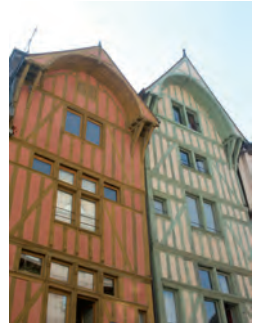


XXXIV^{ème} Colloque COPIRELEM

Des Professeurs et des Formateurs
de Mathématiques chargés
de la Formation des Maîtres

Expérimentation et modélisation
dans l'enseignement scientifique :
quelles mathématiques à l'école ?



Colloque International Francophone

Troyes 11, 12 et 13 juin 2007
Centre IUFM



photos : Office de Tourisme Troyes



SOMMAIRE

PRESENTATION

| | page |
|--|-----------|
| Présentation de la COPIRELEM | 4 |
| Présentation du COLLOQUE | 7 |
| Bilan par le président du comité scientifique | 9 |
| Remerciements | 11 |
| Présentation des ACTES et contenu du CDROM | 12 |

CONFERENCES – REGARDS CROISES

| | |
|--|-----------|
| Jean-Claude DUPERRET , De la modélisation du « monde » au monde des « modèles » : quels enjeux pour l'enseignement des mathématiques ? | 15 |
| Marja VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN , L'emploi didactique des modèles dans l'enseignement « réalistique » des mathématiques : un exemple longitudinal d'enseignement sur les pourcentages. | 53 |
| REGARDS CROISES « Mathématiques – Biologie » | |
| Christian ORANGE , Modélisation et construction de savoirs en Sciences de la Vie et de la Terre. | 55 |
| Joël BRIAND, Patricia SCHNEEBERGER , Regards croisés « Mathématiques-Biologie ». | 67 |

| | |
|--|------------|
| A1 – Catherine HOUEMENT , « Problèmes pour chercher », quelle contribution à la modélisation ? (<i>texte intégral de l'atelier</i>) | 85 |
| A2 - Pascale MASSELOT, Isabelle ZIN , Exemple d'une situation de formation pour aborder la structuration de l' espace aux cycles 1 et 2. | 104 |
| A3 – Jacques DOUAIRE, Fabien EMPRIN, Claude RAJAIN , Rôle de l'argumentation dans les phases de validation en géométrie au cycle 3. | 105 |
| A4 – Françoise JORE , Analyse d'un dispositif en géométrie plane pour les futurs professeurs des écoles autour de pliages et de rédaction de scénarios de construction. | 107 |
| A5 – Nicole TOUSSAINT , « Des problèmes pour chercher » à l'école. | 108 |

| | |
|--|------------|
| A6 – Sébastien HACHE, Katia Hache , Un rallye Internet sur le calcul mental : genèse, choix didactiques et prolongements. | 109 |
| A7 – Laurence MAGENDIE, Claire WINTER , Utilisation de ressources numériques conçues pour la formation. | 110 |
| B1 – Robert ADJAJE, Richard CABASSUT , La modélisation dans une perspective de formation et d'enseignement. (<i>texte intégral de l'atelier</i>) | 111 |
| B2 - Michel JAFFROT, Catherine TAVEAU , Situations de formation pour aborder la modélisation de notions mathématiques chez les PE1. | 121 |
| B3 - Annie CAMENISCH, Serge PETIT , Des albums numériques : pour quels apprentissages en français et en mathématiques ? | 122 |
| B4 – Jean-Claude RAUSCHER , Eléments de formation initiale des professeurs d'école à partir de l'algorithme de Kaprekar et de questions de pavage du plan. | 123 |
| B5 - – Nicolas De KOKER, Nicole GREWIS, Claude MAURIN, Floriane WOZNIACK , Les enjeux d'un enseignement du calcul mental à l'école . | 124 |
| B6 – Pierre EYSSERIC , La place et la forme des apprentissages mathématiques au cours d'une première année de scolarisation à l'école maternelle. | 125 |
| <hr/> | |
| C1 –Pascale MASSELOT, Line.NUMA-BOCAGE, Isabelle VINATIER , , Que devient la dizaine dans une séance menée par une débutante au CP ? : croisement de différentes analyses appliquées à un même protocole. | 129 |
| C2 – Marie-Pierre CHOPIN , Questions de temps : étude des effets des contraintes du temps sur les pratiques d'enseignement de l'arithmétique au cycle 3.. | 130 |
| C3 – Jacques DOUAIRE , Processus de preuves et résolution de problèmes numériques ? | 131 |
| C4 – Jean-Louis IMBERT , Conditions et contraintes de l'introduction des TICE dans les pratiques mathématiques à l'école élémentaire. | 132 |
| C5 – Maryvonne PRIOLET, Jean-Claude REGNIER , Résolution de problèmes numériques à l'école primaire : place et rôle de la modélisation dans une pratique d'enseignement basée sur une mise en réseau des énoncés et de leurs représentations. | 133 |

- C6 – Thierry DIAS**, Expérimentation en mathématiques dans le contexte de l'enseignement spécialisé : étude des apports d'un dispositif de type « laboratoires de mathématiques ». **134**
- D1 – Rémi BRISSIAUD**, Un cadre théorique pour penser le calcul mental, l'usage du symbolisme arithmétique et la résolution de problèmes à l'école : le modèle hiérarchique des stratégies de résolution de problèmes. **135**
- D2 – Jean-Baptiste LAGRANGE, Fabien EMPRIN**, Dispositifs en ligne dans la formation des professeurs des écoles. Réflexions et échanges à partir de l'expérience de l'IUFM Champagne-Ardenne. **137**
- D3 – Charalambos LEMONIDIS**, Le comportement des élèves et des futurs enseignants d'école élémentaire **138**
- D4 - Hélène MERLE, Valérie MUGNIER, Jean-François FAVRAT**, Les angles en sciences et en mathématiques à l'école primaire : vers des démarches cloisonnées. **139**
- D5 – Denis BUTLEN, Pascale MASSELOT, Monique PEZARD**, Les effets sur les pratiques effectives d'enseignants débutants nommés en ZEP d'un dispositif d'accompagnement : premiers résultats. **140**

| | |
|--|---|
| C.O.P.I.R.E.L.E.M Commission Permanente des IREM sur l'Enseignement Elémentaire | Responsables : Laurence Magendie et Pierre Eysseric Adresse postale : IREM de Paris 7, Université Denis Diderot, CP 7018, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 5 Tél : 01 44 27 53 83 Fax : 01 44 27 56 08 |
|--|---|

La COPIRELEM, Commission Permanente des IREM sur l'Enseignement Élémentaire est constituée d'une vingtaine de membres issus, en 2006-2007, de 16 académies différentes.

La plupart d'entre eux sont chargés de la formation mathématique des professeurs d'école en IUFM.

SES MISSIONS

Depuis sa création (en 1975), la COPIRELEM a pour double mission :

- d'une part, de regrouper et centraliser les travaux des différents groupes élémentaires des IREM sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et sur la formation initiale et continue en mathématiques des enseignants du premier degré ;
- d'autre part, d'impulser des recherches sur les points sensibles ou contingents liés aux changements institutionnels (programmes, organisation de l'école, formation initiale, etc....)

SES ACTIONS

Répondant à ses missions, elle s'intéresse simultanément à l'**enseignement des mathématiques à l'école primaire** et à la **formation des professeurs d'école**. Elle se réunit cinq fois par an pour mettre en œuvre et coordonner ses différentes actions :

➤ *UN COLLOQUE ANNUEL*

Regroupant de **120 à 180 participants** (professeurs d'école, formateurs et chercheurs), ces colloques permettent, depuis 1975, la diffusion des recherches en didactique des mathématiques, en France et à l'étranger.

Les derniers ont eu lieu à Troyes (2007), Dourdan (2006), Strasbourg (2005), Foix (2004), Avignon (2003). Le prochain se tiendra à Bombannes en juin 2008.

Les actes en sont publiés chaque année.

➤ *UN SEMINAIRE DE FORMATION*

Il accueille chaque année entre 30 et 50 nouveaux **formateurs en mathématiques des professeurs d'école** en IUFM et les comptes-rendus de ses conférences, communications et ateliers sont **publiés dans « Les cahiers du formateur »**. Les derniers ont eu lieu à Istres (2007), Blois (2005), Draguignan (2004), Avignon (2003).

➤ *DES PUBLICATIONS*

La COPIRELEM publie, seule ou avec d'autres instances (Commission Premier Cycle des IREM, APMEP, ...) des **documents destinés aux enseignants et/ou aux formateurs**.

En plus de la publication annuelle des Actes de son colloque et de son séminaire (voir ci-dessus), elle publie chaque année les **Annales du Concours Externe de Recrutement des Professeurs d'École**, avec l'intégralité des sujets de l'année et des corrigés détaillés assortis de compléments utiles à la formation en mathématique et en didactique des futurs professeurs d'école.

En 2003, la COPIRELEM a publié « **Concertum** », **ouvrage de référence** pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques. Sa traduction en espagnol est parue en mars 2006 et la publication de sa version en anglais est imminente.

➤ **DES COLLABORATIONS AVEC LE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE**

Par la présence d'un de ses membres à la commission mathématique du CNP, la Copirelem a apporté sa **contribution à l'élaboration des programmes de 2002** de mathématiques pour l'école primaire ainsi qu'à la rédaction de leurs documents d'accompagnement.

Dès 2002, elle a été une force de proposition auprès du ministère pour la définition du contenu du **programme national pour le concours de recrutement des professeurs d'école** qui a été publié en mai 2005. La Copirelem a diffusé dès juillet 2005 des **propositions d'exercices** correspondant à ce nouveau programme et trois de ses membres participent à la commission chargée d'élaborer les **sujets nationaux du CRPE**.

SES AUTRES TRAVAUX ET PROJETS

- ✓ La COPIRELEM poursuit sa réflexion générale sur la nature des **mathématiques que l'on doit enseigner à l'école primaire** et les moyens dont on dispose pour le faire.
- ✓ Elle a entrepris des travaux sur l'**utilisation des TICE** à l'école et le développement des **ressources internet**, avec, notamment, la mise en place d'une collaboration avec la CII **Mathenpoche** et un rapprochement avec le dispositif « **La main à la pâte** ».
- ✓ La COPIRELEM collabore avec la **revue « Grand N »** publiée par l'IREM de Grenoble et destinée aux enseignants du primaire.

PUBLICATIONS

- ✓ Les Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques
Cahors 91 / Pau 92 / Colmar 93 / Angers 95 / Rennes 96 / Besançon97

- ✓ *Les Cahiers du formateur (de professeurs d'école en didactique des mathématiques)*
Perpignan 97 / Tarbes 98 / Aix 99 / Agen 2000 / Nancy 2001 / Pau 2002 / Avignon 2003 / Draguignan 2004 / Blois 2005 .

- ✓ *Les Actes des colloques annuels de la COPIRELEM (depuis 1990).*
Paris 90 / Nice-Besançon 91/92 / Aussois 93 / Chantilly 94 / Douai 95 / Montpellier 96 / Saint Etienne 97 / Loctudy 98 / Limoges 99 / Chamonix 2000 / Tours 2001 / La Roche sur Yon 2002 / Avignon 2003 / Foix 2004 / Strasbourg 2005 / Dourdan 2006.

- ✓ *CONCERTUM : Carnet de route de la COPIRELEM* (édité par l'ARPEME).
Sélection de travaux qui résume l'activité de la COPIRELEM depuis 10 années :
 1. Apprentissage et diversité (371 pages).
 2. Démarches et savoirs à enseigner (415 pages).
 3. Outils de formation (219 pages).

