène aux questions didactiques, par référence à la pédagogie, psychologie, psychanalyse, etc.).

[1] Notamment par un questionnaire reproduit en annexe.

[2] La dimension didactique précise d'autres éléments que la dimension relationnelle, pédagogique ou cognitive, même si elle est étroitement associée avec ces dimensions. L'interaction est didactique dans la mesure où elle est relative à la fois à des savoirs mathématiques et à une intention de modifier des connaissances mathématiques.

L'article s'organise en trois parties.

La première souligne des effets négatifs sur les pratiques d'enseignement de certaines représentations, elle propose des alternatives pour réhabiliter ce qui dans le rôle du professeur a été dénigré au fil du temps dans l'environnement professionnel et au delà.

La seconde décline une diversité de rapports au savoir, et pour chacun d'eux, replace les difficultés les plus fréquentes en les réinterprétant comme une résistance à porter certaines responsabilités didactiques.

La dernière partie examine le rôle émancipateur des devoirs du soir, en listant plusieurs enjeux de dévolution.

2 PENSER LES REGULATIONS DIDACTIQUES

2- 1 Enseigner le sens et les routines

La mise en avant de l'apprentissage par résolution de problèmes a introduit une dissymétrie dans les discours et dans les pratiques. L'entraînement en a perdu de sa dignité, il a été dévalué par rapport au travail sur la compréhension. Perçue comme un antagonisme, la dualité sens / algorithme a négativement influé sur la répartition des rôles entre les enseignants, les élèves et les accompagnateurs de l'étude personnelle (Esmenjaud-Genestoux, 2000). Lorsque certaines interventions peuvent « s'externaliser » (hors du fonctionnement principal), les acteurs les mieux placés se préoccupent du noble ouvrage, les déclassés s'attèlent aux tâches ingrates et néanmoins indispensables (par exemple rendre les produits élémentaires très familiers). Remettre à l'honneur les performances techniques des élèves en s'appuyant tout autant sur une modalité binaire[3] provoquerait un effet analogue : une dépréciation d'un autre pan du rôle du professeur. Car la transmission de l'usage des savoirs (et non seulement de leur texte), est une affaire d'équilibre.

En effet, routine et réflexion traduisent deux formes de rapport au savoir également utiles et respectables. Pour celui qui maîtrise un domaine mathématique, elles se complètent en fonction des situations rencontrées :

- l'automatisme soulage partiellement une réalisation complexe : une stricte application détachée du sens mais rapportée à des conditions générales bien identifiées, produit avec sûreté un résultat relativement prévisible;

- le raisonnement assure une utilisation vigilante dans les circonstances périlleuses, en interrogeant localement les singularités.

L'enseignement doit donc combiner des apprentissages qui ne requièrent ni la même durée, ni les mêmes aménagements, ni les mêmes arguments pour négocier les efforts des élèves. L'ignorance ou la confusion de ces différences provoquent bien des

[3] En opposant par exemple, le normal / le pathologique ou le mérite / la déviance, etc.

malentendus. En revanche, en distinguant les connaissances des savoirs, il est possible de souligner les particularités, tout en resituant l'ensemble dans un même processus de transmission.

2-2 Convertir les observations de difficulté en décisions didactiques

L'idée que l'on se fait des difficultés des élèves s'est aujourd'hui considérablement enrichie : elles ne sont pas systématiquement explicables comme un manque qui se comble par supplément d'informations. La manière de concevoir les régulations s'en est trouvée complexifiée. Comment intégrer, dans le cadre d'un enseignement, la prise en considération de dispositions très personnelles (voire intimes), sans perdre en compétence et en légitimité d'intervention ? Comment penser les adhésions au changement, lorsque désirs, curiosités ou motivations sont si subtiles que ni les proches, ni les thérapeutes ne prétendent qu'il est aisé de les susciter ? Comment l'enseignant qui perçoit un malaise, des craintes, des réticences, un comportement fuyant, etc. chez les élèves peut-il coordonner ses décisions didactiques avec ce qu'il observe finement dans des registres très éloignés ?

Les convergences psychopédagogiques semblent plus accessibles à l'occasion d'une « situation pour apprendre », car des enjeux variés y imbriquent le cognitif et le conatif. L'émulation qui en résulte finira, on peut l'espérer, par gagner les timides, les introvertis ou les plus défensifs. Voilà que surgit encore une dissymétrie professionnelle: le cas de ceux qui hésitent à se lancer dans la recherche d'une solution originale a été pris en considération par la Recherche et par les praticiens, mais quelle étude de ceux qui traînent des pieds devant le travail personnel ?

2-3 Rapporter les comportements aux situations

Bien souvent, le premier travail mathématique qui est confié en autonomie à l'initiative des élèves consiste à « apprendre les tables ». Une fois que la signification des produits a été construite en classe, une fois que les résultats ont été établis et officiellement validés, une fois qu'ils ont été réordonnés et répartis dans plusieurs listes, aux élèves de prendre le relais. Il est devenu fréquent[4] en effet de faire principalement reposer la fiabilité du répertoire multiplicatif sur des capacités individuelles de mémorisation[5] et sur la ténacité familiale devant ce type d'effort (supposé accessible à tous, adapté aux moins instruits). En rendant la teneur mathématique de cette activité de moins en moins perceptible[6], une large participation de l'entourage a été sollicitée. Mais

---

[4] Autrefois, une grande part de l'entraînement était collectivement aménagé en classe et par le truchement d'exercices fréquents répartis sur une longue durée. Le nombre d'exercices dans les manuels anciens témoigne de cette préoccupation institutionnelle. La mise en mémoire n'était pas autant séparée de l'usage.

[5] Les recherches pléthoriques sur la mémoire et les métaphores informatiques maintenant vulgarisées renforce cette représentation dichotomique : d'un côté des données enregistrées presque indépendamment des futures utilisations (« comme une poésie », entent-on souvent) et de l'autre une pratique de calcul qui les utiliserait en toute neutralité.

[6] Dans les années 80, l'espoir d'une transversalité des apprentissages et d'un stockage mnésique d'informations inertes et détachables a conduit les programmes de 1985 à sortir l'apprentissage des tables

qu'est ce qui est attendu de la part des accompagnateurs domestiques de l'étude ? Faire répéter à l'identique de nombreuses fois les tables dans l'ordre ?

La table de multiplication est un bon paradigme pour aborder des questions didactiques importantes et relativement généralisables. Ce modeste répertoire de théorèmes (avec réciproque) est facilement identifiable et se trouve au cœur des négociations relatives à la scolarité obligatoire (une institution dans laquelle le professeur porte un grand nombre de responsabilités didactiques).

Les gens de métier accrochent les performances ou les attentes à des catégories d'exercices ; ils identifient ainsi plusieurs manières de bien connaître un même savoir. Des questions peuvent se regrouper parce qu'elles sollicitent toutes (pour le professeur) le même produit 5 x 8, tout en ne mobilisant pas (chez les élèves) le même degré de familiarité avec la compréhension ou le maniement de cette formule :

- 8 fois 5 = ? ;

- récite la table (pour un débutant, décliner les multiples de 5 est bien plus facile que ceux de 8) ;

- « Combien de sièges dans le hall d'attente, s'il y a 5 rangées de 8 fauteuils ? » ;

- effectue 542 divisé par 5, etc.

Chaque situation diffère selon la durée qui est laissée à l'élève pour répondre, selon qu'il existe (ou non) à portée de main une calculatrice, une collection intermédiaire d'objets ou de signes tracés sur une feuille de papier, etc. Mais le recours au matériel disponible dépend aussi fortement de l'état des connaissances de l'élève (il peut ne pas établir de lien entre la question et ce qu'il pourrait établir avec ce qui est à sa disposition ; l'usage du matériel peut lui paraître une régression inutile, etc.).

Les erreurs prévisibles sont aussi différentes d'une situation à l'autre : une « erreur de 1 » dans le cas d'un dénombrement (5 x 8 = 41), une « erreur de proximité » relative à une configuration en table (5 x 8 = 32), etc. En cas de réponse correcte, la confiance accordée à sa production (par l'enseignant et par l'élève) dépend aussi de la situation : réciter sur commande n'est pas l'équivalent de citer à bon escient de son propre chef ; réitérer des doubles (10, 20, 40) n'est pas l'équivalent d'énoncer directement une formule ; attendre le verdict de celui qui sait n'est pas l'équivalent de vérifier soi-même par un étayage (huit fois, c'est dix fois moins deux fois) …

2-4 Une familiarité avec le savoir qui s'intensifie

Il faut souvent plusieurs années pour construire les connaissances qui soutiennent la compréhension d'un savoir, pour l'institutionnaliser sous une forme savante et opératoire, pour rôder des techniques qui seront contrôlables par l'entendement (savoirs et connaissances s'agrègent dans un répertoire cohérent de résolution). Lorsque des difficultés apparaissent, il n'est pas aisé de conserver une vue

---

de multiplication du chapitre des mathématiques. De nouveaux textes officiels organisaient dans le même temps un essor rapide du secteur périscolaire (Esmenjaud-Genestoux, 2000).

d’ensemble sur un long processus de transmission au cours duquel les formes de connaissances évoluent et la familiarité de l’élève s’intensifie.

Aussi, pour penser les régulations sans cassure ni oscillation, j’ai replacé dans un continuum les intentions didactiques relatives à un savoir donné auquel j’ajoute les connaissances qui lui sont rattachées. Le lent déroulement de l’enseignement de ce savoir est alors balisé par des indicateurs didactiques qui différencient sept étapes[7] dans la familiarité avec ce savoir. Souvent, les *niveaux de familiarité* ne seront pas tous visés durant la même année scolaire, ni même tous programmés dans un cursus scolaire (chaque filière décide d’un certain degré d’approfondissement avec les savoirs). Mais en ce qui concerne les produits élémentaires (tout comme les principaux savoirs de base), il est attendu en fin de collège un usage rapide et fiable.

3 PARTAGER DES RESPONSABILITES DIDACTIQUES AVEC LES ELEVES

En théorie des situations, le modèle de base pour analyser l’interaction entre professeur et élève comporte un *milieu* et un *contrat didactique* qui légitiment et contraignent la relation d’enseignement/apprentissage. Ce « contrat »[8] répartit les connaissances mathématiques nécessaires à la résolution d’une question plus ou moins problématique entre les trois protagonistes conceptuels que sont les acteurs (le professeur et les élèves dans des rôles asymétriques) et ce milieu[9]. On peut considérer que lors de l’interaction effective, chaque partenaire accepte ce contrat ou « tire » dessus pour tenter de porter moins que prévu. Les difficultés des élèves, en bloquant certaines négociations du contrat initial, créent des difficultés pour l’enseignant. On peut alors penser les régulations didactiques comme des réaménagements du milieu et du contrat, en fonction de ce que l’enseignant observe et interprète des comportements des élèves.

Il semble raisonnable de présupposer[10] que porter des responsabilités engage des connaissances, tout en considérant qu’une prise de responsabilité (ou une délégation)

---

[7] Le modèle est construit en faisant glisser, une à une, six responsabilités didactiques des mains du professeur vers celle de l’élève. Les niveaux de familiarités sont détaillés dans Esmenjaud-Genestoux, 2000 ; les responsabilités didactiques dans Esmenjaud-Genestoux, 2008. Une liste des responsabilités figure en annexe. Les noms des différents niveaux sont à considérer comme un simple étiquetage au sein de la modélisation. Chaque terme (aptitude, exécution, etc.) ne manque pas de faire écho au langage courant ou à d’autres usages professionnels, ce qui a créé dans l’atelier quelques malentendus momentanés.

[8] Il ne s’agit pas d’un contrat au sens habituel du terme, où les éléments seraient explicités et consignés avant acceptation mutuelle. J’adopte ici le point de vue du professeur qui suit ses objectifs et décide a priori de ce qu’il va porter et de ce qu’il va déléguer ou « dévoluer » (s’il ménage des conditions favorables à la prise de responsabilité par les élèves pour soutenir ce qui serait sinon une simple injonction, soit verbale, soit contrainte par les conditions).

[9] En effet, tout se passe comme si l’enseignant incorporait certaines de ses connaissances mathématiques dans les conditions de la résolution, de manière à canaliser la mobilisation des connaissances des élèves.

[10] Ce point de vue n’est pas universellement partagé : dans de très nombreuses interactions sociales actuelles, l’expression « prends tes responsabilités » est synonyme de « je me décharge des conséquences, c’est toi le responsable des éventuels ennuis ».

s'inscrit dans une marge de transaction. Il arrive qu'un élève refuse une responsabilité, bien qu'il dispose des connaissances permettant d'en assumer les conséquences ; il arrive aussi qu'un professeur (ou un parent) charge un élève d'une responsabilité mathématique ou didactique qu'il n'est pourtant pas en mesure de porter sans prendre de risques.

Mes modélisations cherchent à rendre compte des dépendances qui existent entre le niveau de familiarité qu'entretient un élève avec le savoir visé et sa manière de négocier le contrat didactique, autrement dit à rapprocher la manière de connaître un savoir avec les responsabilités didactiques qui sont ou non acceptables de porter relativement à l'usage et à l'étude de ce savoir. Je déclinerais ici des difficultés relativement fréquentes chez les élèves du primaire et du collège, en les plaçant par rapport aux deux modèles que sont, d'une part les 7 niveaux de familiarité et d'autre part les 6 responsabilités didactiques (joints en annexe).

3-1 Collaboration au projet didactique (première responsabilité didactique de l'élève, niveau 2 de familiarité)

Il arrive qu'un élève se contente de résoudre dans l'immédiateté (comme dans un jeu où l'important est de participer et si possible de gagner, sans anticiper à moyen terme d'autres parties). Or le professeur a besoin de recueillir une adhésion de nature didactique. En effet, l'engagement de l'élève dans la seule dimension mathématique ne suffit pas pour négocier une étude : établir « 8 fois 5 » peut-être perçu comme un exercice qui ne constitue pas un événement à retenir (de la même manière que celui qui effectue le produit de 51 par 17 ne cherche pas en général à en conserver longtemps le résultat).

Plus difficile encore pour un professeur de déléguer un apprentissage personnel si l'élève n'envisage de la relation avec son enseignant que la dimension interindividuelle (le contenu mathématique passant au plan secondaire). Les modes d'opposition des élèves sont variés et leurs résistances plus ou moins discrètes. Une réponse à la question posée par l'enseignant peut être fournie par l'élève, mais si elle est établie par son voisin de table ou par un parent, elle ne satisfait qu'en apparence au contrat scolaire. Avec la banalisation des aides qui désinhibent la difficulté, de nouvelles stratégies d'évitement se développent. Par exemple : amadouer les adultes (ou les élèves tuteurs) en les flattant dans leur rôle et négocier une « aide générale » (un discours) pour mieux les détourner d'un objectif spécifique (une situation précise) qui les impliqueraient en tant qu'apprenant.

Il arrive qu'un élève préfère se retrancher dans un rôle de victime vulnérable[11]. S'il devient plus facile d'afficher des troubles d'apprentissage que d'assumer ce qui a été transmis, il est alors en effet plus rentable de renforcer le diagnostic généraliste en minimisant ses petites réussites locales (sur tel ou tel savoir) qui sinon engageraient à reconduire le succès sur ces domaines. Cette forme extrême de négociation à la baisse du contrat didactique se rencontre assez fréquemment dans les dispositifs d'aide (soit à l'extérieur de l'établissement scolaire, soit en classe lors des phases de différenciation).

[11] Actuellement, la victimisation provoque des effets importants dans toutes sortes d'institutions, y compris dans l'univers judiciaire. L'institution scolaire n'est pas épargnée par ce large phénomène social.

Malheureusement la revendication de la victime (ou de sa famille) à l'inaptitude désarme complètement la relation didactique : celui qui est en position de réguler ne peut compter sur aucune coopération didactique de la part de son partenaire (de plus, s'il se laisse passivement porter sur le plan didactique, celui-ci est souvent dans le même temps très actif pour interagir sur d'autres plans).

3-2 Complicité didactique (2ème responsabilité, niveau 3)

Il arrive qu'un élève ne conçoive son rôle que comme devant répondre à des questions non prévisibles, dont seul l'enseignant a le secret. N'anticipant pas le contenu des futures évaluations, il s'y prépare mal.

Pour fabriquer ses tours de main, l'élève gagne à se décentrer de la seule production de réponse pour s'intéresser aux conditions de résolution et reconnaître les situations qui appellent telle ou telle procédure, en particulier les questions-types. Par exemple, pour établir un produit par 5, la parité du multiplicateur renseigne sur la terminaison du résultat, car dans une somme réitérée de 5, il est commode de grouper les termes deux à deux ; 8 fois est le double d'une formule peut-être déjà connue : 4 fois. Si c'est 5 fois 8 qui est demandé, il peut donc être plus commode de penser 8 fois 5. Par contre, en référence à une procédure additive, le choix d'un petit opérateur est généralement préférable (3 fois 7, plutôt que 7 fois 3). Choisir l'ordre des facteurs peut renouveler le questionnement en faisant vivre la propriété de commutativité (c'est une variable didactique qui peut être « sentie » par un élève).

Pour l'enseignant, il est clair que s'il a déjà posé les « mêmes » questions de nombreuses fois dans la classe, c'est un indicateur de priorité pour conduire l'étude personnelle (ces questions sont importantes pour l'institution). C'est par l'intermédiaire de nombreux exercices de même catégorie[12] qu'un élève peut distinguer le variable de l'invariant, sentir des fréquences d'occurrence et esquisser des domaines d'application. Le choix des assortiments de questions[13] est donc pour l'enseignant un levier de dévolution. Lorsque les conditions sont réunies (une familiarité avec le savoir suffisante, un intérêt pour les questions-types et un assortiment qui met en scène ce qui est identifiable par l'élève), une certaine complicité didactique peut alors s'établir entre professeur et élèves.

3-3 « Utiliser seul en présence de » (3ème responsabilité, niveau 4)

Les mathématiques offrent des occasions précoces de vérifier soi-même la validité d'une réponse. Parfois les élèves ignorent ce pouvoir ; certains apprécient vivement qu'on le leur montre, d'autres semblent s'en désintéresser.

---

[12] Dans les manuels actuels, l'éventail des exercices peut être si large, que les élèves ne rencontrent que rarement les questions pourtant considérées comme primordiales. La sélection de ce qui est donné le soir soulève aussi des questions de priorité : par manque de temps, tout ne peut être étudié selon le même régime. Quelques fils rouges sur de moyennes durées peuvent être plus avantageux qu'un émiettement exhaustif au quotidien.

[13] Un *assortiment didactique* est une collection de questions « semblables », réunies sous une même intention didactique, ordonnée en vue d'un effet didactique, et réalisable dans une unité de temps didactique (Esmenjaud-Genestoux, 2000).

Il arrive qu'un élève quémande activement l'approbation de celui qui sait, comme en témoigne cette réaction devant l'attitude de neutralité affichée par un enseignant : « *mais si tu me regardes comme ça, je ne peux pas savoir si j'ai juste !* ». Cette élève, rompue aux dispositifs de soutien[14], s'autorise dans la révolte à apostropher l'adulte pourtant investi du pouvoir institutionnel. Mais elle ne s'aventure pas à contrôler sa réponse par elle-même, comme si elle estimait trop grand le risque de se fourvoyer. Un risque d'ailleurs tout à fait réaliste, car elle se trompe encore souvent dans une vérification (sa familiarité avec les connaissances nécessaires est encore insuffisante pour porter cette responsabilité).

Apprendre à se comporter comme si on était seul, y compris en présence d'autrui est une étape nécessaire au développement de l'autonomie[15]. Une plus grande familiarité avec un répertoire d'action développe localement la confiance en soi. En effet, pouvoir remplacer une résolution par une autre (généralement plus économique), ouvre à un nouveau rapport au savoir : celui de l'usage éclairé. Le gain d'efficacité apporté par la formalisation (l'usage direct du savoir comme d'un outil) se paye d'une perte de signification locale (la compréhension passe alors en arrière plan). L'application d'un théorème amenuise donc momentanément le contrôle de l'acteur sur la situation. Mais s'il dispose en outre dans son propre répertoire des moyens d'étayer ses prises de décision en cas de besoin, il dépend beaucoup moins des aléas d'une résolution.

3-4 Acceptation d'une acculturation (4ème responsabilité, niveau 5)

Les exigences scolaires relatives au calcul ne sont pas toujours perçues dans la société comme légitimes. Pourquoi enseigner encore des pratiques qui peuvent être mécaniquement remplacées ou soulagées ? « *Moi j'arrive à compter très vite sur mes doigts, j'ai pas besoin d'apprendre les tables !* ». Il arrive qu'un élève rechigne à lâcher le confort d'une habitude (égrener rapidement de 5 en 5 en contrôlant des doigts le multiplicateur). Pourquoi l'astreindre à une association directe[16] du nombre 40 aux produits 8 x 5 et 5 x 8 ? La tâche est longue, fastidieuse, peu gratifiante pour le professeur comme pour les élèves. Sans parler du désagrément de se frotter à nouveau au risque d'erreur (prendre ou être pris en défaut, alors qu'il existe déjà un autre moyen commode de se tirer d'affaire).

Pourtant pour se dérouler, l'enseignement a besoin d'estomper les particularités des connaissances locales (les multiples de 5, les multiples de 2, etc.) et les astuces personnelles (« *moi je connais par cœur 4 fois 8 : c'est l'âge de ma mère !* ») pour les

---

[14] Il s'agit d'une élève de CE2, longuement suivie par les maîtres E du RASED.

[15] Winicott (1975), ou Cyrulnick (2006) par exemple, ont étudié les paradoxes de l'accompagnement à l'autonomie.

[16] L'ergonomie des méthodes n'est d'ailleurs pas toujours localement flagrante ; les « premières » tables de 2, 5 et 10 ne sont pas les meilleurs choix didactiques pour mettre en évidence la puissance d'une formulation directe.

remplacer officiellement par un savoir unifié. Un jour dans la classe, la Table de Pythagore devient exigible en tant que référence[17] plus universelle et plus exportable.

Il arrive que ce changement de statut (c'est le savoir qui doit être désormais cité directement) soit interprété à tort par les élèves comme une demande de formulation publique un peu empesée (qui satisferait le professeur), tandis que l'établissement en privé du résultat pourrait demeurer ce qu'il a toujours été (les élèves continueront d'agiter leurs doigts, même si l'idée est intégrée qu'il faut maintenant le faire en secret). Or même pour un théorème aussi rudimentaire qu'un résultat numérique, une mise en mémoire du texte ne suffit pas pour en user en toute indépendance lors d'un raisonnement ardu ou pour exécuter un algorithme complexe. De plus, chaque équivalence doit pouvoir être pensée avec un recul conceptuel suffisant, permettant de décomposer[18] 40 en un produit de 5 par 8 (même si au début du processus, la formule n'a d'abord été perçue qu'en privilégiant une seule direction de lecture).

Il arrive que des réactions de méfiance vis-à-vis de ces nouvelles exigences soient confortées hors de l'école par des déclarations prestigieuses. La psychanalyse défendait ardemment le jeu et la notion de plaisir, les neurosciences provoquent en annonçant que le cerveau humain n'est pas adapté au calcul. La tentation est donc grande de ne s'intéresser que médiocrement aux formes convenues de rédaction, a fortiori si l'on est déjà dépisté comme étant d'intelligence précoce. Pourtant, la communauté savante reconnaît l'intérêt d'une standardisation pour la diffusion des mathématiques[19], elle n'a pas à être confondue avec des manies professorales.

Ce ne sont pas les premières découvertes, mais l'étude approfondie des savoirs qui ouvre la voie de la spéculation intellectuelle : exploration des possibilités de l'outil, connaissance fine des frontières de validité et des cas limites (par exemple les facteurs un ou zéro). Cette étude n'a pas la même visée pratique et individuelle que l'apprentissage des connaissances nécessaires à l'action. Les savoirs ont aussi leur utilité sociale : ils sont les instruments culturels d'une plus large communication, d'une acculturation qui passe par l'acceptation individuelle d'un certain standard. Des méthodes déclarées comme expertes au sein d'un groupe rendent leur utilisation plus anonyme, ce qui facilite qu'un contrôle collectif s'exerce sur des missions endossables par des praticiens interchangeables.

---

[17] Cette Table s'insère dans un vaste répertoire de savoirs : l'addition réitérée et le produit cartésien renvoient à une même opération qui s'appelle la multiplication ; le « fois » qui distingue multiplicateur et multiplicande peut se remplacer avantageusement par un nouveau symbole et une symétrie de facteurs garantie par la commutativité, etc.

[18] Un autre choix didactique consiste à accroître au contraire le nombre de « formules à mémoriser » de manière à les simplifier (un seul sens de lecture) : tables de soustraction, identités pour développer ou pour factoriser, formules pour déterminer la vitesse ou la durée ou la distance parcourue, etc. Ce choix de la taille des répertoires de théorèmes dépend aussi du choix des méthodes de résolution qui seront enseignées (application arithmétique ou équation algébrique, algorithme de multiplication usuel ou à la russe, etc.).

[19] Nordon (1993), pp 60-62.

3-5 Conquête d'une expertise (5ème responsabilité, niveau 6)

L'érudit préfère parfois demeurer dans le cercle moins contraignant de l'amateurisme. La compétition ne séduit pas tout le monde. La promesse d'un plus grand pouvoir peut effrayer, jusqu'à encourager la fuite des responsabilités. Il arrive qu'un élève, tout en reconnaissant l'intérêt d'un formalisme culturellement éprouvé, ne s'astreigne pas de lui-même à la performance. Confortablement installé dans le giron didactique, il mise alors sur une bienveillance éternelle pour ses hésitations.

3-6 Entretien des connaissances (6ème responsabilité, niveau 7)

La quasi-totalité des élèves sortent de la scolarité obligatoire en sachant manier la formule 2 x 5 = 10 (même s'il ne maîtrisent pas tout, et de loin, des significations de la multiplication). Mais un très grand nombre d'adultes instruits et parfaitement intégrés socialement hésitent pour énoncer le produit de 7 par 8. Pour l'enseignant comme pour l'élève, la présentation en tables est un instrument trompeur, car elle uniformise le contenu (tous les produits ne s'apprennent pourtant pas au même rythme) et dilue les questions sur un grand nombre de résultats[20]. S'émanciper temporairement de l'organisation canonique permet de focaliser plus longuement les efforts sur quelques cibles à conquérir. C'est ainsi que l'enseignant peut contribuer à soulager l'étude personnelle (il partage encore avec les élèves des responsabilités didactiques). Un accompagnement spécifique, sur le long terme, sollicite régulièrement et sans relâche ce qui est le plus ardu, jusqu'à ce qu'il devienne une évidence pour les élèves.

4 LES DEVOIRS DU SOIR : DES ENJEUX D'AFFRANCHISSEMENT DIDACTIQUE

Ce que l'élève réalise ici et maintenant trouve sa finalité dans la prévision d'autres résolutions futures et potentielles qui s'effectueront en dehors de toute protection didactique. Le travail personnel est un bon instrument pour émanciper progressivement en déclinant différentes formes de contrats, encore faut-il harmoniser le contenu du devoir prescrit avec les délégations de responsabilités et le niveau de familiarité entretenu par les élèves.

Le rituel scolaire du travail du soir comporte aussi ses enjeux didactiques. Il ne s'agit pas de prolonger simplement ce qui s'est déroulé en classe sous la conduite de

---

[20] Le chapitre 7 de ma thèse (Esmenjaud-Genestoux, 2000) détaille ces différents aspects relatifs à la taille du répertoire qui joue un rôle très important dans les négociations du travail personnel. La réorganisation et la compilation apportent une aide en fin de processus, lorsque la quasi-totalité du répertoire est intégré. Dresser un inventaire de ce qui sera su un jour, présente aussi un encouragement : l'étude à venir semble fructueuse. Par contre, durant la période entre les niveaux 2 et 5 de familiarité, c'est une réduction du répertoire qui soulage l'apprenant. Dans un autre domaine, certains professeurs de collège en vue de réduire le temps de copie, fournissent aux élèves de 5ème des polycopiés écrit serrés, pour qu'ils disposent d'un coup de la liste exhaustive des propriétés des quadrilatères qui deviendront exigibles. L'effet d'accumulation est alors rédhibitoire pour les collégiens qui n'ont qu'une faible autonomie d'étude personnelle : ils se démobilisent par découragement et n'apprennent finalement aucune propriété (même ceux qui d'ordinaire placent tous leurs efforts dans la mémorisation).

l'enseignant[21]. L'étude personnelle rend compte d'une dimension auto-didactique qui nécessite des prises de responsabilités[22].

Pour s'approprier ce qui lui a été enseigné, l'élève doit pouvoir mobiliser ses connaissances hors du contrôle direct de l'enseignant. Comme il n'est pas réaliste d'espérer une autonomie immédiate sur tout support, et pour maintenir une certaine équité sociale, les instructions officielles ont restreint ce qui pouvait être prescrit aux jeunes écoliers du primaire. Depuis 1956, la généralisation des études surveillées, puis de dispositifs de plus en plus diversifiés a créé des écarts considérables entre les directives et les pratiques effectives ; écarts bien délicats à négocier avec les familles, d'autant que les justifications fournies de part et d'autre sont souvent incompatibles.

Le plaisir est fréquemment présenté comme adjuvant de l'apprentissage[23]. Il arrive que les « activités de découverte» intégrées dans les manuels en début de chapitre soient données aux collégiens au titre de préparation du cours, pour économiser le temps de face à face pédagogique et sous couvert (slogan bien polysémique) d'un « travail de recherche ». L'équilibre est délicat à trouver entre ce qui n'est faisable qu'avec l'intervention d'un professionnel et ce qui va faire progresser l'autonomie de l'élève. Les propriétés didactiques du milieu qui transite entre la classe et son domicile jouent alors un rôle essentiel.

Datant de l'époque où le calcul humain était incontournable, certains exercices d'entraînement recèlent des richesses didactiques que les pratiques enseignantes ont perdues sous l'effet de phénomènes multiples (Esmenjaud-Genestoux, 2000). Or, sur le domaine restreint du répertoire multiplicatif, une culture didactique partagée[24] avec les élèves et les accompagnateurs domestiques pourrait à nouveau se déployer : indépendance de chaque produit élémentaire, pratique de l'étayage mathématique, supports plus adaptés que des tables (un matériel auto-correctif permettant des tris selon plusieurs critères et des variations de taille et donc de durée), etc.

En reprenant une à une les responsabilités didactiques qu'un étudiant aguerri devra un jour porter seul, on peut lister plusieurs enjeux de l'étude personnelle (à chaque type d'enjeu correspond un type de contrat et une adaptation de milieu ; tous les enjeux ne sont pas d'emblée cumulables).

---

[21] Il s'agit encore moins de le remplacer, en demandant aux élèves de terminer ailleurs ce qui n'a pas pu être fait en classe : les devoirs deviendrait alors d'autant plus lourds que les élèves sont lents ou faibles et la professionnalité du rôle du professeur n'apparaîtrait plus aux yeux des protagonistes.

[22] Beaucoup d'élèves se défaussent de leurs obligations d'étude dès lors qu'ils peuvent rapporter en classe la preuve qu'ils ont « fait » l'exercice prescrit (éventuellement, « fait faire » par autrui), comme si l'enseignant n'attendait qu'une résolution de plus.

[23] Le ton des négociations est facilement enjoué, mais les conditions effectives sont plus rarement à la hauteur de ce qui était promis (Esmenjaud-Genestoux, 2000).

[24] (Esmenjaud-Genestoux, 2006).

4-1 Essayer de se débrouiller seul (1ère responsabilité didactique)

Avoir tenté une réponse, ce n'est pas forcément « avoir juste ». Parents et enseignants rivalisent parfois pour traquer la moindre erreur dans le cahier du soir, quitte à perdre l'authenticité de l'initiative et à masquer les difficultés réelles d'apprentissage.

4-2 Devenir capable de (2ème responsabilité)

L'objectif des devoirs n'est pas la réalisation supplémentaire de tel ou tel exercice, mais l'acquisition des connaissances qui permettront de résoudre désormais toute une catégorie de questions. L'élève qui fournit une réponse se sent peut-être quitte, mais l'essentiel est ailleurs (par exemple une résolution erronée pourra être plus profitable qu'une réponse juste lorsque la correction amène une prise de conscience).

L'élève qui étudie seul transporte avec lui des connaissances didactiques (d'autres connaissances didactiques plus sophistiquées seront cristallisées dans le milieu) : il a d'abord besoin de se montrer bienveillant vis-à-vis de ses premières tentatives, puis sa curiosité intellectuelle se déplacera vers l'appréciation des assortiments qui lui sont proposés, vers l'identification de « bruits » dissonants et de questions « semblables » qui sont les représentants d'une catégorie de questions.

4-3 Se sentir sûr (3ème responsabilité)

A l'occasion d'abord de la correction, puis au cours de son travail personnel, les rétroactions négatives sont utilisées pour, progressivement, devenir plus exigeant avec soi-même. Une certaine mémoire didactique renseigne celui qui étudie : il identifie plusieurs types d'erreurs, il traque celles qu'il produit encore trop fréquemment bien qu'elles soient significatives de ce qui est à comprendre. Il est à remarquer que disposer de ces critères d'appréciation des réponses fabrique plus sûrement la confiance en soi qu'une suite de rétroactions positives[25].

4-4 Fournir la réponse standard (4ème responsabilité)

Il arrive un moment où l'institution scolaire ne se contente plus d'un résultat juste : la réponse doit satisfaire aux canons officiels. L'entraînement personnel inclut alors la capacité à répondre dans les formes convenues.

4-5 Organiser son propre entraînement (5ème responsabilité)

Le travail individuel présente l'avantage de s'adapter au rythme de chacun. Sous une conduite responsable, l'étude peut se prolonger si besoin au-delà de la prescription du professeur (ou la réduire dans certains cas). Encore faut-il disposer de critères d'arrêt

---

[25] Il y aurait beaucoup à dire sur le rôle que l'on fait jouer aux réussites chez les élèves stigmatisés comme étant en grande difficulté. Une méconnaissance des conditions locales (des généralisations) et l'absence de coordination entre des savoirs psychologiques et didactiques peuvent conduire, même avec la meilleure compassion du monde, à des catastrophes, car la soi-disant réparation du problème ne fait souvent qu'entretenir ce problème.

et distinguer des cibles particulières : ces connaissances font partie intégrante du répertoire de résolution.

4-6 Veiller à l'état de fonctionnement (6ème responsabilité)

Bien qu'un objectif d'apprentissage à court terme soit officiellement attaché au devoir (le chapitre en cours), chaque exercice sollicite en réalité de nombreuses connaissances plus ou moins anciennes. Maintenir une fiabilité à long terme devient alors un enjeu personnel. A l'occasion d'une hésitation, un travail ciblé de révision peut se décider dans l'intimité de l'étude.

5 CONCLUSION

Dans de nombreux cas, les difficultés des enseignants et des élèves peuvent s'expliquer comme un décalage de décisions. Des décisions qui isolément sont souvent légitimes, mais qui se révèlent inadaptées aux circonstances du moment. N'est-il pas paradoxal de reprocher à un élève d'être « trop scolaire » ? L'expression désigne celui qui applique stricto sensu les consignes explicites, mais qui semble ne jamais devoir s'affranchir de sa tutelle. En s'accrochant à un « métier d'élève » figé, il conserve des attitudes qui jusqu'alors avaient fait leur preuves, alors qu'il serait temps de porter de nouvelles responsabilités didactiques (qui étaient au début du processus à la seule charge du professeur).

L'idée que l'aide aux élèves faibles et que l'organisation de l'entraînement ou du travail à la maison nécessitent moins de compétences didactiques que l'élaboration des leçons est malheureusement répandue. La mise en place d'une aide à l'étude ne rencontre pas seulement la question vive des effectifs (il n'est d'ailleurs pas si aisé d'aider un seul élève à la fois), même s'il reste vrai qu'un trop grand nombre d'élèves avec des difficultés inévitablement variées complique (voire compromet) la réalisation. Dans « l'institution » d'un soutien scolaire, l'ordre des priorités didactiques est modifié par rapport à ce qui est habituel dans le fonctionnement principal (par exemple l'erreur change totalement de statut ; une aide ponctuelle à la réponse juste ne peut se transformer en moyen d'aider l'apprentissage ; etc.). Aussi, généraliser les dispositifs de soutien sans qu'une réflexion ne soit menée sur la nature didactique de ces interventions, risque non seulement de décevoir, mais aussi de bouleverser l'équilibre précaire des négociations permettant l'enseignement ordinaire.

Bibliographie :

Brousseau G. (1985), *La multiplication au CE1*, IREM de Bordeaux.

Cyrulnick B. (2006), *De chair et d'âme*, Odile Jacob.

Esmenjaud-Genestoux F. (2000), *Fonctionnement didactique du milieu culturel et familial dans la régulation des apprentissages scolaires en mathématiques*, thèse, Univ Bordeaux 1.

Esmenjaud-Genestoux F.(2001), Médiation entre la classe et le travail à la maison : le rôle des assortiments , in *Actes du Séminaire national de Didactique des Mathématiques*, DIDIREM.

Esmenjaud-Genestoux F. (2004), « 7 fois 8 ? $(a + b)^2$? La mémorisation des réponses relève-t-elle de la responsabilité des professeurs ? », *Le bulletin vert*, n° 454, sept-oct 2004, APMEP.

Esmenjaud-Genestoux F. (2005), "Le travail personnel au collège ou le partage des responsabilités didactiques – partie 1 : La partie " privée " du travail des élèves et de l'accompagnement aux devoirs", *Petit x*, n°69.

Esmenjaud-Genestoux F. (2006), "Le travail personnel au collège ou le partage des responsabilités didactiques – partie 2 : le professeur accompagne le travail personnel des élèves", *Petit x*, n°70.

Esmenjaud-Genestoux F. (2008), « Les responsabilités de l'élève et sa conquête de l'autonomie dans l'étude des mathématiques. Approche didactique d'un cas de rééducation mathématiques », *Les Sciences de l'éducation : Pour l'Ere Nouvelle*, vol. 41, n°1, CERSE-université de Caen.

Nordon D. (1993), *Les mathématiques pures n'existent* pas, Actes Sud.

Winnicott D.W. (1975), *Jeu et réalité*, Gallimard.

Annexes

Coopération entre professeur et élève(s) pour résoudre une situation

6 responsabilités relatives au contrôle du Milieu

1 Déterminer/reconnaître un « contexte » mathématique dans le milieu de l'interaction (« mathématiser » une situation).

2 Adapter sa décision à ces conditions : choisir dans son répertoire (parmi plusieurs possibles) une « réponse » à la « question » posée (une vacuité dans le milieu de E).

3 Contrôler la validité (pertinence, adéquation, degré de véracité) de sa décision à l'aide d'un raisonnement, d'une technique, etc.

4 Algorithmiser la production de ce type de décisions (futures, potentielles) à l'aide d'un théorème, qui étiquette en quelques sortes le triplet (conditions, décision, contrôles).

5 Contrôler l'emploi de ce savoir (en utilisant d'autres savoirs).

6 Maintenir en état de fonctionnement les moyens de convertir ce savoir en moyens de décisions dans un répertoire (qui rapproche les connaissances et savoirs entretenant entre eux des filiations ou liens logiques) qui permet de résoudre les mêmes types de problèmes.

6 responsabilités didactiques à se répartir entre professeur et élève

R1 : l'intention de modifier un/son propre répertoire

R2 : l'intérêt pour les moyens de l'étude

R3 : le contrôle de ses décisions

R4 : l'acculturation

R5 : l'usage personnel des savoirs

R6 : l'entretien du répertoire

7 niveaux de familiarité avec un savoir mathématique

1 niveau de l'**exécution**

2 niveau de la **construction**

3 niveau de la **production**

4 niveau de la **production auto-contrôlée**

5 niveau de l'**aptitude**

6 niveau de l'**expertise**

7 niveau de la **maîtrise**

Un savoir scolaire apparaît comme :
- la solution d'un exercice au niveau 2 ;
- une connaissance locale au niveau 3 ;
- un savoir à étudier au niveau 4 ;
- un savoir exigible au niveau 5 ;
- un savoir utilisable au niveau 6.

Questionnaire

Quel est l'intérêt de **donner du sens** *à ce qu'on utilise ? de disposer d'un* **algorithme** *?*

Etre en mesure d'utiliser « dans la vie quotidienne, dans sa vie privée comme dans son travail » les produits élémentaires ;
« mémoriser les tables de multiplication » ;
« être capables de restituer et d'utiliser les tables de multiplication »
des différences de formulation significatives ?

Concernant l'apprentissage du répertoire multiplicatif :
- les difficultés rencontrées par les enseignants sont-elles de même nature pour automatiser et pour donner du sens ?
- quelles difficultés côté élèves ?
- contre quelles réactions extérieures à l'école se heurte l'enseignement ?
- qu'est ce qui peut être ou non attendu de la part des familles ?
- qu'est ce qui peut être attendu de la part d'un élève « seul » (en primaire, au collège) ?

Réactions en vrac :
l'expression « table(s) de multiplication » :
les objets « tables de multiplication », « Table de Pythagore » et autres :
l'usage des doigts :

INFLUENCE DE LA NATURE DE LA SITUATION SUR L'APPARITION, LE TRAITEMENT ET L'USAGE PAR L'ENSEIGNANT DES RAISONNEMENTS PRODUITS PAR LES ELEVES

ATELIER PROPOSE PAR

P. GIBEL, IUFM d'Aquitaine, LACES équipe DAESL

1. INTRODUCTION

Cet atelier a été proposé suite à une recherche sur les fonctions des différentes formes de raisonnements dans la relation didactique, en mathématiques, à l'école primaire.
Nous commencerons par préciser ce que nous entendons par le terme « raisonnement » (§2). Bien que très employé par les enseignants de toutes les disciplines et par les chercheurs, il reçoit des acceptions très variées. De sorte que nous avons préféré définir directement notre objet et notre méthode d'étude pour classer les différentes formes de « raisonnements » qui nous intéressent. D'autant plus que nous définissons et classons les raisonnements suivant *leur fonction* dans la relation didactique, ce qui n'a pas été fait systématiquement jusqu'à présent. Nous définirons dans le (§3) la notion de situation-problème et nous justifierons le contexte et les raisons de cette étude.
Nous nous sommes limités dans cet atelier à l'analyse clinique d'une partie d'une leçon basée sur la mise en œuvre d'une situation-problème en arithmétique, que nous exposerons (§4) et dont nous décrirons le déroulement d'ensemble. Dans le (§5) nous analyserons les formes des raisonnements qui apparaissent lors des phases de recherche et de mise en commun. Nous étudierons alors (§6) les questions suivantes : la situation-problème proposée a-t-elle privilégié la production de raisonnements chez les élèves ? Quelle est la valeur de ces raisonnements ? Sont-ils associés à des apprentissages et à des acquisitions utiles ? Quels sont les choix didactiques de l'enseignant qui déterminent très fortement la présence, le sens et les possibilités réelles de traitements et d'utilisations des raisonnements des élèves ?