PRESENTATION DU COLLOQUE

Le 34^{ème} colloque, organisé par la COPIRELEM et l'IUFM Champagne-Ardenne, a eu lieu les 11, 12 et 13 juin 2008 au centre IUFM de TROYES avec le soutien de l'IREM de Reims.

La COPIRELEM s'est donné comme thème de réflexion et fil conducteur de ses deux derniers colloques (Dourdan 2006 et Troyes 2007) « *Expérimentation et modélisation dans l'enseignement scientifique : quelles mathématiques à l'école ?* », prenant comme hypothèse qu'une meilleure connaissance des façons dont d'autres disciplines scientifiques traitent de l'expérimentation et de la modélisation dans l'enseignement éclaire les relations de ces pratiques avec les mathématiques.

Les interventions plénières du colloque de 2006 se sont plutôt centrées sur l'expérimentation et ont invité « la physique ». Rappelons les ici¹ :

- Hélène Gispert (GHDSO Orsay) « *Expérimentation en mathématiques : une question neuve ? retour sur l'enseignement des mathématiques sur deux siècles.* »
- Daniel Perrin (IUFM de Versailles) : « *Expérimentation en mathématiques : quelques exemples.* »

Dans la rubrique « *Regards croisés* » :

- Elisabeth Plé (IUFM Champagne Ardennes) : « *Un regard sur modélisation et expérimentation en sciences à l'école.* »
- Claudine Schwartz (IMAG Grenoble) : « *Hasard et modélisation: quelques objectifs pour l'école primaire.* »

Celles du colloque de 2007 se sont tournées vers la modélisation et sa déclinaison en biologie et mathématiques.

La première conférence du colloque de Troyes offre le point de vue d'un mathématicien formateur d'enseignants sur la modélisation dans les mathématiques et l'enseignement des mathématiques.

Les deux conférences de la rubrique « *Regards croisés* » sont liées aux sciences de la Vie et de la Terre. La première propose un éclairage sur les liens qui existent entre modélisation et apprentissages et les conséquences sur l'enseignement. La seconde justifie et rend compte d'une comparaison entre points de vue de didacticiens sur la modélisation en biologie et en mathématiques au service de la formation des maîtres.

La dernière conférence a porté sur l'approche des Realistics Mathematics Education plus particulièrement développée dans les pays nordiques.

¹ Le texte intégral est disponible dans
COPIRELEM (2007) *Actes du XXXIII^{ème} Colloque COPIRELEM*. SCEREN CRDP de Versailles

Au-delà de ces conférences plénières, le colloque proposait deux autres types d'intervention :

☞ **des ateliers** concernant une réflexion commune que l'animateur initialise à partir, par exemple, d'un exposé de travaux ou d'un questionnement sur un thème prévu.

☞ **des communications**, qui sont de deux types :

- présentations de pratiques de formation des professeurs des écoles, suivies d'un échange.
- recherches universitaires, achevées ou en cours, sur un thème lié à la formation des enseignants ou à l'enseignement des mathématiques dans la scolarité obligatoire.

Plus de 150 professeurs de mathématiques et enseignants-chercheurs, inspecteurs de l'éducation nationale, conseillers pédagogiques, professeurs des écoles ont participé aux travaux du colloque, contribuant à enrichir la réflexion sur l'enseignement des mathématiques et les pratiques des maîtres et des formateurs.

COMITE D'ORGANISATION

Jean-Claude DUPERRET, Responsable du centre IUFM de Troyes, IUFM Champagne-Ardenne, IREM de Reims

Christine JOURDAIN, Directrice Adjointe, Service Recherche et Développement, IUFM Champagne-Ardenne

Jean-Claude FENICE, Formateur Mathématiques, IUFM Champagne-Ardenne, Centre de Troyes, IREM de Reims

Thérèse ESCOFFET, Formatrice Mathématiques, IUFM Champagne-Ardenne, Centre de Troyes

Claude SIMONNOT, Directeur d'Ecole d'Application, IUFM Champagne-Ardenne, Centre de Troyes

Danièle DUCUING, Responsable Administrative du centre IUFM de Troyes, IUFM Champagne-Ardenne

Annie DUPONT, Assistante, IUFM Champagne-Ardenne, Centre de Troyes

Olivier JANATI, Technicien Informatique du centre IUFM de Troyes, CRI IUFM Champagne-Ardenne

Danièle MOREAU, Chargée de la Communication, IUFM Champagne-Ardenne

Didier CHAUXEAU, Assistant, Service Recherche et Développement, IUFM Champagne-Ardenne

Sandra VIE, Webmestre, CRI IUFM Champagne-Ardenne

BILAN SCIENTIFIQUE

Alain Kuzniak

Président du Comité Scientifique du colloque

Le thème de ce trente-quatrième Colloque de la COPIRELEM était centré autour du rôle de la modélisation et de l'expérimentation dans l'initiation au raisonnement scientifique à l'école primaire. Il s'agissait dans la continuité du colloque précédent, celui de Dourdan, en juin 2006, de voir comment cette préoccupation d'enseignement pouvait être prise en compte dans le cadre de la formation en mathématiques des enseignants du premier degré.

Pour développer la réflexion sur le thème du colloque, trois conférences avaient été prévues, chacune destinée à éclairer les participants et à illustrer certaines actions de formation sur le sujet.

La conférence de Jean-Claude Duperret, professeur agrégé de mathématiques, a permis de préciser un certain nombre d'approches spécifiques des mathématiques dans la gestion de la modélisation. Le conférencier a notamment insisté sur la variété des situations prises en charge et sur la diversité des types de solutions que donnent les outils mathématiques.

Un deuxième temps de conférence, organisé sous la forme de regards croisés, a permis à Christian Orange, professeur de biologie, de développer le point de vue de sa discipline sur la nature de la modélisation requise pour les jeunes élèves découvrant certaines notions et concepts clés de la biologie. Pour illustrer son propos, Joël Briand MCF de mathématiques et Patricia Schneeberger MCF de biologie ont présenté et analysé une expérience de formation pour les PLC2 qui permettait à des futurs enseignants de mathématiques et de biologie de prendre conscience des spécificités de la relation entre modélisation et expérimentation dans leur discipline.

Enfin, Marja Van Den Heuvel, professeure de mathématiques à l'Institut Freudenthal aux Pays-Bas, a développé l'approche des Realistic Mathematics Education qui permet aux pays nordiques d'avoir une certaine avance dans les évaluations internationales.

Ces conférences étaient les points d'orgue d'une manifestation qui se nourrit des nombreuses communications et ateliers présentés par des formateurs d'enseignants venus de toute la France et aussi de certains pays étrangers.

Je ne détaillerai pas l'ensemble de ces contributions qui figurent dans les actes du colloque, sinon en rappelant que treize ateliers et onze communications avaient été proposés aux participants. Les ateliers permettaient sur un temps long de travailler certaines questions cruciales comme la résolution des problèmes, la nature des activités de modélisation à l'école et aussi en formation des enseignants. L'intérêt manifeste de ces ateliers est de favoriser les échanges d'expériences qui sont également passées au crible de la critique bienveillante et attentive des participants.

Quant aux communications, fort diverses, elles permettaient de faire en peu de temps un état des lieux sur les recherches qui sont actuellement en cours.

Le Comité Scientifique a ensuite reçu les contributions écrites des intervenants et a validé leur contenu afin de garantir l'intérêt et la qualité des actes du colloque qui seront largement diffusés en France et à l'étranger.

Le travail du Comité Scientifique a grandement été facilité par l'action du Comité d'Organisation et notamment par les professeurs du site IUFM de Troyes. Au nom du Comité Scientifique, je tenais à tous les remercier avec une mention particulière pour Jean-Claude Duperret dont le rôle a été déterminant pour faciliter le bon fonctionnement scientifique du colloque.

COMITE SCIENTIFIQUE

Jean-Pierre KAHANE, Professeur émérite Université Paris-Sud Orsay, Membre de l'Académie des Sciences, Président d'honneur du Comité scientifique

Alain KUZNIAK, Professeur des Universités, IUFM d'Orléans-Tours, DIDIREM, Université Paris 7, Président du Comité scientifique

Jean-Claude DUPERRET, Responsable du centre IUFM de Troyes, IUFM Champagne-Ardenne, IREM de Reims

Pierre EYSSERIC, co-responsable de la COPIRELEM, IUFM de l'académie d'Aix-Marseille, IREM de Marseille

Catherine HOUDEMMENT, Maître de Conférence, IUFM de Haute-Normandie, DIDIREM, Université de Paris 7

Michel JAFFROT, IUFM des Pays de la Loire, IREM de Nantes

Agnès LENFANT, Maître de Conférence, Directrice de l'IREM de Reims, IUFM Champagne-Ardenne

Laurence MAGENDIE, co-responsable de la COPIRELEM, IUFM Midi-Pyrénées, IREM de Toulouse

Christian ORANGE, Professeur des Universités, IUFM des Pays de la Loire, CREN, Université de Nantes, IREM de Nantes

Elisabeth PLE, IUFM Champagne-Ardenne, déléguée académique Académie des Sciences, INRP/UMR Stef. ENS de Cachan

Remerciements

Le bon déroulement de ce colloque a été rendu possible par le soutien de nombreux partenaires que nous tenons particulièrement à remercier :

- Conseil Régional Champagne-Ardenne
- Communauté d'Agglomération Troyenne
- IUFM Champagne-Ardenne
- ADIREM
- IREM de Reims
- APMEP Régionale Champagne-Ardenne
- CASDEN
- MGEN
- MAIF



Un grand merci à Pierre Danos, pour ses compétences et la disponibilité et la réactivité dont il a fait preuve pour la gestion du site.

Un remerciement spécial à la Mairie de Troyes pour son accueil chaleureux et convivial.

Un merci chaleureux à tout le personnel du centre IUFM de Troyes qui, par sa disponibilité et sa compétence, a su créer les conditions optimales à la fois sur le plan professionnel et convivial.

Un merci plus général à tous ceux qui ont contribué à la réussite de ce colloque, que ce soit au niveau de la préparation, comité d'organisation et comité scientifique, ou de la réalisation, intervenants et participants.

PRESENTATION DES ACTES

Les actes se présentent sous la forme d'une brochure accompagnée d'un CDROM.

La brochure contient :

- le texte de la conférence d'ouverture, des regards croisés, l'atelier A1 et l'atelier B1
- un résumé présentant les autres ateliers et les communications.

Les comptes-rendus complets des ateliers et communications sont disponibles dans le CDROM.

CONTENU DU CDROM

- Texte intégral des conférences (exceptée la conférence de clôture)
- Texte intégral des regards croisés
- Comptes-rendus détaillés des ateliers A et B
- Comptes-rendus détaillés des communications C et D

BONUS :

- Liste des participants avec leur adresse courriel
- Des photos du colloque

CONFERENCES
et
REGARDS CROISES

DE LA MODELISATION DU MONDE AU MONDE DES MODÈLES

QUELS ENJEUX POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES ?