2. LES RAISONNEMENTS EN CLASSE

2. 1. La détermination d'un raisonnement produit par un sujet : notion de « situation »

Le terme « raisonnement » tend à couvrir un champ beaucoup plus vaste que celui des raisonnements formels, logiques ou mathématiques. Pour cette raison nous avons pris comme définition de base celle proposée par P. Oléron :

> « Un raisonnement est un enchaînement, une combinaison ou une confrontation d'énoncés ou de représentations respectant des contraintes susceptibles d'être explicitées, et conduits en fonction d'un but ». (Le raisonnement, 1977, p. 9)

Par conséquent, pour affirmer que tel observable est l'indice d'un raisonnement dont les éléments sont en (grande) partie implicites, il est nécessaire de dépasser la définition formelle, pour examiner les conditions dans lesquelles le « raisonnement supposé » peut être accepté comme « effectif ».
Souvent le professeur accepte des indices et les interprète davantage en fonction de leur utilité pour le déroulement de la leçon que de leur authenticité du point de vue du projet initial de l'élève qui en est l'auteur. L'observateur doit donc suivre une autre voie. Il convient qu'il montre que tel raisonnement complet dont il n'aperçoit qu'une partie ou que des indices est bien celui qu'il faut attribuer à son auteur.

Pour cela il convient de montrer que le supposé raisonnement
- pourrait être énoncé par le sujet ou, qu'au moins, la règle est connue de lui, le fait A est perçu par lui de telle ou telle façon ;
- est utile (il réduit une incertitude, par exemple, s'il y a doute car une autre règle aurait pu être appliquée) ; le lien ne doit pas être l'effet d'une cause, par un mécanisme qui échapperait au jugement et à la volonté du sujet ;
- est motivé par un avantage qu'il procure au sujet ; il est l'instrument d'une modification de son environnement qui lui parait favorable ;
- est motivé par des raisons « objectives », propres : arguments de pertinence, de cohérence, d'adéquation, d'adaptation, qui justifient ce raisonnement là (et pas un autre) par opposition à l'idonéité (la conformité aux attentes du professeur).

Parmi toutes les conditions qui accompagnent la production d'un supposé raisonnement, quelques unes seulement – le moins possible - peuvent servir à le déterminer et à le justifier. Ces conditions ne sont pas quelconques. Elles forment un ensemble cohérent que nous appelons « situation ». La situation est une partie seulement du « contexte, ou de l'environnement de l'action de l'élève ou du professeur et elle comprend (mais pas seulement) une sorte de question à laquelle le raisonnement de l'élève est une réponse. Elle n'est réduite ni à l'action du sujet, ni à la connaissance qui la motive mais elle les met en relation rationnelle. Une situation peut expliquer pourquoi un raisonnement faux a été produit par d'autres causes qu'une erreur ou une insuffisance du sujet.

Ce point de vue est un peu différent de celui qui prévaut légitimement chez les professeurs où les seuls raisonnements vraiment utilisables sont les raisonnements entièrement corrects. Un raisonnement faux n'est qu'assez exceptionnellement un objet d'étude.

La théorie des situations a pour objet l'étude et la modélisation des situations ainsi définies. Elle est un instrument pour rechercher les explications minimales des faits observés, qui sont compatibles avec les faits connus.

2.2. Les raisonnements effectifs

Les raisonnements que nous étudierons seront essentiellement modélisables par des inférences c'est-à-dire des relations de la forme « Si la condition A est réalisée, alors la condition B l'est (ou le sera) aussi »[1]. Mais cette définition doit être complétée car nous voulons pouvoir
- distinguer les raisonnements effectifs des citations,
- intégrer des raisonnements qui se manifestent par des activités aussi bien que par des déclarations,
- traiter les productions métamathématiques ou didactiques aussi bien que mathématiques,
- distinguer le sens d'un même raisonnement selon qu'il est produit pas un élève ou par un enseignant.

a) Un *raisonnement* est donc une relation R entre deux éléments A et B tel que :
- A désigne une condition ou un fait observé, contingent ;
- B est une conséquence ou une décision ou un fait prévu ;
- R est une relation, une règle, plus généralement une connaissance empruntée à un répertoire considéré comme connu, accepté. La relation R conduit l'actant, dans la circonstance A, à prendre la décision B ou à prévoir le fait B ou à énoncer que le fait B est vrai.

[1] Bien que très utilisé dans le discours mathématique, le mot n'appartient ni à un langage mathématique, ni à la métamathématique proprement dite. En théorie des situations, la définition précise la fonction de ce type d'inférences suivant la « logique effective » initiée par P. Lorenzen (Metamathematik Institut AG Manheim 1962)

b) Un *raisonnement effectif* comprend de plus :

- un agent E (élève ou professeur) qui utilise la relation R,
- un projet déterminé par une situation 𝕊 dont la réalisation exige l'usage de cette relation.

On peut dire que pour réaliser le projet déterminé par la situation 𝕊, le sujet utilise la relation R qui permet d'inférer B de la condition A. Ce projet peut être convenu et explicité par 'agent ou il peut lui être prêté par l'observateur à partir d'indices.

La définition devra à son tour être complétée pour permettre de distinguer les raisons de l'élève, celles du professeur et celles de l'observateur, et si on veut discuter formellement les modalités de l'analyse effectuée.

2.3. Première classification d'après la fonction et le type de situation

En conclusion du paragraphe précédent, un raisonnement est identifié par sa fonction dans une situation, par le rôle qu'il y joue. Cependant un raisonnement peut avoir des fonctions différentes, décider, informer, convaincre, expliquer. Elles sont différenciées par des modèles de situations mathématiques (d'action, de formulation, de preuve[2]…) généraux mais différents.

D'après ce qui précède, nous nous attendons à distinguer des formes – que nous appelons niveaux - plus ou moins dégénérées d'inférences, adaptées aux différents types de situations :

- raisonnements formels complets comportant une suite d'inférences correctement articulées et implicitement ou explicitement référées à la situation ou à un des répertoires admis par la classe (valides ou non) ; ce type de manifestation est caractéristique des situations de validation (<u>niveau 3 : N3</u>) ;
- raisonnements formellement incomplets, mais dont les parties manquantes peuvent être raisonnablement imputées à l'actant comme implicites, les conditions effectives ne justifiant pas la formulation complète ; ce type de raisonnement se manifeste principalement dans les situations de communication (<u>niveau 2 : N2</u>) ;
- raisonnements n'apparaissant pas formellement, mais qui peuvent être inférés à partir des décisions et des actions du sujet par l'observateur (ou par le professeur) comme modèles implicites d'action (théorèmes en actes) (<u>niveau 1 : N1</u>).

2. 4. Les fonctions didactiques des raisonnements selon les types de situations

De plus, à un moment donné du déroulement d'une leçon, on peut identifier, suivant les intentions des participants, un très grand nombre de situations plus ou moins « emboîtées ». Celles qui nous intéressent plus précisément sont celles qui émergent et qui influencent *le processus collectif* commun dont le professeur veut faire usage.

Le raisonnement effectif de l'élève dans la résolution d'un problème classique

Mais le raisonnement effectivement utilisé par l'élève est le résultat d'une activité mentale différente de la solution standard, et il répond à une situation S dont l'énoncé du problème n'est qu'une composante. L'élève agit pour trouver la solution demandée mais n'a pas à rendre compte de ses tentatives. Donc l'observateur, tout comme le professeur, doit interpréter ce qu'ont produit les élèves dans un système plus large et plus complexe, s'il veut avoir une chance d'interroger ou d'expliquer pourquoi ils ont produit tel ou tel raisonnement, qu'il soit correct et adéquat ou non. Aussi, pour analyser avec eux leurs productions, le professeur doit considérer, au moins implicitement, qu'ils sont confrontés à des conditions réelles plus ouvertes que le texte du problème (i. e. une Situation d'action dont le milieu est la situation objective). C'est à ce niveau qu'appartiennent les justifications tactiques, stratégiques, ou

[2] Brousseau 1997 Theory of Didactical Situations in Mathematics, p. 8 – 18

ergonomiques à propos du bien fondé, de l'adéquation, du choix des inférences ou de leur enchaînement qui ne figurent pas dans la solution standard.
On peut distinguer plusieurs cas suivant les possibilités effectives qui s'offrent à l'enseignant de justifier auprès de ses élèves la mise en œuvre de la solution standard (et de discréditer les solutions erronées).
Dans le premier cas, le professeur peut effectivement *justifier* la construction de la solution du problème par

- la mise en œuvre des connaissances acquises par les élèves (enseignées et supposées acquises),
- et par la considération des informations contenues dans la situation objective.

Dans le deuxième cas, il lui faut faire appel à un raisonnement original, mais logiquement réductible aux données et aux connaissances des élèves comme le cas précédent. Il a fait, volontairement ou non, un pari (gagné avec certains, perdus avec d'autres) sur leurs capacités heuristiques.
Dans le troisième cas, la solution fait appel à des conditions qui ne figuraient pas dans les connaissances acquises et qui n'étaient pas logiquement déductibles des données. Ce cas ne se produit guère avec les problèmes classiques, mais il peut survenir dans des situations « ouvertes ». La solution standard n'est pas constructible par les élèves seuls et le professeur doit à un moment ou à un autre intervenir pour la faire apparaître. Mais de plus, le professeur ne peut pas la faire apparaître comme une conséquence « raisonnée » de l'articulation des données du problème basée sur les connaissances (supposées) des élèves.
Dans les deux premiers cas, les conditions de la « situation objective » suffisent à expliquer et justifier chacune des productions, le projet correspondant peut alors être communiqué à l'ensemble des élèves. Le raisonnement est produit par l'élève comme une action « raisonnée » à partir des conditions qui définissent la situation objective à laquelle il est confronté[3]. Le raisonnement apparaît comme une *« raison de savoir » :* les raisonnements produits permettent de justifier la validité des connaissances par leurs rapports logiques avec d'autres, autrement dit par des raisons « internes » au savoir.
Dans le troisième cas, l'élève ne peut « admettre » la solution que sur la foi de l'autorité du professeur et en tout cas il ne peut pas y avoir d'apprentissage en situation autonome.

Le raisonnement comme cause et moyen d'apprentissage autonome,

Dans les deux premiers cas, le raisonnement peut être produit par les élèves, pour les besoins de la résolution, sans intervention, ni recours à l'enseignant :

- comme un moyen pour un ou plusieurs élèves d'établir leurs décisions dans des situations dites[4] « situations d'action » autonomes,
- comme un moyen d'appui un peu formel, pour préciser une information dans une simple communication,
- comme moyen de convaincre un ou des condisciples de la validité d'une déclaration, plus généralement pour justifier la validité d'une déclaration.

L'apprentissage d'un nouveau raisonnement est le résultat de sa promotion du statut de moyen particulier au problème donné à celui de moyen « universel » pour résoudre une famille de nouveaux problèmes et de son intégration dans le répertoire du sujet. En situation autonome, il s'agit d'une induction, mais elle est appuyée par une chaîne explicitable d'inférences.

[3] Le sujet (e) par l'usage de la règle R justifie que dans les conditions A, la conclusion ou la décision B s'impose à lui pour satisfaire la situation $\mathbb{S}$.
[4] en Théorie des Situations didactiques en Mathématiques

Dans le troisième cas, l'apprentissage autonome ne peut pas étayer cette intégration. Elle ne peut être que le résultat d'un enseignement.

3. LES SITUATIONS-PROBLEMES

Le développement des mathématiques et de leur enseignement a produit un nombre incalculable de problèmes propres à solliciter toutes sortes de formes de raisonnements. Mais l'enseignement direct des solutions et plus tard des méthodes de résolutions (*problem solving method*) tend à refermer ce que la notion même de problème tente d'ouvrir. L'ingénierie didactique (notamment celle issue de la TSDM) a produit de nombreuses situations complexes spécifiques des connaissances à enseigner en définissant les conditions propres à maintenir l'ouverture (l'incertitude nécessaire au raisonnement) du côté des élèves, tout en étant finalement assez certaines pour le professeur. Elles contiennent un ou plusieurs problèmes classiques mais les mettent en scène de façon à mobiliser d'autres causes et raisons de résolution et d'apprentissage que la seule validité mathématique. D'autres idées sont apparues allant dans le même sens : a) proposer des problèmes ouverts (dont le professeur ignore la solution) b) produire des situations à partir des problèmes classiques, à l'aide de dispositifs automatiques : habillages divers (*words problems*), mises en scène (*story problems*), évocations d'un environnement (*embeded context problems*), données absentes ou surabondantes, suppression des questions ou questions « absurdes », mise en débat des résolutions, mise en groupes des élèves… En même temps est apparu sous le nom de *« situations-problèmes »* une activité didactique globale dans laquelle les phases didactiques et les phases d'activité et d'apprentissage autonome ou quasi autonome s'entrelacent. Ce terme peut englober tous les autres. Mais il tend à diluer les possibilités de contrôler les vertus didactiques de chacune des phases. Une situation-problème peut ménager dans ses diverses étapes, des situations d'apprentissage autonome - ou supposées telles - nombreuses et inattendues. Mais le bon déroulement de ces phases d'apprentissage apparemment autonome dépend en principe des qualités réelles de la situation laissée aux élèves.
Nous cherchons à savoir dans quelle mesure des situations qui théoriquement ne peuvent pas être dévolues permettent néanmoins la production de raisonnements par les élèves. Les situations problèmes offrent des conditions de ce type.

3.1. Présentation des situations-problèmes

3.1.1. Origine

L'usage des situations problèmes, c'est-à-dire des problèmes ouverts s'est fortement répandu, en France, ces dernières années dans les classes de l'école primaire. Les raisons avancées sont bien connues :

- offrir aux élèves des « modèles » de situations de recherche ou de fonctionnement naturel des connaissances,
- stimuler le travail autonome, améliorer la motivation des élèves
- lutter contre l'apprentissage formel d'algorithmes appropriés à un champ limité d'exercices convenus, faire raisonner au lieu de simplement calculer.

L'utilisation des situations problèmes est susceptible de créer des conditions favorables à diverses sortes d'activités mathématiques qui paraissent difficiles à obtenir dans les situations classiques : poser des questions, rechercher des informations, en vérifier la pertinence et la plausibilité, organiser une suite d'activités…
Le problème classique et sa solution sont ainsi enchâssés dans un « contexte » en relation complexe avec la connaissance, objet de l'enseignement.
Les conditions effectives créées dans les situations-problèmes peuvent être très diverses : interactions autonomes avec un milieu matériel (par ex. figures géométriques) ou des

systèmes (par ex. informatique), interactions autonomes avec d'autres élèves (en groupes, petits ou grands), interactions didactiques avec le professeur…
Une situation-problème est un conglomérat de conditions décomposables en éléments plus simples qui correspondent aux divers types proposés dans la théorie des situations : situations d'*actions*, de *communication*, de *validation*, d'*institutionnalisation* ou de *dévolution*. Mais ces situations composantes peuvent apparaître de façon inopinée, sur une initiative inattendue d'un élève ou du professeur. Ce caractère potentiellement erratique des situations-problèmes contribue à donner au professeur une impression de grande liberté, de spontanéité, de naturel… Cette impression n'est probablement pas étrangère au succès de ces méthodes. Le savoir apparaît d'une façon qui ne semble pas intentionnelle, pas préparée…

3.1.3. Caractères, conditions, résultats.
Les conditions d'utilisation de ces situations problèmes sont très souples. Elles permettent une large gamme de choix didactiques qui stimulent aussi les professeurs, entre la dévolution radicale, la recherche dirigée et l'exposé magistral d'une maïeutique imaginaire.

3.1.4. Les raisons de la présente étude
En revanche on peut s'interroger sur les résultats de l'usage des situations-problèmes. Malgré la variété des méthodes didactiques qui peuvent accompagner cet usage, y a-t-il des caractères communs ? Quelle est l'activité réelle des élèves ? Quels bénéfices en tirent les élèves et les professeurs ? De quels outils dispose l'enseignant pour évaluer les acquis de l'élève ? Quels inconvénients ou quels risques présente cet usage ?
On peut en particulier s'interroger sur les avantages annoncés. Y a-t-il une augmentation qualitative et quantitative des raisonnements produits ?

3.2 Le contexte de la leçon observée
3.2.1. Le professeur, les élèves, et la formation des professeurs
L'enseignant a élaboré et proposé à ses élèves cet énoncé pour montrer aux enseignants en formation :
1) la richesse, l'originalité et la variété des raisonnements produits par les élèves par confrontation à la situation-problème ; il souhaite ainsi mettre en évidence les capacités réelles de ses élèves à produire des raisonnements dans des situations nouvelles ;
2) les capacités des élèves à formuler et à expliciter leurs raisonnements lorsqu'ils viennent présenter leur production lors de la phase de mise en commun ;
3) les arguments et les raisonnements logiques qu'il utilise afin de traiter les raisonnements des élèves ;
4) les moyens qu'il met en œuvre pour faire en sorte que les élèves réagissent aux raisonnements présentés par leurs camarades, et débattent de la validité et de la pertinence des raisonnements qui sous-tendent les productions.
Son objectif est donc de faire prendre conscience aux professeurs stagiaires de l'intérêt des situations-problèmes pour l'apprentissage et plus précisément l'usage du raisonnement.

3.2.2 Présentation – et défense obligatoire - des diverses stratégies didactiques

Cet enseignant a coutume de faire dévolution aux élèves de situations d'action, basées sur des ingénieries préalablement expérimentées, ayant fait l'objet de publications à destination des enseignants. Il justifie le choix de ce type de situation par le fait qu'elles permettent aux élèves :

- d'élaborer une ou plusieurs procédures, basées sur leur répertoire de connaissances,
- d'éprouver leur(s) procédure(s),
- de prendre conscience des décisions qui sous-tendent leur raisonnement.

En effet ces situations se caractérisent ainsi :

1. l'élève dispose du répertoire nécessaire pour concevoir les stratégies de base,
2. les connaissances nécessaires pour élaborer les stratégies de résolution ne sont pas trop éloignées du répertoire des élèves,
3. l'élève peut obtenir en réponse à son action les informations nécessaires à la résolution du problème,
4. l'élève peut déterminer par lui-même si le résultat obtenu est correct ou non,
5. l'élève peut faire plusieurs tentatives.

La phase de mise en commun des procédures permet alors aux élèves de revenir sur leurs procédures et d'analyser les décisions qui sous-tendent leur raisonnement. Notre étude permet d'établir que les élèves parviennent à utiliser les raisonnements, produits en situation d'action, comme arguments permettant de justifier la validité ou la non validité des productions.

Les intentions du professeur dans la conduite de la leçon observée sont d'une part de ne pas intervenir lors de la phase de recherche de manière à ce que le déroulement de cette phase soit semblable à celui d'une situation d'action, d'autre part d'intervenir à minima lors de la phase de présentation des productions, espérant ainsi amener les élèves à débattre de la validité et de la pertinence des raisonnements qui sous-tendent les productions.

4. LA LEÇON OBSERVEE

4.1 Les composantes de la situation

4.1.1. Le problème (la situation objective)

L'énoncé de la situation problème distribué par le maître en début de séance était rédigé ainsi :

> *« Une journée de ski à Gourette est organisée samedi pour les élèves du canton d'Oloron. Le Conseil Général décide pour cet événement exceptionnel de leur offrir les forfaits pour la journée.*
>
> *La station de Gourette propose les tarifs suivants :*
>
> | | |
> |---|---|
> | *216 forfaits :* | *1275€* |
> | *36 forfaits :* | *325€* |
> | *6 forfaits :* | *85€* |
>
> *979 enfants sont inscrits, mais au moment du départ, il y a 12 absents, malades bien sûr…*
>
> *Le comptable du Conseil Général se dit « Dommage pour ces petits, mais ce n'est pas grave ; et puis la dépense sera moins élevée. »*
>
> *Qu'en penses-tu ? »*

Le déroulement de la séquence, choisi par l'enseignant, suit un plan devenu très usuel en France : présentation de l'activité de recherche (phase 1), lecture de l'énoncé (phase 2), informations complémentaires, explication des termes de l'énoncé, discussion et explicitation de la question relative à l'énoncé (phase 3), recherche individuelle (phase 4) d'une durée de 10 minutes environ, constitution de groupes (phase 5), recherche en groupes et élaboration d'une production écrite (phase 6) d'une durée de 25 minutes environ, mise en commun des productions : chaque groupe vient tour à tour au tableau présenter sa production (phase 7).

La situation objective

C'est celle qui est décrite dans l'énoncé d'un problème, et dont l'élève doit s'occuper sans remettre en question la réalité de ce qui lui est ainsi présenté comme « objectif ».

Le texte proposé n'est pas un énoncé de problème au sens habituel puisqu'il ne comporte pas de question explicite. Ce procédé est parfois utilisé pour inciter les élèves à formuler eux-mêmes des questions et des conjectures, et ne pas se contenter de répondre à des questions déjà posées et parfois même déjà enseignées, ou à résoudre de façon standard des problèmes rituels. Mais ne pas poser de questions après l'exposé d'une certaine situation n'est justifiable, sur le plan des apprentissages, que

- si plusieurs questions *intéressantes* pour les élèves sont raisonnablement suggérées par la collection de déclarations qui fixent la situation objective,
- si le professeur accepte d'intervenir au cours de la détermination du problème et donc de la résolution, qui de ce fait ne peut plus autonome.

Alors que l'objectif affiché de cette méthode est d'ouvrir l'élève à des questions nouvelles et personnelles, ce dernier devient en fait plus dépendant de l'activité et des interventions du professeur qu'il ne l'aurait été dans un problème donné sous forme d'un énoncé classique.

Les élèves auront donc à comprendre que les renseignements fournis permettent de calculer la dépense totale sous deux hypothèses distinctes, que ces deux dépenses ne sont peut être pas égales et qu'il s'agit de les comparer. La seule question intéressante est la suivante « La dépense sera-t-elle plus élevée pour 979 élèves que pour 967 élèves (comme le suppose le comptable)? »

- Le cœur de la situation mathématique proposée est un problème d'optimisation et de programmation linéaire. Calculer le prix des forfaits nécessaires revient à calculer le minimum d'une fonctionnelle linéaire, correspondant au coût de la dépense pour un nombre d'enfants N fixé.

Si la fonctionnelle est notée $J(n_1,n_2,n_3)$ où n_1 désigne le nombre de groupements de 216 forfaits achetés, n_2 désigne le nombre de groupements de 36 forfaits achetés et n_3 désigne le nombre de groupements de 6 forfaits achetés, le coût de la dépense correspondante peut s'écrire sous la forme

$$J(n_1, n_2, n_3) = 1275 \times n_1 + 325 \times n_2 + 85 \times n_3$$

La contrainte, où N désigne le nombre d'enfants, est une « contrainte inégalité »

$$n_1 \times 216 + n_2 x 36 + n_3 \times 6 \geq N$$

traduisant le fait que le nombre de forfaits achetés doit être supérieur au nombre d'élèves N.

Il s'agit alors de calculer le minimum de $J(n_1, n_2, n_3)$ pour N donné donc de résoudre le problème d'optimisation linéaire avec contrainte suivant :

$$\begin{cases} \underset{n_1,n_2,n_3}{Min}\ J(n_1, n_2, n_3) = \underset{n_1,n_2,n_3}{Min}\ (1275 \times n_1 + 325 \times n_2 + 85 \times n_3) \\ N - n_1 \times 216 - n_2 \times 36 - n_3 \times 6 \leq 0 \end{cases}$$

La résolution de ce problème d'optimisation n'a évidemment de sens que pour n_1,n_2,n_3 entiers naturels. Le fait d'identifier le problème comme relevant de l'optimisation nous permet de repérer les alternatives ouvertes aux conceptions habituelles des élèves et les connaissances qui vont implicitement ou explicitement être mises en œuvre par les élèves dans la résolution.

- L'analyse mathématique de la situation montre l'influence de plusieurs variables didactiques. Pour chacune le professeur choisit des valeurs qui augmentent la complexité : le nombre de paramètres (8) et d'indéterminés (3) est très élevé et leur désignation verbale n'est ni simple ni familière aux élèves. De plus les valeurs des paramètres ne facilitent pas la compréhension ni la résolution :

  - Considérons tout d'abord le nombre de forfaits correspondant à chacun des groupements. Le choix des valeurs 1, 10, 100 se serait traduit par un travail sur la numération décimale, le choix des valeurs 6, 36, 216, c'est-à-dire d'une base 6, rend la tâche de l'élève beaucoup plus complexe. D'autant plus qu'une logique de la vente en gros exclut la vente de forfaits à l'unité.

  - Le nombre d'enfants présents le jour du départ (967) est très grand pour « justifier » l'usage de 3 types de forfaits. Il n'est pas divisible par 216, ni par 36, ni même par 6 ce qui rend la tâche de l'élève plus complexe.

  - Le nombre total d'enfants (979) justifie la remarque du Conseiller général mais double le nombre de calculs à effectuer.

4.1.2 La situation de recherche (la situation d'action autonome) Actions possibles et actions attendues

La solution « standard » attendue par l'enseignant est très complexe. Si nous considérons que chaque étape de la résolution « arithmétique scolaire » du problème constitue un « module », la solution se décompose en 5 modules, chacun d'eux exigeant plusieurs opérations :

<u>Module 1</u> : Calcul du nombre d'enfants présents le jour du départ noté N_p, le nombre total d'enfants est noté N_t.

<u>Module 2</u> : Comparaison des trois tarifs proposés en vue de les ordonner.

<u>Module 3</u> : Recherche d'une organisation, manière de concevoir l'achat de N forfaits, $N \geq N_p$, en combinant les différents tarifs, permettant de minimiser la dépense.

<u>Module 4</u> : Recherche d'une organisation, manière de concevoir l'achat de N forfaits, $N \geq N_t$, en combinant les différents tarifs, permettant de minimiser la dépense.

<u>Module 5</u> : Calcul du montant de l'économie réalisée par le comptable : calcul de la différence.

La <u>complexité</u> des modules 3 présenté et 4 est particulièrement élevée comparée à celle des problèmes présentés habituellement en situations autonomes. On peut supposer que les modules 1 et 2, beaucoup plus simples sont destinés à permettre à des enfants faibles de faire quelque chose…

4.1.3. Les situations d'apprentissages autonomes

La situation des forfaits n'est pas une situation d'action autonome à cause de l'impossibilité théorique pour les élèves d'obtenir de façon autonome la solution du problème qui leur est proposé par le simple jeu de raisonnements légitimes. Ils n'ont ni le temps ni même la possibilité de s'y adapter. Aucune des justifications, en référence au milieu, ne pourra être valide.

Ce que l'enseignant ou l'élève prétendra légitimer par la situation ne le sera pas vraiment puisque la situation n'offre pas cette possibilité. Les élèves ne possèdent pas d'autres ressources que leurs connaissances ou leur imagination car ils ne recevront aucune information ni aucun contrôle « objectif ». Seules leur mémoire ou les interventions du professeur pourront leur faire voir que leurs hypothèses, leurs méthodes ou leurs conclusions ne sont pas valides. De plus la situation proposée n'offrant pas à l'élève de rétroactions, ce dernier ne sera pas en mesure, lors de la mise en commun, de déterminer la « valeur » de sa production. Cette condition augmente la complexité de la situation. On peut en conclure que cette situation ne pourra pas fonctionner de façon autonome.

Par conséquent tout va reposer sur l'enseignant lui-même, sur ses choix, sur ses décisions didactiques et finalement sur des arguments rhétoriques didactiques dans le cas où les élèves ne disposeraient pas d'une représentation correcte de « la situation objective » qui sert de milieu à leur action.

4.1.4. Les situations didactiques (phase par phase)

La complexité de la situation objective analysée ci-dessus fait apparaître celle de la situation didactique, permettant ainsi de prévoir les difficultés de l'enseignant relatives à la gestion de chacune des phases de la leçon durant lesquelles il devra nécessairement intervenir. Dans les conditions énoncées précédemment, un très grand nombre de responsabilités restent à la charge du professeur et ne sont pas effectivement partageables. Le professeur devra donc intervenir pour:

1) présenter aux élèves l'activité (phase 1),
2) expliciter certains termes si nécessaire (phase 3),
3) institutionnaliser la question (phase 3) de manière à déterminer complètement le problème objet de la recherche des élèves,
4) gérer la phase de mise en commun au cours de laquelle les élèves viendront exposer leur procédure (phase 7). Compte tenu de sa stratégie didactique, il devra faire émerger un plan de résolution avec les bribes de solutions qu'il peut espérer trouver comme productions des groupes. Il lui faudra, lors de la présentation des différents groupes, deviner les intentions et les interprétations parfois erronées de la situation pour les corriger au moment opportun.

   Le temps imparti à la réalisation de la tâche indiquée laissera peu de place pour une identification et une étude des connaissances nécessaires, pour un enseignement de la solution, ni pour aucun exercice réellement autonome.

   En conclusion nous nous attendons à voir apparaître dans les productions des élèves, de nombreuses questions et de nombreux éléments de « raisonnements », soit pour la conception de diverses composantes de la solution, soit pour l'organisation de la résolution, mais aucun qui entre dans un processus d'enseignement.

4.2. Le déroulement de la leçon :

4.2.1. La recherche et les écrits qui en résultent

L'activité de recherche est basée, dans la leçon observée, sur la recherche et l'explicitation de la question qui détermine complètement l'énoncé du problème (au sens classique du terme). Or les élèves n'ont pas été en mesure de percevoir l'enjeu (mathématique) de la situation problème et c'est l'enseignant qui a lui-même formulé la question « pensez-vous que cela coûte plus cher s'il y a 979 élèves ou 967 élèves ? ».

Les élèves ont produit des procédures, dans lesquelles apparaissent des calculs, nous essaierons de déterminer s'ils ont produit des raisonnements, et si oui de quels types ?

4.2.2 La phase de mise en commun

Notre analyse a priori nous avait fait supposer que le déroulement aurait du être catastrophique : la gestion de la phase didactique de mise en commun apparaissait d'autant

plus délicate que la réduction de la complexité reposait essentiellement sur le professeur : sur ses choix, sur ses décisions, sur ses interventions « opportunes ».
Or en visionnant l'enregistrement que nous n'avions pas vu avant l'analyse, nous avons dû constater que l'enseignant était parvenu à conduire sa classe sans se heurter à des difficultés « insurmontables ».

4.2.3 L'étonnement des observateurs
Un observateur extérieur, et en particulier les élèves professeurs qui pouvaient visionner le film ne trouvaient rien d'anormal. Cette divergence nous a conduit à examiner de plus près les connaissances et surtout les raisonnements qui apparaissent au cours de cette leçon. Qui les produit ? A quoi servent-ils? Quelles utilisations l'enseignant en fait-il ? A quels types d'arguments l'enseignant a-t-il recours pour gérer les raisonnements ? Les élèves sont-ils capables d'utiliser leurs raisonnements comme moyens de justification ? Qu'apprennent les élèves ?

5. LES RAISONNEMENTS OBSERVES, LEUR FONCTION ET LEUR USAGE

5.1 LES RAISONNEMENTS DANS LES PRODUCTIONS ECRITES

Le tableau ci dessous indique les formes de raisonnements qui sous-tendent les productions écrites, élaborées par chacun des groupes. Les raisonnements sont analysés en regard des différents modules qui constituent la solution attendue par l'enseignant.

Pour chaque groupe sont explicitées, dans le tableau 1, les procédures mises en œuvre en relation avec les modules correspondants.

Pour chaque production nous avons indiqué le modèle implicite d'action qui lui est associé.

Module	GROUPE 1 : XAVIER, SYLVAIN, YANNICK	GROUPE2 : MARINE, DEBORAH	GROUPE 3 : ALEXANDRE	GROUPE 4 : JULIEN
Mod. 1	Raisonnement N1 Non explicité	Raisonnement N2	Raisonnement N2	Raisonnement N2
Mod. 2				
Mod. 3		Raisonnement N2 Calcul, par excès, du nombre de forfaits achetés au tarif moyen (par lots de 36).	Raisonnement N3 Calcul, par excès, du nombre de forfaits achetés au tarif faible (par lots de 216). Procédure 3.3. Annexe 2	
Mod. 4	Raisonnement N2 Calcul du prix unitaire théorique d'un forfait au tarif fort. Le coût de la dépense totale est obtenu par la règle de la proportionnalité. Le prix d'un forfait est obtenu en divisant le prix d'un lot de 6 par 6.		Résultat déduit du module précédent, par analogie (l'achat est en fait identique à celui réalisé dans le module 3)	Raisonnement N2 Calcul du prix unitaire pour chacun des groupements. Il est obtenu en divisant le prix du lot par le nombre de forfaits correspondants. Le calcul, pour chacun des prix unitaires, de la dépense totale est obtenu par la proportionnalité.

Mod. 5	Raisonnement N3 Le calcul de l'économie réalisée est effectué en calculant le prix de 2 lots de 6.	Raisonnement N2 Le calcul de l'économie réalisée est effectué en calculant le prix de 2 lots de 6.	L'économie réalisée est nulle.	
Modèle implicite d'action	Calcul du prix unitaire théorique d'un forfait au tarif fort. Le coût de la dépense totale est obtenu par la règle de la proportionnalité. Le prix d'un forfait est obtenu en divisant le prix d'un lot de 6 par 6.	Les élèves utilisent le modèle de vente en gros. Pas de tentatives visant à minimiser la dépense.	L'élève utilise le modèle de vente en gros. Pas de tentatives visant à minimiser cette dépense.	L'élève utilise le modèle de la vente classique à l'unité pour chacune des propositions de vente. Il utilise le modèle de la proportionnalité.

Module	GROUPE 5	GROUPE 6	GROUPE 7	GROUPE 8
Mod. 1	Raisonnement N1 Non explicité	Raisonnement N2	Raisonnement N2	Raisonnement N2
Mod. 2	Raisonnement			
Mod. 3	Raisonnement Calcul par défaut du nombre, de forfaits au tarif faible (par lots de 216), puis par excès du nombre de forfaits restants au tarif moyen (par lots de 36).	Recherche des nombres de lots de 216 (par défaut), de 36 (par défaut) et de 6 (par excès) nécessaires pour les 967 élèves. Calcul du prix unitaire théorique d'un forfait au tarif fort. Le coût de la dépense totale est obtenu par la règle de la proportionnalité. Le prix d'un forfait est obtenu en divisant le prix d'un lot de 6 par 6.	(1) Calcul, par défaut, du nombre de forfaits achetés au tarif fort (par lots de 6), reste 1 élève. (2) Calcul par défaut du nombre de forfaits au tarif moyen (par lots de 36), et pour les restants calcul du nombre, par défaut, achetés au tarif fort, reste 1 élève. (3) Comparaison.	Calcul du prix unitaire théorique d'un forfait au tarif fort. Le coût de la dépense totale est obtenu par la règle de la proportionnalité. Le prix d'un forfait est obtenu en divisant le prix d'un lot de 6 par 6.
Mod. 4	Le résultat est déduit de celui obtenu au module 3.			.
Mod. 5	Raisonnement N_3		.	
Modèle implicite d'action	Les élèves utilisent le modèle de la vente en gros et parviennent à effectuer une combinaison des tarifs proposés.	Les élèves utilisent le modèle de vente à l'unité pour calculer la dépense totale alors qu'ils ont raisonné en terme de lots.	Les élèves utilisent le modèle de vente en gros. Tentatives de différentes organisations visant à minimiser la dépense.	Calcul du prix unitaire théorique d'un forfait au tarif fort. Le coût de la dépense totale est obtenu par la règle de la proportionnalité. Le prix d'un forfait est obtenu en divisant le prix d'un lot de 6 par 6.

Tableau 1

En conclusion il apparaît qu'une majorité d'élèves utilisent le *modèle de la situation commerciale classique* : l'acheteur achète la quantité de forfaits qu'il veut, à tarif constant.

Les prix par quantités différentes ne peuvent être par conséquent dans leur esprit que des prix proposés par des commerçants différents. Les quantités différentes leur apparaissent, à ce moment là, comme un artifice didactique pour leur faire calculer différents prix à l'unité. Même si certains d'entre eux pouvaient avoir une connaissance effective de la pratique de la vente en gros avec tarif dégressif, vraisemblablement les mots vont leur manquer pour exprimer « le prix – théorique - à l'unité, pour un achat groupé par tant ».

Dans le *modèle de la vente en gros avec tarif dégressif*, presque tous les « raisonnements » importés du modèle classique sont contredits : par exemple le prix effectif d'un objet ne sera pas le prix total divisé par le nombre d'objets, le nombre d'objets à acheter n'est peut être pas celui dont on a besoin etc. De sorte que les questions posées par le professeur lors de la mise en commun ne peuvent aboutir à une élucidation des difficultés.

L'analyse des différentes formes de raisonnements apparaissant dans les productions des élèves montre que l'enjeu réel de la situation problème, à savoir minimiser le coût de la dépense, n'a pas été perçu par une majorité d'entre eux.

Dans cette séquence, il apparaît clairement que la dévolution de la situation n'a pas fonctionné, les élèves n'ont pas été en mesure de prendre à leur charge la situation proposée. En effet lors de la mise en situation il apparaît que :

- les élèves ne disposent pas du répertoire de base pour concevoir les stratégies de base ;
- les élèves ne peuvent pas obtenir, en réponse à leurs actions, les informations nécessaires à la résolution du problème ;
- les élèves ne disposent pas des moyens en temps leur permettant de produire une solution compte tenu de la complexité de la solution standard ;
- les élèves ne peuvent déterminer par eux-mêmes si le résultat obtenu est ou non correct.

De plus

- l'énoncé ne fixe pas convenablement la situation objective et par conséquent conduit un grand nombre d'élèves à élaborer des modèles implicites erronés.

5.2. La transcription des interactions (phase de « mise en commun »)

Nous avons choisi de réaliser, au cours de cet atelier, l'analyse, en théorie didactique des situations mathématiques, d'un extrait de la transcription relative à la phase de présentation des productions des élèves (phase 7).

Nous avons analysé les interactions relatives à la présentation de la production d'un élève, Julien, ayant fait le choix de travailler seul.

La première colonne du tableau 2 indique le numéro de l'intervention, le premier nombre (4) indique qu'il s'agit du quatrième « groupe » venu présenter sa production, pour certaines interventions le minutage est précisé (avec pour origine le début de la phase de mise en commun). Dans la deuxième colonne figure le script. La troisième colonne concerne l'analyse de l'intervention en regard du projet du locuteur. La quatrième colonne tend à préciser la nature et la fonction de l'intervention.