Jean-Claude DUPERRET

Professeur de mathématiques
IUFM de Champagne-Ardenne
IREM de Reims
COPIRELEM

Résumé

On est passé en 30 ans d'un enseignement dit de « structure » à un enseignement dit de « modélisation », sans que cette évolution ait été clairement explicitée. Cela renvoie à la question bien ambitieuse de la modélisation, surtout lorsqu'on la pose sous l'angle des mathématiques. Si la plupart des autres disciplines scientifiques ont pour objet de « décrire » et de « modéliser » un point de vue du « monde réel », point de vue différent suivant ces disciplines, comment les mathématiques peuvent-elles s'inscrire dans ce rapport au monde réel ? Les mathématiques ont-elles pour objet de « décrire » la réalité, ou ne se contentent-elles pas d'une action intellectuelle sur une réalité déjà abstraite ? Qu'est-ce qu'un modèle mathématique ? Y a-t-il unicité du modèle pour traduire une « réalité », ou celui-ci n'est-il pas lié à « l'intention » de modélisation ? En quoi la connaissance du modèle permet-elle « d'éclairer » la réalité, voire de l'expliquer et d'avoir une attitude « opérationnelle » et « décisionnelle ».

Pour essayer d'éclairer ces notions de « modélisation » et de « modèles mathématiques », et de balayer les questions ci-dessus, l'exposé proposera de nombreux exemples, dont certains centrés sur les mathématiques de l'école primaire. Les notions de forme, de grandeur et de mesure en seront un fil conducteur, et permettront de visiter un certain nombre des « mondes mathématiques » qui constituent les piliers d'un enseignement de mathématiques pour tous.

Dans le cadre de cet exposé, je ne parlerai pas, ou très peu, d'expérimentation : je renvoie pour cela à la conférence de Daniel Perrin au colloque COPIRELEM de Dourdan, parue dans les actes correspondants. Je me centrerai donc sur les questions de la modélisation et du rapport des mathématiques au « réel », et vous proposerai une revisite avec cet éclairage d'un enseignement de mathématiques pour tous balayant l'école, le collège...et au-delà pour certains développements.

Pour essayer de rentrer dans la complexité d'un tel sujet, je m'appuierai sur de nombreux exemples, liés à mon expérience d'enseignant et de formateur, et aux questions que je me suis posées... et que je me pose encore !

Grâce aux IREMS, j'ai eu la chance de rencontrer beaucoup de collègues qui m'ont permis de faire évoluer ma réflexion, et je pointerai ici plus particulièrement trois commissions qui représentent beaucoup pour moi :

- la commission Inter-IREM premier cycle dont j'ai été le responsable au temps des « suivis scientifiques » qui accompagnaient les nouveaux programmes de 1986,
- la COPIRELEM dont je suis membre depuis deux ans qui m'a permis de poursuivre et approfondir ma réflexion sur l'enseignement des mathématiques à l'école,
- la CREM (Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques) où j'ai beaucoup appris de ses différents membres, et plus particulièrement de son président Jean-Pierre Kahane qui a été pour moi un « maître à penser ».

Ce parcours que je vais vous proposer est donc à la fois le résultat d'un cheminement personnel, et de toutes ces rencontres et échanges que j'ai pu avoir. Il m'est bien impossible de citer tous ces collègues qui m'ont enrichi. Si certains, que je n'aurais pas cités, se reconnaissent dans tel ou tel de mes propos, qu'ils soient ici remerciés de l'éclairage qu'ils m'ont apporté !

D'UN ENSEIGNEMENT DE STRUCTURE A UN ENSEIGNEMENT DE MODELISATION... OU LES TRIBULATIONS D'UN ENSEIGNANT DE MATHEMATIQUES EN COLLEGE

Après une année de CPR à Lyon, j'ai commencé ma carrière en 1972 comme professeur au collège Albert Camus, à La Chapelle Saint Luc, une ZUP située à côté de Troyes. C'était l'époque des « mathématiques modernes » ! À l'époque, ne se posait pas la question du rapport des mathématiques au réel : les mathématiques étaient un magnifique édifice qui se construisait de façon purement interne. Pour illustrer cela, je vais prendre quelques exercices et définitions qu'on trouvait alors dans les manuels.

UNE ABSENCE DE RAPPORT AU « REEL » AVEC LES MATHEMATIQUES MODERNES

Des exemples d'énoncés :

En sixième, un des grands enjeux était l'écriture d'ensembles « en extension » et « en compréhension », et le passage d'une écriture à l'autre :

Collection Mauguin – classe de 6^{ème}

Définissez en compréhension :

a) *L'ensemble de lettres $\{v, w, x, y, z\}$*

b) *L'ensemble de nombres entiers $\{41, 43, 45, 47, 49\}$*

On trouvait bien quelques tentatives d'interdisciplinarité :

Écrivez en extension un ensemble A formé de cinq éléments qui soient des oiseaux.

Une outarde peut-elle être un élément de A ?

On peut imaginer la tête des élèves sur la présence ou non de l'outarde dans cet ensemble !

En cinquième, l'étude des relations occupait une place prépondérante. Sous forme de boutade, je dirais volontiers que c'était « le royaume des flèches », avec les différents diagrammes du programme. Voici un énoncé qui se voulait certainement en prise avec le « quotidien ».

Collection Bréard – classe de 5^{ème}

Dans l'ensemble des élèves de la classe, on considère la relation : «...est né(e) la même année que... »

Est-ce une relation d'équivalence ?

Donner, le cas échéant, les classes d'équivalence.

On attendait des élèves qu'ils « récitent » en les adaptant au problème les propriétés de réflexivité, de symétrie et de transitivité : « tout élève est né la même année que lui même », « si un élève est né la même année ... »

On peut noter que, dans cet exercice, les classes d'équivalence sont relativement immédiates !

Quelle définition des objets mathématiques ?

La définition des « objets mathématiques » se faisait sans aucune relation au monde réel, mais uniquement dans la logique interne de construction des différentes structures. Je ne peux pas résister au plaisir de vous rappeler comment était à l'époque définie la droite affine en quatrième, époque où « Thalès » n'était qu'un axiome servant à « coordonner » les différentes structures des droites affines pour définir le plan affine :

Collection Mauguin – classe de 4^{ème}

Soit (Δ, g) une droite réelle et H l'ensemble de toutes les bijections h telles que :

$(M \in \Delta) [h(M) = ag(M) + b] \quad (a \in \mathbb{R}^, b \in \mathbb{R}).$*

Le couple (Δ, H) est appelé droite réelle affine obtenue à partir de g ; Δ en est le support.

Je dois dire que je garde de cette époque le souvenir d'un enseignement facile, entièrement géré par l'enseignant, laissant bien peu de place à une réelle activité des élèves. Même les parents d'élèves regardaient, certes avec un peu d'inquiétude, mais aussi avec une certaine « admiration » cette construction des mathématiques qui n'avait aucune résonance avec leur propre parcours d'élève.

LES « NOUVEAUX PROGRAMMES » DE 1986

C'est au contact des IREM que j'ai commencé à me poser la question de la pertinence de ces mathématiques modernes, à la fois dans leur rôle de sélection, mais aussi de leur capacité de construction d'un vrai outil scientifique à la disposition des élèves et des autres disciplines.

Toutes ces questions fortement posées par différents instituts et associations ont conduit aux nouveaux programmes de 1986, où les mots-clés sont devenus pour le collègue « activités » et pour l'école « situations-problèmes », mettant en avant les problèmes concrets, quotidiens, issus du monde réel, et prônant une démarche expérimentale. Le mot de « modélisation » ne figure pas dans ces programmes.

Cette période fut pour moi une formidable « bouffée d'air frais » en tant qu'enseignant, et me donna la chance de pouvoir développer un travail en équipe aussi bien au niveau de mon collègue qu'au niveau de la commission « Inter-Irem Premier Cycle » investie dans les « suivis scientifiques », commission dont je fus alors le responsable.

Des spaghettis réels...

Dans le cadre de ces nouveaux programmes, j'essayais au maximum de mettre les élèves en situation d'activité (versant parfois dans l'activisme), et pour introduire l'inégalité triangulaire en quatrième j'eus une idée que je trouvais a priori géniale : j'amenais des spaghettis en classe, en donnais quelques uns à chaque élève, et leur demandais de les « casser » en trois morceaux « au hasard ». Ils devaient alors essayer de faire un triangle avec ces trois morceaux. Je leur demandais de mesurer la longueur de chacun des morceaux, et de conjecturer à partir de cette mesure une règle qui permette de discriminer les cas où ils obtenaient des triangles des autres. L'état de la classe à la fin de l'heure m'a déterminé à ne pas reconduire une telle expérience !

...aux spaghettis mathématiques

Dans notre collège, nous suivions les classes de quatrième en troisième. Je voulais revenir sur cette expérience pas très heureuse des spaghettis, et pour ce faire, j'inventais le « spaghetti mathématique ». C'était un spaghetti de longueur 1, avec équiprobabilité de « cassure » (ce qui est évidemment inconcevable avec un spaghetti réel !). Et pour faire ces cassures, j'utilisais la simulation. J'expliquais donc aux élèves ce nouveau contexte, et leur proposais de faire ces cassures avec leur calculatrice en utilisant la touche « random » qui leur donnait à l'époque un nombre compris entre 0 et 1 avec 3 chiffres après la virgule. Avec 3 tirages aléatoires (ex : 0,167 ; 0,534 ; 0,435), ils simulaient la cassure de 3 spaghettis mathématiques, et pour donner un sens « tangible » à l'expérience, je leur proposais de multiplier par 100 chacun des nombres obtenus, ce qui leur donnait 3 mesures de longueur en mm, et ils pouvaient ainsi vérifier par construction s'ils avaient ou non « tirer » un triangle (vous aurez noté que cette nouvelle situation ne reproduit pas l'expérience précédente où je cassais un spaghetti en 3, alors que là je casse 3 spaghettis en 2). L'objectif de la séance était d'arriver à se passer de l'expérience physique pour décider simplement avec les 3 tirages si on obtenait un triangle ou non via l'inégalité triangulaire immédiatement traduite par : « il ne faut pas qu'un des nombres soit plus grands que la somme des deux autres ».

Forts de cette règle, les élèves effectuèrent alors 10 tirages, et, sans avoir vraiment préparé ce passage aux statistiques, je proposais de voir quel était le pourcentage des triangles obtenus. Devant le résultat (48%), les élèves me demandèrent : « c'est bon ? » ; « c'est ça ? » ; « c'est juste ? », comme s'ils pensaient que je connaissais « ce résultat » ? Leur questionnement pouvait être traduit par : existe-t-il un modèle mathématique qui me permette d'affirmer que ce résultat est « vraisemblable » ? Et j'étais bien incapable de leur répondre, sinon en faisant tourner mon ordinateur et en constatant qu'il y avait une certaine stabilisation de la fréquence autour de 50%. Je crois que ce fut mon premier vrai contact avec la modélisation.

LA MODELISATION

Pour préparer cet exposé, j'ai lu un certain nombre de textes sur la modélisation, qui m'ont montré la complexité de ce thème et la diversité des approches. Pour cet exposé, je me contenterai des caractérisations d'une telle démarche que je donne ci-dessous, et je proposerai alors de voir en action cette notion de modélisation dans un certain nombre de domaines des mathématiques, en l'illustrant avec de nombreux exemples qui vont de l'école à l'université.