N° Min.	**Texte**	**Commentaires**	**Analyse**	**Nature et fonction de l'intervention**
4.1 12'35	Julien : Bon j'ai commencé par faire… (1) j'ai fait 85 divisé par 6 (2) ça m'a donné 14,166 ; j'ai pris le 14 et puis j'ai vu… (3) j'ai fait pareil avec 325, enfin j'ai fait pareil, (4)	Un élève, Julien, vient présenter sa production. Julien décrit son calcul, sans définition, sans annonce de la variable calculée.		(1)Description directe d'une action (calcul) (2)Formulation d'un résultat (3)Evocation indirecte d'une action – par analogie - (4)Organisation de calcul Raisonnement d'organisation, local, oralisé.

	j'ai fait pareil avec les trois opérations			
4.2	M : (1) les trois propositions, (2) les groupements de forfaits.	L'enseignant reformule une partie de la déclaration pour mettre en place le vocabulaire.	L'E souhaite établir un lien entre les calculs effectués et la situation objective.	(1)Rectification de terminologie (2)Proposition de terminologie et Dénomination d'un résultat
4.3	Julien : (1) 325 divisé par 36 et 1275 divisé par 216 (2) puis alors, après j'ai fait…	Julien continue à dénoter ses calculs.		(1) Description directe d'une action (2) Organisation de calcul Raisonnement d'organisation, De l'élève, local, oralisé.
4.4	M : (1) Première conclusion après ces trois calculs ? Le maître s'adressant à la classe : Vous avez entendu les opérations qu'il a faites ? (2) Dans les trois conditions proposées quel est le prix d'un forfait c'est bien ça ?	L'enseignant interroge Julien pour savoir ce qu'il retire des calculs effectués. L'enseignant intervient pour apporter des explications visant à interpréter les calculs. Il indique la nature des résultats obtenus, « prix d'un forfait dans les trois conditions ».	L'E donne une interprétation de chacun des calculs effectués par Julien. Intention didactique : L'E souhaite s'appuyer sur les calculs de Julien pour « mettre en scène »les étapes du raisonnement qui sous-tendent la procédure 2-1 (Module 2).	(1) Evocation et dénomination de la position « en conclusion » d'un énoncé dans un raisonnement. Invitation à commenter ses résultats et à les placer par rapport à l'action. (2) Moyen rhétorique didactique : élément d'un raisonnement local explicite de l'E qui vise à replacer les calculs dans la perspective du module 2.
4.5	Julien : Ouais !			Agrément, approbation, accord
4.6	M :(1) Bon première conclusion après ça ?	L'enseignant interroge Julien sur ce qu'il retire des calculs effectués.	.	(1)Demande d'une inférence. L'E attend que l'élève continue son raisonnement et formule la conclusion.
4.7	Julien : Après j'ai fait...	Pas de réponse, Julien semble vouloir poursuivre sur le mode de la dénotation des calculs.		
4.8	M : Non, ta première conclusion après ça ? Quand tu as fait ces calculs tu t'es dis quoi ?	L'E réitère sa question.	L'E effectue une deuxième tentative, la finalité est identique à 4.4. La formulation est cependant plus précise.	Evocation de ce qu'est une conclusion invitation à commenter son résultat
4.9	Un élève : Lequel était le moins cher.	Un élève formule explicitement la	Un élève indique à Julien ce qui peut	Question sur une relation d'ordre.

		question de l’enseignant posée précédemment de façon implicite.	être tiré de ses calculs à savoir une comparaison de prix	Projet
4.10	Julien : Ouais ! Lequel était le moins cher…enfin non je ne pouvais pas voir…			Mais « lequel » ne désigne pas un objet défini. Explication passive. Impossibilité de réaliser un projet
4.11	Un élève : Mais si tu peux voir !	Un élève indique à Julien qu’il dispose de toutes les informations pour répondre.	L’élève le pousse à produire un raisonnement en lui indiquant qu’il dispose de tous les éléments pour conclure (i.e. comparer les prix)	Possibilité de réaliser un projet
4.12	Julien : (1) Oui c’était 1275, (2) (3) parce qu’il valait 5€ le forfait à peu près et puis (4) alors après j’ai essayé, enfin j’ai fait 979 moins 12, ça m’a fait 967 et puis après j’ai multiplié 967 par tous les, par tous les résultats des divisions	Julien donne la réponse attendue et poursuit la dénotation de ses calculs.	Julien formule la conclusion attendue dans la procédure 2-2. Il revient immédiatement à son raisonnement initial en dénotant ses calculs.	(1)Implicitement, la conclusion (2)Explication. (3)Estimation (4)Description directe d’une suite d’actions et organisation Raisonnement d’organisation, local, oralisé.
4.13	M : Pour trouver ?	Le maître interroge Julien sur la finalité de ses calculs.	L’E l’interroge sur la finalité de ses calculs.	Projet, demande de dénomination d’un résultat. Demande d’explication.
4.14	Julien : Pour trouver le prix de combien ça allait valoir.	Julien indique la finalité de ces calculs : calcule la dépense totale (pour les élèves présents).	Julien indique la finalité : calculer pour chacune des propositions le coût global.	Dénomination d’un résultat. Il indique la finalité de sa procédure.
4.15	M : Oui le prix…pour trouver lequel valait le moins cher.	Analyse P. part de la formulation de l’élève et la transforme : Julien a annoncé son intention de calculer le coût global (pour chacune des propositions), P se centre sur la comparaison des tarifs. Le modèle implicite d’action développé par Julien n’est pas conforme à l’attente de l’enseignant. Ce dernier va établir que les calculs effectués ne sont d’aucune utilité pour la comparaison des tarifs. Intention didactique : Faire rejeter les calculs en les faisant apparaître comme inutiles, redondants par rapport à la conclusion précédemment établie (procédure 2-2)		Moyen rhétorique didactique**. :** Elément d’un raisonnement local explicite de l’E qui vise à replacer les calculs dans la perspective du module 2. Rappel de subordination d’un résultat dans une tâche
4.16	Julien : Oui.			Accord
4.17	M : Et-tu as fait les trois calculs ?	L’enseignant souhaite faire		Effectivité d’une action

		prendre conscience à Julien que les calculs n'étaient pas nécessaires, un raisonnement aurait pu éviter de faire les calculs.		
4.18	Julien : Oui.			
4.19	M : C'était nécessaire ?			Appel à un jugement de valeur sur la pertinence ou l'adéquation d'un calcul.
4.20	Julien: Ben…ouais…			Accord
4.21	Un autre élève : Pour voir quel était le moins cher.			Rappel de subordination
4.22	M : Tu le savais pas avant ?	L'enseignant formule sa question afin que Julien revienne sur les raisons d'effectuer les calculs.	Le sens serait : « pouvais-tu le savoir à l'avance, sans avoir recours au calcul »c'est donc appel à un raisonnement direct.	Appel à l'anticipation du rôle d'un résultat dans une résolution. Appel à la formulation d'un raisonnement local (direct)
4.23	Julien : Oui je le savais…mais…	L'élève ne peut pas distinguer son opinion de la justification demandée par le professeur		
4.24	M : Bon et alors, résultat ?	L'enseignant redemande à Julien de formuler sa conclusion.		
4.25	Julien : Alors j'ai vu lequel était le moins cher et puis…			Modalité de validité : certitude mais subjectivité
4.26	M : Ca donne combien ?			
4.27	Julien : A mon avis c'est 967 fois 5 égal 4335.			Enoncé de la valeur subjective Formulation d'un résultat
4.28	M : Hum ! Pourquoi 4300 ? 5 fois 900 ?	L'enseignant interroge Julien sur l'ordre de grandeur du résultat de la multiplication. *		Mise en cause du résultat (mais pas de sa pertinence). Indication sur la nature et du lieu de l'erreur : le 3. Indication sur la cause de l'erreur. Demande de justification.
4.29	Julien : 36 000…euh ! 3600.			Mode de calcul mental, erreur de table, règle des zéro
4.30	Un élève : 5000…4500.			Indice que 9 fois 5 est calculé comme 10 fois 5 moins 5 : étayage

4.31	Julien : Oui 4500.			Accord
4.32	M : Et 5 fois 967, 4300…Il y a comme un petit défaut !	L'enseignant contrarie le résultat annoncé par Julien. Il a relevé l'erreur sans cependant la corriger.		
4.33	Julien : Oui 4500.			
4.34	M : En tous cas, le moins cher serait le prix d'un forfait vendu par 216 multiplié par le nombre d'élèves, le nombre d'enfants, 967, qu'est-ce que vous en dites ?	Le maître reformule la procédure de Julien en la synthétisant. Il souhaite mettre en débat la procédure de Julien, il souhaite l'éprouver. Il essaie de « replacer » le problème, il utilise un conditionnel.	Le professeur se heurte ainsi au mur d'un changement de modèle : les mots « vendus par 216 n'ont pas le sens qui serait nécessaire pour comprendre. Le renvoi aux élèves est voué à l'échec	Réinterprétation du calcul de l'enfant Replacement dans la perspective de la résolution du problème et de la mise en débat. Répétition de la donnée « fautive » Demande de commentaire qui indique que le calcul n'est pas satisfaisant. Moyen rhétorique didactique Raisonnement global d'organisation conditionnel. Mise en débat.
4.35	Les élèves : inaudible			
4.36	M : C'est sans doute vrai, mais quoi ?			Raisonnement conditionnel : admettons (que ce que nous disons est vrai) Appel à réexaminer la méthode de calcul. Justifie la méthode, le calcul Demande de justifications**.**
4.37	Mélanie : A condition…			*Repérage d'une condition*
4.38	M : Oui Mélanie…	Encouragement de l'enseignant plein d'espoir		
4.39	Mélanie : Tu as calculé les autres pour savoir si c'était…Pourquoi tu as de suite pris celui-là ? Tu as essayé les autres ?	Il s'agit là d'une objection formaliste, la division n'est pas comprise.	Mais Mélanie croit que la justification doit porter sur le choix des valeurs non sur la méthode de calcul.	Demande de justification Demande d'explication
4.40	Julien : J'ai fait 85 parce que c'était le premier.			
4.41	M : Oui…			
4.42	Julien : Je ne sais pas moi…			
4.43	M : Tu comprends que c'était le moins cher mais tu n'as pas essayé les autres.	Intervention injustifiée.	Le professeur voudrait faire passer les élèves du « modèle de la vente à l'unité	

			(vente ordinaire) à celui de la vente en gros avec tarifs dégressifs, mais ne sait pas comment susciter ce passage.	
4.44	Julien : Si j'ai tout essayé, si j'ai essayé 85 divisé par 6 et les autres, et sur les trois j'ai vu que c'était 1275 divisé par 216 qui marchait.			Explication active. Explication visant à justifier sa procédure. Déclaration d'exhaustivité des calculs possibles (dans le modèle de la vente ordinaire)
4.45	M : 1275 divisé par 216 puis ensuite multiplié par 979, bon…et Alexandre qu'est-ce que tu en dis par rapport à ta proposition ?	L'enseignant reformule la procédure et interroge Alexandre (qui a correctement interprété les données de l'énoncé) afin qu'il réagisse au modèle implicite développé par Julien.	Appel	Moyen rhétorique didactique. : extraction de la partie douteuse du raisonnement.
4.46	Alexandre : J'en dis que c'est vrai…		Alexandre reste dans le cadre de l'hypothèse « vente ordinaire »	Assertion (dans le cadre d'un modèle implicite).
4.47	M : Donc on achète, on va à la caisse de la station et on demande, on demande 967 forfaits au prix de 1275 divisé par 216, bon c'est bien ça ?	Troisième formulation de l'enseignant, tentative de mise en débat.		Confrontation à un milieu (supposé suffisamment familier pour « imposer » des contradictions.
4.48	Les élèves : Oui.			Agrément
4.49	M : Bon… et bien voilà.	Renoncement provisoire de l'enseignant, Julien retourne à sa place.	L'échec de la tentative est avéré	Le milieu n'envoie aucune des rétroactions espérées.

TABLEAU 2

5.3. Discussion

Les raisonnements qui apparaissent dans la production écrite de Julien (Annexe 1) sont des raisonnements de niveau 2 : les justifications et les explications relatives aux calculs effectués (posés) ne sont pas fournies par son auteur. Cependant l'analyse du modèle implicite d'action correspondant (tableau 1) nous permet d'identifier le modèle mathématique et la représentation que Julien a de la situation objective. Son modèle est celui de la situation commerciale classique, basé sur la vente de forfaits à l'unité, correspondant au modèle mathématique de la proportionnalité.

La transcription (tableau 2) montre que Julien, lors de la phase de présentation, procède à une dénotation de ses calculs, sans fournir à la classe davantage d'explication sur la finalité des opérations posées. De ce fait son projet n'est pas accessible à l'ensemble des élèves, rendant nécessaire une intervention de l'enseignant. En procédant ainsi il offre à l'enseignant la possibilité de proposer une interprétation de ses calculs qui ne correspond pas nécessairement à son projet initial. Notre analyse établit que l'enseignant utilise à de multiples reprises des moyens rhétoriques didactiques, tels que nous les avons définis (§2). Ainsi il réussit à détourner le projet initial de Julien au profit du sien qui vise à élaborer, à partir des calculs posés, le raisonnement qui sous-tend le module 2 de la solution standard.
De plus cette analyse met en évidence le fait que l'enseignant essaye de mettre en débat, à plusieurs reprises, la validité des procédures présentées, plus précisément la validité des décisions sur lesquelles reposent les raisonnements des élèves. Cependant ses tentatives échouent les unes après les autres. Bien qu'il choisisse d'interroger des élèves, dont la représentation de la situation objective est conforme à ses attentes, afin de faire invalider les représentations erronées inhérentes aux productions présentées, ceux-ci ne mettent pas en défaut les décisions erronées sur lesquelles reposent les productions. Par exemple dans l'analyse de la présentation de Julien, l'enseignant interroge Alexandre, dont le modèle implicite d'action est correct (tableau 1), cependant celui-ci ne met nullement en défaut la représentation que Julien a du milieu objectif.
Par conséquent l'analyse de la transcription permet de mettre en lumière :

- d'une part les moyens rhétoriques utilisés par l'enseignant pour détourner habilement les raisonnements de Julien afin de produire les éléments correspondant aux modules de la solution attendue,
- d'autre part les difficultés auxquelles se trouve confronté l'enseignant lorsqu'il souhaite amener les élèves à débattre de la validité des décisions qui sous-tendent les raisonnements des élèves.

Nous avons choisi de travailler, lors de cet atelier, cette partie de la transcription car elle est représentative des moyens didactiques mis en œuvre par l'enseignant pour traiter les raisonnements des élèves.

6. CONCLUSIONS ET CONJECTURES

6.1. Les raisonnements produits

L'objet de l'analyse est l'étude de l'influence de certains caractères de la situation proposée aux élèves sur l'élaboration des différents raisonnements, leurs usages et les possibilités de leurs traitements qui s'offrent à l'enseignant lors de la phase de présentation des productions.

L'identification des différents "niveaux" de raisonnements apparaissant dans les productions des élèves (tableau 1) montre que les raisonnements élaborés par les élèves ne sont pas très nombreux, ne relèvent pas d'une grande complexité si l'on se réfère au nombre de calculs produits et au nombre d'étapes du raisonnement global, et sont pour la plupart de niveau 2. De plus l'identification des modèles implicites d'action, raisonnement de niveau 1 qui sous-tendent chacune des productions, n'est pas une tâche particulièrement difficile pour les observateurs ni même pour l'enseignant. Cependant cette reconnaissance des modèles utilisés par les élèves nécessite d'avoir effectué au préalable une analyse a priori des comportements, des difficultés et des procédures susceptibles d'apparaître lors des différentes phases du déroulement de la leçon[5].

[5] Dans les situations d'actions ayant fait l'objet de publications destinées aux professeurs, figure nécessairement une analyse didactique de la situation qui comporte d'une part une analyse a priori, des comportements, des

L’analyse détaillée de la phase de mise en commun[6], dont le tableau 2, est une partie représentative des différents types et des différentes formes d’interactions, vise à relever les différents types d’arguments utilisés par l’enseignant pour essayer de prendre en compte et de traiter les raisonnements des élèves. Cette analyse montre que l’enseignant se trouve démuni en ce qui concerne le traitement effectif des raisonnements produits, c’est à dire l’utilisation de raisonnements logiques en relation directe avec la situation objective pour répondre aux raisonnements des élèves. En effet il ne parvient à prendre en compte les raisonnements produits et à les faire partager à l’ensemble de la classe, de plus les tentatives de mises en débat de la validité des productions se révèlent à chaque fois infructueuses.
Ce qui nous conduit à une première conjecture : ce qui limite l’enseignant dans les possibilités qui s’offrent à lui de prendre en compte, de faire expliciter et de traiter les raisonnements des élèves, ce n’est pas tant leur complexité mais un autre caractère lié à la nature même de la situation proposée aux élèves.

6.2. Les effets de la leçon sur les comportements et les apprentissages des élèves

6.2.1. Sur la validité des raisonnements et sur la conviction des élèves

Il apparaît à de nombreuses reprises, dans l’analyse complète de la transcription, que les élèves ayant produit un raisonnement basé sur une représentation conforme aux attentes de l’enseignant, n’ont pas pris conscience des conditions qui définissent le milieu objectif. En effet ils ne parviennent pas lors de la phase de présentation de leur production à formuler les raisons qui les ont conduit à élaborer celle-ci, ni même à réagir aux raisonnements de leurs camarades lorsque ces derniers sont basés sur des représentations erronées de la situation objective.
Ceci peut en partie apparaître comme résultant du fait que la situation n’offre pas aux élèves la possibilité d’éprouver leurs décisions : le milieu objectif ne renvoie à l’élève aucune rétroaction, par conséquent ce dernier n’est pas en mesure de valider ou d’invalider son raisonnement, et donc de revenir sur les décisions qui sous-tendent son modèle implicite d’action, ni sur sa représentation du milieu objectif.

6.2.3. Sur les répertoires des élèves : action, langage, opinions

L’élève n’étant pas en mesure de porter un jugement sur sa « production », il ne peut pas utiliser le raisonnement qu’il a produit, comme un argument, en situation de débat. Le débat entre pairs, souhaité par l’enseignant, est ici hors de portée des élèves.

6.3. Les effets sur le processus didactique

6.3.1. La dévolution

Les décisions qui sous-tendent l’élaboration de chacun de ces modèles sont étroitement liées à la représentation que l’élève se fait du milieu objectif. Or la situation objective proposée est telle que l’élève est confronté à un milieu dont il doit imaginer les règles de fonctionnement.
Le milieu objectif n’étant pas clairement défini, ceci a pour conséquence de conduire les élèves à des représentations différentes de la situation objective et donc à l’élaboration de modèles implicites d’action différents.
Par conséquent la situation objective ne peut pas être dévolue aux élèves, i.e. ceux-ci ne peuvent pas remettre en cause leur modèle commercial de la vente à l'unité adopté par une majorité d’entre eux, ni même calculer les résultats des différents choix possibles.

difficultés et des raisonnements susceptibles d’apparaître lors du déroulement de la leçon, d’autre part une analyse détaillée des comportements et des productions lors des différentes phases.

[6] L’analyse complète de la phase de mise en commun est proposée dans la thèse de P. Gibel « Fonctions et statuts des raisonnements dans l’apprentissage des mathématiques à l’école primaire » (2004)

6.3.2. Les corrections didactiques

L'analyse complète montre que l'enseignant ne parvient pas à faire expliciter aux élèves, venus présenter leur production, les raisons sur lesquelles repose leur modèle implicite d'action. Aussi l'enseignant, pour éviter une situation de blocage, liée au fait que les élèves ne comprennent pas les décisions prises par leurs pairs, est contraint d'utiliser des procédés rhétoriques, linguistiques, sémiologiques, désignés dans notre analyse, comme des « moyens rhétoriques didactiques » tels que nous les avons identifiés, à de multiples reprises, dans l'analyse présentée (tableau 2). Ces moyens permettent à l'enseignant de détourner le projet initial de l'élève au profit du sien, c'est-à-dire l'établissement de certains modules de la solution attendue. Cependant les raisons effectives qui justifient l'élaboration du module ne sont pas données à voir aux élèves : celles qui sous-tendent et qui justifient la mise en relation des données de l'énoncé dans la réalisation du module sont cachées.

De plus les élèves qui ont produit le raisonnement initial n'ont aucun retour sur les choix qu'ils ont effectués et ne peuvent donc prendre conscience du caractère erroné de leur représentation et de leurs décisions.

6.3.3. L'évaluation

La situation objective ne peut être dévolue aux élèves, par conséquent l'enseignant ne peut évaluer les capacités des élèves à mobiliser et à utiliser leurs connaissances pour produire le raisonnement attendu.

6.3.4. L'institutionnalisation des apprentissages

Le professeur ne peut pas faire apparaître l'élaboration de chacun des modules de la solution standard comme une conséquence raisonnée de l'articulation des données de la situation objective basée sur les connaissances supposées des élèves. En conséquence d'une part il est contraint d'utiliser des moyens rhétoriques didactiques pour répondre aux raisonnements des élèves, d'autre part il ne peut institutionnaliser les connaissances utilisées par les élèves, inhérentes aux calculs posés par les élèves (multiplication, division euclidienne, quotient décimal) puisqu'il ne peut pas les extraire de la situation proposée aux élèves.

L'analyse complète de la transcription met en lumière l'impossibilité pour l'enseignant de relever et de faire partager les différentes organisations (c'est-à-dire les différents moyens de concevoir l'achat des forfaits conformément à la vente en gros), conformes à ses attentes, qui apparaissent dans certaines productions.

Par conséquent si la prise en compte et le traitement des raisonnements pose des difficultés à l'enseignant pour parvenir à élaborer la solution standard, ce n'est pas tant par la complexité des raisonnements produits, mais essentiellement parce que son projet n'est pas visible par l'ensemble des élèves.

De plus une des conséquences de la pratique de l'enseignant, plus précisément du recours à l'usage de moyens rhétoriques, est que les élèves n'ont pas eu, lors de la phase de mise en commun, de retour sur les raisonnements qu'ils ont produits, ils n'ont pas non plus pris conscience du projet d'apprentissage ni même de la manière d'élaborer la solution attendue.

Par conséquent cette situation-problème n'a pas permis aux élèves de progresser dans leur pratique du raisonnement.

Il n'apparaît aucun savoir mathématique nouveau susceptible d'être institutionnalisé, d'ailleurs aucun temps n'est réservé par le professeur pour « extraire » ce qui peut être retenu de cette « leçon ». Par contre elle présente l'avantage, de soumettre à l'étude, des utilisations originales de relations commerciales.

7. CONCLUSION

L'étude montre que les élèves, confrontés à la situation-problème élaborée et conduite par le maître, ont certes produit des raisonnements, cependant la plupart d'entre eux n'ont pas progressé dans la pratique du raisonnement. En effet ils n'ont pas eu de retour sur leur raisonnement, du point de vue de sa validité, de sa pertinence ou de son adéquation puisque l'enseignant n'a pas été en mesure de le traiter. En effet pour répondre aux raisonnements qui sous-tendent une majorité des productions présentées lors de la mise en commun, l'enseignant n'a pu utiliser de raisonnements logiques s'appuyant sur la situation objective, il a été contraint d'avoir recours à des moyens rhétoriques.

Or ce n'est pas la complexité des raisonnements produits qui contraint l'enseignant à utiliser ce type de moyens pour traiter les raisonnements, mais le fait que la situation-problème ne puisse pas être dévolue aux élèves. Il en résulte que ce n'est pas la gestion de l'enseignant qui est remise en cause par cette étude, c'est la nature de la situation, élaborée par l'enseignant, qui limite très fortement les possibilités de prendre réellement en compte les raisonnements des élèves.

La situation objective proposée ne permet pas à l'enseignant

- de faire partager à l'ensemble des élèves les raisons effectives qui ont conduit chacun d'eux à élaborer des modèles implicites d'actions et à prendre certaines décisions dans le cadre des modèles correspondants,
- de faire percevoir aux élèves les justifications de l'élaboration des modules, correspondant aux principales étapes de la solution standard c'est-à-dire l'organisation de la solution en différents modules,
- de faire partager aux élèves le raisonnement qui sous-tend chacun des modules de la solution.

Dans le cas où la situation est telle que l'enseignant a la possibilité de faire dévolution à ses élèves d'une situation d'action « autonome » (*self content situation*) alors la Théorie des Situations Didactiques en Mathématique permet de prévoir, pour l'enseignant la possibilité de se référer, lors de l'analyse des productions des élèves, à la situation objective. En effet ces derniers peuvent développer leurs stratégies personnelles et leurs propres raisonnements en fonction des situations auxquelles ils se sont confrontés. Cela permet à l'enseignant de ne pas être contraint d'avoir recours à des moyens didactiques rhétoriques pour effectuer un traitement des raisonnements produits par les élèves

Dans le cas contraire, l'enseignant est tenu d'apporter des informations, des feed-back sur les raisonnements des élèves sur la base d'un projet qui n'est pas visible par l'ensemble d'entre eux, et c'est là que le professeur va être contraint d'utiliser des moyens rhétoriques didactiques. En effet les arguments développés par l'enseignant et les élèves ne pourront se référer à la situation objective.

BIBLIOGRAPHIE

BALACHEFF, N., «Processus de preuve en situation de validation », dans *Educational Studies in Mathematics* 18(2), pp 147-176.

BROIN D.: 2002, «Arithmétique et Algèbre élémentaires scolaires », Thèse soutenue à l'Université Bordeaux I.

BROUSSEAU, G.: 1986, « Fondements et méthodes de la Didactique des Mathématiques », dans *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Volume 7(2), Edition La Pensée Sauvage, Grenoble, pp 33-115.

BROUSSEAU, G.: 1988 «La relation didactique : le milieu », dans *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Volume 9(3), Edition La Pensée Sauvage, Grenoble, pp 309-336

BROUSSEAU, G.:1989, «Le contrat didactique : le milieu», dans *Recherches en Didactique des Mathématiques* Edition La Pensée Sauvage, Grenoble.

G. BROUSSEAU, P.GIBEL (2005), "*Didactical Handling of Students' Reasoning Processes in Problem Solving Situations* ", vol 59, p13-58, Educational Studies in Mathematics, KLUWER.

BROUSSEAU G.:1997 "Theory of Didactical Situations in Mathematics", *Mathematics Education Library* Kluwer academic publishers.

COULTARD, SINCLAIR :1975 , « Towards an analysis of discourse, the english used by teachers », Oxford University Press.

GIBEL P. (2008) « Analyse en théorie des situations d'une séquence destinée à développer les pratiques du raisonnement en classe de mathématiques à l'école primaire », Annales de didactique et de sciences cognitives, IREM de Strasbourg.

GIBEL P. (2006) " Raisonnement et argumentation. Analyse des différentes formes et fonctions des raisonnements des élèves en situation de débat à l'école primaire ", Actes du Colloque Espace Mathématique Francophone 2006, Université de Sherbrooke, Canada.

GRIZE, J.B.:1974, « Recherches sur le discours et l'argumentation », Droz.

GRIZE J.B.:1982 , « De la logique à l'argumentation », Droz.

GRIZE J.B., PIERAUT-LE-BONNIEC G., « La contradiction. Essai sur les opérations de la pensée », Paris, Presses Universitaires de France.

MARGOLINAS C. :1993 « De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques », La Pensée Sauvage, Grenoble.

MARGOLINAS, C. et STEINBRING, H.: 1994, « Double analyse d'un épisode : cercle épistémologique et structuration du milieu », dans *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France*, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp 240-257.

MOPONDI, B. :1995, « Les explications en classe de mathématiques »,*dans Recherches en Didactique des Mathématiques*, Volume 1(3), Edition La Pensée Sauvage, Grenoble, pp7-52.

MOREIRA, M., «Le traitement de la vérité mathématique à l'école», Thèse Université Bordeaux I.

OLERON P.:1977, «Le raisonnement», dans Presses Universitaires de France.

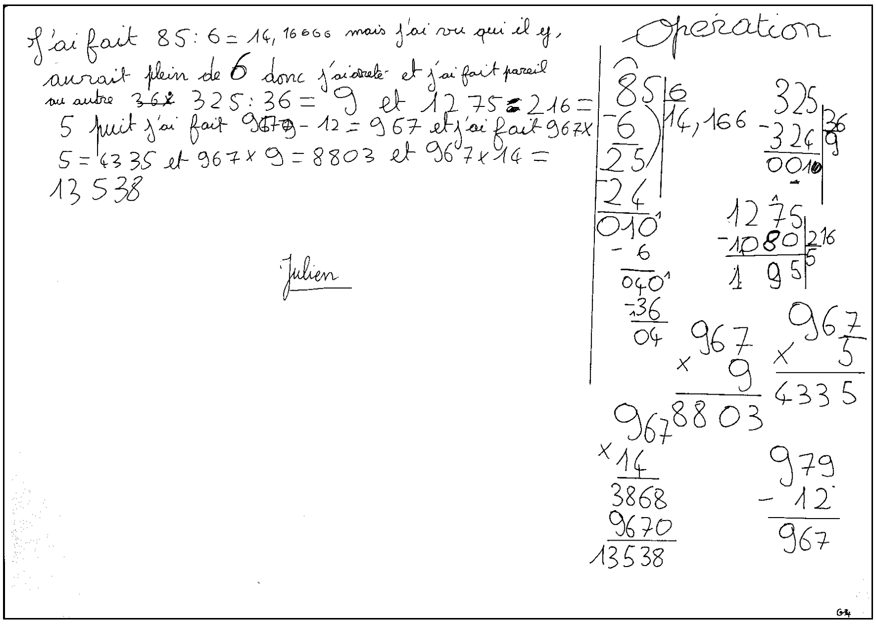
PERELMAN C. :1970, « Le champ de l'argumentation», dans Presses Universitaires de France.

PERELMAN C., OLBRECHTS-TYTECA L :1976, « Traité de l'argumentation », Institut de Sociologie, 3° éd..

ROBRIEUX J.J. :1993 « Eléments de Rhétorique et d'Argumentation », Dunod

8. ANNEXES

ANNEXE 1 Production de Julien



CONCEPTION DE SCENARIOS DE FORMATION AUTOUR DES CALCULATRICES

Teresa Assude
Université de Provence (IUFM)
Pierre Eysseric
Université de Provence (IUFM)

Résumé : Les calculatrices existent dans les programmes depuis très longtemps et il existe actuellement des ressources telles que le document d'accompagnement des programmes sur les calculatrices qui montrent un certain nombre d'activités qu'on peut faire autour de cette technologie numérique. A la suite d'enquêtes faites localement, nous nous sommes aperçus que ces documents sont peu utilisés et que les calculatrices sont peu présentes dans les classes. Comment faire pour inverser cette tendance ? Un des moyens consiste à développer des formations autour des usages des calculatrices. Dans cet atelier, nous aborderons ce problème à partir de ressources publiées et de ressources produites dans le cadre d'un groupe de développement de l'IUFM d'Aix-Marseille, notamment des vidéos faites à partir d'observations de classes

Les programmes font référence aux calculatrices depuis très longtemps et il existe actuellement des ressources comme le document d'accompagnement des programmes 2002 « Utiliser les calculatrices en classe » qui présentent un certain nombre d'activités que l'on peut faire autour de cette technologie numérique. A la suite d'enquêtes réalisées localement, nous nous sommes aperçus que ces documents sont peu utilisés et que les calculatrices sont peu présentes dans les classes.

Pourquoi cet état de fait ? Comment faire pour inverser cette tendance ? Nous partons de l'hypothèse que la formation (initiale et continue) a un rôle à jouer et que l'état actuel est dû (en partie) au fait que dans la formation on n'insiste pas assez sur les résistances des enseignants vis-à-vis des calculatrices et sur les usages de ces technologies avec les élèves. C'est pourquoi nous avons voulu travailler ce sujet à partir d'une problématique de conception de scénarios de formation.

Plusieurs questions sont au cœur de cet atelier : quelles variables prendre en compte pour concevoir des scénarios de formation à partir de ressources existantes ? Quels types de dispositifs mettre en place dans la formation pour que les enseignants s'approprient des ressources existantes ? Quel rôle peut jouer dans ces scénarios la production de ressources telles que des films et des observations de classe ? Comment utiliser des vidéos de classe pour bâtir des dispositifs de formation ?

Nous présentons tout d'abord l'organisation de l'atelier, puis le scénario de base de l'IUFM de Marseille soumis à la discussion des participants, et enfin quelques-unes des productions individuelles ou collectives relevées, ainsi que quelques points de la discussion générale à propos des scénarios de formation.

I – ORGANISATION DE L'ATELIER

L'atelier était organisé pour articuler une phase individuelle, une phase en petits groupes et une phase en collectif.

Le but de l'atelier étant d'apporter quelques éléments de réponse aux questions indiquées plus haut, nous avons commencé par leur présentation, suivie d'un travail individuel pendant un quart d'heure, important pour rentrer dans la problématique de l'atelier. Ce travail consistait à répondre au questionnaire suivant :

Questionnaire sur la formation des maîtres aux usages des calculatrices

1 – Indiquez votre catégorie professionnelle

2 – Avez-vous en charge la formation mathématique des PE2 ?

3 – Consacrez-vous du temps dans cette formation aux usages des calculatrices ?
Combien de temps ?

4 – Depuis combien d'années faites-vous cette formation aux calculatrices ?

5 – Décrivez rapidement cette formation (étapes, contenus)

6 – Quelles sont les ressources que vous utilisez dans cette formation ?

7 – Qu'est-ce que vous voulez que les stagiaires retiennent de cette formation ?

8 – Comment estimez-vous les effets de cette formation ? (par exemple des stagiaires vous ont dit qu'ils avaient utilisé ce que vous avez fait en formation,…)

Après ce moment individuel de l'activité, les participants ont travaillé par petits groupes. Il s'agissait, non pas de confronter toutes les réponses au questionnaire précédent, mais de partir de ces réponses individuelles pour répondre à deux des questions posées dans les préliminaires :

- quelles variables prendre en compte pour concevoir des scénarios de formation sur les usages des calculatrices ?
- quels types de dispositifs mettre en place dans la formation pour que les enseignants s'approprient les ressources existantes ?

Les réponses ont été inscrites sur une affiche puis présentées au groupe entier.

La troisième phase, collective, a consisté à rendre compte des travaux en petits groupes et de ceux des animateurs. Ceux-ci ont présenté le scénario de base du groupe de développement de l'IUFM d'Aix-Marseille, et un exemple de production en classe.

La discussion finale a eu pour but la comparaison de différents scénarios pour mettre en évidence des choix possibles concernant les variables, les types de dispositifs et le rôle de la production de ressources pour le changement des pratiques (à la fois de formation et de classe).

II – LE SCENARIO DE BASE POUR LA DISCUSSION

Nous présentons ici les différents éléments qui nous semblent importants à prendre en compte pour concevoir un scénario de formation. Ceci ne veut pas dire que ces éléments sont les seuls, et qu'un scénario de formation doive nécessairement prendre en compte tous ces éléments. Nous ne rentrerons pas ici dans la justification de ces choix mais nous renvoyons le lecteur à Assude (2009).

QUELQUES ELEMENTS POUR CONCEVOIR UN SCENARIO DE FORMATION SUR LES CALCULATRICES

Ces moments ne sont pas chronologiques car on peut en changer l'ordre. Ces moments sont modulables car on peut les choisir en fonction du public et de la durée de la formation.

Premier moment : la dimension personnelle

Quelles représentations les stagiaires ont-ils sur les calculatrices et sur leur usage à l'école primaire ? Commencer par travailler sur ces représentations nous apparaît comme un élément important car un certain nombre de stagiaires ont beaucoup de résistance à utiliser les calculatrices en classe. Ce travail peut être fait à partir du questionnaire (voir annexe 1)

Une phase collective est conseillée pour mettre en évidence les arguments pour ou contre l'utilisation de la calculatrice.

Deuxième moment : la dimension instrumentale

Certains travaux de recherche ont montré que la dimension instrumentale n'est pas assez prise en compte lors de l'intégration des technologies numériques à l'école. Ainsi il nous semble important de faire prendre conscience aux stagiaires que la genèse instrumentale (Rabardel 1999, Trouche 2005) peut être complexe et que l'enseignant doit organiser cette genèse.

Le problème des différences entre les artefacts peut être posé à partir de l'existence de deux mots : calculette et calculatrice, quelles différences ?

Un travail de manipulation avec les calculatrices comportant des touches que les stagiaires ne connaissent pas forcément semble important pour cette prise de conscience.

Exemples de touches : division euclidienne, mémoire, opérateur constant

Exemple de situation : Aujourd'hui nous sommes mercredi 19 octobre 2005, quelle sera la date dans 5000 jours ? (Voir Doc COPIRELEM, tome IV, pages 13 et 14)

Cette situation peut permettre de travailler sur différentes touches et de présenter la touche « division euclidienne » comme celle qui est la plus économique.

Plusieurs stratégies peuvent être utilisées pour prendre en compte cette dimension instrumentale (Assude, 2007) : initiation instrumentale, exploration instrumentale, renforcement instrumental, symbiose instrumentale.

Nous donnons par la suite quelques exemples inspirés ou pris dans le document d'accompagnement sur les calculatrices.

1) **Une ou plusieurs séances de découverte et familiarisation**

- Comment l'allumer et l'éteindre
- Faire l'inventaire des touches : les touches « chiffres », les touches « opérations » (÷ correspond à : , le point *qui* correspond à la virgule) et les autres...... dont on apprendra l'usage plus tard ;
- Quel est le plus grand nombre affichable ? (le lire). Que se passe-t-il si on fait +1 ? Quel est le plus petit nombre affichable ? (si les nombres décimaux ont déjà été abordés)
- Que se passe t-il si je frappe : 16 - 26 ?
- Que se passe t-il si je frappe: 5 + 3 = = (opérateur constant à droite pour l'addition), faire de même pour les autres opérations
- Que doit afficher la calculatrice si je frappe 5 x 2 + 6 = ? Et si je frappe 6+5x2=?
- On peut donner un aperçu des fonctions des touches C (ou CE ou AC) qui permettent de corriger un nombre en cours de calcul ; et de la touche M qui permet de stocker un nombre en mémoire.
- Ne pas oublier d'éveiller la méfiance des élèves envers les erreurs de frappe, en proposant une suite (suffisamment complexe) de calculs à l'oral ou à l'écrit et en faisant confronter les résultats de la classe.

2) Trace écrite

L'ensemble des constatations de la classe peut donner lieu à une trace écrite recopiée sur affiche ou sur les cahiers du style :
MODE D'EMPLOI DE MA CALCULATRICE
La touche ON sert à allumer la calculatrice.
La touche OFF sert à éteindre la calculatrice

Si je frappe	La calculatrice affiche	Remarques
5 + 3 = 5 + 3 = =	8 11	La calculatrice effectue le calcul C'est comme si j'avais frappé 5+3+3= ....

Troisième moment : la dimension institutionnelle

La dimension institutionnelle permet de placer ce qu'on fait avec les élèves par rapport aux attentes de l'institution. Le travail sur les textes officiels, les programmes, et les documents d'application et d'accompagnement apparaît comme nécessaire.

Ce travail peut être fait par groupes à partir des textes cités précédemment, et plus particulièrement du document d'accompagnement intitulé « la calculatrice à l'école ». Les stagiaires doivent répondre aux questions suivantes :

<u>Question commune aux deux cycles</u>
Le document valide-t-il ? invalide- t- il ? complète - t- il ? les réponses préalablement fournies lors de la première étape.
Première mise en commun rapide. Aboutir à la liste des fonctions possibles de la calculatrice à l'école.

<u>Questions pour le cycle 2 :</u>
- Quand et comment introduire la calculatrice ?

- La calculatrice a- t-elle sa place dans toutes les activités de résolution de problème ? Justifiez
- Comment faire de la calculatrice un outil d'aide à l'apprentissage du calcul ?
- En quoi la calculatrice peut-être un outil pour bien comprendre le caractère positionnel de la numération décimale ?

<u>Questions pour le cycle 3</u> :
- Quels types de calcul permettent aux élèves de mettre en œuvre certaines propriétés des opérations grâce à l'utilisation de la calculatrice ?
- Quels types de problèmes se prêtent bien à l'utilisation de la calculatrice par les élèves ?
- Pourquoi est–il indiqué page 7 : « il s'agit de travailler au bon usage simultané de la calculatrice et de la feuille de papier »
- Quelles activités permettent aux élèves de comprendre ce que veut dire en acte : « utiliser la calculatrice à bon escient »

Chaque groupe réalise une affiche.
Mise en commun. On commence par le cycle 2, puis le cycle 3.

L'objectif est qu'à la fin de l'activité les stagiaires aient le sentiment d'avoir découvert des facettes insoupçonnées de la calculatrice et voient dans celle-ci une alliée pour l'ensemble des apprentissages numériques (connaissance des nombres, calcul et résolution de problème).

Quatrième moment : la dimension praxéologique

Cette dimension est au cœur de l'ingénierie de formation puisque l'organisation du travail mathématique de l'élève est un besoin pour l'enseignant. Comment satisfaire ce besoin ? Nous avons adopté une approche fonctionnelle, ainsi nous allons mettre en évidence les différentes fonctions que la calculatrice peut avoir dans le travail de l'élève dans le domaine numérique et présenter des praxéologies complètes ou incomplètes qui permettent d'illustrer ces fonctions. Dans le cas des calculatrices, le document d'accompagnement des programmes de 2002 sur les calculatrices est organisé dans ce sens. Là encore, un travail peut être fait à partir de cette ressource institutionnelle, qui exemplifie les différentes fonctions de la calculatrice.

Exemples

1) La calculatrice comme aide à l'apprentissage du calcul mental

- Pour l'entraînement au calcul mémorisé : par exemple, les élèves sont par deux, l'élève A a une calculatrice et frappe en annonçant un calcul (7 x 4), l'élève B doit annoncer le résultat, l'élève A appuie alors sur = , si les deux résultats correspondent, B marque un point. Les élèves se passent la calculatrice et inversent les rôles. Autre exemple pour travailler les compléments à 10, 100 ou 1000 : L'élève A frappe 87 + , l'élève B doit alors dire le nombre nécessaire pour que la calculatrice affiche 100 comme résultat.
- Pour l'entraînement au calcul réfléchi : une calculatrice par élève (ou pour deux) et une ardoise.

Le maître écrit le nombre de départ et le nombre d'arrivée, à charge aux élèves de trouver comment passer de l'un à l'autre, sans effacer ni éteindre, et de noter les actions réalisées sur l'ardoise. Le maître recueille au tableau les différentes propositions et peut faire évoluer le travail en fixant des contraintes : en une seule étape, sans appuyer sur telle ou telle touche , que ce soit des touches opérations ou chiffres.

- En cours ou en fin d'apprentissage, le maître peut proposer des jeux « plus vite que la calculette » : par exemple un élève vient au bureau et doit frapper sur la calculette un calcul dicté par le maître à l'ensemble de la classe, les élèves qui ont réussi à donner le résultat avant l'élève qui a la calculette marquent un point, ou un point pour leur équipe.

2) La calculatrice comme aide à l'apprentissage de la numération

- Même dispositif que dans le paragraphe précédent : si le nombre de départ est 689, le nombre d'arrivée est 789 et la contrainte est « en une seule étape », l'élève doit frapper + 100 ; si le nombre de départ est 275 et le nombre d'arrivée est 265, il doit frapper -10........ ; si le nombre de départ est 1628, celui d'arrivée 1268, et la contrainte « en deux étapes »l'élève doit frapper - 400 + 40 ou + 40 – 400.
- L'enseignant(e) propose une dictée de nombres sous forme non conventionnelle : exemple 3 comme chiffre des dizaines « simples », 6 comme chiffre des unités de mille, 7 comme chiffre des centaines « simples », 1 comme chiffre des unités simples correspond au calcul 30 + 6000 + 700 + 1 = 6731.

3) La calculatrice comme aide à l'apprentissage du calcul posé

En séance d'entraînement, comme outil de vérification.

Modalité possible : 10 calculs en ligne sont proposés au tableau. Au bureau ou sur une table où peut s'asseoir l'enseignant(e).

Les élèves choisissent un des calculs, le posent sur leur cahier de brouillon et le calculent puis viennent vérifier leur résultat avec la calculatrice. S'il est juste, ils peuvent en choisir un autre, sinon ils vont le recommencer. L'enseignant(e) se décharge ainsi du travail fastidieux de la correction et peut aider ponctuellement ceux qui en ont besoin.

4) Lors de la résolution de problèmes « classiques »

- Pour alléger la tâche des élèves, pour qu'ils se focalisent sur la démarche à utiliser, sur les nombres et les opérations à mettre en jeu plutôt que sur les calculs : la calculatrice peut être à disposition de chaque élève, ou de certains élèves (différenciation possible), ou d'un petit groupe d'élèves (2 ou 3 maximum) qui effectuent les calculs demandés sous forme écrite par leur camarade[1]. Cette dernière modalité va obliger les élèves à présenter clairement les calculs à effectuer.
- Pour permettre aux élèves de résoudre certains problèmes qui mettent en jeu des opérations dont ils ne maîtrisent pas encore la technique opératoire mais dont ils perçoivent le sens (soustraction en CE2 par exemple).

5) Comme outil dans des situations-problèmes, ou problèmes pour apprendre

- Pour introduire (ou revisiter) l'addition des nombres décimaux :

3,12 + 6,4 = 9,42 et non pas 9,16 comme les élèves s'y attendent. Pourquoi ?

- Comment calculer 387 × 204 sans appuyer sur la touche × ?
- Comment calculer des sommes, des différences ou des produits dont le résultat dépasse le milliard (capacité de la calculette) ?
- Comment trouver le quotient et le reste d'une division euclidienne, de 2748 par 45 ? (On peut poser le problème : un chocolatier fabrique 2 748 chocolats, son employé doit les placer dans des boîtes de 45. Combien de boîtes remplira-t-il ? Restera-t-il des chocolats, si oui combien ?) Si on repose le même problème avec 2754, on risque d'obtenir 61 avec reste 2, car la calculatrice donne 61,2 comme résultat. Comment le vérifier ?

La venue de la division décimale apporte d'autres opportunités.

6) Comme outil lors de « problèmes pour chercher »

[1] Cette idée a été proposée par S.Gairin-Calvo dans les aides pédagogiques APMEP avec les « centres de calcul » où l'organisation des calculs à effectuer était une tâche séparée de la réalisation effective de ces calculs.

- Trouver 3 nombres qui se suivent dont la somme est égale à 63 (au CM, poser ensuite la question : peut-on trouver trois nombres entiers qui se suivent dont la somme est égale à 62 ? La réponse est non, pourquoi ?)
- Trouver 2 nombres dont la somme est égale à 82 et la différence à 18
- Trouver 3 nombres qui se suivent dont le produit est 91 080

8) Comme outil de différenciation

- Dans les activités et les modalités proposées, la calculatrice est souvent un moyen de différenciation, par les aides ou par les rôles qu'elle permet de faire coexister dans la classe.

Ici il peut être intéressant de choisir deux ou trois activités où on mettra en évidence d'une manière explicite par une synthèse :

- l'articulation entre les différents types de calcul ;
- l'articulation entre le travail avec la calculatrice et le travail en papier-crayon (différentes techniques pour un même type de tâche par exemple) ;
- le besoin de justifier et de théoriser (l'aspect technologico-théorique au sens de Chevallard) ;
- la relation entre calcul et raisonnement ;
- le besoin de traces écrites lors du travail avec les calculatrices (on peut par exemple organiser le travail de l'élève de manière qu'il écrive les différents calculs à faire, par exemple à travers la situation du robot qui fait les calculs).

Cinquième moment : la dimension épistémologique

Pour cette dimension, nous nous posons des questions autour de la nature du savoir numérique instrumenté. Une réflexion sur le calcul et les instruments, sur les nombres, leur écriture et les instruments nous semble incontournable. Cette réflexion peut être appuyée sur des ressources existantes, telles que celle publiée par la CREM, pilotée par Jean-Pierre Kahane (2002). Par exemple, la relation entre calcul et raisonnement nous paraît un point à mettre en valeur. Souvent on oppose calcul et raisonnement en mettant le calcul du côté des algorithmes et des automatismes. Or les activités de calcul (et en particulier de calcul instrumenté) peuvent être l'occasion d'un apprentissage du raisonnement.

En mettant l'accent sur cette dimension, nous voulons aussi créer un espace où les enseignants prennent de la distance par rapport aux besoins des élèves et s'intéressent au savoir mathématique plus largement que dans leur institution « classe ».

Selon le public, on peut présenter plus ou moins rapidement le fait que le travail des calculatrices est inclus dans une perspective plus large, celle du calcul et des instruments.

Sixième moment : analyse et production de ressources

Un premier travail proposé est celui de l'analyse des ressources existantes et notamment des manuels : quels sont les types de tâches utilisant des calculatrices proposés dans les manuels ? Quelles sont les fonctions que cet outil assume dans le travail ?

Un deuxième type de travail est celui de la production de ressources pour l'enseignant. Cette production de ressources a deux fonctions : la première est de combler le manque de ressources pour l'enseignement ; la deuxième est celle de favoriser l'engagement des acteurs dans cette intégration. Cette production de ressources est aussi valable pour les formateurs, comme nous l'avons fait dans le cadre du groupe de développement de l'IUFM d'Aix-Marseille.

C'est dans ce cadre que nous avons produit un DVD avec des situations de classe où les formateurs et les enseignants étaient engagés ensemble dans cette production. Nous avons présenté quelques-unes de ces situations dans l'atelier.

III – PRODUCTIONS ET DISCUSSION DANS L'ATELIER

Dans cette partie, nous donnons quelques exemples de productions individuelles (questionnaire de départ) et collectives (travail en petit groupe), et présentons quelques points de la discussion générale.

1 – Variations individuelles

Nous ne rendons pas compte ici de toutes les réponses individuelles mais nous voulons signaler quelques points.

1) Il y a des formateurs qui ont en charge la formation des PE2 (ou PE1) mais ne font pas de formation spécifique aux calculatrices. Étant donnée notre hypothèse de base sur le rôle de la formation comme condition (non suffisante) pour faire évoluer les pratiques concernant la calculatrice, il nous paraît difficile de ne rien faire en formation si on veut que les enseignants puissent par la suite s'investir dans cette intégration. Ceci dit, ce n'est parce qu'on fait une formation aux calculatrices qu'ensuite ceux-ci l'utilisent en classe. Certaines réponses indiquent que les effets estimés de la formation semblent faibles, et d'autres réponses qu'ils n'ont pas été mesurés. L'un des participants note le rôle du C2I2e pour faire évoluer les positions des stagiaires : « Les stagiaires utilisent ce qu'on a fait en cours pour la validation du C2I2e depuis 2 ans. Avant, ils l'utilisaient très peu. Les arguments avancés sont : pas de calculatrice en classe ; pas assez de temps pour traiter le programme. »

2) Le temps alloué à la formation aux calculatrices varie entre une demi-heure et six heures (en excluant les formateurs qui ne font rien). Là encore il y a une différence importante entre les formateurs. L'accent n'est pas mis sur les mêmes variables.

3) Beaucoup de formateurs utilisent les mêmes ressources, notamment le document d'accompagnement sur les calculatrices des programmes de 2002. Nous pensons que le rôle des ressources est vraiment important. De ce point de vue, l'analyse des manuels montre des manques en ce qui concerne les usages des calculatrices, ce qui n'est pas sans conséquence sur les pratiques des enseignants, vu leur usage des manuels.

4) L'institutionnalisation : Qu'est-ce que les formateurs veulent que les stagiaires retiennent de cette formation ? Prenons quelques exemples de réponses :

« Qu'il est possible d'utiliser la calculatrice avec les élèves, que son utilisation doit être pensée et préparée ; que la calculatrice n'empêchera pas leurs élèves d'apprendre à calculer mais qu'elle peut être au contraire un apport dans cet apprentissage. »

ou encore

« Que la calculatrice est un bon outil pour apprendre à calculer et pour mieux comprendre la signification des chiffres dans l'écriture d'un nombre ; qu'un usage régulier et bien encadré de l'outil permet aux élèves de bien s'en approprier les fonctions. »

ou encore

« L'usage à bon escient (pas de confiance aveugle). »

5) La description des différentes étapes des formations aux calculatrices. Là aussi, il y a des variations individuelles mais certaines étapes apparaissent dans plusieurs de ces formations.
Voici quelques exemples :

« - *Présenter le document d'accompagnement ;*
- *rechercher avec les stagiaires les moments d'utilisation possible de la calculatrice avec leurs élèves ;*
- *leur faire vivre quelques situations d'utilisation de la calculatrice et faire avec eux une analyse a priori ;*
- *leur demander de construire des scénarios pour utiliser la calculatrice et les faire vivre dans les classes en atelier professionnel ;*
- *analyse a posteriori des séances réalisées.* »

Un autre participant indique qu'il considère deux parties dans sa formation :
« Deux parties A et B
Dans la partie A :

1) *diagnostique : à quoi sert la calculatrice ? Listing des réponses*
2) *utilisation du document d'accompagnement pour enrichir 1)*
3) *recherche d'exemples d'activités pour chacune des fonctions repérées*

Dans la partie B :

1) *problèmes utilisant le support de la calculatrice du genre : calcul de 78581312 × 9861942 pour mettre en évidence d'emblée que l'utilisation de la calculatrice n'est pas qu'un exécutant ;*
2) *…*
3) … »[2]

Nous retrouvons ici le rôle des ressources (le document d'accompagnement) pour travailler les différentes fonctions de la calculatrice, l'importance de faire vivre des situations aux stagiaires et de les engager dans la conception de situations de classe, leur observation et leur analyse.

2 – Variables et dispositifs

Le travail en groupe a permis de revenir sur les deux questions posées : les variables et les types de dispositifs. Voici les productions des trois groupes :

Question 1
- Variables matérielles :

- *calculatrices (présence ou non dans la classe, modèle unique ou pas)*
- *nombre de PE2 dans le groupe*
- *temps imparti*

- Variables humaines :

- *niveau de connaissance de l'outil calculatrice*
- *représentation des PE : « l'utilisation de la calculatrice est un frein à l'apprentissage du calcul »*
- *crainte de ne pas gérer la diversité des calculatrices apportées par les élèves*

- Variables relatives aux choix didactiques :

- *les objectifs visés : ceux du programme*

[2] Le participant n'a pas eu le temps de finir cette description mais la partie B correspond aux activités des élèves.

- *utilisation raisonnée de la calculatrice (côté élèves)*
- *utilisation de la calculatrice comme générateur de problèmes (côté enseignant)*

Question 2
- *test diagnostique : que savent les PE2 de leur calculatrice ?*
- *pour certains, l'initiation aux fonctions de base peut être un préalable à l'utilisation pédagogique*
- *intégrer davantage cet outil dans les autres séances didactiques : challenge calcul mental/calculatrice, en analogie avec les pratiques de classe préconisées*
- *analyse de séances en formation (analyse a priori), suivies d'élaboration de séances par les PE2 et expérimentation en stage avec analyse a posteriori.*

Un deuxième groupe a mis l'accent d'abord sur les « *éléments à prendre en compte* » comme :
- *type de public*
- *a priori (représentation initiale)*
- *quel cycle ? Référence aux programmes*
- *niveau d'utilisation*
- *type de calculatrice*

Dans les dispositifs, ce groupe précise :
- *mise en situation des formés*
- *vidéo en classe*
- *mise en œuvre de situations proposées par le formateur*

Le troisième groupe a identifié les variables suivantes :
- *choix de la calculatrice pour les élèves*
- *apprentissage de l'utilisation (fonctionnement) de la calculatrice*
- *utilisation encadrée ? mise à disposition permanente ?*
- *place du papier-crayon*

et les dispositifs suivants :
- *partir des représentations des PE2 sur les fonctions de la calculatrice ; enrichir ces représentations grâce au document d'accompagnement*
- *construction d'activités pour les cycles 2 et 3*
- *proposer des problèmes à résoudre qui utilisent la calculatrice comme support (exemple : produit de deux grands nombres)*

Les productions de ces trois groupes mettent l'accent sur la dimension personnelle, notamment sur les représentations initiales des stagiaires. Cette dimension apparaît ainsi incontournable car les résistances peuvent être grandes et constituer un obstacle pour la suite. Ainsi s'appuyer sur ces représentations apparaît comme un moyen de faire évoluer les pratiques. La dimension institutionnelle est aussi présente explicitement dans deux des groupes, ainsi que les dimensions instrumentale et la dimension praxéologique. Par contre la dimension épistémologique n'est pas présente.

Nous voulons souligner aussi l'importance de la conception de situations de classes par les stagiaires dans les types de dispositifs présentés.

3 – Discussion et conclusion

L'existence de ressources apparaît déterminante dans les différents scénarios de formation et même dans le fait que certains formateurs aient commencé à concevoir des séances de formation. Par exemple le document d'accompagnement aux programmes de 2002 sur les calculatrices a joué un rôle important pour que certains formateurs s'y engagent.

Il peut y avoir plusieurs types de rapports aux ressources : un rapport d'application directe lorsqu'on utilise la ressource telle quelle ; un rapport d'adaptation lorsqu'on utilise la ressource en l'adaptant en fonction d'un certain nombre de variables (par exemple le public ou la durée de la formation) ; un rapport de production de nouvelles ressources à partir d'autres existantes. C'est ce dernier rapport que nous avons essayé de mettre en œuvre dans le cadre d'un groupe de développement de l'IUFM d'Aix-Marseille. Nous avons décidé de produire des ressources pour la formation en lien avec le travail dans les classes. Nous avons choisi de concevoir des séances en mettant en évidence une des fonctions de la calculatrice. Par exemple, la calculatrice comme outil pour la résolution de problèmes, la calculatrice et le calcul mental, etc. Pour chaque mise en œuvre dans une classe, nous avons analysé la séance du point de vue des compétences et des procédures des élèves, du rôle de l'enseignant, et nous avons élaboré un diaporama avec ces analyses et des extraits de films ou des images. Ce travail de production a été pour nous (et pour les enseignants) une manière de nous approprier les enjeux et les possibilités des usages des calculatrices en classe (voir en annexe 2, un des diaporamas du DVD : travail sur la dimension instrumentale au CM2, apprendre à utiliser efficacement la calculatrice, rôle de l'organisation des calculs, gestions des erreurs de frappe, …).

BIBLIOGRAPHIE

Assude T & Grugeon (2006), Développement d'ingénieries de formation des enseignants pour l'intégration des TICE, *revue Quadrante*, Vol.XIII, n°2, 2004, 31-50.

Assude T. (2007). Changements et résistances à propos de l'intégration des nouvelles technologies dans l'enseignement des mathématiques au primaire. *Informations, Savoirs, Décisions et Médiations (ISDM)*, n°29, revue en ligne, isdm.univ-tln.fr/articles/num_encours.htm.

Assude T (2007), Modes et degré d'intégration de Cabri dans des classes du primaire. In Floris R et Conne F (ed), *Environnements informatiques, enjeux pour l'enseignement des mathématiques*. (pp.119-134). Bruxelles : De Boeck.

Assude T (2009), *Une approche systémique et fonctionnelle de la conception de parcours de formation*. Communication acceptée au colloque EMF 2009, Dakar, Sénégal.

Emprin F., (2007), *Formation initiale et continue pour l'enseignement des mathématiques avec les TICE : cadre d'analyse des formations et ingénierie didactique,* Thèse de didactique des disciplines, Université Paris VII – Denis Diderot.

Favre J-M. & Tièche Christinat C. (2007.). La calculette : un outil médiateur de la relation ternaire dans l'enseignement spécialisé. In Floris R & Conne F, *Environnements informatiques, enjeux pour l'enseignement des mathématiques* (pp.95-118). Bruxelles : De Boeck.

Gueudet G., Trouche L. (2008), Vers de nouveaux systèmes documentaires des professeurs de mathématiques, in I. Bloch, F. Conne (dir.), *Actes de la 14ème Ecole d'été de didactique des mathématiques*, La pensée sauvage.

Kahane J.P. (2002) (sous la direction), *L'enseignement des sciences mathématiques*. Paris : Odile Jacob.

Lagrange J.-B., Artigue M., Laborde C., Trouche L. (2003), Technology and Mathematics Education: a Multidimensional Study of the Evolution of Research and Innovation, in A. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. K. S. Leung (dir.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (239-271). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

MEN (2002), Documents d'accompagnement aux programmes de 2002, Utiliser les calculatrices en classe, www.snuipp.fr/IMG/pdf/Utliser_la_calculatrice_C2_et_C3.pdf.

Rabardel P. (1999). Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. In M. Bailleul (Ed.), *Ecole d'été de didactique des mathématiques* (pp. 202-213). Houlgate: IUFM de Caen.

Trouche L. (2005), Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. *Recherches en didactique des mathématiques 25*(1), 91-138.

ANNEXE 1

Questionnaire sur les calculatrices

1 – Entourez le *oui* si vous êtes d'accord avec l'affirmation, entourez le *non* si vous êtes en désaccord avec l'affirmation

a) Il est important pour l'élève d'utiliser les calculatrices à l'école primaire : Oui Non
b) Il est nécessaire d'introduire les calculatrices à l'école primaire : Oui Non
c) Ce serait mieux d'introduire les calculatrices au collège : Oui Non
d) La calculatrice est un obstacle pour que l'élève apprenne à calculer : Oui Non
e) La calculatrice est un bon moyen de calcul dans la vie de tous les jours mais pas à l'école : Oui Non
f) Il faut utiliser la calculatrice à l'école de la même manière qu'on l'utilise dans la vie : Oui Non
g) L'usage des calculatrices constitue un obstacle important au calcul mental : Oui Non
h) Il ne faut pas utiliser une calculatrice durant l'apprentissage initial des techniques opératoires : Oui Non
i) Les élèves apprennent à utiliser la calculatrice en dehors de l'école : Oui Non
j) Les enseignants doivent apprendre aux élèves à se servir d'une calculatrice : Oui Non
k) J'ai utilisé la calculatrice pendant ma pratique professionnelle (stages) : Oui Non
l) J'ai observé l'utilisation de la calculatrice dans l'un des stages : Oui Non
Si oui, combien de fois ?

2 - A partir de quelle classe faut-il utiliser les calculatrices ?

3 – Donnez tous les arguments qui vous semblent importants pour justifier l'utilisation de la calculatrice à l'école primaire

4 – Donnez tous les arguments qui vous semblent importants contre l'utilisation de la calculatrice à l'école primaire

5 – Si vous avez déjà utilisé la calculatrice dans votre pratique professionnelle, donnez quelques exemples de ce que vous avez fait. Combien de fois l'avez-vous utilisé ?

6 – Pensez-vous utiliser la calculatrice dans votre future pratique professionnelle ? Comment allez-vous l'utiliser ? Pour faire quoi ? Donnez des exemples précis en choisissant une classe

ANNEXE 2

Description rapide

Objectifs Commentaires

Matériels Commentaires

Déroulement Commentaires

Le ticket de caisse

Classe de Dominique BERNASCHI

CM2 – octobre 2007

Ecole Sextius AIX en PROVENCE

Description rapide

Objectifs Commentaires

Matériels Commentaires

Déroulement Commentaires

Le ticket de caisse

Classe de Dominique BERNASCHI

Ecole Sextius AIX en PROVENCE

Cette activité est issue d'une séquence sur le calcul proposée dans « Apprentissages numériques et résolution de problèmes au CM2 », ERMEL, Hatier.

Dans cet ouvrage, la séance avec la calculatrice se situe après deux séances sur le calcul rapide approché utilisant comme support des tickets de caisse. Nous l'avons ici utilisée de façon isolée dans une classe de CM2 en début d'année (octobre) avec comme objectifs de:

- confronter les élèves à une situation de calcul dans laquelle l'utilisation de la calculatrice s'impose;
- conduire les élèves à s'interroger sur les précautions à prendre pour réaliser efficacement un calcul avec une calculatrice.

En se limitant aux entiers naturels, on peut facilement adapter cette situation à une classe de début de cycle 3.

Le ticket de caisse
Description rapide

Description rapide
Objectifs Commentaires
Matériels Commentaires
Déroulement Commentaires

Les élèves doivent calculer rapidement la valeur exacte du total d'un ticket de caisse.

Pour réaliser cette tâche, ils sont placés dans un premier temps dans des conditions « très inconfortables »:

- Travail individuel
- Agrandissement du ticket affiché au tableau
- Temps limité à peine suffisant pour permettre à un adulte de réaliser la même tâche.

Il s'agit de « forcer » la prise de conscience du fait qu'il n'est pas aussi simple qu'ils le pensent d'utiliser une calculatrice.

La même tâche sera ensuite reprise dans des conditions « plus agréables » avant de conclure sur un « appel à la vigilance » dans l'utilisation de cet instrument.

6,04
9,45
7,77
7,77
14,46
12,85
10,31
10,37
10,37
10,37
7,53
6,30
4,91
12,35

Le ticket de caisse
Objectifs et compétences

Description rapide
Objectifs Commentaires
Matériels Commentaires
Déroulement Commentaires

Objectifs

• confronter les élèves à une situation de calcul dans laquelle l'utilisation de la calculatrice s'impose;
• conduire les élèves à s'interroger sur les précautions à prendre pour réaliser efficacement un calcul avec une calculatrice;
• dégager quelques techniques pour utiliser efficacement la calculatrice.

Compétences visées en ce qui concerne la calculatrice

• utiliser efficacement cet instrument pour effectuer un calcul;
• éviter les erreurs de frappe et celles liées à une mauvaise organisation du calcul;
• corriger une erreur de frappe en cours de calcul sans tout recommencer.

Compétences visées en ce qui concerne le calcul

• organiser son calcul pour éviter les erreurs;
• contrôler le résultat même dans le cadre d'un calcul instrumenté.

Le ticket de caisse
Objectifs… commentaires

Choix

Cette situation est décrite dans l'ouvrage CM2 de l'équipe ERMEL. Il nous semble important de montrer la mise en œuvre de ce type de situation afin d'insister sur l'importance de l'apprentissage à l'école d'un usage raisonné de la calculatrice.

On peut adapter cette séance pour une autre classe du cycle 3 avec pour support, une « longue » addition d'entiers naturels.

Le ticket de caisse
Matériel

Description rapide

Objectifs Commentaires

Matériels Commentaires

Déroulement Commentaires

Matériel pour l'élève :

- Calculatrice
- Une feuille
- Une photocopie du ticket de caisse pour la deuxième phase.

Matériel pour l'enseignant :

Une reproduction grand format du ticket de caisse pour l'afficher au tableau.

Exemples de tickets de caisse utilisables (d'après ERMEL, Hatier)

6,04
9,45
7,77
7,77
14,46
12,85
10,31
10,37
10,37
10,37
7,53
6,30
4,91
12,35

Le ticket de caisse

Déroulement: phase « conditions très inconfortables »

Description rapide

Objectifs Commentaires

Matériels Commentaires

Déroulement Commentaires

Consigne:

« Je vous propose une mission impossible. (…) Calculer très vite le résultat d'une grande addition à l'aide d'une calculatrice. »

Travail individuel:

- chaque élève avec une calculatrice,
- seul le résultat final doit être noté sur la feuille,
- durée: 2 min.

Collecte des résultats:

L'enseignant note les différents résultats au tableau (pour ceux qui ont fini).

Discussion collective sur les difficultés rencontrées.

Le ticket de caisse

Déroulement: phase « conditions plus agréables »

Description rapide

Objectifs Commentaires

Matériels Commentaires

Déroulement Commentaires

Même consigne que dans la phase précédente, avec le même ticket.

Travail à deux:

- une photocopie du ticket de caisse pour chaque élève,
- durée: 3 min.

Collecte des résultats:

L'enseignant note au tableau les résultats obtenus par ceux qui ont fini.

Discussion collective à propos des solutions apportées.

Synthèse: se donner les moyens de contrôler ce qu'on fait.

Le ticket de caisse
Déroulement … commentaires

Description rapide
Objectifs Commentaires
Matériels Commentaires
Déroulement Commentaires

Des difficultés prévisibles
pour la phase « conditions très inconfortables »

Existence d'une grande diversité dans les résultats obtenus.

Manque de temps pour finir à cause de:
- contrainte de la durée prévue,
- non organisation des calculs,
- erreurs obligeant à tout recommencer.

Erreurs d'oubli ou de répétition de certains nombres.

Erreurs de frappe: une touche à la place d'une autre, le doigt qui rebondit sur la touche, …

Le ticket de caisse
Déroulement … commentaires

Description rapide
Objectifs Commentaires
Matériels Commentaires
Déroulement Commentaires

Des changements attendus
lors de la phase « conditions plus agréables »

Existence de résultats moins disparates à cause :
- de la durée prévue,
- du contrôle des calculs facilité par le travail à deux et la présence du ticket sur les tables,

Moins d'erreurs de frappe, d'oubli ou de répétition de certains nombres.

Des solutions possibles:

Organiser les calculs:
- en cochant,
- en réorganisant l'ordre des calculs,
- en notant des résultats intermédiaires.

Gérer les erreurs de frappe:
- recommencer si on est au début des calculs,
- corriger en effaçant le dernier chiffre saisi,
- compenser un ajout par un retrait.

Le ticket de caisse
Déroulement: discussion collective

Description rapide
Objectifs Commentaires
Matériels Commentaires
Déroulement Commentaires

Les difficultés observées:

On n'est pas sûr d'avoir tapé ce qu'il fallait.

Certains nombres sont répétés dans l'addition: on ne sait plus où on en est.

Oublier un nombre.

Taper sur une mauvaise touche … et il faut recommencer.

Répétition de la frappe d'un chiffre (rebond du doigt).

Il est difficile de vérifier au fur à mesure.

Certains n'ont pas eu le temps de finir et n'ont pas proposé de résultat.

Le ticket de caisse
Déroulement: synthèse

Description rapide
Objectifs Commentaires
Matériels Commentaires
Déroulement Commentaires

Les solutions apportées par les élèves:

Cocher chaque nombre et aller doucement pour ne pas oublier la virgule.

Contrôler à chaque fois l'affichage.

Utilité d'être à deux.

Compenser un ajout par un retrait.

Le ticket de caisse
Déroulement … commentaires

Description rapide

Objectifs Commentaires

Matériels Commentaires

Déroulement Commentaires

Rôle du maître :

Ne pas intervenir dans les phases de calcul;

Faire respecter strictement le temps prévu pour les calculs dans chaque phase;

Ne pas donner la bonne réponse entre les phases;

Gérer les discussions collectives de façon à ce que les élèves prennent conscience de la vigilance indispensable dans l'utilisation de la calculatrice.

Situations et assortiments d'exercices pour l'enseignement des mathématiques aux élèves de 5ème et 6ème SEGPA

Marie-Hélène Salin DAESL

Depuis 3 ans, je travaille avec un enseignant de SEGPA, J.Y. Jongboët, pour préparer des suites de séances de mathématiques, relatives à un thème précis, comportant des « situations de recherche » de préférence issues de manuels du primaire, dans lesquelles les élèves puissent rentrer facilement et les plus simples possibles à gérer par l'enseignant, et des situations plus classiques, permettant la mise en fonctionnement répétée, sous forme d'exercices, des connaissances mises en œuvre dans les situations de type précédent, en vue de l'appropriation progressive de ces connaissances.
L'atelier a comporté une première partie présentant les raisons de ce travail et deux exemples de « situations de recherche » sur lesquelles nous travaillons. Dans une deuxième partie, les participants ont été sollicités pour s'interroger sur les « situations intermédiaires » favorables à la mise en fonctionnement des connaissances rencontrées dans les situations présentées.
Une dernière partie a permis un bilan des propositions et des échanges avec J.Y Jongbloet.

PREMIERE PARTIE

Introduction

Assurant pendant de longues années, la formation des enseignants préparant l'option F de ce qui s'appelle maintenant le CAPASH, je m'étais rendu compte de l'absence de documents (manuels, livres pour les professeurs) les aidant dans leur enseignement. Mon projet de début de retraite était donc d'élaborer des documents utiles aux enseignants de SEGPA, tenant compte de mes acquis de chercheur en didactique des mathématiques, mais sans engager une recherche aux normes universitaires. Pour réaliser ce projet, il me fallait commencer par trouver des enseignants acceptant de mettre à l'épreuve certaines de mes propositions ainsi que ma présence dans leurs classes. Cela n'a pas été très facile et je remercie D. Houdart et J.Y. Jongboët qui ont bien voulu s'engager dans cette démarche.

L'objectif de l'atelier était double : décrire une démarche d'enseignement des mathématiques pour les classes de 6ème et 5ème de SEGPA et inciter des collègues à s'investir sur ce créneau.

I) Le contexte de l'enseignement des mathématiques en SEGPA

Dans un tiers environ des collèges, une SEGPA accueille les élèves, qui : « à l'issue de la scolarité élémentaire, cumulent des retards importants dans les apprentissages scolaires et des perturbations de l'efficience intellectuelle, sans toutefois présenter un retard mental. Les

SEGPA ont pour objectif de permettre à ces élèves d'accéder, à l'issue de la formation en collège, à une formation professionnelle qualifiante.»

L'enseignement dispensé se veut le plus proche possible de celui destiné aux autres élèves de collège : « Les finalités qui y sont poursuivies sont celles des enseignements du collège même si les programmes n'y sont pas applicables à l'identique. » et plus précisément : « La classe de 6e a pour objectif de permettre à l'élève accueilli en SEGPA de s'approprier ou se réapproprier des savoirs en re-dynamisant les apprentissages. Pour ce faire, et avec toute la souplesse requise dans une démarche d'adaptation, les enseignants organisent leur action à partir des programmes de la classe de 6e du collège en prenant en compte les difficultés d'apprentissage rencontrées par les élèves. » (Circulaire juin 98).

Ces directives ont eu un effet bénéfique sur les attentes des enseignants vis-à-vis de leurs élèves et sur les plans d'étude, plus exigeants qu'auparavant. Mais, il y a une facette négative : il se développe dans ces classes un enseignement dont les contenus et les formes peuvent sembler proches de ceux en vigueur dans les classes ordinaires, conformément aux instructions, alors que deux caractéristiques des populations concernées (élèves et professeurs) les différencient :

- les niveaux en mathématiques des élèves, à l'entrée en 6ème, s'étendent entre celui visé à la fin du cycle 2 (et encore !) et celui de la deuxième année du cycle 3.
- les enseignants de SEGPA sont des enseignants du premier degré, dont la plupart n'ont pas de formation mathématique, même s'ils font l'essentiel de leur service dans cet enseignement.

Le divorce entre le niveau de connaissances des élèves et les objectifs assignés aux professeurs, en conduit beaucoup à privilégier un enseignement très formel, où les élèves peuvent obtenir des réussites, alors qu'ils sont incapables d'associer des connaissances aux techniques qu'on leur enseigne.

Ainsi, dans un manuel[1] de 6ème spécialement destiné à ces élèves (annexe 1), la première leçon sur les nombres décimaux comporte un premier encadré qui énumère sur quoi porte l'apprentissage des décimaux :

> « Je vais apprendre à :
> - identifier la partie entière et la partie décimale d'un nombre
> - identifier le chiffre des dixièmes, des centièmes des millièmes…,
> - écrire un nombre décimal compris entre deux nombres. »

[1] Augendre et Serrèque) (2002) maths 6ème

et propose un découpage en « technique » : l'usage du tableau de numération, et « sens » ainsi précisé : « il existe une infinité de nombres entre deux entiers ; la partie décimale permet de les exprimer ». L'enseignement consiste donc à fournir aux élèves une suite d'algorithmes leur permettant de développer quelques connaissances sur les décimaux (voir les exercices en annexe 2) mais en aucun cas, de comprendre à quels problèmes répondent ces nombres, ni comment ils sont construits.

Voici, en contrepoint, les réponses de groupes de deux élèves de $5^{ème}$ dans une activité permettant de prendre des informations sur le sens que les élèves donnent aux nombres décimaux : il s'agit pour chaque groupe, d'indiquer à l'enseignant la longueur d'une bande de carton à l'aide d'une unité de papier (pliable), pour que ce dernier puisse découper une bande de même longueur que celle dont dispose le groupe.

Après un certain nombre d'échanges avec le professeur, non concluants pour la plupart, la mise en commun finale fait apparaître trois types de messages :

« 2 u et un petit bout d'unité » (2 groupes)

« 2,0 u, 2,2 u ou 2,3 u ou 2,5 u » (6 groupes) mais aucun élève ne sait montrer à la professeure comment construire un segment de cette longueur,

« 2 u + ¼ u », (2 groupes, un peu aidés par l'enseignant quant à la formulation du message) qui a permis de construire une bande de la bonne taille.

Ainsi, plus de la moitié des groupes pensent bien à utiliser un nombre décimal pour indiquer une longueur comprise entre 2 entiers mais aucun ne sait attribuer un sens précis au chiffre décimal. Personne n'a parlé de dixième, la partie décimale correspond sans doute à « un petit bout en plus ».

Ces résultats sont représentatifs de l'état de savoir des élèves de SEGPA : ils disposent de connaissances « culturelles » dont ne disposent pas les élèves plus jeunes qui rencontrent pour la première fois ces notions mais ces connaissances ne sont pas efficientes.

On ne peut évoquer le contexte de l'enseignement en SEGPA sans aborder la question du « climat de classe ». Les problèmes sociaux de beaucoup d'élèves, les difficultés psychologiques de certains d'entre eux, contribuent à rendre difficile et souvent imprévisible la gestion des rapports entre les différents éléments de la classe, professeur et/ou élèves. Ces difficultés s'ajoutent à celles que rencontre le professeur d'un point de vue proprement didactique. Ceci peut expliquer pourquoi les enseignants avec lesquels j'ai travaillé choisissent un enseignement collectif (le même sujet pour tous au même moment) avec des temps de soutien différenciés quand ils en ont la possibilité. Je pense que ce choix est celui de la majorité des enseignants de SEGPA en ce qui concerne les mathématiques.

En conclusion, on peut formuler ainsi le problème didactique majeur auquel sont confrontés les enseignants : Comment travailler un domaine des mathématiques qui a déjà été enseigné, sans que les élèves aient l'impression de rabâcher, et en visant un double objectif : leur permettre de donner du sens aux concepts en jeu et les guider jusqu'à la maîtrise d'outils décontextualisés ?

II) Lignes directrices pour un enseignement des mathématiques en SEGPA

Les propositions faites aux enseignants s'appuient sur la théorie des situations didactiques en essayant de mettre en œuvre ses développements récents, en particulier sur les champs ouverts par la thèse de F. Genestoux.

Rappel : les étapes d'un processus d'enseignement

Tout processus d'enseignement d'une notion mathématique (dans le cadre de la théorie des situations didactiques) comporte une suite de « moments forts », correspondant aux situations–clés adidactiques. En général, l'entrée dans la situation « n » suppose des connaissances construites dans des situations antérieures. Ces connaissances doivent être suffisamment maîtrisées par les élèves, même si elles n'ont pas besoin de l'être complètement parce que à terme elles vont être remplacées par d'autres, plus simples, plus efficaces etc.. Des situations didactiques que j'appelle intermédiaires, qui permettent de retravailler certaines de ces connaissances « naissantes » sont nécessaires[2].

Quelques « principes » pour une adaptation aux classes de 6ème-5ème SEGPA

1) Il est nécessaire, et possible sous certaines conditions, de confronter les élèves de SEGPA à des situations, « à dimension adidactique[3] », dans lesquelles ils aient la possibilité de saisir l'enjeu des apprentissages en terme de prise de pouvoir sur le milieu, c'est-à-dire au cours desquelles ils aient la possibilité d'éprouver l'efficacité des connaissances dont ils disposent déjà ou des notions qui leur sont enseignées. Comment choisir un milieu pertinent ? Il est nécessaire de respecter la condition exigeante suivante : « *le savoir visé doit être représenté convenablement par les situations choisies* ». Ainsi, par exemple, l'entrée dans les décimaux par les problèmes de monnaie, très fréquente dans ces classes, n'est pas adéquate. J'ai choisi d'introduire les décimaux comme moyen d'exprimer une mesure sous la forme de la somme d'un nombre entier d'unités et d'une fraction décimale d'unité inférieure à 1, pour 2 raisons :

- c'est une démarche compatible avec les connaissances dont les élèves avaient fait preuve lors de la situation évoquée ci-dessus. Mais il ne s'agit pas de leur expliquer ensuite très vite que « quand ils proposent 2,2 u pour une longueur, cela veut dire qu'on a découpé l'unité en

---

[2] Voir des exemples dans Brousseau G. et N. (1987) Rationnels et décimaux

[3] Voir Mercier (1995) L'emploi de l'expression « à dimension adidactique » est justifié dans Salin (2006).)

dix parties égales et qu'on en prend deux morceaux » ! Ce qui est visé est de permettre, par un processus d'enseignement s'étalant sur plusieurs séances, de découvrir le sens de cette écriture et de pouvoir l'utiliser convenablement[4].

- D'autre part, commencer par travailler sur des fractions non décimales permet de revenir sur le sens de moitié, demi, tiers, « ième » et de ne pas isoler les fractions décimales des autres fractions.Des situations intermédiaires plus classiques, s'appuyant sur des exercices calibrés, sont nécessaires pour la mise en fonctionnement de ces connaissances, en vue de leur appropriation progressive et de leur institutionnalisation. En SEGPA, plus encore que dans l'enseignement ordinaire, ce travail, qui contribue à la transformation des connaissances en savoirs, est essentiel mais la conception en est difficile, car il faut trouver un équilibre entre le sous et le sur-apprentissage

3) Ces deux types de situations doivent être gérables à un coût pas trop élevé par les professeurs, sinon ils renoncent à les utiliser.

III) Quelles situations « à dimension adidactique »?

1) Les situations de « prévision »

Le problème posé concerne un milieu matériel effectif, sur lequel un « acteur » doit opérer. Il s'agit de prévoir le résultat de cette action, à partir d'un certain nombre d'informations données ou prises préalablement et non de lire le résultat, une fois l'action effectuée.

La vérification du résultat de la prévision est un moteur pour le retour sur la démarche qui a servi à la prévision.

Un exemple

- Matériel : 2 bandes de longueur 7/10 u et 5/10 u ; une règle graduée en dixièmes

P a préparé les 2 bandes qu'il montre rapidement, en indiquant leurs longueurs au tableau. Il rappelle ce que veut dire « mettre bout à bout », et le réalise derrière le tableau. Les élèves doivent prévoir la longueur totale [et découper une bande de cette longueur][5].Une fois les prévisions effectuées et, dans la mesure du possible, justifiées, la vérification effective donne l'occasion aux élèves, pour ceux qui ont réussi, d'augmenter leur confiance dans leurs raisonnements, pour ceux qui n'ont pas réussi, de revenir, avec l'aide de l'enseignant le plus souvent, sur le sens des écritures proposées et leurs transformations possibles, en l'occurrence pourquoi la longueur de la bande ne peut pas être 12/20 u (réponse fournie le plus fréquemment). **2) les situations « retournées » (Bloch 2004)**

[4] Je me suis appuyée sur l'introduction des fractions de CAP MATHS CM1

[5] Le professeur peut ou non laisser le découpage sous la responsabilité des élèves.

Dans une situation d'apprentissage par adaptation, le milieu doit être facteur de déséquilibres donc d'adaptation pour l'élève. Ceci peut être mis en œuvre à travers des modifications des tâches usuelles qui correspondent à un *retournement de la situation.* La situation est organisée de façon à ce que l'élève se trouve forcé à questionner les liens existants entre un milieu matériel sur lequel réaliser une action, et un résultat à obtenir

Un exemple[6]

A la première séance sur les fractions, nous avions prévu de reprendre la mesure de la longueur d'une bande par report de l'unité (tous les élèves se sont accordés sur 3u après une mise au point sur le soin à apporter au report), puis en utilisant une échelle graduée mais non numérotée. L'enseignante a ensuite demandé de numéroter les traits intermédiaires de l'échelle pour qu'on puisse mesurer très rapidement la bande : 11 élèves sur 14 ont commencé par 1 ! Quelle n'a pas été leur surprise de découvrir que la longueur de leur bande fournie par l'échelle était alors de 4 unités ! La discussion qui a suivi a permis d'expliquer le phénomène, de mettre en relation la solution avec l'attention à la position du zéro, pourtant rappelée constamment par l'enseignante dans les activités antérieures de mesurage. Il semble que ce mini-événement ait produit une espèce de choc puisque dans les exercices à faire à la maison, reprenant cet item, il y a eu très peu d'erreurs.

Si ce type de situation dite « retournée » n'est pas absent de l'enseignement destiné aux classes ordinaires, il est peu fréquent, alors que nous faisons l'hypothèse qu'il permet au professeur de diversifier les situations à proposer aux élèves pour les aider à se placer dans une position réflexive par rapport au savoir en jeu. **3) Remarques à propos de ces situations**

De nombreuses questions se posent, qui n'ont pas été développées au cours de l'atelier, mais dont certaines sont abordées dans Salin (2006). Je n'explicite ici que celles liées à la suite.

- Suffit-il de proposer une seule fois ces situations, en faisant le pari que la plupart des élèves auront saisi le lien entre le problème posé et la solution ébauchée par l'un d'entre eux ou proposée par l'enseignant ? La réponse est évidemment négative, il est donc nécessaire de confronter les élèves plusieurs fois au même problème, en modifiant certaines variables.
- Mais aussitôt, se pose la question : comment alléger le dispositif matériel pour rendre l'enseignement compatible avec les contraintes de ces classes ?

IV La construction de situations « intermédiaires »

Ces situations sont construites autour de séries d'exercices, de manière à fonctionner comme le font le plus souvent les enseignants de ces classes. Ces exercices sont cherchés individuellement, éventuellement avec l'aide du professeur, puis corrigés ensuite au tableau,

[6] dont la simplicité montre l'étendue du travail à mener !

suivant un mode assez strict. C'est à cette occasion que le professeur aide à repérer les erreurs, insiste sur ce qui est important etc.

La validation effective est réalisée au tableau tant qu'elle s'avère nécessaire. Une difficulté importante est de déterminer à quel moment les élèves n'ont plus besoin de vérification effective parce qu'ils disposent de critères de validité (Margolinas 1993) efficaces et donc combien de fois le même type de situation doit leur être proposé, et avec quelles variations sur les valeurs des variables. Dans les faits, il est nécessaire d'accepter une assez grande hétérogénéité des résultats des élèves et donc d'avancer dans le travail même si certains n'ont pas encore bien réussi.

C'est la « qualité » de ces exercices qui rend ce travail plus ou moins fructueux. Encore faut-il pouvoir définir des critères pour la qualifier. Les travaux de F. Genestoux (2000), qui, dans le cadre de la théorie des situations, a consacré une partie de sa thèse à l'étude de l'enseignement des savoirs destinés à être sus par cœur, comme la table de multiplication, paraissent susceptibles d'être étendus à l'étude d'apprentissages longs, se développant par étapes.