Modélisation

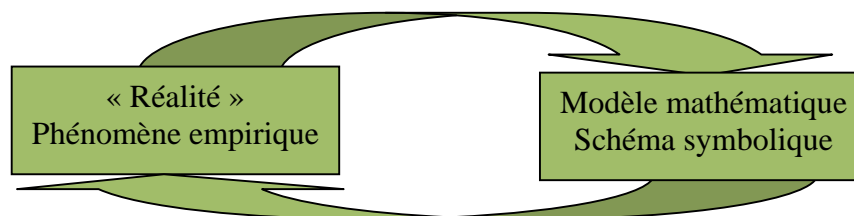
Modéliser, c'est « re-présenter » une situation d'une certaine réalité dans un modèle (mathématique pour nous), « re-présenter » étant pris au sens de présenter cette situation avec une nouvelle description liée au modèle choisi.

Et j'attacherai à ce processus de représentation trois spécificités :

- Représentation « fonctionnelle » des objets d'une certaine « réalité » par des objets « abstraits » ou « schématisés » dans un modèle où peut s'exercer un traitement théorique,
- Représentation « analogique » ou « métaphorique » : les processus naturels sont imités dans des conditions qui favorisent l'observation et l'étude,
- Représentation « sélective » : un travail de modélisation nécessite de retenir certaines caractéristiques de la situation et d'en ignorer d'autres.

« Modélisation » et « modèle »

Ce processus de modélisation s'illustre par le schéma ci-dessous :



Ce schéma fonctionne dans les deux sens :

- du réel vers le modèle : modèles descriptifs (« transformer » et « interpréter » des « informations ») ; ce sens correspond à une fonction heuristique,
- du modèle vers le réel : modèles prédictifs (« anticiper » une « action ») ; ce sens correspond à une fonction justificative.

UNE PREMIÈRE MODÉLISATION DU MONDE PHYSIQUE: LA GEOMETRIE

De par son étymologie, la géométrie constitue une des premières modélisations, celle du monde « physique » dans lequel nous vivons. Dans notre enseignement, cela va se traduire d'abord par la représentation des formes, objets du monde physique, par des dessins qui vont « tenir » sur le micro-espace de la feuille de papier, puis des figures, objets mathématiques porteurs de propriétés.

PLURALITE DES MODÈLES GÉOMÉTRIQUES

Une géométrie...ou des géométries

Une des premières finalités qu'on attribue aux mathématiques est de donner une certaine intelligibilité du monde (cela commence avec le monde des grandeurs), puis d'en donner des représentations (c'est le monde des nombres et des figures). Pour modéliser formes et grandeurs, le modèle premier que nous proposons à nos élèves est celui de la géométrie euclidienne. C'est celui que nous avons hérité des grecs, et qui a été le modèle prépondérant pendant des siècles ; On pourrait le résumer en disant que c'est une modélisation « locale » de l'espace physique, avec des « postulats » qui sont des demandes « de bon sens ».

Mais si l'on veut vraiment modéliser notre terre, la géométrie sphérique est un bien meilleur modèle, qui oblige notre pensée à se « décentrer ». Dans cette géométrie, les objets mathématiques ne vont plus être les mêmes (plus de segment, mais des arcs de cercle...), et les propriétés de la géométrie euclidienne vont être mises en défaut : le plus court chemin d'un point à un autre devient une géodésique (arc de cercle) ; la somme des angles d'un triangle (sphérique) n'est plus égale à 180° ...On voit bien là combien la modélisation est fortement tributaire du modèle choisi.

Au-delà de cette géométrie sphérique, d'autres géométries sont apparues (en réaction au modèle euclidien), comme la géométrie hyperbolique dont Daniel Perrin nous a montré quelques propriétés des droites remarquables d'un triangle dans la conférence d'ouverture du colloque COPIRELEM de Dourdan.

On assiste à un achèvement de l'édifice de ces différentes géométries avec le discours inaugural de Félix Klein à Erlangen en 1872 qui unifie toutes ces géométries dans une théorie unique pour en dégager les points de similitude. Cette théorie est basée sur l'action d'un groupe de transformations sur un ensemble de points. Ce souci de mettre en place des théories unificatrices des différents modèles est certainement à l'origine des mathématiques modernes, avec l'hypothèse de faire économiser à l'élève leur lente mise en place au regard de l'histoire. Les programmes de 1986 qui peuvent apparaître en réaction à cette hypothèse ont cependant gardé de manière forte les groupes de transformation.

Cinq, quatre, trois, deux, un

Je vais partir d'un problème proposé par l'IREM de Montpellier comme narration de recherche pour illustrer en quoi le modèle choisi va influencer sur la résolution d'un même problème. Bien entendu, ce que je vais proposer n'est pas du tout l'objectif recherché par ces collègues de Montpellier : leur but est de mettre les élèves dans une démarche expérimentale, avec tâtonnement, essais, procédures personnelles..., alors que je vais essayer de montrer en quoi la connaissance de modèles géométriques conduit à des procédures expertes.

Voici l'énoncé de ce problème :

A et B sont deux points donnés. On souhaite construire en utilisant seulement une règle non graduée et un compas le point C vérifiant les trois conditions suivantes :

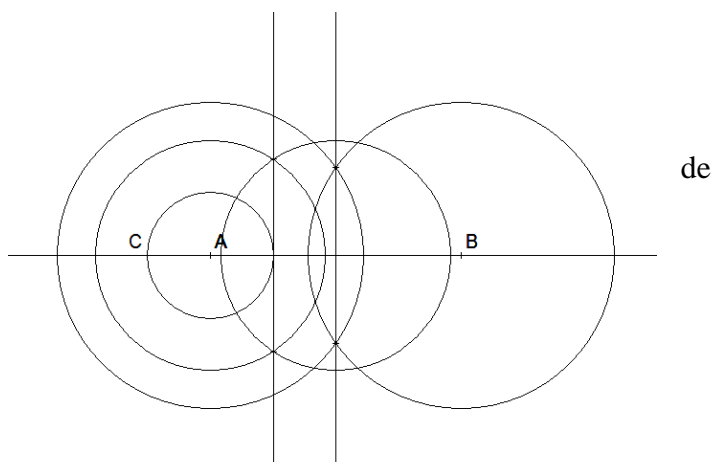
- 1) *C appartient à la droite (AB)*
- 2) *C n'appartient pas au segment [AB]*
- 3) $AC = \frac{3}{4}AB$

Quel est le nombre minimum d'arcs de cercles (ou de cercles) qu'il est nécessaire de tracer ?

Cinq cercles :

Cette première procédure fait intervenir 5 cercles : 4 pour le tracé 2 médiatrices, et 1 pour symétriser le dernier point obtenu.

On est ici dans la géométrie euclidienne, avec la conceptualisation du milieu par « équidistance »

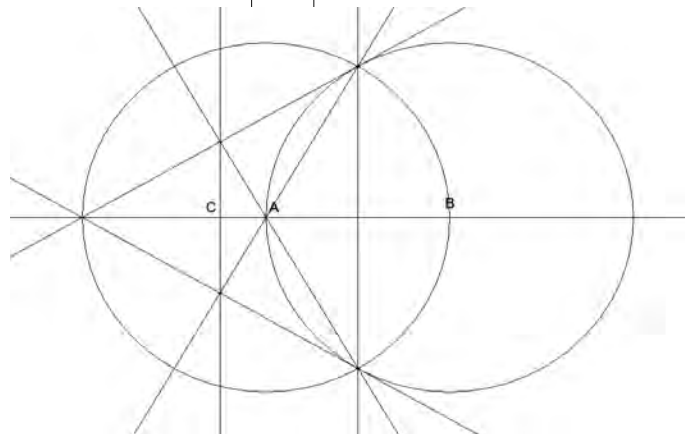


Deux cercles :

Cette procédure utilise 2 cercles et permet d'obtenir un triangle équilatéral dont A est le centre de gravité.

La « droite des milieux » donne alors le point C.

On est ici dans la géométrie affine avec la conceptualisation du milieu comme « barycentre ».

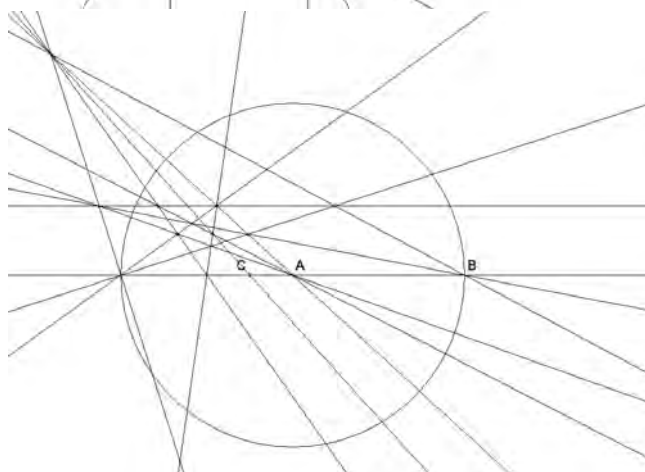


Un cercle :

Cette procédure ne nécessite qu'un cercle qui donne un milieu (ici A).

C'est alors une suite de constructions échangeant milieux et parallèles qui permet d'obtenir le point C.

On est ici en géométrie projective avec une conceptualisation « milieu-parallèle »



Cet exemple montre bien que, pour le même problème, suivant le choix du modèle géométrique les objets cercle et droite n'ont pas la même « prégnance », la conceptualisation

du même objet « milieu » et les actions physiques de tracé sont différentes. Un même problème conduit donc à des modélisations différentes en fonction du modèle choisi.

MODELISATION GÉOMÉTRIQUE EN TERME DE « NIVEAUX » D'ACTION ET DE PENSÉE

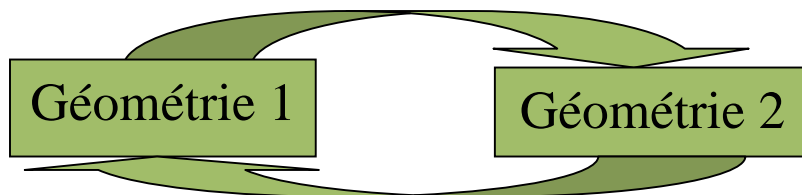
Cette modélisation beaucoup plus opérationnelle pour l'enseignement de la géométrie s'appuie sur les « paradigmes géométriques » développés par Alain Kuzniak et Catherine Houdement d'après la typologie de F.Gonseth ;

- Géométrie 1 : la géométrie « naturelle »
- Géométrie 2 : la géométrie « axiomatique naturelle »
- Géométrie 3 : la géométrie « axiomatique formelle »

Nous allons dans un premier temps nous intéresser plus particulièrement aux géométries 1 et 2 qui sont celles développées dans l'enseignement pour tous (école et collège).

La géométrie 1 est celle des objets et des actions « physiques », la géométrie 2 celle des objets « idéalisés » et des actions « intellectuelles ».

Une erreur serait de penser qu'elles sont à développer dans cet ordre. L'enseignement doit au contraire assurer un constant aller-retour entre ces deux géométries comme le suggère le schéma ci-dessous, en s'appuyant sur l'analogie, voire la simultanéité des « gestes » entre ces deux géométries, et en pointant les différences de nature des objets, des tâches et des modes de validation.



La géométrie 1 est une première modélisation du monde physique. La géométrie 2 est une modélisation mathématique de la géométrie 1.

Pour aller plus loin dans cette réflexion sur l'interaction entre ces deux géométries, je vous renvoie à l'article de Catherine Houdement paru dans le Repères-IREM 67 : « A la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège ». Je vais pour ma part me contenter d'illustrer cet aller-retour entre ces deux géométries avec un problème qui a traversé l'histoire, et qui va mettre en jeu formes (ici les polygones) et grandeurs (ici aire). L'objectif est de découper une forme pour en faire une autre forme de même aire, démarche très présente dans les programmes de l'école élémentaire avec toutes les activités de type « puzzle ».