Assortiment didactique

La notion d'« assortiment didactique », qui modélise les séries d'exercices, en permet l'étude a priori. Un assortiment didactique est « une suite ordonnée de questions réunies autour d'une même intention didactique et réalisable dans une unité de temps didactique » dont on peut étudier les variables didactiques.

F. Genestoux distingue différents types d'assortiments suivant leurs finalités : pour apprendre du nouveau, pour l'entraînement du « déjà appris », pour l'évaluation. Ces 3 types d'assortiments sont nécessaires pour les élèves de SEGPA, mais le travail en cours présenté ici ne porte que sur les assortiments « pour apprendre du nouveau ».

Caractères des assortiments pour apprendre du nouveau : (Genestoux APM)…)

- forte redondance ;
- pas trop de nouveauté à la fois ;
- Pas de standardisation précoce d'écriture ou de présentation. C'est la vigilance cognitive de l'élève qui doit être sollicitée ;
- un plongement du nouveau dans du déjà connu (non problématique).

« En effet, si l'élève rencontre les nouvelles connaissances trop rarement par rapport à celles qu'il connaît déjà, il n'apprend pas. S'il les rencontre trop fréquemment (et donc si les occasions de les rattacher à ce qu'il connaît déjà se raréfient), il apprend mais ne saura pas réorganiser ses anciennes connaissances. Les apprentissages seront morcelés, indépendants et difficilement réinvestis. D’autre part, pour construire du nouveau, il faut le faire fonctionner sur du déjà familier ».

V) Les limites de ce travail

Elles sont la conséquence d’une situation de bricolage méthodologique : je n’ai pas les moyens (ni la motivation) de recueillir les données nécessaires à un minimum de validation de la démarche présentée. Je ne peux que me fier aux observations que je réalise chaque semaine et aux échanges avec l’enseignant de la classe. Ces observations m’incitent à penser que la voie que nous explorons peut permettre des avancées pour les élèves, concernant leurs connaissances et leurs rapports aux mathématiques. Chaque nouvelle situation leur demande un temps d’adaptation important, mais nous n’observons pas les phénomènes de découragement et de rejet, fréquents dans ces classes. Les « situations intermédiaires » sont particulièrement nécessaires pour que les élèves s’engagent dans l’élaboration de critères de validité pertinents.

REFERENCES CITEES

BLOCH, I. (2005). Dimension adidactique et connaissance nécessaire : un exemple de ‘retournement’ d’une situation. In Salin M.H., Clanché P. & Sarrazy B. (Eds) *Sur la théorie des situations didactiques,* Grenoble : La Pensée Sauvage Editions

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage

BROUSSEAU, G. & BROUSSEAU, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire,* Talence : IREM de Bordeaux.

GENESTOUX, F. (2002) Les assortiments didactiques In Dorier J. L. (Ed). *Actes de la 11e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématique.* (CD-rom Thème2-TD2)Grenoble : La Pensée Sauvage.

MERCIER A. (1995). Les effets de l'intervention enseignante dans le milieu des situations adidactiques. In Margolinas (ed), *Les débats de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage

SALIN Marie-Hélène (2007) Situations et assortiments d’exercices pour l’enseignement des mathématiques destiné aux élèves de collège en grande difficulté scolaire in Bednarz, N., Mary, C. (dir.) (2007) "*L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés*". Actes du colloque EMF 2006 (cédérom). Sherbrooke: Éditions du CRP

DEUXIEME PARTIE : TRAVAIL EN ATELIER

Deux thèmes très différents ont été proposés, l'un sur les fractions, l'autre sur l'alignement.
- dans l'un, il s'agit de redonner du sens et d'aider à la structuration de connaissances déjà rencontrées par certains élèves mais dont ils maîtrisent très peu l'utilisation dans des situations autres que purement formelle ;.
- dans l'autre, il s'agit de connaissances réellement nouvelles dans un domaine, l'espace, très mal maîtrisé, dont les élèves auront un besoin important plus tard et qui ne relève pas des programmes du collège. D'où le rôle important d'interactions avec le milieu spatial.

Dans les deux cas, il s'agit de s'interroger sur les « situations intermédiaires » favorables à la mise en fonctionnement des connaissances rencontrées une première fois.Après une présentation rapide des deux premières séances du thème « fractions », et le la première du thème « alignement », deux groupes ont été constituées avec comme consigne : « Comment retravailler les connaissances rencontrées dans cette leçon, sous la forme d'une suite d'exercices, sans introduire de franchement nouveau, mais sans que ce soit répétitif ? »

Une mise en commun trop rapide a permis de pointer les différences entre les 2 thèmes et la difficulté à différencier le « nouveau » du « pas nouveau ».

Ce compte-rendu comprend la fiche didactique de la deuxième séquence sur les fractions, la liste des proposition des collègues et quelques exercices proposés aux élèves. Le travail sur l'alignement n'a pu être qu'effleuré par les participants. il n'a pas donné lieu à un compte-rendu exploitable par écrit.

Annexes

Annexe 1

Fiches de préparation des deux premières séances sur les fractions

SEGPA 5ème Fractions *Extrait de la séance 1*

Objectifs de la séance :

- revenir rapidement sur le mesurage des longueurs, et le vocabulaire associé : unité, report
- coder par des entiers une échelle fournie aux élèves, l'utiliser pour mesurer des longueurs de bandes et des segments
- poser le problème de la mesure d'un segment dont la longueur n'est pas égale à un nombre entier d'unités (la question est posée à la fin de la phase 3. Il s'agit seulement de conclure sur le fait qu'il ne s'agit pas d'un nombre entier).

Phase 3

Vous allez maintenant utiliser votre instrument pour mesurer des segments, tracés sur cette feuille et en tracer vous-même deux de la longueur indiquée

Correction rapide : pour les longueurs à mesurer, par mise en commun, pour les segments à tracer à l'aide d'un calque sur lequel sont tracés les segments, réalisé par le professeur.

Pas d'erreurs notoires, la correction se fait rapidement

Que se passe-t-il pour les 2 derniers, KL et MN ? Examen des réponses proposées par les élèves J'ai noté à la volée : 5 et demi, ou 5, 2 ou 5,5

Conclusion : *la prochaine fois, c'est sur cette question-là que l'on va travailler : comment indiquer des longueurs plus petites que l'unité ?*

SEGPA 5ème Fractions Séance 2

Communiquer une longueur avec pliage de l'unité[7]

Objectifs :

- reposer le problème de la désignation d'une longueur qui n'est pas égale à un nombre entier d'unités (ou le poser s'il n'a pas été abordé à la séance 1)
- introduire les fractions d'unités : ½ u, ¼ u et ¾ u et l'écriture 2 u+ ½ u, etc…
- relations entre ¼ u + ¼ u, ½ u et 2/4 u

Matériel

- des bandes de carton ayant comme longueur 2 v + ¼ v, 3 v + ½ v et. v + ¾ v

[7] Les résultats de cette séance sont évoqués dans la partie I

- des unités papier (facilement pliables), (longueur v : 6 cm)
- « l'instrument » pour unité de 6 cm, sur transparent
- une fiche d'exercices

Déroulement

Phase 1 : Essai de formulation par quelques élèves de ce qui a été fait à la séance précédente et correction des exercices. […]

Phase 2 : Examen des réponses pour KL et MN, longueurs des segments de la séance 1. Formuler le problème, relever les réponses, montrer que tout le monde n'est pas d'accord, et introduire la suite en disant : *je ne vais pas vous dire qui a tort, qui a raison, mais nous allons faire la chose suivante : je vais vous donner par groupes de 2 une bande et vous allez m'indiquer sa longueur sur ce papier, comme si vous étiez mes clients et moi, le marchand de bande (évoquer peut-être les magasins de bricolage). Ensuite, devant vous, je prendrai vos indications et j'essaierai de découper une bande de la même longueur que la vôtre. Pour cela, je vous donne la nouvelle unité, une bande graduée avec cette nouvelle unité, et la bande dont vous devez me donner la longueur. L'unité que je vous donne est en papier, vous pouvez la plier mais pas la découper. Nous verrons quelles sont les indications qui permettent de découper ma bande pour qu'elle soit de la même longueur que la votre.*

Phase 3 : Le professeur distribue le matériel à chaque groupe de deux.

Temps de recherche (5 min ?) puis temps collectif

P définit les règles du jeu : le groupe dont on examine les indications au début ne dit rien. Il regarde ce que fait et dit le P au tableau. Il s'explique ensuite, s'il le demande.

Propositions possibles et arguments :

- 2v et cette longueur (représentée sur le papier, par exemple un petit segment) : renvoyer à l'usage social des mesures et au fait qu'il faut trouver un moyen utilisant des nombres
- 2v et demi ou 2 et la moitié : P plie suivant les indications, cela ne va pas.
- 2v et un petit bout : P prend un petit bout différent du ¼
- 2,2v ou même 2,5v : comment est-ce que je fais pour mesurer ? avec cette unité, je n'ai pas de règle.
- 2v et quelque chose qui exprime qu'on plie en 2 et en 2, ou un quart, si cela apparaît : réalisation de la bande et réussite. Si aucun groupe ne l'a proposé, c'est P qui le propose comme une solution au problème posé

Moment d'introduction de l'écriture ¼ v, mise en relation avec d'autres rencontres avec ¼ si déjà faites.

La longueur de la bande est 2v + ¼ v . Commentaire sur l'écriture : pourquoi utilise-t-on le signe + ?

Phase 4 Retour aux segments KL et MN : quelle est leur longueur (avec l'unité u) ?
On peut penser que certains vont hésiter pour1/2. Les trois écritures peuvent être proposées pour KL : 4u + ¼ u + ¼ u ou 4 u + ½ u ou 4u + 2/4 u. Faire écrire l'égalité : ¼ u + ¼ u = ½ u = 2/4 u

Annexe 2

Propositions des collègues pour une suite à cette séance (en supposant que la séance se soit relativement bien déroulée, c'est-à-dire que le professeur ait pu aller jusqu'aux conclusions énoncées) :

- reprendre les activités décrites en changeant le matériau
  - Bande graduée en unités et en quarts (réglure Siéyès en vertical)
  - Bande graduée, mais pas à partir du début (analogue des instruments incomplets)
  - Exploration du ruban de couturière, en particulier le côté recto-verso (les graduations d'un côté et de l'autre sont en situation complémentaire)
  - Exploration de la règle anglaise; la difficulté est de la justifier par un contexte (quoique certains jeux de rôles se mesurent en pouces)
  - faire fabriquer la graduation
- travailler sur la « motivation » des activités
  - Mesures d'objets (type jardin avec ficelle)
  - comparaison de circonférences de prismes à base convexe (tuyaux, boîtes de conserve, tétrabrick)
  - comparaison de rectangles
  - comparaison directe vs objet intermédiaire
- questions que s'est posé le groupe
  - comment passer de la manipulation à l'abstraction.
  - L'unité de mesure doit-elle être la plus petite?
  - comment faire le lien entre la mesure et l'étalonnage de la règle ?

Remarques sur ces propositions :
Dans l'ensemble, elles dépassent l'objectif proposé : par exemple, modifier le matériau en utilisant les réglures seyès est une idée intéressante mais qui , à mon avis, ne peut venir à la séance suivant la séance étudiée. Il faut d'abord que les élèves aient l'occasion de faire fonctionner sous leur propre responsabilité les connaissances rencontrées dans la séance, sans que le milieu soit modifié. Ce n'est que peu à peu que celui-ci peut bouger.

L’annexe 3 donne une idée des exercices proposés dans la séance suivante, chaque exercice est un prototype d’une série dont le titre indique la caractéristique.

Annexe 3

Série 1 : refaire plusieurs fois l’activité, objet de la séance 2, comme par exemple :

1) Indique à ton voisin la longueur du segment MN avec l’unité u

M N

2) Trace sur (D) un segment PQ de la longueur indiquée par ton voisin
(D)

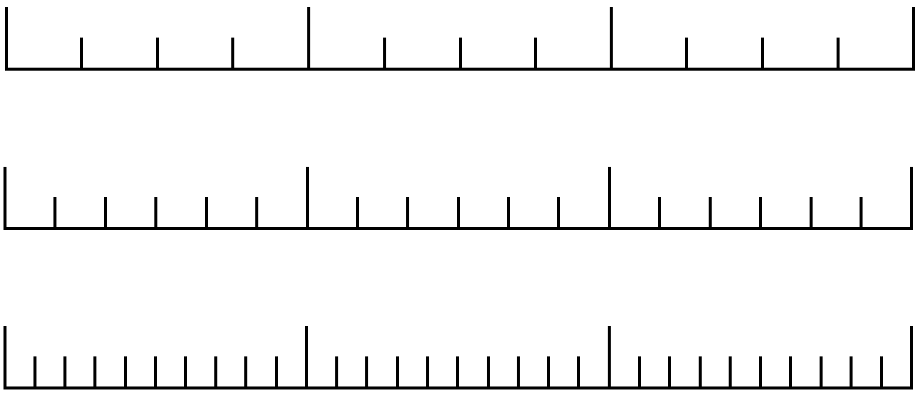
Comparez vos segments en vous aidant de la bande beige *(une bande sur laquelle les élèves peuvent repérer la longueur des segments)*

Série 2 : introduire un petit peu de nouveau
3) Plie ton unité en 2 puis encore en 2 et encore une fois en 2. Quelle est la longueur de la petite bande que tu obtiens ?

4) Comment construire un segment qui mesure 3/8 u ? Traces-en un

Série 3 : il faut décider ![8]
Matériel
Un matériel nouveau est proposé : des règles graduées avec des fractions de l’unité, pour pouvoir mesurer les longueurs de segments de manière rapide

3 règles de découpages différents dont une règle décimale



[8] Les longueurs des segments sont exactes pour au moins une des règles, ce qui bien sûr, est artificiel !

Exercices :

1) Choisis la bonne règle pour mesurer la longueur de ces trois segments

A B

AB =

C D

CD =

E F

EF =

LES DESSOUS DU NUMERIQUE

Claire Margolinas
IUFM d'Auvergne & Université Blaise Pascal
de Clermont-Ferrand, Equipe Démathé, INRP, France
claire.margolinas@univ-bpclermont.fr

Olivier Rivière
IUFM d'Auvergne & Université Blaise Pascal
de Clermont-Ferrand, Equipe Démathé, INRP, France
olivier.riviere@univ-bpclermont.fr

RESUME

L'objectif de l'atelier était double :

- (a) de réfléchir aux difficultés des élèves qui ont été mises en évidence par l'équipe Démathé « Développement des mathématiques à l'école » INRP, en partenariat avec l'IUFM d'Auvergne à partir notamment de documents vidéos réalisés,

- (b) d'envisager des possibilités d'usages du cédérom en formation d'enseignants.

Les difficultés concernent « les dessous du numérique » c'est-à-dire « en deçà des connaissances numériques bien identifiées par les professeurs » ? C'est en particulier celles liées à l'énumération, en référence aux travaux de Joël Briand (Briand, 1999 et 1993) qui ont été travaillées. Pour mieux comprendre les difficultés liées à l'énumération, une situation d'observation (de la moyenne section au CM2) où l'énumération intervient seule, ou principalement, a été présentée.

L'équipe Démathé « Développement des mathématiques à l'école » est une équipe de l'INRP, en partenariat avec l'IUFM d'Auvergne. Depuis 2003, nous avons notamment développé un document (cédérom, Hatier 2009) destiné aux professeurs de l'école primaire, qui concerne « Les dessous du numérique » c'est-à-dire, en deçà des connaissances numériques bien identifiées par les professeurs, les connaissances qui posent problème aux élèves dans la résolution de problèmes du domaine numérique ou d'autres. Nous nous sommes appuyés sur des recherches existantes (Briand, 1999; Briand, Loubet, & Salin, 2004), que nous avons complétées sur certains points. Nous avons proposé aux participants (a) de réfléchir aux difficultés des élèves telles que nous les mettons en évidence, à partir notamment de documents vidéos que nous avons réalisés ; (b) d'envisager des possibilités d'usages du cédérom en formation d'enseignants.

1. Une démarche de développement

1.1. Différents points de vue sur la recherche et le développement

Selon les pays et selon les disciplines, les traditions de recherche dans les différentes didactiques entretiennent des relations plus ou moins étroites avec le développement et l'innovation. En France et en mathématiques, il est courant de distinguer assez nettement des recherches fondamentales qui, en didactique comme dans d'autres disciplines, cherchent à augmenter nos connaissances sur les phénomènes qui se produisent dans l'enseignement des mathématiques, de recherches appliquées qui cherchent à produire des développements dans les pratiques d'enseignement (Margolinas, 2005).

Ces distinctions ne règlent pas la question des relations entre la recherche fondamentale et la recherche de développement. En effet, la recherche fondamentale a souvent recours à l'ingénierie pour produire des résultats, situation qui conduit nécessairement à affronter la réalité des classes et à construire, pour ces classes, des séquences qui sont parfois interprétées comme des « propositions didactiques » susceptibles, avec certaines adaptations, d'être proposées pour être mises en application dans les classes ordinaires, en contradiction même avec les intentions de leurs auteurs (Brousseau, 1998).

C'est sans doute à cause de cette apparente proximité entre ingénierie et pratique de classe qu'un schéma classique pour décrire les relations entre recherche fondamentale et développement peut se résumer ainsi (Margolinas, Mercier, & René de Cotret, 2007) : on imagine – idéalement – une sorte de chaîne descendante de la recherche fondamentale à l'ingénierie, au développement et à l'enseignement qui, pour sa part, fournit en retour une partie des questions pour la recherche fondamentale. Sans que ce schéma ne se trouve jamais écrit tel quel, il semble sous-jacent à certaines conceptions des relations entre recherche et enseignement, il n'y a qu'à penser aux discours sur la « théorie », la « pratique » et « l'articulation théorie-pratique » pour s'en convaincre.

Notre démarche1 est assez différente. En effet, nous faisons l'hypothèse que suffisamment de documents destinés à la classe (manuels, livres du maître, fichiers etc.) sont disponibles à l'heure actuelle, mais que les professeurs peuvent avoir, sur certains sujets, des difficultés à

[1] Groupe Développement des Mathématiques à l'Ecole (Démathé), INRP, dont la composition est variable depuis sa création en 2003.

nourrir des choix didactiques cohérents dans les situations variées dans lesquelles ils se trouvent : compréhension de stratégies des élèves dans certaines situations, réponses directes à des questions d'élèves, choix dans les situations proposées par les manuels, planification et organisation de l'enseignement, etc. Une telle démarche nous conduit à rechercher, dans les travaux de recherche fondamentale, les éléments épistémologiques de compréhension des savoirs mathématiques qui, le plus souvent, n'ont fait l'objet d'aucune diffusion en direction des professeurs et à nous demander comment une telle diffusion pourrait être possible.
C'est le résultat d'une telle démarche que nous esquissons ici.

1.2. L'énumération

Le premier sujet que nous avons décidé de traiter concerne l'énumération, nous nous référons donc à (Briand, 1999), dont la thèse sous la direction de Guy Brousseau (Briand, 1993) a exploré ce concept :

> « […] pour contrôler une situation de comptage, l'enfant doit faire fonctionner une connaissance (l'énumération) qui se réfère à l'exploration de la collection et qui conditionne complètement le bon déroulement de l'activité » (p. 52)

Il décrit alors le cas d'un élève qui doit compter le nombre d'éléments (des arbres dessinés sur une feuille de papier) et qui n'y parvient pas, alors qu'il connaît la comptine. Voici comment l'auteur analyse cette difficulté :

> « Quelle est la nature du problème qui se pose à cet élève ? Ce ne sont pas les connaissances relatives au nombre qui sont en cause. L'enfant échoue alors qu'il dispose de la suite numérique et d'un procédé d'exploration relativement bien organisé (deux chemins). Il s'agit donc d'une absence de connaissance (l'énumération) qui se manifeste par une absence de synchronisation effective entre une connaissance numérique et une organisation conjointe de la collection et qui empêche l'inventaire de la collection. » (p. 53)

Briand donne alors une description de l'activité :

> « Pour compter le nombre d'éléments d'une collection finie montrée, l'élève doit nécessairement :
>
> - *Etre capable de distinguer deux éléments différents d'un ensemble donné.*
> - *Choisir un élément d'une collection*
> - *Enoncer un mot nombre (« un » ou le successeur du précédent dans une suite de mot-nombres).*
> - *Conserver la mémoire de la collection des éléments déjà choisis.*
> - *Concevoir la collection des objets non encore choisis.*
> - *Recommencer (pour la collection des objets non encore choisis) 2-3-4-5 tant que la collection des objets à choisir n'est pas vide.*
> - *Savoir que l'on a choisi le dernier élément.*

- *Enoncer le dernier mot-nombre. » (p. 53)*

Les étapes en italiques caractérisent une connaissance non enseignée que Briand appelle énumération. Cette mise en évidence utilisée par l'auteur montre l'importance de ces étapes souvent ignorées par rapport à celles qui font intervenir les « mot-nombres » (seulement 3 et 8).

On retiendra que l'énumération est l'action d'organisation d'une collection qui permet de la parcourir d'une façon systématique et donc ordonnée.

L'énumération est nécessaire au comptage, mais ne dépend pas de la connaissance de la comptine. Briand a montré qu'il existait des situations d'énumération sans comptage et que l'énumération était enseignable (Briand et al., 2004). C'est dans le cadre de ces situations d'énumération « pures » qu'il a raffiné l'analyse des variables concernant l'énumération.

Son analyse permet notamment de comprendre les difficultés en jeu dans des items d'évaluation désormais classiques, tels que ceux que l'on peut trouver sur le site du ministère de l'éducation nationale en France2. Les élèves qui doivent « compter les ronds » placés en ligne (14 ronds) ou en désordre (8 ronds) présentent des difficultés d'énumération : ils sautent des ronds ou comptent le même plusieurs fois, le plus souvent sans difficulté dans l'énoncé de la comptine numérique. On remarque au passage que les concepteurs de cette évaluation ont choisi un nombre de ronds à compter « dans le désordre » (variable qui complique l'énumération) presque la moitié du nombre de ronds « en ligne ». Dans ces conditions, on obtient les mêmes résultats dans les deux configurations.

1.3. Une question de forme… et de fond

Notre démarche consiste à produire des documents pour le professeur, or les descriptions comme celles ci-dessus ne nous semblent pas nécessairement appropriées, pour plusieurs raisons. Tout d'abord il n'est pas facile de se représenter précisément ce qu'implique chacune des étapes de l'énumération. Ensuite le professeur ne s'intéresse à cette question qu'au travers de difficultés constatées chez des élèves, or dans cette description, même si ces difficultés sont évoquées, il faut tout de même les reconstruire.

C'est pourquoi, sans que cela relève d'une « mode » ou d'une intention au départ, nous avons décidé d'opter pour une forme de CD-Rom pour notre document. En effet, il est très facile, à l'aide d'un clip vidéo, de montrer les actions effectives des élèves dans des tâches d'énumération, là où la description est malaisée (Margolinas, Wozniak, De Redon, & Rivière,

[2] http://www.banqoutils.education.gouv.fr/fic/ECPCAB01.pdf (Consulté le 13 avril 2008).

2007). De plus, l'insertion de clips vidéo permet au professeur de se trouver, comme dans la classe, en situation d'observation des actions des élèves, ainsi, ce qu'il pourra mieux comprendre au travers de notre document pourra sans doute plus facilement être réinvesti en classe en situation.

C'est bien parce que cette dimension d'observation nous semble au cœur du travail du professeur (Margolinas, 2002) que nous avons opté pour cette forme. En effet, nous pensons que l'observation des difficultés des élèves est un moteur de développement des pratiques des professeurs, ce que nous a confirmé une enquête (Margolinas & Wozniak, accepté) que nous avons réalisée.

Rendre compte de ce travail dans un texte n'est pas aisé, tant la forme adoptée est importante dans le cadre de notre travail ; dans la suite de ce texte, nous en donnerons néanmoins quelques éléments.

2. L'importance de l'énumération dans les apprentissages

2.1. L'énumération et les autres disciplines

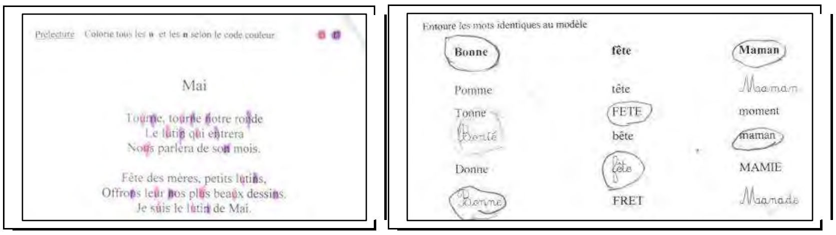


Figure 1 – L'énumération en prélecture

L'énumération intervient rarement isolée d'une autre activité, dans un premier temps, nous l'avons rencontrée dans le cadre du dénombrement. En fait, elle n'est pas réservée au domaine des mathématiques. Il y a de très nombreuses activités durant lesquelles il faut parcourir une collection de façon ordonnée et contrôlée.

Voici deux exemples très typiques en prélecture, que nous avons recueillis en grande section de maternelle (élèves de 5-6 ans), au mois de mai. Dans le premier il faut retrouver des lettres suivant un modèle. Il faut donc parcourir toute la collection des lettres pour retrouver les lettres u et n du modèle. Dans le second, il faut parcourir toute la collection des mots pour retrouver le mot du modèle. Cette deuxième fiche cache en fait une autre activité d'énumération, car les enfants ne savent pas lire. Quand ils considèrent un mot, ils doivent comparer les lettres de ce mot avec les lettres du modèle, une par une, dans l'ordre.

Dans nos observations en maternelle, nous avons remarqué que, pour les élèves les plus faibles, pour lesquels la reconnaissance de la lettre ou du mot est déjà difficile, le parcours de la collection des lettres ou des mots ne va pas de soi non plus. Ils sont confrontés à une double difficulté : celle de la lecture, qui est repérée par le professeur, et celle de l'énumération, qui n'est souvent pas considérée.

Avec cette clé d'observation, il est possible de voir de l'énumération partout… effectivement, énumérer est une activité très courante, combinée avec toute sorte d'autres activités, qu'elles soient ou non mathématiques.

2.2. Recherche d'une situation

Pour mieux comprendre les difficultés liées à l'énumération, il peut être important de les observer dans des situations où l'énumération intervient seule (ou principalement), alors que nous venons de voir que l'énumération intervient dans de nombreuses situations où elle est liée à d'autres connaissances et, de ce fait, souvent mal identifiée. Nous avons conçu une telle situation, destinée à l'observation.

Une situation d'énumération nécessite la construction d'un parcours ordonné et contrôlé. La difficulté, surtout si on cherche une situation sans dénombrement, c'est de trouver un moyen de valider ce parcours. Notre solution (le lecteur pourra en trouver d'autres, nous n'en doutons pas !) consiste à disposer de petits objets (des morceaux de sucres, dans le CD-Rom) sur une table et à les cacher sous de petits « chapeaux » de papiers (voir figure 2).

Figure 2- Une situation d'énumération

L'élève doit récupérer tous les sucres cachés sous les chapeaux, pour cela, il doit soulever un seul chapeau, prendre le sucre, le déposer dans la boîte et replacer le chapeau au même endroit (l'emplacement est marqué par une croix sur la feuille). S'il soulève un chapeau et ne trouve pas de sucre, il a perdu. Quand l'élève annonce qu'il a terminé, on enlève tous les chapeaux, si tous les sucres ont bien été trouvés, l'élève a gagné.

2.3. Observation d'une situation d'énumération

Nous avons observé des élèves hors classe dans cette situation de la moyenne section de maternelle (élèves de 4-5 ans) au CM2 (élèves de 10-11 ans). Notons tout d'abord qu'il y a une très grande diversité des réussites et des échecs (des élèves jeunes réussissent, des élèves âgés échouent), ce qui est caractéristique d'une connaissance qui, n'étant pas enseignée, évolue peu. Par ailleurs, les stratégies des élèves montrent bien une organisation plus ou moins efficace.

Certains élèves (comme Olivia, 8 ans) soulèvent des chapeaux dans l'ensemble de la feuille sans organisation visible. Leur échec est prévisible.

La plupart des élèves qui réussissent traitent séparément deux sous-collections : une sous-collection composée des cinq éléments à gauche sur la figure 2 et une sous-collection composée des dix éléments restants. La sous-collection de gauche, peu nombreuse, est énumérée assez simplement. Par contre, beaucoup d'élèves ont des difficultés avec la sous-collection de droite de dix éléments.

Ceux qui réussissent parcourent cette sous-collection en ayant recours aux deux organisations sous-jacentes à la raison graphique (Goody, 1977/1979) : les lignes et les colonnes. La reconnaissance de ces organisations permet de comprendre que l'énumération n'est pas « naturelle », mais qu'elle se construit : c'est une connaissance. Elle permet aussi de considérer l'agencement des points à énumérer comme un jeu de variables : plus cet agencement est proche d'une organisation facile à identifier, comme celle des lignes ou des colonnes, plus l'énumération est simple.

Cette analyse nous semble importante pour le professeur. Elle permet, dans une tâche où l'énumération intervient (pas nécessairement isolément) de repérer les difficultés qui lui sont spécifiques, ce qui permet au professeur de prendre des décisions. En effet, si l'objet du travail n'est pas l'énumération et qu'elle n'intervient que comme une gêne, le professeur peut modifier l'exercice à l'avance pour simplifier l'énumération. Au contraire, quand il souhaite que les élèves travaillent les connaissances d'énumération, il peut laisser celle-ci à leur charge pour qu'ils s'y essayent. Il peut aussi, quand il le juge opportun, montrer aux élèves qu'il est possible d'organiser l'énumération en s'appuyant sur des formes de base (comme ligne et colonne). En effet, même s'il est possible d'enseigner l'énumération, comme l'a montré Briand, il est possible aussi d'être attentif, comme pour les autres connaissances, à permettre son apprentissage, même dans des situations non spécifiques. Les situations ordinairement vécues à l'école maternelle en donnent de très fréquentes occasions.

Ce qui est important ici, c'est que nous montrons, dans le cas de l'énumération, que la « capacité à s'organiser », qui est souvent décrite par les professeurs comme une « propriété de l'élève » (celui-ci s'organise mal !), est en fait une connaissance, qui peut être travaillée.

Ce qui nous semble important également, c'est que cette analyse ne préjuge pas d'une forme d'enseignement, celle-ci est à la charge du professeur. Notre travail cherche à donner des clés d'observation des difficultés des élèves pour les professeurs, qui puissent les conduire à prendre des décisions qui prennent mieux en compte les connaissances en jeu, telles qu'elles ont été mises en évidence par les recherches en didactique des mathématiques. Par contre, nous ne cherchons pas à intervenir sur les formes d'enseignement, qui ont bien entendu aussi leur importance. Nous pensons en effet qu'il peut être important d'aider les professeurs à trouver des formes d'enseignement plus efficaces, mais qu'il est aussi essentiel de leur fournir de meilleurs instruments de choix pour nourrir leur pratique.

3. Les gestes de l'activité mathématique

Le travail que nous présentons ici peut sembler trivial ; en effet, l'organisation des collections est parfois considérée comme une activité qui va de soi, une « simple » difficulté à organiser ses actions. Pour comprendre ces difficultés, il faut en effet s'intéresser de façon précise à ce que l'élève fait avec ses mains, où il dépose les objets qu'il a à traiter. On est bien loin de la preuve, de l'argumentation, encore moins de la démonstration, qui donnent aux mathématiques ses lettres de noblesse !

Notre intérêt ne s'exerce pourtant pas au hasard, puisque Guy Brousseau (1998, résumé des travaux entrepris depuis les années 60) a montré l'importance des modèles implicites d'action qui sont les générateurs des connaissances.

Pourtant, d'une façon plus générale, les gestes de l'activité mathématique, dans leur dimension matérielle, ne sont souvent pas considérés comme relevant d'apprentissages et encore moins d'un enseignement. On constate ainsi que trop souvent le maniement d'instruments aussi simples que la règle, pour ne pas parler des ciseaux, est négligé dans le cadre scolaire, le professeur déplorant leur mauvais usage, sans pour autant entreprendre d'action effective pour en améliorer l'efficacité.

Tout se passe comme si l'élève aurait du apprendre ailleurs, dans l'environnement social et principalement la famille, certains gestes nécessaires pour sa réussite dans l'accomplissement des tâches scolaires. Et pourtant, nous montrons que ce n'est pas le cas. Il y a là une source de malentendu, voire de méfiance, entre l'école et les familles, dont les origines sont sans doute multiples, l'une d'elle pouvant être recherchée dans les interactions entre les modifications des pratiques sociales et les impératifs scolaires (Margolinas, René de Cotret, & Giroux, 2006). Le cas de l'organisation des collections nous paraît assez emblématique de ces tensions, en effet, si la famille implique les enfants par exemple dans certaines tâches ménagères, comme cela a pu être le cas plus fréquemment autrefois, non pas pour apprendre quoi que ce soit aux enfants, mais pour partager certains travaux fastidieux, il est possible que ces situations fournissent aux enfants des occasions d'organiser des collections complexes (le tri des pierre dans les paquets de lentilles, par exemple), l'école n'a alors pas la charge spécifique d'organiser cette rencontre entre l'élève et ces types de situations.

Ainsi, l'impression de « trivialité » des connaissances liées à l'organisation des collections et à l'énumération est peut-être à mettre en relation avec une non légitimité historique de ces connaissances dans le cadre scolaire, que les transformations sociales obligent à reconsidérer.

4. Conclusion

Le CD-Rom que nous avons présenté est conçu *a priori* comme le premier élément d'une collection dont nous espérons qu'elle pourra un jour s'enrichir (sachant que malheureusement chaque élaboration prend beaucoup de temps). La difficulté de notre travail est que ce document, qui développe des éléments d'analyses épistémologique et didactique du travail de l'élève, est destiné à l'auto-formation des professeurs des écoles. L'ambition est modeste, puisque nous ne traitons qu'un tout petit aspect des mathématiques à l'école.

Néanmoins, les interactions avec les participants de l'atelier permettent d'envisager que d'autres aspects du métier de professeur, voire du rapport aux mathématiques pourraient être également visés.

En effet, nous montrons d'une part qu'il faut douter du caractère purement personnel de certaines qualités (savoir s'organiser) ce qui peut conduire à considérer différemment certaines difficultés récurrentes des élèves. Nous montrons d'autre part la nécessité de développer des mécanismes d'observation et des éléments d'analyse de ces difficultés.

Références bibliographiques

BRIAND, J. (1993). *L'énumération dans le mesurage des collections.* Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, Bordeaux.

BRIAND, J. (1999). *Contribution à la réorganisation des savoirs prénumériques et numériques. Étude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine prénumérique*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 19(1), 41-76.

BRIAND, J., LOUBET, M., & SALIN, M.-H. (2004). *Apprentissages mathématiques en maternelle*. Paris, Hatier.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble, La Pensée Sauvage.

GOODY, J. (1977/1979). *La raison graphique* (J. Bazin & A. Bensa, Trans.). Paris, Les éditions de minuit.

MARGOLINAS, C. (2002). *Situations, milieux, connaissances : analyse de l'activité du professeur*. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques (pp. 141-156).* Grenoble, La Pensée Sauvage.

MARGOLINAS, C. (2005). *Essai de généalogie en didactique des mathématiques.* Revue suisse des sciences de l'éducation, 27(3), 343-360.

MARGOLINAS, C., MERCIER, A., & RENE DE COTRET, S. (2007). *Les développements curriculaires dans l'enseignement obligatoire*. In L. Trouche, V. Durand-Guerrier, C. Margolinas & A. Mercier (Eds.), *Quelles ressources pour l'enseignement des mathématiques? Actes des journées mathématiques INRP 14 et 15 juin 2006 (pp. 25-36).* Lyon, INRP.

MARGOLINAS, C., RENE DE COTRET, S., & GIROUX, J. (2006). *Transformation de situations sociales et leurs conséquences sur certaines connaissances en jeu en contexte scolaire.* Paper presented at the L'école, lieu de tensions et de médiations : Quels effets sur les pratiques scolaires ? Actes du colloque international de l'AFEC, Lille.

MARGOLINAS, C., & WOZNIAK, F. (accepté). *Usage des manuels dans le travail du professeur : l'enseignement des mathématiques à l'école primaire*. *Revue des sciences de l'éducation.* Numéro spécial: Les manuels scolaires : réformes curriculaires, développement professionnel et apprentissages des élèves.

MARGOLINAS, C., WOZNIAK, F., DE REDON, M.-C., & RIVIERE, O. (2007). *Les mathématiques à l'école ? Plus complexe qu'il n'y paraît ! Le cas de l'énumération de la maternelle... au lycée.* Bulletin de l'APMEP, 471, 483-496

UTILISER DES ALBUMS NUMERIQUES POUR ENSEIGNER LES MATHEMATIQUES A L'ECOLE

Annie CAMENISCH
Maître de Conférences Sciences du langage, IUFM d'Alsace
EA 1339, Université Marc Bloch, Strasbourg
annie.camenisch@alsace.iufm.fr

Serge PETIT
Formateur en mathématiques, IUFM d'Alsace
EA 1339, Université Marc Bloch, Strasbourg
serge.petit@alsace.iufm.fr

RESUME

L'objectif de l'atelier était de produire des outils pour utiliser les albums numériques (ou albums à compter) en vue d'apprentissages ciblés en mathématiques, en mettant en œuvre des démarches de lecture et d'écriture appropriées.

A partir d'une analyse tant linguistique et littéraire que mathématique d'un certain nombre d'albums numériques, plusieurs pistes d'exploitation en cycle 1 ou cycle 2 ont été proposées aux participants réunis en petits groupes. Il s'agissait d'une part de réfléchir à la manière d'exploiter certains albums en levant des obstacles à certains apprentissages mathématiques, d'autre part de prendre appui sur des albums pour élaborer des énoncés de problèmes (cycle 2).

Par ailleurs, un groupe a testé proposé une démarche de production d'écrit permettant aux élèves de fabriquer des albums numériques en vue d'une meilleure compréhension des implicites mathématiques.

Les albums numériques ont pour point commun d'utiliser des nombres à des fins plus ou moins pédagogiques. Certains peuvent être de purs produits documentaires sans visée artistique, mais la plupart sont de véritables albums de littérature de jeunesse qui méritent donc une approche adaptée.

L'utilisation des albums numériques dans les classes nécessite alors la mise en place de dispositifs didactiques mettant en valeur toutes leurs spécificités.

1. Lecture et analyse d'albums

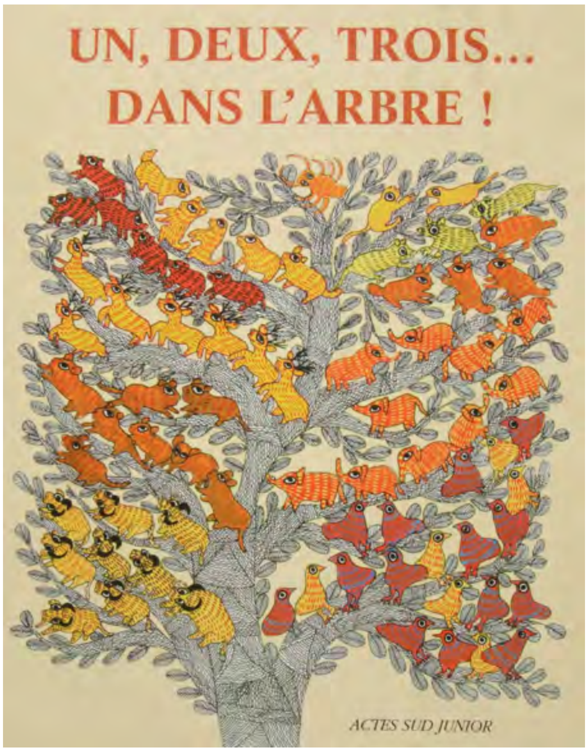
La lecture magistrale est souvent un préalable incontournable de la découverte d'un album, surtout pour les élèves les plus jeunes qui ne sont pas encore autonomes dans leur approche de l'écrit. Une « mise en scène » favorise l'adhésion des élèves au contenu d'albums numériques qui présentent souvent un aspect répétitif.

Ce sont les qualités littéraires et la richesse de la langue qui vont servir de tremplin, mais parfois aussi d'obstacle, à la compréhension des contenus mathématiques de l'album.

1.1. *Un deux trois dans l'arbre*[1]

L'atelier a donc débuté par la lecture magistrale et l'analyse de l'album *Un deux trois dans l'arbre*, traduit de l'anglais (Inde) *One, Two, Tree !*[2] La situation décrite par l'album est apparemment très classique : des animaux en nombre croissant (de 1 à 10) grimpent dans le même arbre, leur nombre étant aussi spécifié par le texte d'accompagnement très répétitif.

Mise en scène de lecture magistrale



La lecture du texte de l'album s'accompagne d'un travail actif sur l'illustration. En effet, un album est un type de livre où l'image et le texte interagissent en permanence. Le nombre est donc relié à une collection, ici d'animaux, dont on peut vérifier le nombre. Or, dans cet album, les animaux grimpent dans un arbre et se retrouvent avec ceux qui y sont montés précédemment.

Au fur et à mesure que l'arbre se remplit, il s'agit de compter les animaux qui viennent de se rajouter, clairement visibles par leur couleur, mais aussi de retrouver, de nommer et de compter les autres qui se camouflent en grisé dans l'arbre.

Analyse linguistique

L'album fonctionne selon une structure récurrente complexe. A chaque nombre correspondent deux double pages. La première comprend toujours le nom de l'animal dans un groupe nominal avec une expansion adjectivale (comprenant un ou plusieurs adjectifs qualificatifs) :

« 1 pou un peu fou », « 5 gros chiens grognons »…

[1] Toutes les références complètes des albums se trouvent en annexe.
[2] Dans la langue d'origine, ce titre joue donc sur la prononciation proche de « three » (trois) et de « tree » (arbre).

La seconde double page reprend le même groupe nominal inséré dans une phrase simple. Le nombre est dans ce cas exprimé en lettres (déterminant numéral) :

> « Un pou un peu fou saute dans l'arbre », « Cinq gros chien ronchons se sont perdus ».