Du polygone au carré

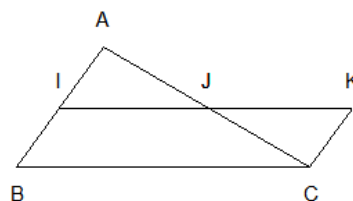
On pourrait situer ce problème dans le monde physique comme celui du « remembrement », mais nous allons directement le situer dans le micro-espace de la géométrie élémentaire :

« *Peut-on découper un polygone pour en faire un carré ?* »

Je vais ci-dessous résumer les étapes constitutives de la résolution de ce problème :

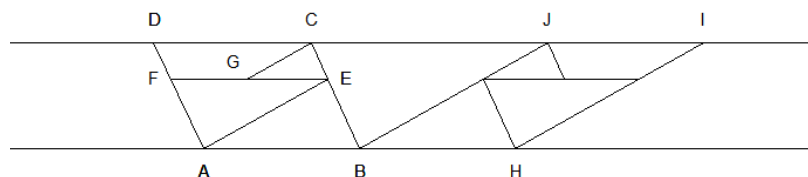
Du triangle au parallélogramme :

La « droite des milieux » donne une solution, en découpant le triangle suivant (IJ) pour obtenir le parallélogramme BCKI qui a la même aire que le triangle ABC



Du parallélogramme au parallélogramme...et donc au rectangle :

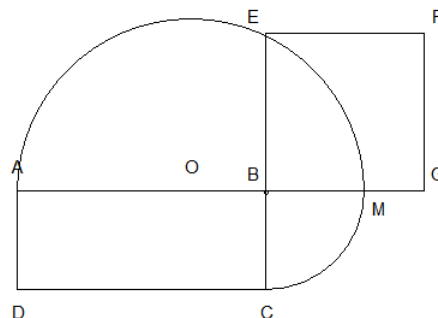
Voici un découpage obtenu par translations, les différentes pièces étant constituées en utilisant les 3 directions constituées par ces 2 parallélogrammes de même aire.



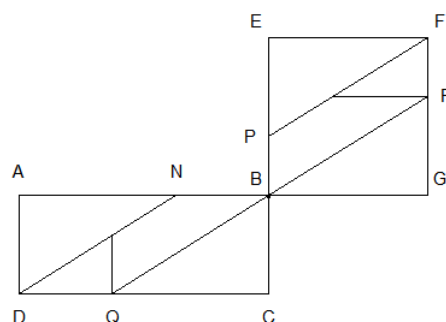
Du rectangle au carré :

La première étape est de construire un carré ayant la même aire que le rectangle donné (ici ABCD).

Le théorème de Thalès (pas le nôtre, mais celui de la plupart des autres pays) nous donne une solution avec le fait que le triangle AEM inscrit dans un demi-cercle est rectangle, et donc que le carré de la hauteur EB est égal au produit des longueurs AB et BM.



Il ne reste plus qu'à découper !

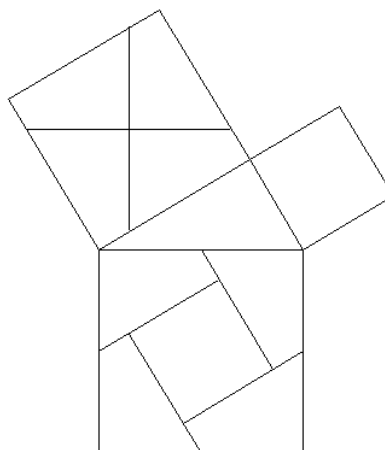


Du polygone au carré :

Nous allons résoudre le problème avec un quadrilatère, l'algorithme employé permettant d'envisager alors tous les polygones.

Nous découpons notre quadrilatère en 2 triangles, et découpons chacun d'eux pour obtenir un carré comme vu ci-dessus. Nous voici donc avec 2 carrés, à partir desquels il faut construire un carré dont l'aire soit égale à la somme des aires des 2 carrés déjà obtenus, puis découper ces 2 carrés pour reconstituer le troisième.

Merci Pythagore !



Que d'actions, que d'allers-retours entre figure et dessin, entre coups de ciseaux physiques et coups de ciseaux mathématiques, entre géométrie 1 et géométrie 2.

La démarche a été double : d'abord construire les objets " convoités ", en utilisant et validant par " Thalès " pour le passage du rectangle au carré, par " Pythagore " pour le passage de deux carrés à un troisième carré ; ensuite imaginer les découpages. Pour ce second travail la prise d'information sur le dessin est absolument nécessaire, car ce sont les " bords " qui vont guider notre action : recherche simultanée de " pièces isométriques " et du " déplacement " correspondant. Les mathématiques nous garantissent alors que le " découpage " que nous avons effectué est un bon " puzzle ", c'est-à-dire qu'il ne laissera pas de " vide " ni de " superposition " entre les pièces lorsque nous retournerons dans le découpage physique.

Ce problème illustre bien aussi le double sens de la démarche de modélisation : heuristique de la géométrie 1 vers la géométrie 2, explicatif de la géométrie 2 vers la géométrie 1.

Le problème de la réversibilité d'une action de modélisation.

Quand on modélise un problème ou une situation, l'action se fait dans un sens (ici du polygone au carré). Il est souvent très difficile de mener l'action dans l'autre sens (du carré à un polygone) avec le même « traitement ». Il a fallu attendre Biolay au début du 20^{ème} siècle pour établir le résultat suivant : « deux polygones de même aire sont « puzzle-équivalents » ».

L'impossible retour à la réalité

Nous avons sur cet exemple illustré cet aller-retour entre la géométrie 1 et la géométrie 2 : nos sens, notre perception, nos actions physiques accompagnent nos actions intellectuelles, notre raisonnement, les modélisent par une certaine analogie. Mais qu'en est-il dans la géométrie 3 ? Pour entrer dans ce nouveau « monde géométrique », je vous propose de suivre Jean-Pierre Kahane dans un article paru dans Repères-IREM 29 : « Le théorème de Pythagore, l'analyse multifractale et le mouvement brownien » où il pose le problème suivant, pour lequel notre perception première va d'emblée donner une réponse négative :

Peut-on reconstituer un cercle à partir d'un carré par " dissection " et " déplacements " ?

Le problème ainsi posé dans les années 1920 par Banach et Tarski s'appelle la quadrature géométrique du cercle.

Laczkovitch, mathématicien hongrois, a donné une réponse positive à cette question : il a montré que de telles partitions du carré et du disque étaient possibles et que l'on pouvait passer des morceaux du disque aux morceaux du carré par des translations.

Inutile de prendre vos ciseaux : cette construction est non mesurable, et les outils physiques dont nous disposons sont complètement inadaptés. Nous voyons ici un modèle de pensée non seulement déconnecté du monde réel, mais en opposition avec celui-ci !

DU MONDE DES « GRANDEURS » AU MONDE DES « NOMBRES » VIA LA MESURE

GRANDEURS ET MESURES

Comme je l'ai dit dans mon introduction du monde de la géométrie, une des finalités des mathématiques est de modéliser le monde qui nous entoure, et pour cela d'en donner des représentations. Les « nombres » constituent une des représentations premières à la fois d'un point de vue historique, d'un point de vue de l'enseignement, mais aussi d'un point de vue prégnance dans notre société comme je vais essayer de l'illustrer. Ce monde des « nombres » naît du monde des « grandeurs » via la « mesure », et, pour développer cette approche, je vais partir d'une typologie proposée par Guy Brousseau lors d'une réunion de la CREM proposant trois approches de la notion de mesure :

- La mesure la plus simple : le cardinal d'un ensemble fini (nombre entier naturel). Cette première mesure servira de fil conducteur à cette partie de mon exposé.
- La « mesure exacte » : couple formé d'un nombre et d'une unité (extension du champ des nombres) ; c'est souvent une convention « sociale ». Je partirai de cette mesure pour poser la question de l'extension du champ des nombres dans la partie suivante.
- Dans des situations où cette convention sociale n'existe pas, l'image d'une grandeur par une mesure est en fait un intervalle (erreur, tolérance, intervalle de confiance...). Cette mesure nous permettra d'entrer dans le « monde de l'incertitude » qui sera la dernière partie de mon exposé.

LES NOMBRES ENTIERS NATURELS

Pour introduire cette partie, je citerai Kronecker : « Dieu a créé les nombres entiers naturels, les autres sont l'œuvre des hommes » Et pour illustrer ces premiers contacts de l'homme avec les nombres entiers naturels, je m'appuierai sur deux exemples proposés par John B. Barrow dans son livre « Pourquoi le monde est-il mathématique ? » (texte en italique).

Nuzi, vieille ville de Mésopotamie

Lors de fouilles archéologiques à Nuzi, vieille ville de Mésopotamie, aujourd'hui en Irak, on a trouvé une petite bourse d'argile, creuse, portant l'inscription suivante :

« *Objets concernant des moutons et des chèvres* »

- *21 brebis qui ont déjà eu des petits*
- *6 agneaux femelles*
- *8 béliers adultes*
- *4 agneaux mâles*
- *6 chèvres qui ont déjà eu des petits*
- *1 bouc*
- *2 chevrettes*

Soit 48 animaux.

Après avoir brisé le sceau de la bourse, on trouva à l'intérieur 48 billes en terre crue. Le propriétaire du troupeau confiait aux paysans un certain nombre de bêtes ; lui, pour mémoire, disposait de la liste inscrite en signes cunéiformes » ; eux, qui ne savaient pas lire, utilisaient les billes d'argile pour vérifier le compte des bêtes.

On trouve ici une des plus anciennes formes de modélisation : la bijection. Cette modélisation est fonctionnelle, analogique, et sélective (chaque bête est représentée par une bille, sans souci d'autre précision). Il n'y avait aucune nécessité pour le berger de connaître les nombres, de savoir compter. On retrouve dans ce geste une des premières approches du nombre en maternelle, l'aspect cardinal. Cet aspect est éphémère, il change avec chaque collection.

Montagnes de Ngwane

Le repère est la forme la plus ancienne du sens du nombre que l'on connaisse. Le plus vieux témoignage de cette façon de compter se trouve sur l'os du péroné d'un babouin, datant de trente cinq mille ans avant Jésus Christ, découvert dans les montagnes de Ngwane, en Afrique, qui fait apparaître 29 entailles. Il s'agit probablement d'une arme sur laquelle le chasseur tenait le compte des animaux qu'il avait tués.

On peut ici dire que l'on approche l'aspect ordinal du nombre. Les animaux sont comptabilisés dans l'ordre où ils ont été tués, et ce repérage résiste au temps.

Le bâton d'Ishango

Ce bâton est un véritable trésor scientifique ! Il a été découvert à Ishango, près de la frontière actuelle du Zaïre.

Il est daté d'environ 15 000 ans. Il fait apparaître trois rangées d'entailles, deux de 60 et une de 48. Une des rangées présente la séquence 9 (10-1), 19 (20-1), 21 (20+1), 11 (10+1), les deux autres rangées contiennent des nombres premiers : 5, 7, 11, 13, 17 et 19.

Beaucoup d'hypothèses ont été émises sur ce bâton. Une certitude est qu'on est ici devant un progrès majeur par rapport aux deux autres exemples proposés précédemment. La notion de nombre est présente, et ce bâton propose de les mettre en correspondance.

On peut dire qu'on a ici la plus vieille « calculette » de l'histoire !

John D. Barrow le donne aussi comme exemple dans son livre.



REPRESENTER LES NOMBRES ENTIERS NATURELS

Les chiffres et les lettres ont une longue histoire commune. Elle a commencé dès que les hommes eurent l'idée de l'écriture. Ils inventèrent des signes pour écrire les mots et les nombres. Certaines civilisations ont utilisé les lettres pour « écrire » les nombres (grecs, romains...) La représentation des nombres a souvent évolué de la façon suivante : Une unité :

un signe

- L'idée du groupement
- Les groupes de groupes

La représentation symbolique choisie va être déterminante pour les potentialités mathématiques du système. Prenons comme exemple la numération égyptienne.

Numération égyptienne

C'est une numération à base 10, qui utilise la symbolique suivante :

| | | | |
|------------|-----------|----------------|---|
| un | 1 | bâton | |
| dix | 10 | anse | ∩ |
| cent | 100 | spirale | ∩ |
| mille | 1 000 | fleur de lotus | ☐ |
| dix mille | 10 000 | index | ☐ |
| cent mille | 100 000 | têtard | ☐ |
| un million | 1 000 000 | dieu | ☐ |

On voit que ce système n'est pas positionnel, et qu'il ne nécessite nullement le « zéro ». Il est limité dans sa potentialité d'écriture des nombres (jusqu'à 9 999 999) et ne permet donc pas d'envisager l'aspect « infini » de l'ensemble des nombres entiers naturels. La symbolique utilisée permet de fonctionner fortement par analogie avec les tas que l'on pourrait faire pour exprimer les groupes et les groupes de groupes

| | |
|-----------|--|
| 231 | |
| 231 | |
| 1 102 010 | |

Notre système décimal

Quelques civilisations sont allées plus loin en évoluant de la façon suivante :

- L'idée de position
- L'idée du zéro

On peut citer les Babyloniens, qui avaient un système à base 60, les Mayas avec un système à base 20, les Chinois avec un système à base 10, et enfin notre système indo arabe à base 10.

Je ne peux pas dans le cadre du temps de cet exposé développer plus avant les trois composantes que met en jeu la connaissance évoluée des nombres :

- La représentation des quantités
- La représentation verbale
- La représentation indo arabe

Je me contenterai d'une référence aux travaux de Stanislas Dehaene qui a montré que chacune de ces représentations correspondait à une localisation différente du cerveau, ce qui permet de pointer que notre représentation verbale est certainement la plus catastrophique du monde, et donc un lourd handicap pour notre enseignement !

CALCUL : OPERATIONS ET ALGORITHMES

Le calcul va naître de la nécessité de réaliser dans un « modèle symbolique » les actions menées dans le monde « réel ». Par exemple le « regroupement » de collections de mêmes objets va se traduire par l'addition dans le monde mathématique.

Les algorithmes de calcul pour « représenter » ces actions dans le monde mathématique vont être évidemment fortement dépendants du système de représentation des nombres. Et l'analogie avec les gestes de la réalité sera d'autant moins évidente que le système utilisé sera évolué, comme notre système indo arabe. Si l'on prend le système de numération égyptien, l'analogie est par contre forte :

Addition et soustraction :

| | | | |
|---------|--|---------|--|
| 35 | | 35 | |
| 17 | | 17 | |
| 35 + 17 | | 35 | |
| 52 | | 35 - 17 | |
| | | 18 | |

Au-delà de cette forte analogie, on constate que dans ce système de représentation, les tables d'addition ne sont d'aucune nécessité, et que la gestion de la retenue si délicate dans nos algorithmes se fait ici en action, en aval pour l'addition, en amont pour la soustraction.

Multiplication par 2 et 10

On peut se poser la question des limites d'un tel système pour des calculs plus complexes comme la multiplication. Les égyptiens proposent d'abord deux « multiplications », la première par 10, immédiate compte tenu du système de représentation, et la seconde par 2 qui consiste à « doubler » le nombre de symboles :

| La multiplication par 10 | |
|--------------------------|--|
| 201 | |
| 2010 | |
| La multiplication par 2 | |
| 23 | |
| 46 | |

Et pour faire le produit de deux nombres quelconques ?

Voici la méthode utilisée, donnée par le scribe Ahmès dans le papyrus de Rhind (1650 ans avant JC environ), qui s'appuie sur la connaissance de la « multiplication par 2 ».

Je propose ci-dessous comme exemple le produit 24×37 , mais en utilisant notre système de représentation des nombres, pour mettre en évidence l'algorithme utilisé :

- 1 $37 = 1 \times 37$
- 2 $74 = 2 \times 37$
- 4 $148 = 4 \times 37$
- 8 $296 = 8 \times 37$
- 16 $592 = 16 \times 37$

Pour obtenir le résultat final, il suffit d'ajouter (8×37) et (16×37)
 $888 = 296 + 592$

L'analogie n'est plus ici avec les actions du monde réel, mais à l'intérieur du modèle entre deux suites proportionnelles, la première basée sur le système binaire. Là encore, aucune nécessité de tables de multiplication !

CALCUL ET PROBLEMES : LE « REEL », AIDE OU OBSTACLE ?

L'école sert !

Je vais partir d'un exemple proposé par Rémi Brissiaud dans un article paru dans le bulletin vert 469 de l'APMEP : « Calcul mental, symbolisme arithmétique et résolution de problèmes »

C'est le résultat d'une enquête menée par Schliemann en 1998 auprès d'enfants d'une dizaine d'années non scolarisés de Récife, qui vivaient de petits commerces.

À la question « *Quel est le prix de 3 objets à 50 cruzeiros l'un ?* », 75% de ces enfants répondent correctement.

À la question « *Quel est le prix de 50 objets à 3 cruzeiros l'un ?* », aucun de ces enfants n'est capable de répondre.

Cet exemple montre bien une rupture de la modélisation analogique. Pour répondre à la première question, les enfants utilisent une procédure d'addition réitérée, geste mathématique métaphorique de celui de la réalité.

Mais dans le deuxième cas, cette procédure s'avère impossible à mettre en œuvre par la lourdeur de la tâche aussi bien physique qu'intellectuelle qu'elle représente. Le sens externe devient un obstacle. Il faut passer à un sens interne et à une action dans le modèle mathématique qui conduira à l'échange des deux problèmes via la commutativité de la multiplication. Et c'est bien à l'école de construire cela !

Un modèle à plusieurs facettes

Considérons les deux problèmes suivants :

- *On fait des guirlandes de 5 mètres dans une « ficelle » de 32 mètres. Combien de rubans peut-on faire ? On fait 5 guirlandes de même longueur dans une « ficelle » de 32 mètres. Quelle est la longueur d'un ruban ?*

Une première approche est de dire que ces deux problèmes relèvent du modèle de la division. Sans rentrer dans une approche didactique sur les concepts de quotient et de partition, je veux seulement pointer ici que le retour au « réel » permet de bien distinguer les « divisions » à envisager.

- Dans le premier cas, on pense au geste des vendeurs de tissus qui reportent une règle en bois (d'un mètre en général), geste qui va déterminer le nombre de guirlandes, et donner le reste après découpage.
- Dans le second cas, le geste physique serait de plier la ficelle de façon à la superposer cinq fois, puis de mesurer la longueur obtenue.

On voit ici que le retour au « réel » est nécessaire pour faire le bon choix de division.

DE « L'ARITHMETIQUE » AU « CODAGE »

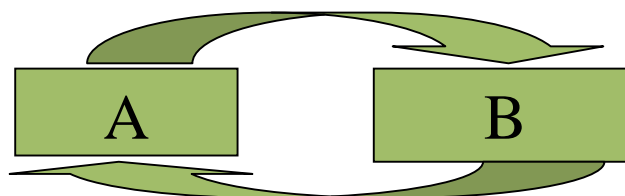
On entend souvent dire que les calculettes sont un obstacle à la mémorisation des tables de multiplication, et on peut en effet regretter son utilisation pour effectuer un produit comme 4×6 . Mais je ne connais pas de calculettes qui, à l'inverse, « disent » que 24 c'est 6×4 , mais aussi 8×3 , 12×2 . Cette décomposition multiplicative des nombres entiers naturels, à développer dès l'école primaire, est une première entrée dans « l'arithmétique » au sens où l'entendent les mathématiciens.

Et c'est cette décomposition multiplicative qui est le support mathématique d'un certain type de « codage ».

Une procédure dans le monde « réel »

Posons tout d'abord le problème dans le monde « réel » :

A veut envoyer un message à B sans que celui-ci soit intercepté par une tierce personne.



Une idée géniale donne la réponse dans le monde « réel » :

- A met son message dans une petite cassette qu'il ferme avec un « cadenas a » inviolable dont il garde la clef, et il envoie la cassette à B.
- B ne peut évidemment ouvrir la cassette, puisqu'il n'a pas la clef du « cadenas a ». Il met à son tour un « cadenas b » inviolable, dont il garde la clef, et renvoie la cassette à A avec les deux cadenas.
- A ouvre le « cadenas a » avec sa clef, et renvoie la cassette qui n'a plus que le « cadenas b » à B.
- B peut alors ouvrir la cassette avec sa clef.

Une procédure analogique dans le monde « mathématique »

La procédure mathématique va reposer sur le résultat suivant : si l'on prend deux nombres premiers très grands (une centaine de chiffres), un ordinateur peut multiplier ces deux nombres en une seconde. Mais si l'on donne à un ordinateur ce nombre de 200 chiffres, et qu'on lui demande d'en retrouver la décomposition multiplicative, il a de quoi travailler un certain nombre d'années.

On retrouve ici le problème de la réversibilité de traitement dans un modèle, ce que les mathématiciens vont caractériser par la notion de « fonction piège ».

La procédure de codage se fait alors par analogie avec ce qui a été développé dans le monde réel, la cassette étant le codage du message par un nombre N composé d'un grand nombre de chiffres, les « cadenas a et b » étant des nombres premiers p et q d'une centaine de chiffres, la fermeture de la cassette se faisant par multiplication, et l'ouverture par division. La suite d'actions décrites dans le monde « réel » se traduira alors par les étapes successives : N , Np , Npq , Nq , N .

CONTINUITÉ OU RUPTURE DES MODÈLES DANS L'ENSEIGNEMENT

DU MODÈLE « ARITHMÉTIQUE » AU MODÈLE « ALGÈBRE »

Vu dans un livre de quatrième

Quatre allumettes mises bout à bout avec une cigarette de 7 cm mesurent 25cm en tout. Quelle est la longueur d'une allumette ?

L'énoncé ci-dessus, extrait d'un manuel de l'IREM de Lorraine paru en 1988, ne peut plus être proposé aujourd'hui compte tenu de sa référence au tabac ! Cet énoncé, ainsi que beaucoup d'autres de même style, m'a permis de mesurer chez les élèves la prégnance du « raisonnement arithmétique », ce qui ne les incitait nullement à passer à un traitement du problème par l'algèbre.

Comparons les deux méthodes :

| | |
|--|---|
| 25cm – 7cm = 18 cm 18cm : 4 = 4,5cm | $4x + 7 = 25$ $4x = 25 - 7$ $x = 4,5$ |
|--|---|

Un regard rapide montre les mêmes opérations (et heureusement !)

Mais la modélisation est différente :

- En arithmétique, on fonctionne par analogie au plus près de l'énoncé en « remontant à l'envers » les gestes de l'énoncé.
- En algèbre, on écrit « mot à mot » le problème en langage mathématique...et on l'oublie !