Les verbes sont au présent ou au passé composé.

Cette répétition de structure se rompt à la fin de l'album, pour le nombre dix qui laisse la phrase inachevée, remplacée par une phrase interrogative au futur :

> « Dix éléphants balourds… Pourront-ils aussi se percher ? »

Au niveau de l'orthographe grammaticale, on peut relever une opposition entre un groupe nominal au singulier (« un pou… ») et les autres qui sont tous au pluriel. Il est donc possible de relever la variation du nom en fonction du nombre (que ce soit le chiffre, la quantité d'animaux dans l'illustration ou le déterminant écrit en toutes lettres) et la manière de la marquer par la lettre « s » à la fin du nom. La chaîne des accords dans le groupe nominal, toujours marquée par la lettre « s », ainsi que sa relation avec le nombre au sens mathématique, est mise en évidence sur la page qui ne comprend que le groupe nominal :

> « <u>6</u> cochon<u>s</u> glouton<u>s</u> ».

L'étendue de cette chaîne d'accord au verbe avec une autre marque de pluriel « -nt » apparaît à la page suivante, lorsque le groupe nominal se poursuit par une phrase :

> « Six cochons gloutons grignotent les feuilles ».

<u>Analyse littéraire</u>

Plusieurs aspects peuvent révéler les qualités littéraires de l'album.

Les personnages : les protagonistes ne sont pas explicites. S'agit-il de l'histoire des animaux et de leur cohabitation pacifique dans l'arbre ou de l'histoire de l'arbre, colonisé par différents animaux ?

Les animaux ont tous leur personnalité, commune selon leur espèce : les lapins sont farceurs, les hyènes moqueuses, les cochons gloutons… Leurs actions sont d'ailleurs en relation avec ces caractéristiques marquées par les adjectifs. Ainsi, les lapins farceurs « jouent », les hyènes moqueuses « bousculent tout le monde », les cochons gloutons « grignotent les feuilles »… L'illustration montre aussi que les animaux s'éparpillent dans l'arbre, ils ne restent pas groupés, mais se mêlent aux autres. Ce n'est que dans l'image finale qu'ils se regroupent à nouveau par espèce. Cette dispersion peut se justifier par le repérage et le comptage des animaux ainsi rendus plus difficiles.

Le nombre des animaux semble aller de pair avec leur volume, lui aussi croissant (sauf peut-être pour les hyènes, plus petites que des rennes, mais plus féroces…) : 1 pou, 2 lézards, 3 rats, 4 lapins, 5 chiens, 6 cochons, 7 rennes, 8 hyènes, 9 vaches, 10 éléphants.

L'histoire : aucune histoire n'est explicitement racontée. En effet, l'album égraine l'arrivée de différents animaux qui montent successivement dans un arbre. Aucun enjeu ne semble *a priori* dépendre du succès de l'entreprise puisqu'on ignore pourquoi les animaux grimpent dans l'arbre.

Pourtant on peut déceler une chronologie, marquée par l'illustration. Des animaux différents se rajoutent à l'arbre se mêlant à ceux qui s'y perchent déjà. Ils n'occupent jamais la même place dans l'arbre, ce qui indique qu'ils se déplacent. Par ailleurs, l'arbre n'est jamais le même : il n'est pas vu du même angle, il a des branches de plus en plus nombreuses, son tronc se modifie. Certains verbes marquent aussi la succession des événements lorsque les lézards « suivent » ou que les hyènes « bousculent tout le monde ».

L'histoire implicitement racontée est donc celle de la cohabitation d'animaux de différentes espèces sur le même arbre. Le changement de structure avec l'introduction de la phrase interrogative pour la page du « dix » est caractéristique d'une « chute », qui indiquerait alors la « conclusion » à tirer de l'histoire :

> « Dix éléphants balourds… Pourront-ils aussi se percher ? »

L'univers représenté est assez particulier. Comme l'explique une notice à la fin du livre, l'illustratrice de l'album est originaire de la tribu Gond en Inde. Elle s'inspire de la tradition gond où « les murs des maisons sont décorés de peinture mettant en scène la vie quotidienne et le labeur, des animaux, particulièrement des oiseaux, et l'harmonie entre l'homme et la nature »[3]. Les oiseaux ne font pas partie des personnages se présentant au fur et à mesure, mais ils apparaissent sur plusieurs pages, notamment à la fin du livre, au nombre de vingt. Sur l'avant-dernière page, ils ne sont pas encore perchés sur l'arbre mais semblent attendre que les autres animaux leur laissent la place, et la page finale les montre tous perchés.

Le système des valeurs et l'interprétation : une œuvre littéraire se distingue aussi par la richesse des interprétations qu'elle suscite. Dans cet album, on peut s'interroger sur le rôle de l'accroissement des animaux, tant du point de vue de leur nombre que de leur volume. L'arbre doit supporter non seulement un nombre de plus en plus grand d'animaux, mais aussi des animaux plus volumineux, rendant ainsi la charge plus lourde à porter. Mais l'arbre ne semble pas en souffrir, puisqu'il croît lui aussi en volume et en taille.

La question finale « Pourront-ils aussi se percher ? » montre l'enjeu de l'histoire racontée. En effet, peu importent les raisons pour lesquelles les animaux souhaitent se percher dans l'arbre, la question essentielle porte sur la capacité d'accueil de l'arbre et sur la volonté de cohabitation des animaux. Image et texte se répondent de manière croisée. En effet, sur la

[3] Citation tirée de la notice dans *Un, deux, trois… dans l'arbre !*

page posant la question relativement aux éléphants, on les voit pourtant déjà tous perchés dans l'arbre sur l'illustration qui anticipe la réponse. La page suivante donne la réponse explicitement :

> « Oui ! Si chacun laisse une place à l'autre »

Mais l'illustration montre les vingt oiseaux qui attendent. La dernière page, qui montre les oiseaux perchés, semble apporter une réponse plus définitive et plus universelle. La démultiplication des oiseaux semble ainsi indiquer que d'autres animaux chercheront à se percher et seront accueillis de la même manière.

Ainsi, cette histoire semble montrer qu'il peut exister une harmonie entre différentes espèces à condition que chacun y prenne part.

Cette entente entre les espèces doit cependant s'accompagner d'une harmonie entre l'arbre et ses occupants dans la mesure où leur nombre respecte la capacité d'accueil de l'arbre au fur et à mesure de sa croissance. Cette harmonie-là est totalement implicite dans l'album et uniquement perceptible par la mise en relation entre l'illustration et les nombres. Cette recherche de l'harmonie est une des caractéristiques de l'art gond et donc de l'univers représenté par l'illustration.

Dans une interprétation plus métaphorique, cette histoire pourrait aussi signifier l'harmonie possible entre l'homme et la nature, l'arbre pouvant représenter la nature à respecter, ou le monde, qui progressivement se remplit avec l'accroissement de la population, mais où néanmoins, dans le respect de la nature, l'entente peut faire place à la concurrence.

Par les interprétations qu'il suscite, et le rôle signifiant de la croissance numérique dans la construction d'une interprétation, cet album renferme donc d'indéniables qualités littéraires.

Analyse mathématique

L'analyse des aspects mathématiques se révèle toute aussi riche et présente les aspects suivants :

- Il s'agit d'une suite croissante de raison 1 (entiers naturels).
- On compte de 1 jusqu'à 10.
- Il y a une représentation figurale avec le dénombrement d'animaux sur chaque page.
- Pour chaque nouveau nombre, les objets comptés sont de même nature, mais lorsqu'ils se retrouvent dans l'arbre, les objets sont hétérogènes. Il est donc nécessaire d'utiliser un hyperonyme (animaux) pour les nommer.

- Les nombres sont écrits en chiffre dans la première occurrence (groupe nominal), puis ils sont écrits en toutes lettres sur la page suivante (dans la phrase) : articulation de registres sémiotiques.
- La lecture d’images permet de faire des additions puisque les animaux se rajoutent dans l’arbre. Il est donc possible de fabriquer des énoncés de problèmes additifs.
- Le 10 n’est pas construit mais arrive dans la succession des nombres, ouvrant un espace de débat sur la pertinence d’écrire « 1 0 » au lieu de « dix ».

Si une telle analyse n’est nullement à mettre en œuvre devant les élèves, elle est cependant nécessaire pour les enseignants qui peuvent ainsi, en toute connaissance de cause, exploiter le contenu tant linguistique que littéraire pour susciter une interprétation de l’histoire et favoriser une meilleure utilisation mathématique de l’album.

1.2. Autres albums

Les participants se sont répartis dans sept groupes et se sont livrés à l’analyse d’un album différent qui leur a été remis.

Consigne : Préparez la lecture de l’album ou de quelques extraits s’il est long. Proposez une rapide analyse littéraire et linguistique réalisez une affiche répertoriant les aspects mathématiques en identifiant les éventuelles questions que pose cet album du point de vue de l’enseignement des mathématiques.

1.2.1. *Un pour l’escargot, dix pour le crabe*[4]

Il s’agit de compter les pieds de personnages qui profitent de la plage…

Aspects littéraire et linguistique[5]	Aspects mathématiques
- Pas d’histoire, même si l’univers représenté est une plage. - Association nombre de pieds et de pattes	- Ecriture chiffrée, figurative (nombre de flèches) - On compte les pieds - Nombres impairs : pair et un (pied de l’escargot sert d’ajustement) - Au début comptage de 1 en 1 jusqu’à 10, puis comptage e 10 en 10 jusqu’à 100. - A partir de 10, différentes décompositions des nombres : 30 pour 3 crabes et 30 pour 10 enfants, et un crabe - Calcul : 60 : commutativité 6x10 et 10x6 - On arrive à 100

[4] Les références complètes des albums se trouvent en annexe.
[5] Les tableaux grisés sont issues des productions des groupes.

1.2.2. 365 pingouins

Un jour un paquet arrive par la poste contenant… un pingouin, et chaque jour, un nouveau pingouin se rajoute… Pour sauver les pingouins du pôle sud, Emile-Victor les envoie momentanément dans une famille d'accueil, afin ensuite de les implanter au pôle nord. Après les pingouins, il reste les ours à sauver (et tout le reste de la nature ?).

Aspects littéraire et linguistique	Aspects mathématiques
- L'histoire est une énigme avec une chute écologique, une histoire sans fin quand il s'agit de préserver la nature - Accumulation de pingouins qui posent un problème de communication. - Phrases élaborées. - Jeux de mots. - Expression scientifique : 'sachant que'	- Aspect ordinal 'n°2' le 'deuxième'… - Aspect cardinal associé - Ecriture chiffrée, lettrée, figurative - Addition codée 31+28 - Problèmes posés : Calcul du prix de la nourriture pour 100 pingouins, déduction pour 101. - Ranger par paquets de 15, de 12… - Organisation spatiale sous forme de cubes - Ordre de grandeur : un de plus, un de moins, on n'est plus à ça près… - Les nombres ne sont pas choisis au hasard
Il s'agit d'un véritable cauchemar écologique et numérique…	

1.2.3. J'apprends à compter

Différentes situations quotidiennes constituent des prétextes à compter des animaux personnifiés…

Aspects littéraire et linguistique	Aspects mathématiques
- pas d'histoire mais des « clip » - personnages animaux qui ont des qualités humaines - rimes - vocabulaire complexe - phrases de commentaire ou de description	- Suite itérée de 0 à 19 - Pas d'écriture lettrée du nombre désigné - Suite de 0 à 10 : personnages différents, puis suite stable de 10 à 19. - Puis saut de 10 en 10 à partir de 20 : 2 et 2 dizaines : même animal utilisé… - Différentes configurations du dix - Décomposition additive
Problèmes : - Pas toujours de cohérence dans les regroupements des animaux en « paquets » (notamment la page des singes). - Zéro c'est rien.	

1.2.4. Grigri compte

Le chat Grigri va au bord de mer avec ses parents et compte tout ce qu'il voit…

Aspects littéraire et linguistique	Aspects mathématiques
- Personnage : Grigri et sa famille en vacances au bord de la mer	- Situation de dénombrement : aspect cardinal

- Des phrases interrogatives au début avec réponse par un nombre - Puis des phrases déclaratives qui incite à compter. - Champ lexical : la mer, les vacances - Hyperonyme : bateau	- Ecriture chiffrée, figurale et littérale - Aspect ordinal : animal intrus sur la page de gauche (1er intrus, 2ème intrus, 3ème intrus)
Problèmes possibles : Correspondance terme à terme entre un personnage/glace, entre marins/sacs et personnages / cerf volants (6 cerf-volants mais 5 personnages) ?	

1.2.5. Au fil des nombres

Un couturier rêve et refait le monde avec son aiguille…

Aspects littéraire et linguistique	Aspects mathématiques
- Création et cycle de vie. - Personnage : Asa (artiste qui brode) - Représentation du monde : référence à la paix, à la patience, au temps… - Ecriture très poétique. - Présence de compléments circonstanciels	- Ecriture chiffrée de 0 à 10 (suite numérique croissante) - Ecriture additive avec des signes opératoires (+, =) - Accumulation de 1 de plus à chaque page - Le successeur est le précédent plus 1 - Suite de Peano
Question : Un souvenir est associé au chiffre 0 au début, sera retrouvé en dernière page dans l'écriture du 10 (1 souvenir) Problème du 'un' article indéfini et article numéral ; contrairement à l'anglais par exemple : 'a' et 'one'.	

1.2.6. Comptes tout ronds

Un crocodile invite des oiseaux à venir se nourrir dans sa gueule…

Aspects littéraire et linguistique	Aspects mathématiques
- Titre au pluriel, sous-titre énigmatique « petit boulier à plumes » - L'histoire n'est pas racontée, elle se construit à rebours quand on découvre la phrase de conclusion - Beaucoup d'implicite : très peu de texte, écrit très petit - Univers des animaux (crocodile, oiseaux) - Jeu de mots humoristique sur une expression : « Compter sur quelqu'un ». - Onomatopées.	- Compter de 1 à 11 (structure croissante) - Trois registres de Duval : chiffres, lettres, représentations - Dénombrements et regroupements - Décomposition additive - Représentation spatiale (Piaget)
Problèmes posés en mathématiques : - La même représentation figurale est utilisée pour le 2 et le 11 - Proposition : représenter le croco avec un œil et (10 oiseaux mangés) et un autre oiseau - Pas de situation problème sauf peut-être pour CP (11)	

1.2.7. Dix petites graines

Dix petites graines sont plantées par une main d'enfant…

Aspects littéraire et linguistique	Aspects mathématiques

- Deux histoires entrecroisées - Histoire cyclique : graines qui évoluent (racines se développent, plante, fleur qui fait des graines) - Histoire mathématique : à chaque page disparaît une graine. - Univers des sciences : vocabulaire scientifique, spatialisation (dessous, dessus) - Personnages : difficultés de la plante de grandir à cause de prédateurs - Déterminant et nom	- Album à décompter de 10 à 1. - Ecriture uniquement en lettres. - Transformation négative : page N : passage de n à n+1 (transformation évoquée par l'animal qui arrive)
Problème : pas d'écriture chiffrée.	

2. Production d'outils à partir d'une mise en réseau

A partir d'un réseau d'albums, chaque groupe était chargé d'élaborer des pistes de travail en classe, autour de quelques thèmes. Cependant, la réflexion n'a guère été qu'amorcée dans certains groupes et aurait demandé davantage de temps.

2.1. Produire des énoncés de problèmes

Consigne : Produire des énoncés de problèmes variés comportant des calculs à partir des albums fournis. Comment faire produire de tels énoncés aux élèves à partir des albums ?

Deux groupes ont élaboré quelques problèmes à partir de trois albums.

Production de groupe

Problèmes de structure additive à partir de *Un, deux, trois… dans l'arbre !*

Recherche de l'état final : Combien y aura-t-il d'animaux dans l'arbre après l'installation des chiens ronchons ?
Recherche de l'état initial : Il y a 10 animaux dans l'arbre, 4 lapins farceurs viennent d'arriver, combien y avait-il d'animaux au départ ?
Recherche de la transformation : Après l'arrivée des lapins il y avait 10 animaux dans l'arbre. Maintenant, il y en a 15. Que s'est-il passé ?

Problèmes multiplicatifs à partir de *Un pour l'escargot, dix pour le crabe*

+1 associé au nombre suivant
doubles : 8=4x2
diverses décompositions d'un nombre :
40=4d=4x10=10x4=2x20
50=5x10=3d+2d=10x4+1d

Problèmes non rédigés, sans doute par manque de temps

Production de groupe

Les 4 énoncés suivants suivent une progression et s'appuient sur cette page de 365 Pingoins :

Problème 1 : le dimanche, nous avons 7 pingouins. Le premier pingouin est arrivé le 1er de l'an. Quel jour de la semaine était le premier de l'an de cette année ?

Problème 2 : chaque jour, le facteur amène un pingouin de plus. Le premier pingouin est arrivé le lundi 1er janvier. Quel jour du mois de janvier aura-t-on 17 pingouins ?

Problème 3 : Combien de pingouins aura reçus la famille le 14 mars de la même année ?

Problème 4 : quel jour, de quel mois, ma famille aura-t-elle reçu 150 pingouins ?

Le problème suivant s'appuie sur cette deuxième page.

Problème 5 : quel jour et quel mois de l'année atteint-on 5 pyramides de 15 pingouins ?

S'il peut être intéressant de demander aux élèves de résoudre ces problèmes, il est d'autant plus stimulant pour eux d'en imaginer d'autres à partir des situations décrites dans les albums. En effet, non seulement le support est motivant, mais il donne aux élèves un point de départ inscrit dans une histoire, et donc soulage la tâche qui consiste à créer de toutes pièces un univers qui sert d'habillage aux problèmes. Les situations deviennent aussi plus originales. Cela facilite aussi la représentation du problème pour les autres élèves qui auront à les résoudre.

2.2. Le zéro et le rien

Consigne : Trouver un maximum d'expressions permettant de dire le *zéro*, le *rien*, les comparer. Comment les mettre en œuvre en classe ? Fabriquer des énoncés de problèmes pour faire dire *zéro* et le distinguer du *rien*.

Quelques albums[6] favorisaient l'inventaire et pouvait servir d'inducteurs pour les problèmes :

J'apprends à compter

Un petit cadeau de rien du tout

Compter

Toujours rien

Moi et rien

Alors

<u>Production du groupe</u>

Problèmes sur zéro et rien

Sur une page d'album on peut compter plusieurs collections avec l'une d'entre elles qui ne comporte pas d'élément.
Rituel du matin : compter le nombre d'absents ; s'il n'y en a pas… zéro absent !
Pierre a 3 bonbons, il mange les trois ; combien lui en reste –t-il ?
La boite de bonbons est vide ; il n'y a pas de bonbons (ou plus) donc zéro !

On pouvait aussi relever un certain nombre d'expressions suivantes dans les albums et les interpréter en fonction du contexte :

- « Zéro ce n'est pas rien ».
- « Alors ? – rien ! - toujours rien ! – rien du tout ».
- « Il n'y avait rien à voir, l'oiseau ne répondit rien ».
- « Rien n'est important », « Il n'y a rien à faire ».

2.3. Les désignations du « zéro »

Consigne : Trouver un maximum de situations à partir des albums permettant de dire le *zéro*. Fabriquer des énoncés de problèmes pour faire dire *zéro*.

Quelques albums[7] favorisaient l'inventaire et pouvait servir d'inducteur pour les problèmes :

Les dix petits harengs

Les bons comptes font les bons amis

Compter

Grigri compte

[6] Voir références complètes en annexe.
[7] Voir références complètes en annexe.

Production du groupe
Les 10 petits harengs : le zéro c'est ce qu'il reste quand on a tout enlevé.
Les bons comptes : le zéro permet de dire l'absence dans une liste (« ils ont oublié les olives ») ; c'est aussi ce qui se dit après « un » quand on récite la comptine « à l'envers ».
Compter : le zéro est un signe qu'on appelle « chiffre » mais cela ne fait pas sens dans cet album.
Grigri compte : le zéro c'est la réponse à la question « combien y-a-t-il de nuages ? »
Dire le zéro est difficile, on ne dit pas dans le langage courant « il y a 0… », on dit « il n'y en a pas ».
Écrire le zéro.
Reprise de la liste de course finale de *Les bons comptes*
Si on n'écrit rien en face d'« olives », on ne sait pas s'il s'agit d'un oubli (on a oublié d'écrire ici combien on doit acheter) ou s'il n'y avait pas d'olives :
…. olives
4 pommes
5 oranges

2.4. Construction de 10, 11, 12

Consigne : Quels problèmes posent ces albums concernant la construction du 10 ? Comment les utiliser pour éviter ces problèmes ?

Quelques albums[8] étaient proposés comme supports :

Comptes tout ronds

Au fil des nombres

Chiffres en friches

Petit 1

Production du groupe

Comptes tout ronds
Aucun sens, ni pour le 10 ni pour le 11 qui n'apparaissent que comme numérotation de la page ; confusion entre une unité et une dizaine ; suggestion éviter la page 11 ; pour le 10, on ne peut plus compter les ronds qui ont disparus d'où le zéro.
Au fil des nombres
10 = 9+1 ; 10 c'est le successeur de 9 rien de plus
Chiffres en friche
Imagier sans histoire, le dix est présent sans lien avec les autres nombres ; beaucoup de référents culturels non accessibles en maternelle ; signalons différentes écritures des nombres (chiffres arabes, romain, chinois, japonais)
Petit 1
1 et un cerceau, cela fait dix ; ici on reste au niveau de la désignation, au niveau de l'écriture avec un sens cardinal suggéré par l'image mais qui n'est pas construit

Il conviendrait d'approfondir la réflexion pour résoudre ces problèmes non en les ignorant mais en proposant un dispositif susceptible de les lever.

[8] Voir références complètes en annexe.

2.5. Une démarche d'écriture

Consigne : Comment mettre en œuvre une démarche de projet pour écrire des albums à décompter atteignant le zéro ?

Le groupe a réfléchi aux différentes variables de la situation d'écriture qui leur a été présentée. Le temps a manqué pour la mettre en œuvre dans une production concrète.

La création d'un album numérique passe ainsi par une démarche d'écriture permettant aux élèves d'utiliser leurs connaissances mathématiques tout en réalisant des apprentissages langagiers.

Cette démarche est connue en didactique du français sous le nom de « projet d'écriture ». Elle prend ici comme support des albums numériques qui serviront d'inducteurs à l'écriture.

Pour l'enseignant, il s'agit d'abord de définir les objectifs d'apprentissages en mathématiques puis les contraintes de la situation d'écriture. En effet, plus les contraintes sont fortes, plus facile sera l'écriture. Elles seront donc variables en fonction de l'âge et des compétences des élèves. Au cycle 1, la contrainte sera maximale, alors que les élèves plus autonomes du cycle 2 devront faire un certain nombre de choix. Sinon, c'est à l'enseignant de faire ces choix :

Les apprentissages mathématiques

L'enseignant doit d'abord définir l'objectif d'apprentissage ou de réinvestissement souhaité pour l'album. Par exemple :

- réinvestissement : écrire les chiffres dans différents registres (lettres, chiffres…)
- apprentissage : donner un sens à « zéro »

En fonction de ces apprentissages mathématiques, parmi les albums numériques distribués, ceux mettant en œuvre un compte à rebours avec une structure numérique décroissante aboutissant à zéro, sont les plus appropriés.

Les albums inducteurs

Dix petits doigts

Dix petites graines

Dix petits poussins

Le point d'eau

La mise en réseau s'appuyant sur plusieurs lectures magistrales met en évidence le fonctionnement commun des albums. Cependant aucun ne se termine explicitement par zéro. Celui-ci reste donc à verbaliser lors d'une analyse plus approfondie des albums.

La situation d'écriture contrainte

Les élèves vont créer un album « à la manière de » en s'inspirant de la structure décroissante mais en y intégrant explicitement le zéro. Les personnages et l'histoire peuvent être choisis ou imposés selon le degré d'autonomie des élèves. Une nouvelle mise en réseau des *Dix Petits poussins* avec l'album *Un bel œuf* de Marie WABBES (Archimède, 1999) impose des « œufs » comme personnages, tirés d'une boite de six, dix ou douze, selon le niveau des élèves. On peut les personnifier comme les personnages des *Dix petits doigts*.

Il est alors possible, par petits groupes d'élèves d'imaginer ce que chaque œuf va devenir en vidant la boite au fur et à mesure. Le retour à une lecture plus fine de certains albums permet de réutiliser une structure linguistique et de trouver des idées pour la transformation des œufs (omelette, gâteau, œuf de Pâques, poussin…).

L'appui sur les albums tant pour la structure linguistique que pour la recherche d'idées s'avère donc être une piste fructueuse.

Evaluation

La reconstitution de l'album avec adjonction des chiffres pourra servir de situation d'évaluation. Les élèves doivent mettre les illustrations avec leur texte dans le bon ordre, puis ajouter les écritures chiffrées qui correspondent. Il est essentiel d'y faire figurer le zéro 0.

Conclusion

Si le temps a manqué pour produire des outils achevés, l'atelier a néanmoins permis de révéler la richesse mathématique des albums numériques. Cette richesse ne se situe pas tant dans la qualité mathématique ou didactique des savoirs, mais bien davantage dans la grande variété des questionnements auxquels elle ouvre la voie. Bon nombre de ces questionnements pourront trouver une issue par le biais de productions (prolongements d'albums, albums…) nécessitant d'articuler aux mathématiques tous les aspects littéraires, particulièrement motivants, et les aspects linguistiques qui structurent la pensée.

ANNEXE : Albums numériques utilisés

Pour travailler le zéro

Grigri compte de Lionel KOECHLIN, Hatier, 1991.

Compter de Claude DELAFOSSE et Donald GRANT, Gallimard (Mes premières découvertes), 1993.

Les dix petits harengs de Wolf ERLBRUCH, La joie de Lire, 1997.

Dix petits amis déménagent de Mitsumasa ANNO, L'école des loisirs, 1982.

Compter de Claude DELAFOSSE et Donald GRANT, Gallimard (Mes premières découvertes), 1993.

Les bons comptes font les bons amis de Suzanne BUKIET et May ANGELI, Editions de l'observatoire, 1987.

Alors ? de Kitty CROWTHER, Pastel, 2005.

Un petit cadeau de rien du tout de Patrick McDONNEL, Panama, 2007.

Moi et Rien de Kitty CROWTHER, Pastel, 2000.

Toujours rien ? de Christian VOLTZ, Editions du Rouergue, 1997.

Pour construire le 10

Au Fil des nombres de Laura ROSANO, Bilboquet (l'art en page), 2002. ③

Chiffres en fiches d'Agnès ROSENSTHIEL, Larousse, 1979.

Un et ses amis de Lionel KOECHLIN, Mango, 1995.

Comptes tout ronds d'Olivier DOUZOU, Editions du Rouergue, 1997.

J'apprends à compter d'Elisabet BALLART, Roser CAPDEVILA, Casterman, 1992.

Petit 1 de Ann et Paul RAND, Circonflexe, 1992.

Pour fabriquer des énoncés de problèmes pour calculer

Un pour l'escargot, dix pour le crabe d'April P. SAYRE et Jeff SAYRE, Kaléidoscope, 2003.

Et si on comptait… Photographies de l'agence Magnum, Marie HOUBLON, Tourbillon, 2003.

Un, deux, trois… dans l'arbre ! d'Anushka RAVISHANKAR, Sirish RAO, Durga BAI, Actes Sud Junior, 2006.

365 pingouins de Jean-Luc FROMENTAL et Joëlle JOLIVET, Naïve, 2006.

Pour fabriquer des albums numériques

Dix petits doigts de Didier MOUNIE et Anne LETUFFE, Le Rouergue, 2002.

Dix petites graines de Ruth BROWN, Gallimard jeunesse, 2001.

Dix petits poussins de Christine NAUMANN et Elsa ORIOL, Kaléidoscope, 2008.

Le point d'eau de Greame BASE, Gallimard Jeunesse, 2001.

Les dix petits harengs de Wolf ERLBRUCH, La joie de lire, 1997.

Références bibliographiques

VALENTIN D. (1992-1993) *Livres à compter*, Grand N, 52.

EYSSERIC P. (2001) *Albums, contes et mathématiques,* in Actes du XXVII[e] colloque COPIRELEM, Chamonix.

CAMENISCH A. & PETIT S. (2007) *Des albums à compter pour apprendre à compter et à développer la maîtrise de la langue*, Bulletin APMEP, 471, 574-580.

CAMENISCH A. (2007) *Les livres à compter au cœur du langage*, Éducation Enfantine, 6, 15.

CAMENISCH A. & PETIT S. (2007) *Produire un album à compter*, Éducation Enfantine, 6, 62-64.

CAMENISCH A. & PETIT S. (2008) *Des albums numériques : pour quels apprentissages en français et en mathématiques ?* in Actes du XXIV[e] colloque COPIRELEM, Troyes.

CAMENISCH A. & PETIT S. (2007), *Des projets d'écriture en mathématiques*, in XXIII[e] colloque COPIRELEM, Dourdan.

CAMENISCH A. & PETIT S. (2006), *Lire et écrire des énoncés de problème (2)* in XXXII[e] colloque COPIRELEM, Strasbourg.

CAMENISCH A. & PETIT S. (2005), *Lire et écrire des énoncés de problème*, in XXXI[e] colloque COPIRELEM, Foix.

COMMENT EXPLOITER LES PROBLEMES DE PAVAGES DU PLAN POUR LA FORMATION DES PE ET PLC EN GEOMETRIE ?

Jean-Claude RAUSCHER
Maître de conférence (retraité)
Groupe Apprentissages en Contextes Didactiques, IUFM d'Alsace
jc.rauscher@wanadoo.fr

Claude MAURIN
PIUFM, IUFM Aix-Marseille, site d'Avignon
Maurinsdesmaures@wanadoo.fr

Résumé
Que ce soit pour des élèves ou des professeurs en formation, la question de l'élaboration de pavages du plan à l'aide de polygones (réguliers ou pas) débouche rapidement sur des problèmes qui engagent les connaissances en géométrie et permettent de réfléchir aux modes de validation dans ce domaine. A partir de quelques uns de ces problèmes utilisés à l'origine par Christine De Block Dock (1994) dans une expérimentation avec des élèves de douze ans, l'atelier visait à procéder à l'analyse des enjeux de la formation des enseignants en géométrie que ces situations permettent d'aborder en fonction des publics visés (PE1, PE2, PLC, formation initiale ou continue…). Au préalable les participants ont amorcé la résolution de ces problèmes afin d'en reconnaître les contours mathématiques. Comme promis aux participants, le compte rendu de cet atelier est complété par la présentation d'une activité présentée par Claude Maurin à des PE2 et destinée à des élèves de cycle 3 (« Les triangles jumeaux ») et par la description des modalités utilisées par Jean-Claude Rauscher avec des étudiants (licence ou PE1) se destinant à l'enseignement et par les observations qui ont pu être faites dans ce cadre.

Genèse de la proposition d'atelier et contenu du compte rendu (Jean-Claude Rauscher).

La présentation et l'analyse d'un enseignement expérimental qui a été conçu et mis en œuvre à Bruxelles avec des élèves de douze ans (De Blok Dock, 1994) m'ont inspiré dans la conception et la réalisation d'une formation proposée principalement (1998 à 2007) dans le cadre d'un cours avec des étudiants d'une licence pluridisciplinaire, mais aussi avec des PE1 (Professeur des Ecoles, première année) dans le cadre de la préparation du concours CERPE. Les problèmes de création de pavages du plan à l'aide de polygones qui sont au cœur de cet enseignement expérimental sont proposés aux étudiants. La résolution de ces problèmes engage rapidement les connaissances en géométrie et permet de réfléchir aux modes de validation dans ce domaine. En fait il s'agit d'une situation d'homologie (au sens d'Houdement-Kuzniak, 1993) qui, au-delà des contenus mathématiques en jeu, permet d'aborder avec les étudiants des questions d'enseignement et d'apprentissage en géométrie à l'école et au collège. L'activité mathématique que déploient alors les étudiants leur permet non seulement de s'interroger sur leurs propres connaissances et modes de validation mais aussi de comprendre les modalités de pensée d'élèves analysées finement par Christine de Block Dock.

Après une présentation de cette formation dans le cadre d'un atelier mené avec mon collègue Claude Maurin au séminaire de formation des nouveaux formateurs organisé par la COPIRELEM à Istres en novembre 2007, nous avons à nouveau proposé un atelier au colloque de Bombannes 2008. Mais Claude m'a proposé d'en redéfinir entièrement le canevas (partie I) afin de laisser plus d'initiatives aux participants comme il se doit dans le cadre d'un atelier. Les problèmes de pavages considérés constituaient en effet un support riche pour permettre aux participants de développer et de partager leurs propres réflexions et suggestions quant à son intérêt pour la formation des enseignants en mathématiques, PE (Professeur des Ecoles) et PLC (Professeur des Lycées et Collèges) confondus. Le résultat est très riche en apports que nous essayerons de synthétiser et de restituer au mieux dans ce compte rendu (partie II). Il sera complété par la description d'une activité conçue par Claude Maurin prévue pour des élèves de cycle 3 et présentée à des stagiaires PE2, « Les triangles jumeaux », inspirée par les problèmes de pavages du plan (partie III). Par ailleurs comme cela était un peu prévisible, le temps a manqué pour communiquer aux participants mon expérience de formation avec des étudiants à l'ULP et l'IUFM de Strasbourg, ce qui était pourtant prévu dans la proposition d'atelier. Ce manque sera réparé ici dans la partie IV. Nous finirons enfin ce compte rendu en ouvrant vers quelques questions de formation (Partie V).

Le compte rendu de l'atelier comporte donc successivement *:*
- I) Le canevas de l'atelier
- II) Le compte rendu du travail des groupes
- III) Une proposition d'activité en cycle 3 : « Les triangles jumeaux » (C Maurin)
- IV) La présentation de la formation proposée à des étudiants de licence pluridisciplinaire à l'ULP de Strasbourg et les principales observations liées (JC Rauscher)
- V) Une conclusion qui ouvre sur quelques questions de formation.

I – LE CANEVAS DE L'ATELIER

1er temps : présentation de l'objet de l'atelier.

2ème temps : présentation des problèmes de pavage et du matériel.

Présentation du matériel mis à disposition :

Pour les problèmes 1 et 2, des jeux de polygones réguliers en carton de 3, 4, 5, 6 et 8 côtés. Les côtés des différents polygones ont même mesure de façon à permettre des pavages en juxtaposant les côtés. Pour le problème 3, un jeu de triangles en carton est à disposition. Les triangles sont isométriques mais quelconques et de façon semblable un jeu correspondant à un quadrilatère quelconque est aussi à disposition.

Les problèmes proposés :

Problème 1. *Donner la liste de tous les polygones réguliers qui permettent de paver le plan (il s'agit de trouver tous les pavages réguliers possibles, c'est-à-dire ne*

comportant qu'une seule sorte de polygone et en ne se limitant pas aux exemples de polygones réguliers pour lesquels ils disposent de gabarits en carton).
Problème 2. *Pavages semi-réguliers (constitués de plusieurs sortes de polygones réguliers, tous les nœuds étant entourés de manière identique) : trouver des exemples de pavages semi-réguliers ; un pavage constitué autour de ses nœuds par un octogone, un hexagone et un pentagone est-il possible ?*
Problème 3. *Paver avec des polygones non-réguliers isométriques : est-ce possible ? Prospecter. Formuler des conditions. On pourra rapidement se centrer sur le cas des quadrilatères quelconques, puis des triangles. Autre question qui surgit lorsqu'on a répondu à la précédente : de combien de façons différentes peut-on paver le plan avec un triangle quelconque ?*

3ème temps : temps de résolution en petits groupes des problèmes puis mise en commun et synthèse des démarches mathématiques qui permettent d'y répondre.

4ème temps : les groupes constitués autour des trois questions précédentes se remettent au travail sur les questions orientées vers la formation : *avec quel public envisagez-vous de pouvoir utiliser ces situations ? avec quels objectifs ? de quelles manières ?*

5ème temps : amorce d'une synthèse menée par les animateurs (à propos des questions orientées vers la formation) prenant en compte : les propositions des groupes ; les apports théoriques (nature des géométries en jeu, appréhension des modes de pensée des élèves et des étudiants) ; les expériences des animateurs. *Remarque : ce dernier temps se réalisera en fait essentiellement dans le compte rendu présent destiné aux actes du colloque.*

II –COMPTE RENDU DU TRAVAIL DES GROUPES

II – 1 Approches des contours mathématiques des problèmes posés.

Une remarque préalable : il est clair que les problèmes de pavages soulèvent des développements mathématiques théoriques susceptibles de passionner les participants indépendamment de toute considération de leur utilisation dans le cadre des formations initiales ou continues à l'IUFM. Ces questions justifieraient à elles seules peut-être plus qu'une séance unique de travail. Mais le temps consacré à cet atelier étant assez court pour des questions d'organisation du planning du colloque, nous n'avons pu leur consacrer qu'un moment de travail assez bref. Ce moment était destiné surtout à prendre ou reprendre conscience des contours mathématiques de ces problèmes de pavage avant de s'attaquer à l'exploration et à l'analyse du potentiel de formation qu'ils recèlent. Pour explorer les trois questions proposées, les groupes ont commencé par quelques essais à l'aide du matériel qui était à leur disposition (polygones en carton, possibilité de dessiner). Dans les trois cas, ce travail de recherche a été guidé et s'est ensuite rapidement formalisé par les connaissances mathématiques des participants. Comme on le verra, certaines questions posées dans le cadre de ces problèmes ont été complètement résolues alors que pour d'autres, le temps a manqué pour dépasser un stade exploratoire (néanmoins avancé).

II – 1.1 Le problème de l'existence de pavages réguliers (problème 1)

Le fait que l'on puisse paver le plan avec un triangle équilatéral, un carré et un hexagone ne fait pas débat. La question est de savoir si on peut réaliser un pavage avec un autre polygone régulier. Pour répondre à cette question, les participants ont présenté à peu de choses près, un raisonnement qui déplace le problème dans un cadre numérique prenant en compte les contraintes géométriques :
Pour qu'un pavage soit possible, il faut pouvoir placer un nombre entier de fois un angle au sommet de ce polygone. Or la formule qui donne la valeur d'un angle d'un polygone régulier de n côtés (rapidement retrouvée évidemment par les formateurs) est $(n-2)\pi/n$. Autour d'un nœud, il faut donc pouvoir juxtaposer un nombre entier de fois un tel angle pour couvrir exactement 2π radians. $2n/(n-2)$ doit donc être un nombre entier, qui correspond en l'occurrence au nombre de polygones réguliers de n côtés placés autour d'un nœud. Comme $(2n/n-2) = 2 + 4/(n - 2)$, cela n'est possible, en dehors du cas $n = 0$, qu'avec $n = 3$, $n = 4$ et $n = 6$ qui sont les seules valeurs de n permettant à $(n - 2)$ d'être un diviseur de 4 : au-delà de $n =6$, $2n/(n-2)$ reste supérieur à 2, mais inférieur à 3.

II – 1.2 Le problème de la création de pavages semi-réguliers (problème 2)

Au-delà du pavage 8-8-4 sur lequel on tombe quasi immédiatement, le problème se prête à une exploration des combinaisons possibles des polygones réguliers : les essais utilisant les polygones en carton furent naturellement nombreux. La question de l'existence d'un pavage juxtaposant un hexagone, un pentagone et un octogone réguliers fut immédiatement résolue par le calcul de la somme des angles respectifs. Mais au-delà de ces exemples ou contre-exemples trouvés par manipulations s'ouvre aussi la question d'une recherche plus systématique et finalement, là aussi, exhaustive des pavages semi-réguliers. Cette question posée par les participants a été abordée dans les groupes par la transposition de la recherche des combinaisons possibles dans le cadre arithmétique en mettant le problème en équations du type $n2\pi/6 + m2\pi/4 + p2\pi/3 = 2\pi$ ou plus systématiquement en posant la question de la juxtaposition de k polygones autour d'un nœud sous la forme d'une équation générale : Σ *(de i=1 à k) des* $\alpha_i = 2\pi$, où α_i est la mesure en radian de l'angle du polygone i. En remplaçant α_i par sa valeur en fonction du nombre n_i de côtés du polygone i, s'esquisse alors une recherche dans le cadre arithmétique, recherche qui n'a pas été menée à son terme lors de l'atelier. En fait en allant jusqu'au bout de cette démarche, il s'avère qu'il existe exactement 8 pavages semi-réguliers (théorème de Kepler en 1619 à propos des pavages appelés « archimédiens »). Une indication et une référence pour le lecteur à ce sujet : dans ses diverses prospections de problèmes innovants, le groupe EXPRIME (2008) a eu l'occasion de développer une démonstration de ce théorème à partir du problème dit des « fractions égyptiennes ».

II – 1.3 Le problème des pavages à partir d'un polygone non-régulier (problème 3)

La recherche d'exemples qui cette fois ci se manifestait par des croquis fut abondante. Elle s'est aussi enrichie ici par la considération du groupe des isométries du plan. En particulier ce fut le cas pour la recherche des différentes façons de paver le plan avec un triangle quelconque. Mais là aussi, le temps disponible n'a pas permis de dépasser le stade de l'amorce d'une exploration.

II – 2 Analyse du potentiel de formation que recèlent les problèmes posés.

Dans la phase précédente on a pris la mesure de la richesse des questions mathématiques que suscitent les problèmes de pavages considérés. Dans la phase suivante, il s'agissait de considérer le potentiel de formation que recèle ce support. Quelles connaissances permet-il de développer chez les enseignants et de quelles manières ? Pour répondre à ces questions les participants ont été amenés à distinguer les différents publics auxquels les formations s'adressent (professeurs d'école ou de lycée-collège) et les différents moments de formation jalonnant leurs formations (formation initiale ou continue). Pour rendre compte des nombreuses propositions (qui figureront en italique) et des discussions animées qu'elles suscitèrent, nous indiquerons ces précisions mais proposons essentiellement un classement qui distingue les différents objets de développement que l'on peut considérer dans une formation professionnelle d'enseignants de mathématiques :

- connaissance des contenus mathématiques
- connaissance des démarches en mathématique
- connaissance des enjeux et des obstacles dans les apprentissages chez les élèves
- connaissances permettant d'élaborer des modalités d'enseignement en adéquation avec les apprentissages visés.