Une autre différence fondamentale est le statut du signe « égalité » :

- En arithmétique, il apparaît comme « déclencheur » de l'opération, comme « entrée » des calculettes.
- En algèbre, il a un rôle de relation, symbole d'une égalité conditionnelle.

Les enjeux sont différents :

- Le raisonnement arithmétique va être intimement lié au problème « réel » proposé.
- Le traitement algébrique a pour objectif de résoudre un ensemble de problèmes de même structure sans référence à la « réalité » de ces problèmes.

Les origines de l'algèbre

C'est à des problèmes de toutes sortes (problèmes d'héritage entre autres) que se consacrent les mathématiciens arabes au 9^{ème} siècle. C'est à Bagdad que l'un d'entre eux, Al Khwarizmi va introduire une rupture fondamentale : en regroupant différentes sortes de problèmes qui se résolvent par le même algorithme, il déplace l'objet d'étude qui devient la résolution d'équations.

Nous allons examiner deux aspects de sa « méthode » : tout d'abord les transformations de base qui permettent de ramener tout problème à une forme canonique ; ensuite la validation des algorithmes de résolution par la géométrie.

Les transformations de base :

- "al jabr" (d'où vient le mot algèbre), qui peut se traduire par compensation, restauration, remplissage, « reboutement » :

"Si 3 choses diminuées de 5 valent 2 choses, je compense avec 5 ; alors 3 choses diminuées de 5 et augmentées de 5 valent 2 choses augmentées de 5 ; 3 choses valent donc 2 choses et 5."

L'objectif de cette transformation est de supprimer les « - ».

- "al-muqabala" qui peut se traduire par mise en opposition, confrontation, balancement :

« Si 3 choses valent deux choses et 5, alors 1 chose vaut 5. »

L'objectif est ici de regrouper les termes semblables dans un même membre (celui où elles sont en « positif », car il n'y a pas de négatif chez Al Khwarizmi).

➤ "al-hatt"

« Si 2 carrés et 42 valent 20 choses, alors 1 carré et 21 valent 10 choses. »

L'objectif est ici de multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre pour arriver à une forme canonique.

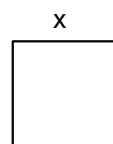
La résolution par la géométrie

Al Khwarizmi étudie les équations du 1^{er} et 2nd degré en les ramenant à l'aide des transformations ci-dessus à 6 formes canoniques.

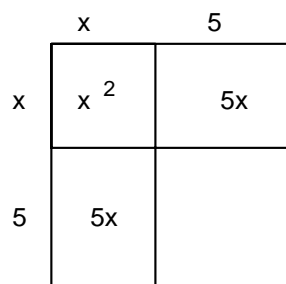
Il revient alors au modèle de la géométrie euclidienne pour résoudre certaines de ces équations. Voici ci-dessous un exemple qu'il propose, traduit en « écriture moderne », c'est-à-dire utilisant le « langage littéral ».

"Un carré et 10 choses valent 39 " traduit par : $x^2 + 10x = 39$

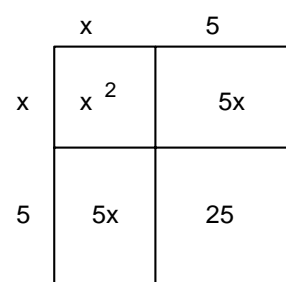
1) On construit un carré d'aire X^2 (donc de côté x) :



2) On borde ce carré de 2 rectangles dont l'aire respective est $5X$ (et donc d'aire totale $10X$). On obtient donc 5 comme autre dimension :



3) On complète alors le grand carré :



L'aire de ce carré est $x^2 + 2 \times 5x + 25$,

Or $x^2 + 10x = 39$, donc l'aire de ce carré est 64

Donc le côté de ce carré est 8.

Or le côté de ce carré est $x + 5$.

D'où : $x = 3$.

Al Khwarizmi ne s'intéresse qu'à la racine positive de cette équation du second degré, la seule qui a un sens par rapport aux problèmes « réels » qu'il veut résoudre.

L'apport du monde arabe

On retrouve bien dans toute cette démarche les caractéristiques d'une modélisation : une « représentation » d'un problème, fonctionnelle au niveau du traitement (tout mathématicien en est profondément convaincu) et sélective (la « chose » peut représenter la longueur d'une cigarette...ou toute autre chose). Les transformations de base font fortement penser à une analogie avec l'équilibre d'une balance (elles sont très proches de ce que nous enseignons à nos élèves de collège). La résolution via les aires a une fonction justificative, qu'il serait peut-être bon de remettre à l'honneur lors de la résolution de l'équation du 2nd degré dans nos classes de première.

Il est regrettable que dans notre enseignement ces mathématiques arabes n'aient pas la même célébrité que d'autres mathématiques comme celles des grecs. Et pour montrer la richesse culturelle et scientifique de ce monde arabe, je citerai deux poèmes de Omar Al-Khayam, entre autre mathématicien, et qui s'attaqua au 11^{ème} siècle aux équations du 3^{ème} degré.

*Ceux qui par la science vont au plus haut du monde
Qui, par leur intelligence, scrutent le fond des cieux
Ceux-là, pareils aussi à la coupe du ciel
La tête renversée, vivent dans leur vertige*

Ce poème veut traduire combien l'accès à la science donne une certaine « ivresse » de la pensée, et me fait penser à un souhait qu'avait émis Jean-Pierre Kahane au début des travaux de la CREM :

« Je souhaite que nous ayons en vue un objectif inaccessible : que chaque enfant, que chaque adulte, ait éprouvé au cours de sa vie la joie de la contemplation et de la découverte mathématique. »

*Je ne me suis jamais privé de donner mon temps aux sciences
Par la science, j'ai dénoué les quelques nœuds d'obscur secret
Après soixante-douze années de réflexion sans jour de trêve
Mon ignorance, je la sais...*

C'est ici une leçon d'humilité qu'il nous donne, humilité souvent caractéristique des grands « savants »

DU MODÈLE « DISCRET » AU MODÈLE « CONTINU »

Les nombres « raisonnables »

L'élève va quitter l'école primaire avec un « stock » de nombres que je qualifierai de « raisonnables » dans le sens suivant : ces nombres, convenablement « agrandis », redonnent des entiers naturels.

Ne sursautez pas à cette définition qui n'a rien de mathématique. Je veux indiquer par là que ces nombres sont obtenus à partir de mesures, et qu'en changeant d'unité, ces mesures peuvent s'exprimer par des nombres entiers : si on me demande ma taille, je répondrai 1,80 m, mais en changeant d'unité elle s'exprime par 18 dm.

Ce « stock » comprend :

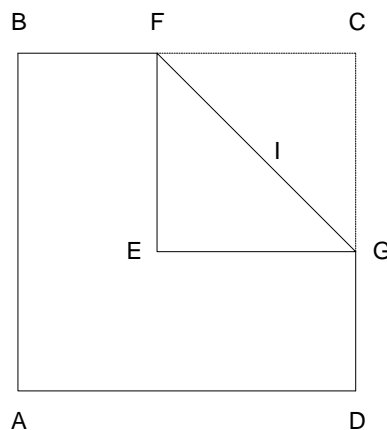
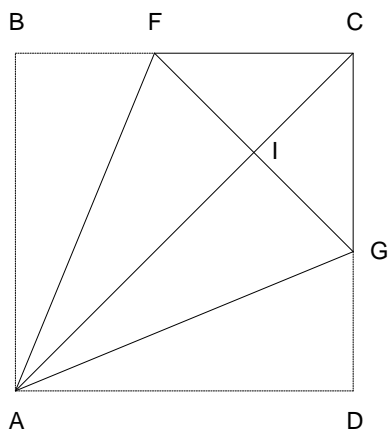
- Les nombres entiers naturels
- Les fractions (ex $2/3$ qui « agrandi » 3 fois donne 2)
- Les nombres décimaux (ex : 2,4 qui « agrandi » 10 fois donne 24)

$\sqrt{2}$ est-il « raisonnable » ?

Prenons un carré de côté l'unité...et faisons un grand raccourci historique : sa diagonale mesure $\sqrt{2}$.

Si $\sqrt{2}$ est « raisonnable », en « l'agrandissant » convenablement, il va « redonner » un entier. Avec plus de rigueur mathématique, ceci se traduit par :

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel, alors $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers. « Agrandissons » alors le carré de côté 1 avec un rapport q. On obtient un carré ABCD de côté entier q et de diagonale entière p.



Faisons alors les pliages ci-dessus : deux pliages par rapport à (AF) et (AG) ramenant les côtés [AB] et [AD] sur la diagonale [AC], puis un pliage par rapport à (FG).

Déplions tout, revenons dans le monde des mathématiques et examinons la figure obtenue . Une démonstration élémentaire établit alors que la « petit carré » EF CG a pour côté $2p-q$ et pour diagonale $2q-2p$, donc est aussi à côté et diagonale entiers.

Une « descente infinie finie » :

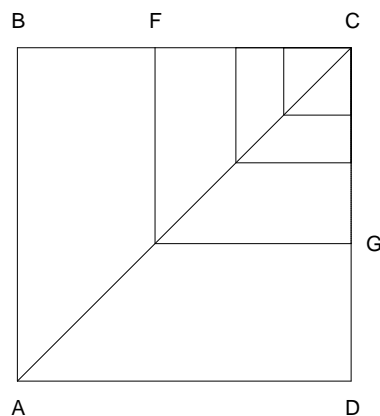
Le procédé est auto-reproductible :

On a donc une « descente infinie » de carrés de plus en plus petits.

Mais les côtés de ces carrés sont des entiers naturels.

Une suite strictement décroissante d'entiers naturels est finie.

C'est absurde !



Une seule marche :

Pour ceux qui craignent les trop grandes descentes, ils peuvent se contenter d'une seule étape, en choisissant le plus petit agrandissement redonnant un nombre entier pour la diagonale, c'est-à-dire $\frac{p}{q}$ irréductible. Ils obtiennent alors une contradiction dans le carré EFCG de côté

entier $p' < p$ et de diagonale $q' < q$ et qui vérifient $\sqrt{2} = \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$

L'accès à l'irrationalité de $\sqrt{2}$ passe donc par « l'infini » (descente infinie) ou par « l'absurde » ? Ce type de démonstration apagogique va à l'encontre de la vision de la démonstration développée par Euclide et Platon pour lesquels la démonstration devait amener à une conclusion comme conséquence de propositions reconnues comme vraies et qui peuvent s'appuyer sur le visible. Elle est ici uniquement du domaine de la pensée, sans retour possible au « réel ».