Ces points esquissent en gros une gradation qui part des conditions au départ nécessaires (mais non suffisantes) pour enseigner les mathématiques pour préciser ensuite les conditions d'une formation professionnelle plus complète.

II – 2.1 *Connaissances des contenus mathématiques.*

Les étudiants PE qui viennent de différentes filières universitaires et qui se destinent au professorat d'école ont tout particulièrement besoin de se réapproprier (ou de découvrir) certains contenus mathématiques. A un degré différent, il en est de même pour les étudiants PLC qui par manque de pratiques récentes ont parfois oublié quelques rudiments, en géométrie en particulier. Pour cela les problèmes de pavages sont aux yeux des participants une occasion propice pour *« revoir divers objets mathématiques usuels »*. Quelques aspects plus précis sont brièvement évoqués sur les transparents écrits par les participants : *« propriétés des polygones » « angles » « notion de plan » « divers quadrilatères » « réactiver les transformations » « mobilisation de certains théorèmes en géométrie ».* La notion d'aire est aussi évoquée parce que le matériel considéré peut donner lieu à des problèmes basés sur le « *théorème de Jonas Bolyai, 1830 : soit A et B deux polygones de même aire ; alors A et B sont équivalent par découpage et recollement ».* On peut consulter à ce sujet un article de JP Friedelmeyer (2008).

II – 2.2 *Connaissances des démarches en mathématique.*

Si les participants n'ont pas davantage détaillé les contenus mathématiques en jeu dans les problèmes de pavages, ils ont en revanche surtout mis en avant le fait que ces problèmes s'appuyant sur des gabarits de polygones en carton permettaient de s'interroger sur la nature des mathématiques : *«Démarche expérimentale en math : qu'est-ce que faire des maths ? » ; « Proposition pour les licences pluridisciplinaires : sujet de mémoire, laisser se poser des questions à partir du matériel. Avez vous fait des maths en vous posant ces questions ? »* Il est alors souligné que ce support permet d'appréhender avec les formés des aspects importants de l'activité mathématique que nous classerons en trois points comme suit :

- la nature des validations :

Ce support met en jeu un *« aller-retour entre monde physique et mathématique »* et pose la question de *« la place de la manipulation ». « Les gestes physiques et intellectuels deviennent de plus en plus proches »* et dans le cadre d'une formation initiale de PE non expert en mathématique ce jeu fait ainsi *« comprendre le rôle de la démonstration avec sa force de conviction qui permet de valider, d'anticiper, qui permet d'éviter le retour à l'expérience ».* Il est souligné à partir d'observations en formation que la question de la place de la manipulation dans les procédures de validation se pose peut être différemment dans le cadre de PLC de mathématiques : *« Pourquoi les PLC ne manipulent pas : refus, mépris pour l'expérimental, reniement de leur connaissance ? Alors que la manipulation va donner des pistes pour la démonstration et qu'on arrive ainsi à réconcilier expérimental et démonstration ».* Il y a alors l'occasion de mettre en lumière ce qui se joue dans une géométrie experte entre *« dessin et figure ».* Dans un cas comme dans l'autre (PE ou PLC) le support permet ainsi de mettre en évidence un cheminement qui mène de *« l'expérimentation vers la preuve ».* Ce cheminement pour les PE est plus précisément décrit par les participants : devant les limites de leurs explorations, les étudiants ou stagiaires sont acculés à passer d'un *« ce n'est pas possible car je n'ai pas réussi »* à un *« ce n'est pas parce que je n'ai pas réussi que ce n'est pas possible »* ou encore recourir à l'approche mathématique, non familière au départ, de chercher une *« méthode pour montrer que ce n'est pas possible de… ».*
Un tel cheminement est aussi envisageable dans le cadre de la formation continue du premier degré : *« Une question à poser serait : avec quel type de quadrilatères peut-on paver le plan ? Cela permet de revisiter les quadrilatères et favorise un aller-retour constant entre le monde physique et le monde mathématique, entre le comment et le pourquoi. En FC le parcours part des carrés puis se particularisera avec les rectangles, les parallélogrammes, les trapèzes, avant d'assumer le saut vers les quadrilatères quelconques (les certitudes s'effaceront) les gestes physiques et intellectuels de plus en plus proches, le comment est associé au pourquoi (somme des angles = 360°). »*

- la logique :

En concomitance avec la question des sources de validation et grâce encore à la dimension expérimentale des activités, les problèmes de pavages permettent de centrer l'attention sur la logique en œuvre dans les raisonnements et la logique présidant aux classements des objets en mathématiques. Par l'expérimentation les étudiants effectuent une *« exploration des possibles »* qui ouvre la voie à la recherche d'exemples et de contre-exemples ainsi qu'à *« la formulation de conditions »* dont il faudra examiner le statut : *« nécessité ou… ».* D'autre part, dans la recherche des possibilités de paver le plan avec des quadrilatères par exemple, les étudiants peuvent procéder à un *« balayage des quadrilatères particuliers avec abandon successif de propriétés ».*

- l'aspect heuristique :

Ce qui transparaît dans toute l'analyse du potentiel de formation du support considéré est que toutes ces découvertes et ces cheminements se font grâce à la dimension heuristique qui sous-tend les activités. En effet, cette dimension est constamment soulignée à travers les mots comme *« balayage » « exploration » « expérimentation » « force de conviction » « validation »*. Cette dimension est bien sûr un moyen qui permet le développement des connaissances mais elle est aussi évoquée comme un aspect essentiel du travail en mathématique en offrant potentiellement aux étudiants *« la joie intellectuelle d'avoir trouvé quelque chose »*.

II – 2.3 Connaissance des enjeux d'apprentissages chez les élèves.

Dans le paragraphe précédent nous avons considéré le développement des connaissances des étudiants eux mêmes, développement qui est une première condition nécessaire pour enseigner les mathématiques. Maintenant, nous allons envisager le support de formation du point de vue de son potentiel de sensibilisation aux apprentissages en jeu chez les élèves. Une grande partie des éléments qu'on peut relever à ce sujet ont déjà été cités précédemment : les apprentissages que font les étudiants sont souvent des apprentissages auxquels seront confrontés les élèves. Ils ont souvent été évoqués par les participants comme faisant partie des apprentissages des élèves à pointer avec les stagiaires PE2 ou PLC2. Il en va ainsi de l'approche des objets usuels en géométrie ou de notions concernant les grandeurs (aire) mais aussi de l'initiation aux modes de validations, aux démarches de modélisation et à la logique.
Il a en outre été souligné par les participants que *« l'activité qui consiste à paver le plan avec des triangles en carton puis de faire un dessin de ce pavage (prolonger les lignes, repérer les alignements) est une activité de modélisation »*. On peut à ce sujet diriger le lecteur vers un article de Grand N (Duval & Gaudin, 2005) qui fait état de l'importance de prendre en compte des apprentissages sur l'appréhension visuelle des figures en géométrie (avec des jeux entre les surfaces (d2), les lignes (d1) et les points (d0)).

II – 2.4 Connaissances permettant d'élaborer des modalités d'enseignement en adéquation avec les apprentissages visés.

Après nous être centrés sur les connaissances des apprentissages en jeu chez les élèves, nous en venons maintenant au potentiel de sensibilisation aux questions d'enseignement qu'offre le support de formation considéré. Ces questions sont autant d'outils destinés à servir aux enseignants ou futurs enseignants pour élaborer leur travail avec les élèves. La revue de ces questions est complétée par plusieurs suggestions d'activités à proposer aux élèves en adéquation avec les apprentissages repérés précédemment.

Une première question est celle des démarches d'apprentissage induites par les situations qu'on propose aux élèves. Ici les étudiants sont confrontés à la résolution de problèmes qui leur permet de développer des connaissances. Les étudiants peuvent alors comprendre que ce genre de situation qu'ils ont vécu peut se transférer aux élèves. En l'occurrence les participants ont souligné que les PE2 seraient amenés à analyser la *« part de la situation qui serait transférable en classe »*. En particulier dans ces situations l'attention peut être portée sur *« les ruptures et déstabilisations (passage des polygones particuliers aux polygones quelconques) »* qu'elles provoquent et qui sont des moteurs pour faire avancer le travail des élèves.

Dans ce cadre la question de *« l'importance du rôle de la manipulation »* dans les activités des élèves paraît abordable dans les formations pour dépasser les conceptions naïves à ce sujet. Rappelons, qu'il a déjà été souligné à partir d'observations en formation que la question de la place de la manipulation dans les procédures de validation se pose peut être différemment dans le cadre des PE2 qui auraient tendance à faire une confiance aveugle à la manipulation et les PLC de mathématique qui au contraire auraient tendance à la brider.

En relation avec les points précédents l'organisation du travail de la classe peut-être posée *: « Avec des PE2 ou des PLC2 c'est l'occasion d'aborder la question de l'intérêt du travail en groupes ».*

Une autre question qui a été évoquée est la question du choix du matériel : matériel découpé par les élèves eux-mêmes (ou étudiants eux-mêmes), matériel construit par les élèves eux-mêmes (ou étudiants eux-mêmes), matériel prédécoupé par les formateurs, polydrons en plastique, ou logiciel de géométrie dynamique ? On peut alors sensibiliser les stagiaires au fait que les questions qui surgiront de la situation varieront en fonction du matériel proposé. *« Avec les cartons découpés qui ne s'ajustent pas bien ou les polydrons qui ne s'emboîtent pas bien est-ce que cela signifie qu'on ne peut pas faire un pavage ? »* Ou encore : *« Avec un logiciel de géométrie tel que « apprenti-géomètre » de Nicolas Rouche certaines questions risquent d'être tuées : par exemple le logiciel ne permettra pas de juxtaposer en un point un hexagone, un octogone et un pentagone réguliers. Tout dépend de la question qu'on pose pour aller de l'expérimentation vers la preuve. »*

Les pavages du plan paraissent aussi être une occasion d'évoquer l'aspect multidisciplinaire que peuvent revêtir les activités proposées aux élèves : *« En FC 1er degré : lien avec les arts plastiques, frises du type Escher».* Mais à part cet aspect, remarquons que ni la notion d'interdisciplinarité (activités mathématiques permettant d'étayer les apprentissages dans d'autres disciplines comme en français par exemple) ni la notion de transdisciplinarité (apprentissages qui seraient généraux) n'ont été évoquées par cet atelier qui, certainement sans les ignorer, est resté centré sur la question de l'enseignement des mathématiques.

En relation avec ces connaissances relatives aux pratiques d'enseignement et avec le repérage des enjeux d'apprentissages, les participants à l'atelier ont eu l'occasion d'évoquer quelques activités pour les élèves qu'on peut proposer selon le cas, dans le cadre de formations PE2, PLC2 ou en FC. Dans le paragraphe suivant nous en faisons le tour, qui sera prolongé par la partie III concernant *« les triangles jumeaux »* proposée par Claude Maurin.

II – 2.5 *Suggestions d'activités à proposer aux élèves.*

La plupart des problèmes de pavage proposés au départ aux participants pour qu'ils en analysent le potentiel de formation, sont bien sûr transférables, selon les cas, à l'école ou au collège. Rappelons-en deux exemples formulés par les participants :

- Au collège, le problème qui consiste à examiner la possibilité de réaliser un pavage semi-régulier avec des hexagones, des octogones et des pentagones réguliers *« oblige à dépasser la manipulation »* et débouche avec les élèves sur la recherche d'une démonstration.
- *« L'activité qui consiste à paver le plan avec des triangles en carton puis de faire un dessin de ce pavage (prolonger les lignes, repérer les alignements) est une activité de modélisation »* qu'on peut proposer à l'école primaire. Rappelons l'article déjà signalé de Duval & Gaudin, (2005) : il propose des activités que l'on peut développer avec les élèves à ce propos.

Mais le cadre initial proposé a aussi généré chez les participants de nouvelles idées d'activités. En voici trois exemples.

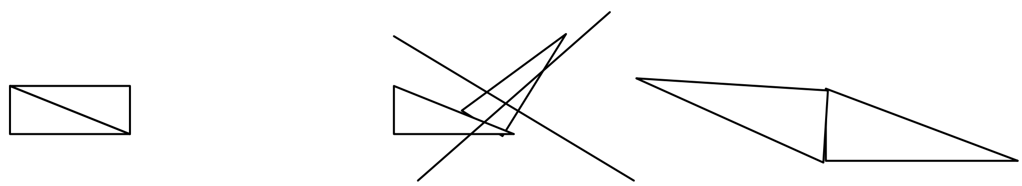
- Premier exemple. Un groupe de participants s'adressant virtuellement à des PE2 a cherché à voir comment ces stagiaires pourraient transposer, au niveau des élèves, le problème complexe de la recherche des combinaisons possibles pour juxtaposer des angles autour d'un nœud pour constituer un pavage semi-régulier *: « Cycle 2 : problèmes du type comment décomposer un nombre en somme d'entiers. Comment faire 28€ avec des pièces de 1€, de 2€ et des billets de 5€ ? ».* Ils voient dans ce problème l'analogie entre les deux situations : *« C'est une résolution de problème qui met en jeu les mathématiques et qui amène une démarche de modélisation »*

- Deuxième exemple. Des activités de recomposition de surfaces par découpage, déplacement et recollement permettent d'aborder la notion d'aire à l'école et au collège. Ces activités sont basées sur *le « théorème de Jonas Bolyai, 1830 : soit A et B deux polygones de même aire ; alors A et B sont équivalent par découpage et recollement ».* L'article déjà cité de JP Friedelemeyer (2008) pourra donner des idées à ce sujet.
- Troisième exemple proposé. Problème de la duplication du carré : comment découper 2 carrés identiques pour les réassembler en un seul carré. Il s'agit de découper chaque carré en 2 triangles isocèle et recoller, mais comment être sûr d'avoir obtenu un carré ? Selon le niveau scolaire concerné la validation peut se faire de façon instrumentée ou par une démonstration (en collège ou PE1). Voir à ce sujet un développement plus complet dans l'article de Claude Maurin (2008).

III – UNE PROPOSITION D'ACTIVITE EN CYCLE 3 : « LES TRIANGLES JUMEAUX » (CLAUDE MAURIN).

Cette activité élaborée à l'intention d'un groupe de PE2, a été vécue par les PE2, puis analysée pour être mise en œuvre dans des classes de cycle 3. Elle a comme point de départ la prise en compte des difficultés des élèves à percevoir les particularités d'une figure (ici les triangles particuliers) fondée sur l'analyse de certaines de ses propriétés.
En faisant le pari que les particularités manipulatoires ont un caractère plus accessible aux élèves que les propriétés qui les justifient, la proposition consiste à utiliser un matériel qui va permettre de faire apparaître certaines particularités et de susciter un questionnement à ce sujet.

Le matériel proposé, appelé « triangles jumeaux », est formé de deux triangles isométriques découpés dans du carton. Une de leur face (la même pour les deux triangles) est hachurée pour la distinguer de l'autre face.
La consigne qui est donnée avec ce matériel est de chercher à faire le plus grand nombre de figures différentes possibles en accolant les deux triangles jumeaux par un de leurs côtés de même longueur et en faisant coïncider leurs sommets, mais sans superposer les deux formes cartonnées (chacune se trouvant dans un des deux demi-plans ayant pour frontière la droite qui porte leur côté commun).
Des exemples d'assemblages acceptables et non acceptables sont fournis aux élèves afin que la contrainte portant sur les conditions d'assemblage soit bien comprise.



<u>Première phase exploratoire</u> : Les élèves travaillent par groupes de deux, chaque groupe reçoit la même paire de triangles jumeaux quelconques et dispose d'une grande feuille

sur laquelle il doit dessiner au marqueur les contours d'un assemblage chaque fois qu'il obtient une forme nouvelle.

Après un temps de recherche suffisant une mise en commun est organisée pour savoir qui a trouvé le plus grand nombre de formes possibles.

Analyse géométrique des possibles : Les deux triangles jumeaux quelconques peuvent être assemblés par chacun de leurs trois côtés, pour un côté donné l'assemblage peut se faire soit en faisant implicitement intervenir une symétrie centrale, on obtient alors un parallélogramme, soit en faisant implicitement intervenir une symétrie orthogonale (retournement), on obtient alors un « cerf-volant ». Chacun de ces deux assemblages peut à son tour subir un retournement, pour les parallélogrammes le contour de la figure retournée ne coïncide pas avec le contour de la figure initiale car le parallélogramme quelconque ne possède pas d'axe de symétrie, par contre, pour les « cerfs-volants » qui possèdent un axe de symétrie, le contour de la figure retournée coïncide avec le contour de la figure initiale.
Cela pose un inévitable problème de dénombrement : faut-il considérer qu'on obtient neuf contours différents ou seulement six contours différents en considérant que le retournement d'une forme plane ne modifie pas la forme de cette figure ? Tout dépend de la façon dont il sera répondu à cette question.
Le but de la mise en commun n'est pas forcément de parvenir à la liste exhaustive de tous les assemblages possibles. On se contentera de vérifier que tous les assemblages proposés sont bien différents, en ayant éventuellement recours à du papier calque, et de remarquer que tous les assemblages obtenus sont des quadrilatères.
On peut tout de même s'attendre à ce que surgisse la question pointée précédemment. C'est la classe avec l'aide du maître qui choisira sa façon d'y répondre. Une fois la convention fixée on s'efforcera de s'y tenir. On peut toutefois avoir une préférence pour choisir de distinguer une forme de son retournement quand celui-ci ne coïncide pas avec la forme initiale car cette distinction permet de particulariser les figures qui possèdent au moins un axe de symétrie (comme le cerf-volant).
Un affichage rassemblant les assemblages obtenus par l'ensemble de la classe pourra être conservé pour établir des comparaisons avec la deuxième phase.

Deuxième phase : Découverte de certains triangles particuliers

Le maître peut choisir de ne travailler qu'avec un seul et même type de triangle particulier pour tous les groupes de la classe, ce qui semble préférable, ou bien de proposer des triangles particuliers différents simultanément aux différents groupes de la classe.

Découverte des particularités des triangles rectangles : Les élèves qui reçoivent des triangles rectangles jumeaux découvrent qu'avec ce type de triangles ils peuvent obtenir par assemblage des rectangles (ce qui justifiera le nom de ces triangles particuliers quand on les nommera), des cerfs-volants mais aussi de nouveaux triangles, ce qui ne produisait pas avec les triangles jumeaux quelconques. Le maître va souligner cette particularité manipulatoire au moment de la mise en commun et le débat sera lancé sur les raisons qui la provoquent.
Les élèves pourront dire avec leurs propres mots ce qu'ils pensent avoir découvert.
A l'issue du débat le maître proposera à chaque groupe de fabriquer une paire de triangles jumeaux permettant d'obtenir un nouveau triangle par assemblage.
Un bilan sera fait sur les réussites et les échecs des différents groupes et le maître pourra institutionnaliser la notion d'angle droit et de triangle rectangle. La recherche d'un

moyen fiable permettant d'obtenir des angles droits débouchera sur l'équerre en papier dont la construction (partage de l'angle plat en deux angles superposables) permet de justifier les assemblages des triangles rectangles. Le lien sera établi avec les équerres du commerce qui sont toutes des triangles rectangles comme on pourra le vérifier par association avec leur jumeau après retournement et observation des contours.

Découverte des particularités des triangles isocèles : C'est par le nombre réduit d'assemblages différents que ces triangles vont se particulariser. En effet quand on les assemble par leur base on obtient un losange, que l'assemblage se fasse par symétrie centrale ou par symétrie axiale, de plus ce losange se retourne dans son contour. Quand on les assemble par un de leurs côtés de même longueur, on obtient soit un parallélogramme (avec une face hachurée et une face non hachurée), soit un cerf-volant (avec les deux faces hachurées ou non hachurées). Ce dernier assemblage se retourne dans son contour, par contre le parallélogramme pose un problème d'orientation et ne se retourne pas dans son contour. On ne peut donc pas trouver plus de quatre assemblages différents. La comparaison avec l'affichage des assemblages obtenus lors de la phase exploratoire permettra de souligner leur particularité.
Le maître pourra interroger les élèves sur les raisons qui font que le nombre de formes différentes obtenues par assemblage des deux triangles isocèles est moins important qu'avec deux triangles jumeaux quelconques. On pourra comparer les assemblages par la base des triangles isocèles avec les assemblages obtenus avec deux triangles quelconques : le premier (losange) se retourne dans son contour l'autre (parallélogramme quelconque) ne se retourne pas dans son contour. De la même façon on pourra observer que les « cerfs-volants » obtenus en assemblant les deux triangles isocèles par un de leurs deux côtés de même longueur sont directement superposables quel que soit le côté choisi. Ces différents constats amèneront les élèves à émettre des hypothèses sur les particularités des triangles isocèles, et l'égalité des longueurs de deux de leurs côtés devrait apparaître.
Pour tenter de valider l'hypothèse émise, le maître proposera de construire deux nouveaux triangles jumeaux ayant deux côtés de même longueur afin d'expérimenter leurs assemblages et les comparer aux assemblages précédents.
Le problème de construction soulevé : « Comment construire un triangle ayant deux côtés de même longueur ? » pourra être résolu collectivement et chaque groupe pourra construire sa propre paire de triangles jumeaux isocèles pour expérimenter ses propres assemblages.
Cette nouvelle phase expérimentale confirmera l'hypothèse émise puisque les assemblages obtenus par chaque groupe auront les mêmes particularités que celles constatées au départ. Les triangles construits dans les différents groupes n'ayant pas tous la même forme, on pourra conclure que les particularités des assemblages reposent sur une propriété commune à tous les triangles, celle d'avoir deux côtés de même longueur.
Le maître pourra alors institutionnaliser la notion de triangle isocèle.
Cette institutionnalisation pourra être accompagnée d'une autre découverte manipulatoire : chacun des triangles isocèles se retourne dans son propre contour. Le maître pourra associer cette propriété à l'existence d'un axe de symétrie dans chaque triangle isocèle que les élèves pourront faire apparaître par pliage.
Il pourra éventuellement faire le choix de travailler de façon plus large sur les figures ayant un axe de symétrie et tester leur retournement dans leur contour de façon expérimentale, mais ce faisant, s'il accroît l'approche expérimentale que ses élèves auront de la géométrie plane, il dépasse les programmes de géométrie en vigueur au

cycle 3 (BO n°3 du 19 juin 2008) qui ne préconisent, au CE2, que le recours au pliage ou au papier calque pour vérifier qu'une figure possède un ou plusieurs axe de symétrie.

Découverte des particularités des triangles équilatéraux : Les triangles jumeaux équilatéraux possèdent une particularité encore plus étonnante, puisque quel que soit l'assemblage réalisé on obtient toujours le même losange. Il n'y a donc qu'un seul assemblage possible !
Le débat fera sans doute surgir le fait que les trois côtés du triangle équilatéral sont de même longueur, mais sa fabrication par pliage est compliquée et difficile à justifier, sa construction de type règle/compas, bien que compatible avec les programmes de géométrie du CM2 - *« savoir reproduire un triangle à l'aide d'instruments »* (BO n°3 du 19 juin 2008) - devient un vrai problème de géométrie pour des élèves de cycle 3, encore peu aguerris à l'utilisation du compas pour résoudre de tels problèmes. Toutefois la motivation des élèves pour obtenir de tels triangles pourra sans doute leur permettre de surmonter la difficulté de leur construction. Le même protocole d'expérimentation que celui utilisé dans le cas des triangles isocèles pourra être suivi, chaque groupe construisant sa propre paire de triangles jumeaux équilatéraux avec laquelle il vérifie qu'il n'obtient qu'une seule forme d'assemblage.

Le maître pourra institutionnaliser la notion de triangle équilatéral et faire constater aux élèves que chaque triangle équilatéral se retourne dans son contour et possède trois axes de symétrie. On pourra constater que, contrairement aux triangles rectangles ou aux triangles isocèles qui pouvaient avoir des formes différentes, tous les triangles équilatéraux ont « la même forme », ils sont seulement de tailles différentes. Chacun est un agrandissement ou une réduction d'un autre, plusieurs observations pouvant être faites dans cette direction qui éveilleront les élèves aux propriétés de parallélisme et d'égalité d'angles.

Le travail sur les triangles particuliers peut se prolonger avec la découverte des triangles rectangles isocèles qui peuvent apparaître à partir du découpage d'un carré suivant sa diagonale, les élèves pourront aussi découvrir l'impossibilité de rendre un triangle à la fois rectangle et équilatéral.

Conclusion :

Cette activité centrée sur les triangles jumeaux permet évidemment d'établir des liens entres les différents quadrilatères obtenus par assemblage des deux triangles et les particularités de ces triangles : rectangles et triangles rectangles, losange et triangles isocèles ou équilatéraux, carrés et triangles rectangles isocèles.
Elle est construite sur un socle expérimental dont on peut penser qu'il interpelle davantage les élèves que des analyses de propriétés de figures qu'ils n'associent pas toujours à une particularité observable au moment où ils les étudient.
Cette approche manipulatoire ne vaut que par le questionnement qu'elle suscite à propos de ce que certaines figurent permettent alors que d'autres ne le permettent pas. Si les élèves parviennent, à propos des particularités qu'ils constatent, à se poser la question du pourquoi, nous faisons avec eux un pas vers une démarche mathématique qui leur ouvre la voie vers une approche raisonnée de la géométrie.

IV – DESCRIPTION ET ANALYSE DE LA FORMATION PROPOSEE A DES ETUDIANTS DE LICENCE PLURIDISCIPLINAIRE A L'ULP DE STRASBOURG ET PRINCIPALES OBSERVATIONS (JEAN-CLAUDE RAUSCHER).

Remarque préalable :
Cette formation initiale basée sur la résolution de problèmes de pavages s'adosse en grande partie sur un travail mené par Christine De Blok Dock. Elle présente ce travail dans un article du numéro 27 de la revue « Educational Studies in Mathematics », (De Block Dock, 1994). Pour l'information du lecteur et pour la compréhension de ce paragraphe IV nous avons jugé utile de lui proposer un compte rendu de l'essentiel de la richesse du travail de Christine De Block Dock. En nous référant le plus fidèlement possible à son article nous y décrivons l'enseignement qu'elle a proposé aux élèves de douze ans et nous y rappelons les éléments essentiels de ses observations conduisant à l'analyse des modalités de pensée en mathématique des élèves concernés. Le lecteur intéressé trouvera ce compte rendu dans l'annexe II.

Après cette remarque préalable nous pouvons maintenant aborder la description et l'analyse de la formation proposée aux étudiants à Strasbourg. Le travail se répartit environ sur quatre ou cinq séances. Tout comme dans l'expérience avec les élèves rapportée par Christine De Block Dock, il s'agit d'une petite aventure, d'un fil rouge assez souple, avec ses rebondissements.
Après une séance consacrée à la présentation du projet, le contenu des séances s'inspire essentiellement du cheminement des activités proposées aux élèves par Christine de Block Dock. A chaque séance les étudiants sont confrontés à des problèmes liés aux questions de pavage du plan. Mais parallèlement il sera chaque fois demandé aux étudiants d'une part de faire le bilan des notions de géométrie en jeu et d'autre part de prendre du recul par rapport à leurs activités pour analyser et comparer les procédures qu'ils développent. Ce travail permet aussi aux étudiants de réfléchir aux problèmes d'apprentissages des élèves en prenant connaissance des démarches de pensées mathématiques développées par des élèves et rapportées par Christine De Bloc Dock. Ce cheminement réserve des surprises aux étudiants, mais aussi, comme nous le verrons, au formateur qui tout en ayant ses objectifs s'adapte aux réactions intéressantes mais parfois imprévisibles de ses étudiants. Le temps utilisé pour chaque séance varie en fonction des tâches à effectuer, de la réaction des étudiants, mais aussi du fait qu'une partie du travail s'effectue ou non en dehors des heures de cours. Il faut dire que le contexte institutionnel dans lequel se déroule la formation est évidemment une variable à prendre en compte pour adapter les modalités de travail proposées aux étudiants. Dans le cadre du cours de licence je disposais d'un confort de temps et en général d'une disponibilité d'esprit de la part des étudiants que je ne retrouvais pas forcément d'emblée dans le cadre de la préparation du concours. La description et l'analyse du travail que je ferai correspond à la formation que j'ai assurée dans le cadre d'une licence pluridisciplinaire. Il s'agissait majoritairement d'étudiants visant par la suite une carrière de professeurs d'école après deux premières années de cursus en biologie, géologie, chimie ou physique. Les groupes comportaient selon les années de 40 à 60 étudiants. Cet effectif assez important n'empêchait pas le développement d'un travail « interactif », les étudiants travaillant alternativement individuellement, par petits groupes de voisinage ou en grand groupe pour des synthèses. Voici une description des différentes phases de travail accompagnée des observations que j'ai pu faire.

1ère phase : préparation du matériel, un premier contact avec la géométrie et présentation du projet de formation.

Lors d'une première séance (assez courte) :
- une feuille est distribuée avec un carré, un triangle équilatéral, et aussi un pentagone, un hexagone et un octogone réguliers (annexe, feuille 1). Sur le document donné, plusieurs polygones réguliers différents sont représentés, mais les côtés de ces polygones ont tous une longueur commune. Le contenu de cette feuille sera à décrire et à commenter.
- il est demandé à chaque étudiant de confectionner, pour la prochaine séance, un jeu de polygones en carton identiques aux polygones figurant sur le document distribué (une dizaine de triangles, une dizaine de carrés etc..).
- il est dit que ce matériel servira à faire des activités de pavages en référence à l'expérimentation réalisée avec des élèves de douze ans à Bruxelles. Les objectifs de ce travail sont annoncés : visiter ou revisiter des notions de géométrie, réfléchir aux méthodes de raisonnement en usage en géométrie, aborder des questions d'enseignement et d'apprentissage en géométrie à l'école et au collège.

La distribution du document où figurent les différents polygones est une première occasion pour les étudiants de retrouver quelques notions de géométrie. L'appel à décrire le contenu de ce document provoque en particulier l'évocation de la notion de « polygone régulier » et permet de la préciser collectivement. En effet, lorsqu'on prend le soin de leur en faire écrire une définition, il apparaît systématiquement qu'un grand nombre d'entre eux ne pensent qu'à la contrainte concernant l'isométrie des côtés. La production par les étudiants ou le formateur d'exemples de figures à 4 ou 5 côtés respectant exclusivement cette contrainte, ou a contrario ne respectant que la contrainte concernant l'isométrie des angles est l'occasion de continuer à explorer et à interroger le rapport entre isométrie des côtés et des angles.

2ème phase : problèmes de pavages du plan à l'aide de polygones réguliers.

A l'aide de leurs jeux de polygones en carton, les étudiants doivent :
1) Répondre à la question suivante : « Avec quels polygones réguliers peut-on paver le plan ? ». (Il s'agit de trouver tous les pavages réguliers possibles, c'est-à-dire ne comportant qu'une seule sorte de polygone et en ne se limitant pas aux exemples de polygones réguliers pour lesquels ils disposent de gabarits en carton).
2) Chercher des pavages semi-réguliers ou mixtes c'est-à-dire faits de plusieurs sortes de polygones réguliers (tous les nœuds doivent être entourés de manière identique).

Le travail commence inévitablement par la nécessité rapidement exprimée par les étudiants de définir ce qu'est en l'occurrence un « pavage » et en particulier « un pavage du plan », expression qui les laisse souvent perplexe car ils imaginent le pavage d'une surface bien délimitée. Ces précisions étant données, les étudiants font de nombreux essais avec leurs gabarits. Le travail sur les deux questions, données simultanément, s'étale en général sur deux séances.

En ce qui concerne la première question le *« tous »* de l'énoncé, qui implique qu'on dépasse le stade de la manipulation des gabarits en carton, n'est pas d'emblée assimilé. Lorsque son sens est à nouveau expliqué, les étudiants prennent enfin la mesure de la nature mathématique de la question ! Remarque : au cours du traitement de cette question par les étudiants, je stimule et observe l'avancée de leurs réflexions en ponctuant les séances (en cours ou en fin de séance) par la question suivante : *« A ce stade, pensez vous qu'en dehors des cas du triangle équilatéral, du carré et de l'hexagone, il existe d'autres polygones réguliers avec lesquels on peut paver le plan ?*

Quel est le degré de certitude de votre avis : « absolument certain », « assez certain », « incertain » ? Argumentez si possible votre avis.

Pour commencer, les étudiants font en général des conjectures sur la valeur des angles intérieurs. Par exemple, ils se placent dans un cadre numérique : *« Ce sont des diviseurs de 360 ! »* Mais le statut de cette condition n'est pas encore clair : est-ce une condition nécessaire ou une condition suffisante ? Parfois, pour relancer la réflexion à ce sujet, je demande ce qui se passerait si on prenait un polygone régulier ayant des angles de 10°, ou encore si c'est la même chose quand on considère la valeur des angles en grades ou radians. Ils reviennent aux contraintes du problème géométrique avec l'idée qu'il est nécessaire de pouvoir juxtaposer autour d'un nœud un nombre entier de fois l'angle intérieur d'un polygone pour que le pavage soit possible. A ce moment là très peu d'étudiants pensent que les possibilités de pavage avec des polygones réguliers se limitent aux trois exemples trouvés avec les gabarits en carton. Ils pensent plutôt qu'il y a forcément d'autres cas possibles. Cette intime conviction est souvent argumentée par une pensée d'ordre probabiliste fondée sur le fait qu'il existe une infinité de polygones réguliers. L'idée d'envisager un polygone régulier à 12 côtés peut faire avancer la réflexion comme le montre cette déclaration d'une étudiante à ce sujet relevée lors d'une séance : *« Il y aura forcément un vide quand on essaye de juxtaposer ; plus on augmente le nombre de côtés, plus on se rapproche d'un cercle, or avec des disques on ne peut pas paver le plan, il reste des vides ».*

Ici on a le passage de manipulations matérielles à des spéculations abstraites, passage étayé par des intuitions se basant sur des expériences ou des configurations connues. A ce moment les avis dans le groupe ont commencé à bouger mais il restait encore beaucoup d'étudiants incertains. Parfois les étudiants émettent l'idée que plus il y a de côtés plus l'angle est grand et donc on n'arrivera pas à caser tous ces angles autour d'un point. Ce jour là le problème n'a pas avancé et j'ai abandonné la question à ce point pour poursuivre le travail autour des pavages mixtes, ce qui a permis de se centrer sur les angles et de reprendre ensuite la question de l'existence des pavages réguliers. D'une année à l'autre l'histoire n'est jamais complètement écrite d'avance….

En ce qui concerne la création de pavages semi-réguliers, tout comme les enfants, les étudiants sont dans un premier temps souvent attirés par la création de jolies compositions (des « fleurs » avec des pétales par exemple) jouant non seulement sur l'occupation du plan mais aussi sur l'arrangement des couleurs dans lesquelles certains ont confectionné les polygones. Les étudiants font des essais et après un tour du groupe on récolte les propositions : 6-3-6-3 ; 4-3-4-3-3 ; 8-6-5 ; 6-4-3-4 ; etc (description des paysages autour des nœuds, chaque chiffre désignant un polygone régulier par son nombre de côtés). Je demande aux étudiants de vérifier les configurations proposées à l'aide des gabarits et alors certains disent rencontrer des problèmes du côté de la proposition 8-6-5. Certains pensent que ces problèmes viennent des limites matérielles du découpage des cartons, d'autres sont sûrs que ce pavage mixte n'est pas possible et qu'il faut le vérifier par le calcul des angles. Ce questionnement débouche donc sur la connaissance ou le calcul des angles dans les polygones réguliers en jeu. Cet épisode prend un certain temps et n'est pas facile pour tous mais il est l'occasion pour beaucoup de rafraîchir leurs connaissances en géométrie. Le verdict tombe : 135° + 120°+ 108° ne font pas 360° mais 363°! Je prolonge le travail en demandant aux étudiants aussi d'exprimer la valeur α_n des angles d'un polygone régulier de n côtés en fonction de n.

Avec ces outils on peut alors reprendre la question de l'existence des pavages réguliers. En l'occurrence l'attention portée aux angles a permis aux étudiants de reprendre l'idée émise que plus il y a de côtés plus le polygone se rapproche d'un cercle en la transformant en « plus il y a de côtés, plus les angles sont grands » et raisonner sur la

taille du vide à combler pour compléter le pavage autour d'un nœud et se rendre compte que le pavage avec des hexagones constitue une limite : au delà des hexagones réguliers l'espace à combler ne pourrait accueillir un troisième polygone lorsqu'on aura déjà placé deux polygones réguliers. La formule qui donne la valeur de α_n en fonction de n permet aussi de trouver une issue formellement correcte à la question. Il s'agit d'exprimer la question de la place manquante sous forme d'inéquation.
Par ailleurs la question de la construction des polygones réguliers sera reprise par la suite et donnera lieu au développement de connaissances en géométrie : programmes de construction des polygones réguliers, développement du langage, prise de conscience que pour construire un polygone régulier il y a une entrée possible par les côtés ou par les rayons, calcul du rayon en fonction des côtés ou inversement etc.
Mais avant cela, les étudiants sont conviés à considérer les pavages avec des polygones non réguliers.

3ème phase, problèmes de pavages du plan avec des polygones non réguliers.

Le passage aux pavages du plan par des polygones non réguliers a deux objets. D'une part il s'agit de montrer aux étudiants comment dans l'expérience relatée par Christine de Block Dock, les enfants qui ne possédaient pas dans un premier temps l'outil du calcul général des angles dans les polygones réguliers ont pu ainsi y accéder eux aussi pour trancher la question de l'existence du pavage 5-6-8. D'autre part ces problèmes de pavages à l'aide de polygones non réguliers donnent l'occasion aux étudiants de continuer à consolider leurs connaissances en géométrie et dans le domaine de la logique.
Pour cela, les étudiants sont d'abord invités à :

- imaginer des pavages avec des polygones non réguliers isométriques, libre à eux de les décrire, de les dessiner, de les construire
- formuler par écrit les conditions sur les polygones qui rendent les pavages possibles.

Les exemples fusent : pavage à l'aide d'un rectangle, d'un losange, d'un parallélogramme, d'un trapèze rectangle, d'un trapèze quelconque, d'un triangle isocèle, d'un triangle rectangle etc. Les affirmations concernant les conditions s'affichent : *« On peut paver le plan si le polygone est symétrique, possède un axe ou un centre de symétrie, des angles droits.. »* ou bien *« Il faut que… ».* La comparaison des formulations proposées permet aux étudiants de s'interroger s'ils énoncent là des conditions nécessaires ou des conditions suffisantes. C'est aussi l'occasion de statuer sur la validité de ces conditions en se référant aux exemples de pavages évoqués : *« Non il n'est pas nécessaire que le polygone ait un axe de symétrie puisqu'on peut paver avec un trapèze quelconque » ; « Non le fait qu'un polygone ait un axe de symétrie n'est pas une condition suffisante : pour preuve on ne peut paver à l'aide d'un octogone (régulier) ou d'un pentagone (régulier) »*
Le fait qu'on puisse paver le plan à l'aide d'un triangle quelconque n'est en général pas évoqué par les étudiants qui expriment leur scepticisme (comme les enfants) sur la possibilité de paver avec des polygones qui n'auraient aucune particularité. Néanmoins il arrive parfois qu'un étudiant pense à cette possibilité en la justifiant par le fait qu'avec deux triangles isométriques on peut constituer un parallélogramme. Dans un cas comme dans l'autre, en découpant des triangles isométriques (isolés) figurant sur une feuille préparée (annexe, feuille 2), les étudiants ont alors l'occasion de constater qu'ils arrivent bien à paver le plan avec un triangle quelconque. Remarque : question qui ne se posait pas avec les polygones réguliers, il faut préciser ici que le retournement des

gabarits est permis. Le cas du pavage à l'aide d'un quadrilatère quelconque, qui suscite a priori un scepticisme encore plus grand, est pareillement exploré (annexe, feuille 3).
A ce moment là du travail, les étudiants peuvent saisir comment les élèves ont eu accès au fait que la somme des angles d'un triangle ou d'un quadrilatère est égale respectivement à 180° et 360°. Ils voient aussi comment par triangulation, ils accèdent à la valeur de la somme des angles d'un pentagone et peuvent calculer la valeur de l'angle d'un pentagone régulier.

4ème phase : pavages du plan avec un triangle quelconque, mise en jeu des symétries centrales et axiales.

La question posée aux étudiants est la suivante :
« De combien de façon peut-on paver le plan avec un triangle quelconque ? »
Il y a 4 pavages possibles (annexe, feuille 4) s'obtenant respectivement par les symétries centrales par rapport au milieu des côtés des triangles et par les symétries orthogonales par rapport aux côtés des triangles. Trois symétries centrales, trois symétries axiales : on pourrait imaginer que cela aboutit à six pavages. Mais les pavages qui s'effectuent à partir des symétries centrales par rapport aux milieux des côtés ne correspondent qu'à un seul pavage (ce n'est pas d'emblée évident pour les étudiants). En revanche, on obtient bien trois pavages différents pour les symétries axiales
A priori les étudiants n'imaginent pas qu'il y a plusieurs façons d'agencer les triangles, ou bien s'imaginent au contraire qu'il y a un grand nombre de pavages possibles. Cette recherche prend alors beaucoup de temps si on désire que les étudiants la mènent de façon autonome jusqu'à son terme, sans donner aucune indication. Au hasard des manipulations mais en tenant compte du fait que les côtés de même longueur doivent se juxtaposer et que les retournements des gabarits sont permis, les étudiants trouvent néanmoins l'un ou l'autre des pavages possibles. En mettant alors en commun les propositions, et en les analysant, on peut mettre en évidence les transformations qui les structurent et permettre aux étudiants d'achever la recherche.
Ce travail permet par la suite de reprendre de façon plus générale les connaissances des étudiants concernant les isométries du plan.
Remarque : c'est cette activité de pavages du plan à l'aide de triangles isométriques qui est à la base de l'activité destinée à des élèves du cycle 3 que Claude Maurin présente dans la partie III de notre compte–rendu.

5ème phase : synthèse à propos du développement de la pensée en géométrie et des modes de validation en géométrie.

C'est l'occasion avec les étudiants de revenir sur leurs cheminements en interrogeant les types de preuves et de raisonnements que les étudiants ont rencontrés tout comme les élèves : d'abord empiriques, puis des enchaînements d'arguments empiriques en opposition (du point de vue des paradigmes géométriques en jeu), mais aussi en continuité (du point de vue des dimensions intuitives des démarches) avec des « démonstrations » se basant sur un corpus de propriétés et de définitions. C'est à cette occasion aussi que je peux les sensibiliser (en PE1 plus particulièrement) à la différenciation des paradigmes dans lesquels on peut se situer en géométrie (Houdement et Kuzniak, 2006) en particulier par l'examen de certains exercices qui offrent un support adéquat pour cela (Kuzniak et Rauscher, 2004)

En se référant à l'expérience décrite par Christine De Block Dock, est abordée la question des méthodes d'enseignement des mathématiques. Ici est mis en exergue une méthode qui engage les élèves dans une démarche mathématique en leur proposant un milieu, qui comme le décrit Wittmann (1981), suscite :

- des opérations sur une riche variété d'exemples et de modèles qui permettent l'élaboration de conjectures et le développement de l'intuition (stade de l'intuition)
- des réflexions sur ces premières activités pour trouver des formulations générales, des résultats, les tester, les améliorer, les prouver (stade du raisonnement)
- des analyses des concepts, des théorèmes et des preuves (stade du formalisme).

V – UNE CONCLUSION QUI OUVRE SUR QUELQUES QUESTIONS DE FORMATION.

Le titre du colloque était « Enseigner les mathématiques : où est le problème ? ». On peut dire que dans notre atelier nous avons eu largement l'occasion de faire éclater ce singulier en une multitude de questions concernant la formation des maîtres qui s'appuie sur la résolution de problèmes de pavages. Quels sont les contenus mathématiques sous-jacents à ce support ? Quelles sont les connaissances et démarches mathématiques que les étudiants peuvent développer à partir de ces problèmes ? Quels gestes professionnels peuvent-ils acquérir ensuite : analyse des enjeux d'apprentissage en géométrie, des modalités d'enseignement en adéquation avec ces enjeux ? Pour une large part le travail en atelier a permis d'accéder à quelques éléments de réponse.

Conclusion optimiste donc, que nous aurions néanmoins envie de prolonger par un appel à poser et à aborder certaines questions de forme et de fond à propos de la formation des maîtres. Une première concerne le temps consacré à la formation : comment prendre en compte les diverses contraintes de temps auxquelles sont soumises les formations selon les contextes institutionnels. Autre question, comment prendre en compte dans de telles modalités de formation l'injonction faite par les institutions de la définir en se référant à une liste de compétences ? Mais il est vrai qu'à ce sujet une question est peut-être à ouvrir : c'est la question de l'explicitation avec ou par les étudiants des connaissances qu'ils ont pu développer de façon souvent implicite dans les activités. Ces remarques sont une invitation à poursuivre et à compléter le travail d'analyse suscité par la question posée par le titre du colloque, question que nous poserions alors sous la forme suivante : «Formation des enseignants à partir de la résolution de problèmes : où est le problème ? »

BIBLIOGRAPHIE

DE BLOCK-DOCK C. (1994) Modalités de la pensée mathématique d'élèves de douze ans devant des problèmes de pavage*, Educational Studies in Mathematics*, **27**, 165-189.

DUVAL R. & GAUDIN M. (2005) Les changements de regard nécessaires sur les figures**,** Grand N**, 76,** IREM de Grenoble

EXPRIME (2008) « EXpérimenter des PRoblèmes Innovants en Mathématique à l'Ecole » ; INRP- IREM Lyon- LEPS-LIRDHIST de l'université Claude Bernard de Lyon ; lien internet : http://educmath.inrp.fr/applet/exprime/fregco2.pdf .

FRIEDELMEYER J.P. (2008), Equidécomposabilité des polygones plans, *L'ouvert*, **117***,* IREM de Strasbourg.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (1996) Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **16/3**, 289-322.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A., (2006), Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de didactique et de sciences cognitives **11**, 175-193*

KUZNIAK A., RAUSCHER J-C., (2004) - *Processus de formation de Professeurs d'Ecole et anamnèse géométrique.* Actes du XXXème colloque COPIRELEM, Avignon, 19, 20 et 21 mai 2003 , Université de la Méditerrranée, 231-248

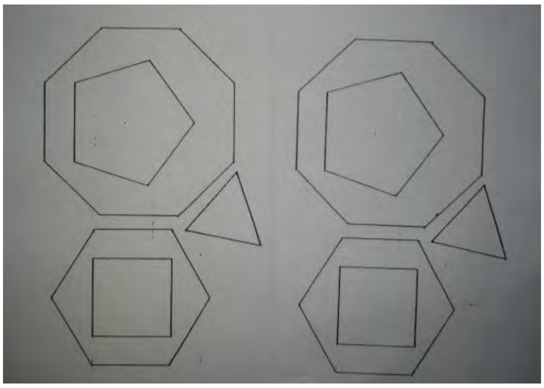
MAURIN C. (2008), Mesurer ? pour quoi faire ? deux exemples de situation pour des élèves de CM2 et 6ème, *Grand N,* 81*,* IREM de Grenoble.

VERGNAUD G. (1987) *Réflexions sur les finalités de l'Enseignement des Mathématiques,* Gazette des mathématiciens , **32**, 54-61).

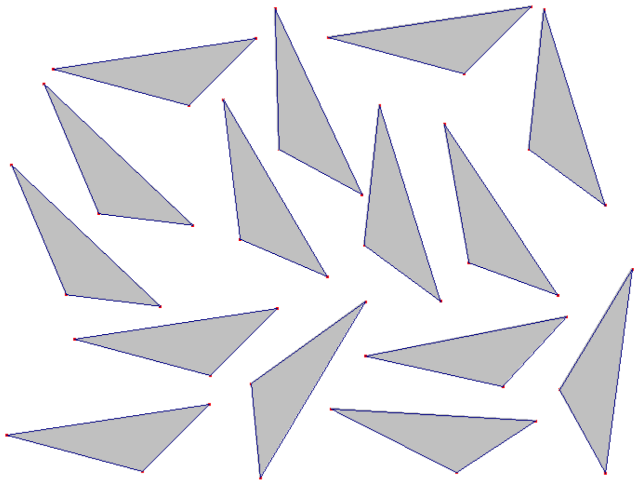
WITTMANN E. (1981) The complementary roles of intuitive and reflectives thinking in mathematics taeching, Educational Studies in Mathematics, **12**, 389-397

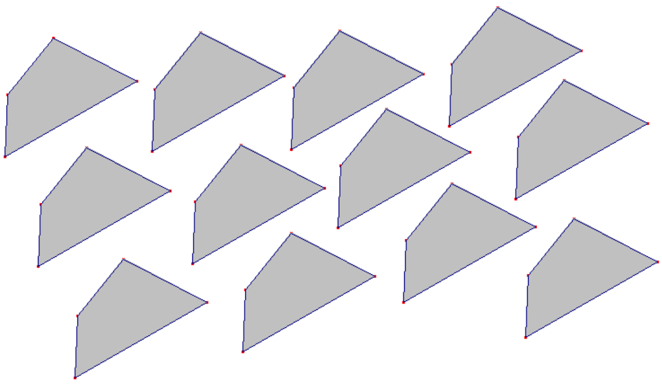
ANNEXE 1

Feuille 1

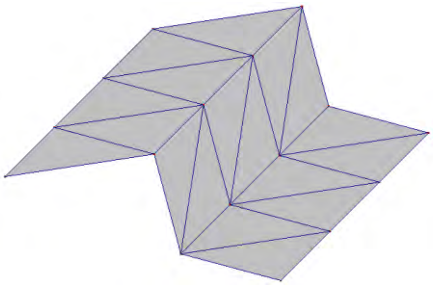


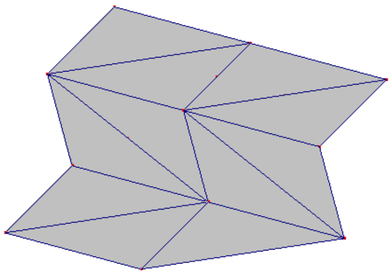
Feuilles 2 et 3

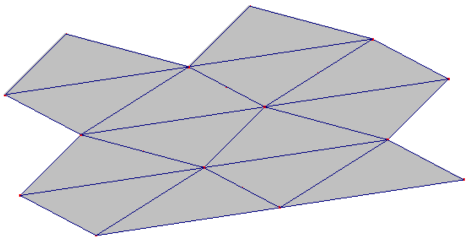


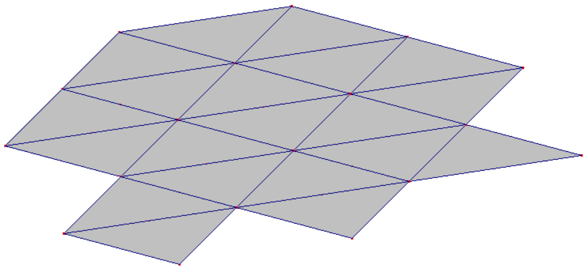


Feuille 4









ANNEXE 2

Compte rendu du travail de Christine De Block Dock (1994) : « Modalités de la pensée mathématique d'élèves de douze ans devant des problèmes de pavage »

Dans cet article (De Block-Dock, 1994), l'auteur analyse un enseignement dans lequel des élèves de douze ans ont traité des problèmes de pavages polygonaux et progressé à cette occasion dans leur apprentissage de la géométrie plane. L'analyse porte principalement sur les processus de pensée des élèves confrontés à la résolution de ces problèmes.

1. Modalités de l'enseignement analysé.

Conception :
L'élaboration de la séquence d'enseignement a été inspirée par la conception selon laquelle la résolution de problèmes et le lent travail d'organisation d'un champ de questions conduisent à un apprentissage plus profond, plus proche du sens que des exposés de théories organisées. Pour la plupart des recherches proposées, les élèves ont d'abord travaillé par petits groupes et ont ensuite communiqué leurs résultats lors de synthèses orales auxquelles toute la classe participait et pendant lesquelles l'enseignant donnait les explications nécessaires et fixait les acquis.

Le déroulement de l'enseignement :

- **1ère étape** : dessiner librement des pavages observés ou imaginés.

Il s'agit d'une étape de familiarisation.

- **2ème étape** : trouver « tous » les pavages possibles avec des polygones réguliers. Pour cela on donne des triangles équilatéraux, des carrés, des pentagones, des hexagones et des octogones réguliers en carton.

Le « tous » de l'énoncé est important parce qu'il implique que la recherche dépasse le stade « manipulatoire ». Il n'est pas facilement compris dans un premier temps. Lors de la synthèse l'existence de trois pavages réguliers est admise par tous (professeur compris). Cette constatation permet de trouver la valeur de l'angle intérieur du carré, du triangle équilatéral et de l'hexagone régulier (on suppose que le tour autour d'un point fait 360°). Les élèves arrivent à expliquer la non-existence d'autres pavages réguliers au-delà de l'hexagone par le fait que l'angle intérieur croît avec le nombre de côtés.

- **3ème étape** : avec le même jeu de polygones en carton on demande aux élèves de chercher des pavages faits de plusieurs sortes de polygones réguliers (tous les nœuds doivent être entourés de manière identique). On parle de pavages semi réguliers.

De nombreux essais sont effectués. Le pavage avec des octogones et les carrés avaient déjà été obtenus lors de la recherche avec les octogones uniquement. Les élèves peuvent ainsi en déduire la valeur de l'angle intérieur de l'octogone. Un essai pose problème : celui où un pentagone, un octogone régulier et un hexagone environnent un nœud. Les élèves ne sont pas sûrs de sa validité et pour cause puisque la somme angulaire fait 363°. Mais ils ne le savent pas puisqu'ils ne connaissent pas la valeur de l'angle du pentagone. Il faut donc trouver un moyen pour l'obtenir et ce besoin va servir de fil conducteur pour la suite.

- **4ème étape** : dessiner deux des pavages semi-réguliers et avant cela dessiner les polygones réguliers qui le composent.
- **5ème étape** : paver avec des polygones non-réguliers isométriques non fournis.

Au bout d'un certain temps, la recherche est circonscrite à celle de tous les pavages possibles avec des triangles isométriques découpés dans du carton. Lors de la synthèse, introduction des différentes isométries qui associent deux triangles des pavages.

- **6ème étape** : il est demandé aux élèves de s'intéresser aux problèmes d'angles dans ces nouveaux pavages.

Les élèves peuvent ainsi aboutir à la valeur de la somme des angles d'un triangle. Il y a ici un changement de point de vue pour les élèves car on ne s'intéresse plus à la valeur d'un angle mais à une somme. De manière analogue, par le biais d'un pavage par des quadrilatères quelconques, les élèves découvrent que la somme des angles d'un quadrilatère vaut 360°.

- **7ème étape** : il est demandé aux élèves de trouver la somme des angles d'un pentagone.

Les élèves ne peuvent plus s'appuyer sur un pavage : il faut penser à trianguler le pentagone.

- **8ème étape** : reprise de la question de l'existence du pavage 5-6-8.

Les élèves disposent maintenant des outils pour trancher en calculant la somme angulaire autour d'un nœud.

2 Evolution de la pensée mathématique des élèves.

Au cours de cet enseignement, il a pu être observé que les élèves ont développé leurs connaissances et leurs savoirs à propos des polygones réguliers ou quelconques (définition d'un pavage régulier, semi-régulier, somme des angles, valeurs des angles etc.) et que plus largement, ils ont eu l'occasion d'affiner certaines notions de géométrie plane : cercles, positions de droites, isométries, etc.
Mais les modalités de cet enseignement qui laissent de nombreux moments d'initiative aux élèves ont surtout permis d'observer l'évolution de la pensée mathématique des élèves. Les informations et explications circulaient sans blocage majeur et la classe est apparue comme un groupe intellectuellement assez homogène. Bien qu'il se soit agi de la construction de savoirs individuels, ce ne fût pour aucun élève la construction individuelle de son savoir. Les observateurs présents dans la classe ont relevé de leur mieux les contributions des élèves. Toutes les données disponibles ont permis l'analyse de l'évolution de la pensée mathématique susceptible d'avoir été partagée par une majorité d'élèves.

Christine de Block-Dock annonce que son analyse essaye de discerner et de décrire les modalités de cette pensée plutôt que des étapes. En effet, même si ces modalités sont présentées dans un ordre d'abstraction croissante, les plus primitives ne disparaissent pas pour faire place aux suivantes : elles coexistent avec elles et continuent à jouer un rôle utile. Globalement, comme nous allons le voir se dessine un mouvement qui amène la pensée des élèves à se détacher du contexte concret qui l'a nourrie pour accéder à un niveau plus abstrait et une organisation plus globale.

Pensée instantanée et pensée discursive.
Principalement Christine de Block-Dock distingue deux registres par lesquels peuvent se repérer les modalités de la pensée et son évolution :

- La pensée instantanée qui agit par flashs, qui globalise les données sans les discerner. Elle a cours dans la vie quotidienne mais joue un rôle considérable en mathématique.
- La pensée discursive qui atteint le but où elle tend par une série d'opérations partielles intermédiaires. Il s'agit de la pensée qui procède par enchaînement d'idées. Elle a peu cours dans le quotidien et n'est pas « naturelle » pour un enfant.

L'analyse passe alors en revue les occasions et les manifestations d'abord de la pensée instantanée puis de la pensée discursive dans les problèmes de pavages proposés aux élèves.

La pensée instantanée.

Avant d'arriver au stade où elle procède par enchaînements d'idées, la pensée saisit les données dans un mouvement unique qui les globalise pour y déceler rapidement des relations.

Les actions lors de la création des pavages.

La construction de pavages à l'aide de polygones en carton est guidée par ce que H. Wallon (1970) appelle « l'intelligence des situations » qui correspond à une perception globale d'un ensemble de circonstances matérielles et actions relevant des capacités sensori-motrices. Cette intelligence comporte des « intuitions variables appropriées aux circonstances ». Ainsi dans le cas de la création de pavages il s'agit de *:*

- juxtaposer des segments d'égales longueurs
- compléter l'environnement d'un nœud
- comparer par juxtaposition, superposition : constat d'égalité ou d'inégalité.
- utiliser implicitement les règles naturelles d'additivité des angles, de longueurs, d'aires etc.
- compléter les figures en anticipant… *« je continue comme ça… »*

Constats aboutissant aux structures géométriques visuelles.

Les élèves connaissent certaines figures sans savoir les définir. Ils observent spontanément certaines relations constitutives de ces figures : *« Dans un losange les angles opposés ont même longueur »*. Ils reconnaissent des polygones réguliers dans des pavages formés à partir d'autres polygones réguliers : dans la juxtaposition de triangles équilatéraux ils reconnaissent des hexagones, ils reconnaissent le carré qui manque lorsqu'on accole des octogones.

Ces constats portent sur les objets à fortes symétries.

De ces constats, les figures acquièrent une **structure géométrique visuelle**. Chaque figure est perçue comme un agrégat de propriétés coexistantes sans relations explicites de dépendance.

Conjectures générales.

Les élèves essayent dans un mouvement unique de trouver une loi générale ou de détecter des relations simples entre les objets :

- nombre pair de côtés = pavage régulier : « pour créer des pavages avec des polygones réguliers d'une seule sorte, ça va pour les polygones ayant un nombre pair de côtés + le triangle équilatéral,
- pour inscrire un dodécagone dans un cercle, il suffit de reporter le demi-rayon,
- pour un triangle quelconque, il n'y a qu'un seul pavage avec des symétries orthogonales puisqu'il n'y en a qu'un avec des symétries centrales.

Tous ces énoncés sont issus d'un mouvement spontané de la pensée aux prises avec un champ de phénomènes.

Contrairement aux constats précédents ces énoncés sont en général faux. Dans un premier temps, avant que beaucoup de cas n'aient pu être examinés, les élèves s'aventurent à conjecturer des régularités qui sont parmi celles qui s'imposent le plus spontanément à l'esprit. La pensée suit « la ligne de plus grande pente ». Au moment où ils abordent une problématique, ils manifestent une certaine tolérance aux contradictions :

- ils ajoutent par exemple le cas des triangles équilatéraux aux cas des polygones réguliers ayant un nombre pair de côtés

- cas de la proportionnalité dans le cas du dodécagone
- principe d'analogie dans le cas des symétries

La plupart des conjectures fausses ont été rejetées par les élèves par la suite lors de travaux plus approfondis. Elles sont cependant très utiles dans l'évolution du raisonnement parce qu'elles sont sources de contradictions qui stimulent des échanges et servent de point d'ancrage à la réflexion.
Les constats se font en général sur une seule figure que le regard embrasse.
Les conjectures se font sur un couple d'objets (dodécagone, hexagone par exemple), ou sur une famille infinie d'objets (nombres pairs) accessible à la pensée.

La pensée discursive.
La pensée discursive est la pensée qui procède par enchaînements.

La pensée discursive à l'œuvre dans les dessins.
Nécessité d'aller au-delà de la reconnaissance de la figure :
- analyser les propriétés de la figure
- choisir et ordonner les propriétés utilisables en vue de la reconstituer (synthèse) et tenir compte des possibilités des instruments.

Comment cela se passe-t-il ? Devant un dessin à exécuter, les élèves n'ont pas immédiatement à l'esprit un projet complet. Leur pensée ne devance que d'un peu l'exécution. Une première étape erronée enclenche une réflexion débouchant vers une deuxième étape etc.
La pensée discursive à longue échéance est pilotée par une vue globale, mais elle s'exécute par petits paquets d'opérations minutieuses, ces étapes intermédiaires régies par une démarche d'analyse/synthèse portant sur la globalité du pavage.
L'activité du dessin force à prendre en compte de nombreuses propriétés et leurs relations.
Cette maturation conceptuelle n'est pas liée à un besoin logique de la matière mais à un objectif précis de reproduction et se fait donc spontanément.

La pensée discursive à l'œuvre dans les réalisations de pavages par les cartons.
Bien que chronologiquement les pavages aient été construits avec les cartons avant d'être dessinés, ces constructions nécessitent une abstraction plus forte : rien ne laisse, en dehors des pavages classiques, imaginer une loi de formation. L'objectif est abstrait : il faut réaliser des pavages. La pensée doit précéder une vision. Mais là le matériel en carton facilite les choses et permet aux élèves d'anticiper :
- pour les pavages simples, pas de problèmes
- mais après, il y a nécessité d'analyser les paramètres en jeu : élément de symétrie, orientation, longueur des côtés. Ici aussi il y a une dialectique entre action et réflexion. Il y a une gradation des difficultés : le problème de la création de pavages réguliers donne assez vite des solutions, alors que pour les pavages semi-réguliers se pose la question de l'isométrie des paysages aux nœuds et que pour les pavages avec des figures non régulières (dont les côtés sont de longueurs différentes) se posent des problèmes d'orientation.

Cette gradation permet de passer d'essais sauvages, sans qu'il y ait analyse, à une prise en compte ordonnée des variables en jeu et des contraintes.
Et les élèves sont ici amenés à se poser des questions à propos de ce qui ne va pas (pavage 5-6-8). Ils passent donc à une analyse plus globale sur les questions d'existence des pavages.

Preuves brèves :

Dans le cas de pavages, la pensée discursive intervient de façon implicite avec un objet concret à élaborer. Mais la pensée discursive s'exprime explicitement à travers de courtes preuves :

- formulée spontanément par les élèves
- en réponse à des questions du professeur

Sur quoi s'appuient ces argumentations ? Sur certains constats : les structures géométriques visuelles interviennent comme sources d'arguments. Exemples *: « on peut paver avec un assemblage de polygones réguliers qui a la forme d'une rosace hexagonale parce que l'hexagone régulier pave. »* ou encore : *« un trapèze rectangle pave car deux exemplaires adéquatement accolés forment un rectangle ».* Ces énoncés ont été formulés avant d'être vérifiées expérimentalement. Ce sont des preuves brèves : deux faits enchaînés ou le deuxième fait se justifie par l'existence d'un pavage antérieur.

L'étude des angles permet d'élaborer des preuves plus longues et dont les sources ne sont plus toutes empiriques. Pour établir l'énoncé : « L'angle du triangle équilatéral vaut 60°, celui de l'hexagone régulier 120° » les élèves s'appuient sur :

- des constats d'existence empirique des pavages où les polygones sont impliqués
- la connaissance de la valeur angulaire totale en un point (360°)
- l'égalité des angles intérieurs des polygones réguliers (implicite).

De même pour la somme des angles d'un triangle : constat empirique, d'existence d'un pavage, constat de la présence des angles en double exemplaire autour d'un nœud, connaissance de la valeur angulaire en un point.

Mais pour que cet enchaînement soit une vraie preuve, il faut que les arguments évoqués aient une portée générale. Les élèves n'en sont pas spontanément conscients. C'est le professeur qui les invite à s'interroger sur la validité pour d'autres triangles.

Preuves plus élaborées

Elles font appel à des preuves moins immédiates, des enchaînements plus longs, des arguments empiriques plus lointains, ou des propositions déjà prouvées.

Exemple pour prouver qu'il n'y a que trois polygones réguliers qui pavent le plan :

- pour l'heptagone, il n'y a plus de place pour intercaler un troisième exemplaire
- les angles intérieurs croissent avec le nombre de côtés
- donc aucun polygone ayant un nombre de côtés supérieurs à 6 ne peut paver le plan
- le cas du pentagone est traité expérimentalement

Exemple pour la question de l'existence du pavage 5-6-8 :

Ce problème a été le fil motivant à travers les activités. Le statut de ce problème n'a pas toujours été très clair pour les élèves. Dans un premier temps les élèves attribuent l'emboîtement difficile à des problèmes matériels (découpage, difficulté de poser).

Piaget note que l'échec (ce qui ne va pas) est attribué successivement à :

- à des objets extérieurs (ciseaux ici)
- à la résistance des objets eux-mêmes
- à l'action des sujets
- et enfin seulement à la prévision du sujet qui est remise en cause

En l'occurrence ce problème fut l'occasion d'un débat animé : qu'est ce qui fait qu'on accepte un assemblage et pas un autre ? Aucun critère objectif, si ce n'est un consensus dans les cas admis et des avis partagés dans le cas qui donne lieu à controverse. Cette controverse donne lieu à un renversement de perspective : les élèves acceptent de déterminer l'angle du pentagone régulier par une autre voie, la déduction théorique à laquelle ils aboutissent finalement. De plus les élèves qui ont pu prendre assez de recul ont pu réaliser qu'il serait contradictoire d'accepter simultanément l'existence des pavages de triangles quelconques et celle de l'assemblage 5-6-8. Il y a donc là une occasion d'être sensibilisé à une démarche de modélisation et de théorisation pour réduire une contradiction.

Finalement on peut observer dans cet enseignement une évolution dans les types de preuves :

- d'abord empiriques
- puis un enchaînement d'arguments empiriques
- enchaînements plus longs

La pensée des élèves va finalement vers un détachement du contexte concret qui l'a nourrie pour accéder à un niveau plus abstrait et une organisation plus globale.

Chritine De Block-Dock se réfère ici à Wittmann (1981), qui part de la supposition que l'enseignement des mathématiques n'a pas pour modèle une lecture des mathématiques mais une activité en mathématiques. Pour lui trois types d'activités sont nécessaires pour développer la pensée mathématique :

- des opérations sur une riche variété d'exemples et de modèles qui permettent l'élaboration de conjectures et le développement de l'intuition (stade de l'intuition)
- des réflexions sur ces premières activités pour trouver des formulations générales, des résultats, les tester, les améliorer, les prouver (stade du raisonnement)
- des analyses des concepts, des théorèmes et des preuves (stade du formalisme)

COMPETENCES NUMERIQUES EN MATERNELLE ET CYCLE 2 : UTILISATION EN FORMATION D'UN DVD D'ENTRETIENS INDIVIDUELS AVEC DES ELEVES

Isabelle LAURENÇOT-SORGIUS
IUFM de Midi-Pyrénées, site de Toulouse
isabelle.laurencot@toulouse.iufm.fr

Madeleine VAULTRIN
IUFM de Midi-Pyrénées, site de Toulouse
madeleine.vaultrin@toulouse.iufm.fr

Laurence MAGENDIE
IUFM d'Aquitaine, site de Bordeaux
laurence.magendie@aquitaine.iufm.fr

Résumé
Lors de cet atelier, nous avons présenté un DVD produit par l'IUFM Midi-Pyrénées et débattu de ses possibles utilisations. Ce DVD présente des enregistrements vidéos d'entretiens individuels avec des élèves de grande section de maternelle destinés à repérer leurs compétences numériques. Outil pour la formation des enseignants du primaire, il peut être utilisé avec de multiples objectifs et de multiples modalités, dès lors que l'on s'intéresse à l'apprentissage du nombre par les jeunes enfants.

I. PRESENTATION DU DVD « COMPETENCES NUMERIQUES EN GS »

I – 1 Le contenu du DVD

Ce DVD « Evolution des compétences numériques en Grande Section »[1], conçu et réalisé par des formateurs de l'IUFM de Midi-Pyrénées, montre des entretiens individuels avec des élèves de Grande Section destinés à repérer leurs procédures dans des activités utilisant les nombres et à identifier les compétences sous-jacentes.

Il s'inspire d'une vidéo réalisée dans les années 1980 par l'INRP dans le cadre de la recherche ERMEL. Il y ajoute une étude de l'évolution des compétences des élèves entre le début et la fin de l'année de GS (octobre et juin).

---

[1] Le DVD ainsi que son livret d'accompagnement peuvent être commandés à l'ARPEME ou éventuellement en prenant contact avec les collègues de l'IUFM de Midi-Pyrénées : isabelle.laurencot@toulouse.iufm.fr ou madeleine.vaultrin@toulouse.iufm.fr

Le DVD est accompagné d'un livret de 44 pages proposant des pistes d'utilisation en formation continue ou en PE2 (un exemple précis d'utilisation en PE2 y est intégralement décrit), des activités et des jeux en relation avec les compétences testées, ainsi que des références théoriques. L'ensemble peut aussi être le support d'une animation en circonscription.

Six élèves d'une même classe de GS, choisis par leur enseignante pour l'hétérogénéité de leurs compétences, ont été filmés en octobre 2005 et juin 2006. Chacun d'eux, lors d'un entretien individuel avec un formateur, effectue une série de tâches : dénombrement, fabrication de collection, calculs ... Huit compétences « numériques » sont ainsi repérées chez chaque élève (voir annexe pour la liste de ces compétences et les questions posées aux élèves). Un questionnaire très proche se trouve dans ERMEL CP ainsi que dans le document d'accompagnement des programmes de 2002 « Vers les mathématiques en maternelle ».

Le montage du DVD permet de choisir entre deux entrées : une entrée par les élèves et une entrée par les compétences.

Lors de l'atelier, nous avons visionné l'entretien complet de deux des six élèves et la compétence de surcomptage/décomptage pour chacun des six élèves.

I – 2 Présentation du cadre d'utilisation du DVD en formation par les animateurs de l'atelier

Un rapide tour de table permet de voir qu'il n'existe pas, dans les différents IUFM, d'autre film de ce type, reprenant les propositions de l'équipe ERMEL. Les films utilisés en formation sont plutôt des « extraits de classe ».

Lorsqu'on utilise ce film en formation, il nous paraît important d'indiquer en préalable qu'il est évident que des entretiens individuels ne sont pas faciles à mettre en place dans une classe de 30 élèves. Cependant, le document réalisé présente un double intérêt : d'une part faire une synthèse des différentes compétences numériques des enfants de cet âge, à enrichir éventuellement par les collègues en formation (collègues du RASED, formation continue), d'autre part, envisager le transfert de ce travail individuel dans le cadre collectif de la classe. Cela permet aussi d'approfondir les méthodes d'évaluation dans le domaine numérique en GS.

Ce film amène naturellement à parler des activités qui peuvent être mises en œuvre pour améliorer les compétences.

Il est utilisé actuellement en formation initiale et continue, avec les PE2, des enseignants des cycles 1 et 2, et des maîtres de l'éducation spécialisée (ASH).

II. ECHANGES ENTRE LES PARTICIPANTS

Ce qui suit est un résumé organisé des différentes interventions des participants à l'atelier.

II – 1 Echanges sur les utilisations possibles du DVD en formation

II – 1.1 Avec les PE2

Les PE2 ont très peu d'expérience de la maternelle et ont du mal à anticiper les capacités d'un élève de ce niveau.

Pour guider le visionnement du DVD avec les PE2, on peut donner des pistes d'observations : quelle est la compétence testée ? Quelles erreurs sont produites ? Comment décrire la procédure de l'élève ?

Ce DVD permet de bien voir la grande hétérogénéité des élèves de GS. Cette hétérogénéité peut être en partie gérée en proposant les mêmes activités aux élèves et en les adaptant à leurs compétences repérées au préalable : la consigne est la même, mais les nombres proposés aux élèves sont différents. Cela permet d'aborder la différenciation en classe avec les stagiaires.

Lorsque les PE2 partent en stage en maternelle, l'enseignante titulaire de la classe leur propose assez souvent de « faire le 6 » (ou tout autre nombre). L'hétérogénéité des élèves indique bien que ce n'est pas une entrée pertinente.

Une collègue de l'atelier qui travaille en Suisse nous dit qu'on n'a pas pu fixer des objectifs pour chaque niveau, PS, MS, GS, contrairement aux documents d'accompagnement des programmes français de 2002 parce qu'il est difficile de savoir quoi faire avec les élèves qui n'entrent pas dans la norme. L'enseignement en Suisse préfère faire progresser les élèves indépendamment d'une quelconque norme. Il existe parfois un tutorat CM2-maternelle et c'est le grand qui évalue les compétences du plus petit.

II – 1.2 En ASH

Ce film répond en partie à une grande demande de la part des stagiaires en formation initiale E ou D pour des tests sur les compétences numériques de leurs élèves. En formation, il fera suite à un point sur de « récents » travaux de recherche pédagogique sur les nombres (les principes du comptage de R. Gelman et C.R. Gallistel, les approches conceptuelles du nombre qui évoluent de l'appariement de J. Piaget vers le comptage et le dénombrement, les travaux de R. Brissiaud, les propositions de S. Baruk).

Le film est visionné avec de nombreuses pauses car il est un point de départ pour analyser les difficultés des élèves avec lesquels travaillent les maîtres E ou D.

Lorsque le test proposé est insuffisant pour repérer les erreurs des élèves, d'autres propositions sont faites à partir du livre « Troubles du calcul et dyscalculies chez l'enfant » de A. Van Hout et C. Meljac. Le travail est poursuivi par des constructions de tests sur la numération ou les opérations.

La demande des stagiaires vient ensuite sur la remédiation à mettre en place, sur des activités qui ne fassent pas double emploi avec celles déjà faites en classe. Un certain nombre d'activités ou de jeux présentés dans le livret d'accompagnement du DVD répondent à cette demande.

La remarque est faite que très souvent l'indication au RASED pour des difficultés en mathématiques est faite trop tard (au CE2).

II – 2 Echanges autour des questions posées lors des entretiens du DVD et des difficultés apparues chez les élèves

II – 2.1 La comptine

Mémorisation

Dans l'activité où l'élève doit utiliser la comptine pour fabriquer une collection de nombre d'éléments fixé à l'avance, plusieurs élèves ne s'arrêtent pas sur le nombre demandé.
Une explication peut être que lorsque les élèves sont trop absorbés par la tâche, ils oublient ou ils ne prennent pas en compte le but, c'est notamment le cas lorsqu'on se rapproche de la limite de la comptine de l'élève.
Voici une attitude non citée mais fréquemment rencontrée avec les élèves en grande difficulté (ASH en particulier) : dans des situations où il faut réaliser une collection équipotente à une autre collection, l'élève compte la première collection d'objet correctement, comprend le principe cardinal et oublie le nombre en question après quelques secondes. Les enseignants spécialisés sont toujours démunis face à ces gros problèmes de mémoire immédiate.

Quelles sont les différences entre la mémorisation de la comptine des nombres et celle d'une comptine ordinaire ?
Des participants à l'atelier indiquent que ce n'est pas qu'une question de mémorisation pure mais aussi de sens, de sonorité. Le fait qu'il ne faille faire aucune erreur dans la comptine des nombres modifie l'enjeu et augmente la difficulté.
Il y a aussi pour la comptine numérique une forte charge sociale.

Lien avec le dénombrement

Peut-on savoir compter sans savoir la comptine ?
Les avis des participants sont partagés. Certains enfants peuvent savoir qu'il y a 3 objets sans savoir compter jusqu'à 3 (cependant R. Brissiaud, dans « Premiers pas vers les maths », prétend que le « subitizing » n'est pas un phénomène de reconnaissance immédiate : les petits nombres, selon lui, ne se « voient » pas, mais on a très tôt la possibilité de les énumérer sans effort). Le comptage peut aussi pour certains élèves bloquer une procédure plus rapide comme la perception immédiate moins disponible et à laquelle ils n'ont pas beaucoup été entraînés (doigts, reconnaissance des constellations du dé). D'autres procédures possibles existent : par exemple quand on demande aux élèves de dire combien il y a d'élèves présents dans la classe, un jour où il n'y a pas d'absent, ils peuvent répondre par connaissance du nombre d'élèves de la classe.

Extension de la comptine

Des exercices sont cités pour l'extension de la comptine, par exemple la course à 100 : à tour de rôle chacun dit un nombre, les élèves ne sont éliminés que s'ils sont inattentifs, pas s'ils ne savent pas ; ce jeu les aide à prendre conscience de l'algorithme oral quand ils entendent les autres dire les nombres qu'ils ne connaissent pas. Un élève qui a du mal à poursuivre la comptine numérique à partir d'un nombre donné peut avoir besoin de revenir un peu en arrière.

Formulation des consignes

Quand on demande un dénombrement aux élèves, il est important que la question posée commence par « combien … » et non par « compte combien … ».
De manière générale, il est important de travailler en formation, notamment des PE2, sur le choix de la consigne : choix des mots, des formulations … Par exemple la formulation du film « est-ce que tu peux me dire … » est trop compliquée et même les élèves la prennent comme une devinette et ne s'autorisent pas à utiliser des méthodes qui permettraient de donner la réponse avec certitude ; pour répondre à cette question, ils ne s'autorisent pas à pointer du doigt alors que, dans les épreuves suivantes, on voit que c'est une méthode qui leur est familière. Autre exemple : que signifie pour l'élève « compter à partir de 8 ? » (normalement le 8 ne devrait pas être compté). Cependant une bonne formulation de la consigne ne suffit pas toujours.

II – 2.2 « Autant que… »

Des participants ont rappelé l'importance des activités autour de « aller chercher autant de … que … », tout en précisant qu'il faut être attentif aux éléments qu'on apparie (l'appariement doit être naturel, les éléments doivent être de taille importante si on fait un appariement un à un ; on peut aussi apparier deux pour un pour des lego et des duplo, des fleurs et des abeilles …).
On trouve du matériel facile à utiliser sur certains sites comme « La maternelle de Moustache » ou celui de J.L. Sigrist.

II – 2.3 Le calcul

Certains élèves n'arrivent pas à faire des calculs additifs avec des petits nombres : une explication peut être que deux informations ne sont pas mémorisables en même temps (les deux nombres à ajouter).

Il est intéressant en regardant le film de poser le problème de savoir si les élèves s'autorisent l'utilisation des doigts ou pas ; le tabou des doigts n'est plus dans les discours, mais il est encore très souvent présent dans les faits. On voit en effet que les élèves cachent leurs doigts.

III. FIN DE L'ATELIER

Nous avons terminé l'atelier par quelques images du prochain film en préparation sur le repérage des compétences en géométrie en GS.

ANNEXE

Compétences repérées dans le DVD

1. Connaissance de la comptine

Consigne : « Jusqu'où sais-tu compter ? », […], « Compte pour moi », […] « Je n'ai pas eu le temps de noter, pourrais-tu recompter ? ».
Noter le nombre « *a* », plus grand nombre de la partie stable et conventionnelle de la comptine.

2. Dénombrement d'une collection d'objets (de fèves, de marrons, de cubes non emboîtables (soit tous de même couleur, soit de couleurs distinctes,…)

Demander de dénombrer une collection d'objets disposés regroupés en tas sur la table.
Noter la procédure de dénombrement (déplace, pointe, compte avec les yeux).
Choix du nombre *b* d'objets : nettement inférieur à *a* ou inférieur de 2 ou 3 unités à *a*.

3. Établissement d'une collection d'objets de cardinal fixé

Consigne : « Mets *p* objets dans la boîte ».
S'il y a échec en 2) et suivant le type d'erreur, *p* sera choisi nettement inférieur à *b*, sinon inférieur de 2 ou 3 à *b*.
La boîte est opaque. Une fois les objets mis dans la boîte, demander à l'élève de vérifier.
Noter la procédure de vérification (déplace, pointe, compte avec les yeux).

4. Surcomptage et décomptage

Utiliser la boîte dans laquelle l'élève sait combien il y a d'objets.
Demander à l'élève combien il y en a dans la boîte après avoir rajouté un ou deux objets puis après en avoir ôté un ou deux.

5. Reconnaissance d'écritures chiffrées

Des nombres sont écrits sur des étiquettes déplaçables. Il s'agit de faire reconnaître les écritures des nombres de 1 à 12 et faire lire les étiquettes.
Consigne : « Est-ce que tu reconnais ce qu'il y a sur les cartons ? Qu'est-ce qui est écrit ? ».

6. Des nombres pour mémoriser

Donner une bande sur laquelle des gommettes sont disposées linéairement (adapter la taille de la bande suivant les compétences numériques des élèves).
De petits objets (de taille permettant de recouvrir les gommettes) sont disposés sur une table au loin (peu visibles de l'endroit où l'entretien a lieu).
Consigne : « Tu vas ramener des objets de façon à recouvrir chacune des gommettes. Attention, toutes les gommettes devront être couvertes par un seul objet et il ne doit pas rester d'objets. Il faut en ramener juste ce qu'il faut, pas un de plus, pas un de moins et en un seul voyage ».

7. Des nombres pour calculer

- Faire compter des objets placés dans la main droite et des objets placés dans la main gauche de l'expérimentateur.
  Mettre les deux collections « ensemble » (dans une boîte opaque par exemple), et demander combien il y a d'objets dans cette nouvelle collection.
  Demander à l'élève comment il a fait pour trouver.

- Faire compter des objets. Une partie de ces objets est placée sous un gobelet retourné, l'autre partie est visible.
  Demander à l'élève combien d'objets sont cachés sous le gobelet.

8. Des nombres pour comparer

Faire un jeu de bataille simplifié avec l'élève. Les cartes du jeu de bataille présentent les nombres sous forme de constellations.

Compétences non repérées dans le DVD et qui auraient pu l'être

- Reconnaître les configurations des doigts de la main ou montrer *n* doigts.

- Reconnaître les constellations du dé.

BIBLIOGRAPHIE

BRISSIAUD R. (2003) *Comment les enfants apprennent à calculer*, Retz.

BRISSIAUD R. (2007) *Premiers pas vers les maths*, Retz.

ERMEL (1990) *Apprentissages numériques GS*, Hatier.

FISCHER J.P., MELJAC C. & BIDEAUD J. (2002) Les chemins du nombre, *PU du Septentrion.*

GRAND N (1999) Spécial maternelle, tome 1 Approche du nombre, *IREM de Grenoble.*

FAYOL M. (1990) L'enfant et le nombre, *Delaschaux Niestlé.*

PIERRARD A. (2002) Faire des mathématiques en maternelle, *Scéren/CRDP, Grenoble.*

VALENTIN D. (2004) Découvrir le monde avec les mathématiques, situations pour la petite et moyenne section, *Hatier.*

VALENTIN D. (2004) Découvrir le monde avec les mathématiques, situations pour la grande section, *Hatier.*

VAN HOUT A. & MELJAC C. (2001) Troubles du calcul et dyscalculies chez l'enfant, *Masson.*

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (2002) Document d'accompagnement « vers les mathématiques en maternelle ».