Du discret au continu

Abandonnons Euclide et Platon, et faisons un saut de 20 siècles, et suivons Clairaut dans ses « Elemens de Géométrie », où il reprend pour démontrer notre théorème de « Thalès » une argumentation d'Arnault (« Nouveaux éléments de géométrie ») :

Notre théorème des "milieux" :

M est le milieu de [AB], (MN) // (BC)

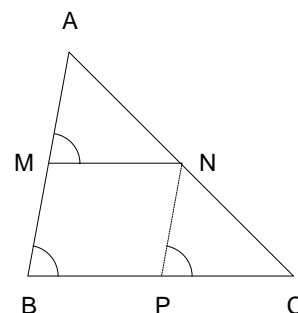
On construit (NP) // (AB)

Par parallélisme : $\widehat{AMN} = \widehat{ABC} = \widehat{NPC}$; $\widehat{ANM} = \widehat{NCP}$

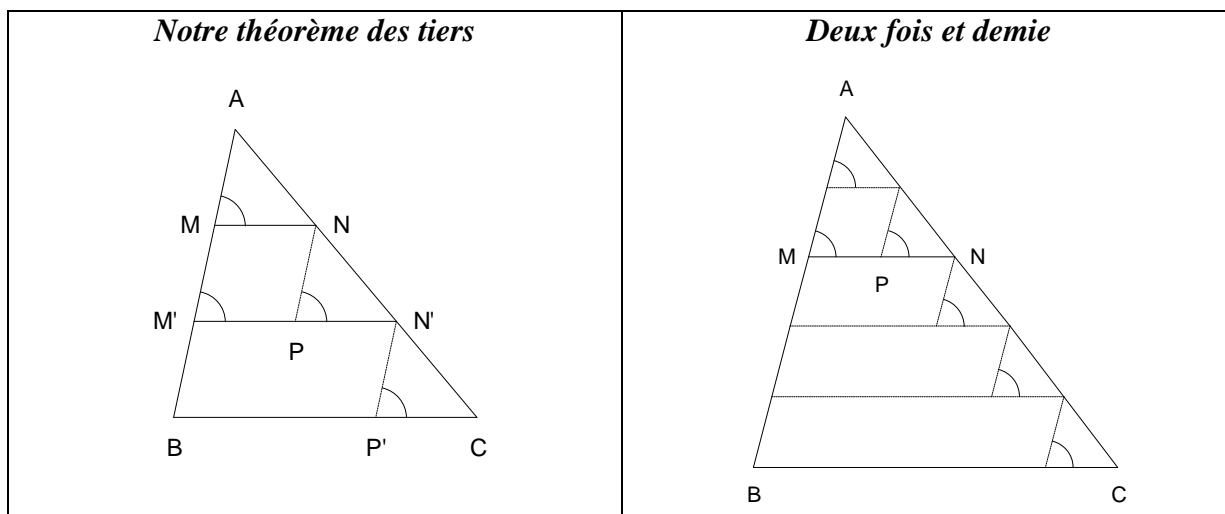
En utilisant milieu et parallélogramme : $AM = MB = NP$.

Les triangles AMN et NPC sont « égaux »

Donc $AN = NC$, d'où N est le milieu de [AC]



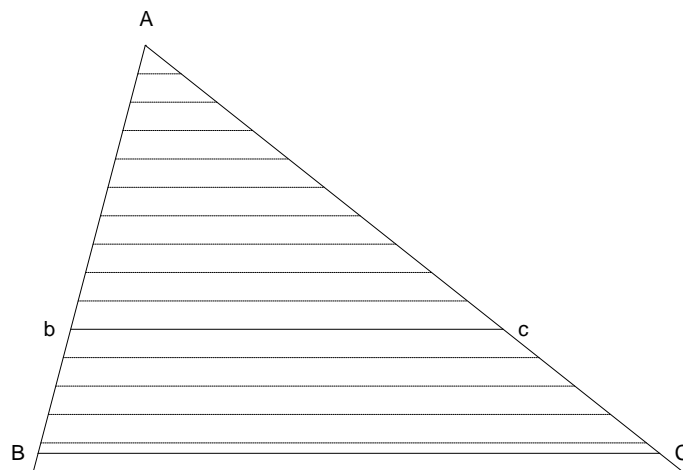
Au delà du fait que cette démonstration m'apparaisse comme particulièrement éclairante pour des élèves de collège s'ils disposaient des cas d'égalité des triangles, Clairaut vient de se construire une procédure auto-reproductible, et donc une méthode. Suivons le plus avant :



Je viens de résumer, avec une adaptation très moderne, et sans les nombreuses justifications de Clairaut, les pages 42 et 43 de ses « Elemens de Géométrie ». A partir de ces trois exemples, Clairaut laisse imaginer la généralisation du procédé, et considère achevée cette démonstration de Thalès.

Clairaut a des doutes :

Retrouvons Clairaut à la page 98 : « Mais de ce que plusieurs lignes sont incommensurables avec d'autres, peut-être pourrait-il naître quelque soupçon sur l'exactitude des propositions qui nous ont servi à constater la proportionnalité des figures semblables...Il faut donc que nous revenions sur nos pas ».



Clairaut prend alors l'exemple suivant : soit un triangle ABC où $AB = \sqrt{2}$, soit b le point de [AB] tel que $Ab = 1$, et c le point de [AC] tel que $(bc) \parallel (BC)$. Il fait alors le raisonnement suivant :

« Supposons Ab divisé en 100 parties ; ce que AB contiendra de ces parties se trouvera entre 141 & 142. Contentons nous donc de 141 et négligeons le petit reste. Il est clair que AC contiendra aussi 141 des parties de Ac ».

J'ai exemplifié avec le dessin ci-dessus où j'ai choisi un partage en 10 parties. Les historiens noteront d'autre part que je n'ai pas comme Clairaut fait la distinction entre A et a, cela pour que ce soit clair aux non spécialistes.

Clairaut recommence alors en divisant Ab en 1000 parties, et dit alors :

« De plus, ces restes comme nous venons de l'observer, seront de part & d'autre d'autant plus petits que le nombre des parties de Ab sera plus grand. Donc il sera permis de les négliger, si on imagine la division de Ab poussée jusqu'à l'infini. »

Nous venons de passer dans le monde de l'analyse. Nous venons de passer du commensurable à l'incommensurable, du « rationnel » au « réel ». du « discret » au « continu ».

Le modèle « continu »

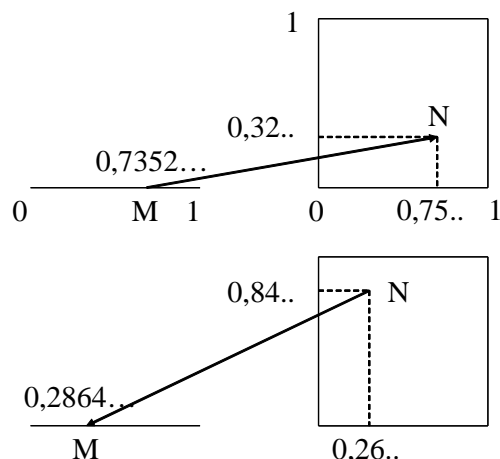
Ce modèle « continu » va devenir le modèle privilégié du traitement mathématique (les intégrales sont un outil de traitement et de calcul beaucoup plus efficace que les séries). Et même pour les problèmes, en général discrets, issus de la réalité, on va les « plonger » dans ce modèle continu pour une plus grande efficacité mathématique (j'illustrerai cela avec les probabilités).

On peut regretter que notre enseignement n'assume plus ce passage des nombres rationnels aux nombres réels, du discret au continu !

« Je le vois mais je ne peux le croire ! »

C'est le 19^{ème} siècle qui verra la mise en forme mathématique de la « droite réelle ». Dedekind vient de formaliser l'approche des nombres réels par les « coupures », que je résumerai ici en disant que tout nombre réel peut s'écrire sous la forme d'un développement décimal illimité. Utilisant cette écriture, Cantor crée la bijection suivante entre un « segment » et un « carré », ce qui lui fera dire : « Je le vois mais je ne peux le croire ».

Ce geste, la bijection, est le même que celui du berger de Nuzi entre les animaux et les billes. Mais dans ce nouveau monde mathématique, il montre qu'il y a « autant de points » sur le segment que dans le carré, sur la droite réelle que dans le plan réel. Là encore nos sens, notre perception première refuse cette « bijection » entre deux objets qui dans l'espace physique n'ont pas la même dimension !



MODÉLISER L'INFORMATION...OU « UN MODÈLE PEUT EN CACHER UN AUTRE »

DEUX MODÈLES

Miracle

Voici un article paru dans le « Canard enchaîné » en juillet 2006 :

Sous le titre « Un bon cru au bac », « La République des Pyrénées »(13/7) s'extasie devant les résultats de la bonne ville de Lourdes : « 96% de mentions très bien, bien et assez bien ». Du jamais vu ! » Mazette ! La cité mariale serait-elle un paradis pour les surdoués ? En réalité, pour obtenir ces mirobolants 96%, le confrère a eu un recours à un calcul simple. Il a ajouté le pourcentage du lycée public de Sarsan (« toutes mentions confondues, 50%), à celui du lycée privé Peyramale (« 46% de mentions ». En additionnant ces deux nombres, il faudrait donc compter « 96% de mentions » à Lourdes. Et ce n'est pas fini. Car un troisième lycée de la ville n'ayant pu être comptabilisé, la part de ces mentions au bac devrait, selon cette nouvelle arithmétique, dépasser largement les 100%. Lourdes, ville de tous les miracles !

On peut dire que l'auteur de l'article incriminé maîtrise bien l'addition, mais qu'il s'est trompé de modèle !

Deux grands modèles dans l'enseignement

Deux grands modèles vont se construire entre l'école et le collège, avec leur mode de traitement et de calcul spécifiques :

- Le modèle « additif » : comparaison « absolue »
- Le modèle « proportionnel » : comparaison « relative »

Et, comme l'auteur de l'article ci-dessus, nos élèves vont faire des confusions entre ces deux modèles, comme en témoignent ces situations vécues dans mes classes.

Doublants et doublements

Quand je proposais à mes élèves de sixième les résultats suivants sur le nombre de doublants en troisième dans deux collèges de l'agglomération troyenne (chiffres fictifs) :

- *Albert Camus : 15 redoublants en 3^{ème}*
- *Paul Langevin : 12 redoublants en 3^{ème}*

Leur première réaction était de dire que le collège Camus était meilleur que Langevin.

C'était une occasion de leur faire comprendre ces notions de comparaison « absolue » et « relative », en leur proposant de calculer le « taux de doublement » avec l'information ci-dessous sur la population de référence : *Albert Camus : 125 élèves en 3^{ème}*

- *Paul Langevin : 80 élèves en 3^{ème}*

Et ainsi de leur faire constater que leur conclusion s'inversait :

- *Taux de doublement à A. Camus : 12%*
- *Taux de doublement à P. Langevin : 15%*

Le sexe le plus fort !

Je leur proposais alors la situation suivante :

Dans une petite ville, tous les élèves de collège sont scolarisés dans l'un des deux collèges suivants, avec la proportion de garçons et filles correspondante :

- *Pierre Brossolette : 45% de garçons, 55% de filles*
- *Gaston Bachelard : 60% de garçons, 40% de filles*

A ma question « Y a-t-il plus de garçons ou de filles scolarisés en collège dans cette ville ? », il se trouvait toujours un certain nombre d'élèves pour répondre qu'il y avait plus de garçons, puisqu'il y en avait 105% contre 95% de filles !

C'était alors l'occasion de leur montrer que suivant les populations de référence, on pouvait aboutir à trois conclusions différentes :

- *A Brossolette : 420 élèves ; à Bachelard : 360 élèves*
Soit 405 garçons et 375 filles
- *A Brossolette : 520 élèves ; à Bachelard : 260 élèves*
Soit 390 garçons et 390 filles
- *A Brossolette : 740 élèves ; à Bachelard : 300 élèves*
Soit 513 garçons et 527 filles

Dans un monde d'information chiffrée comme le nôtre, cet aller-retour entre ces deux modèles me paraît fondamental à développer, pour armer nos élèves dans leur vie de futur citoyen.

Le modèle « proportionnel »

Il y a différentes façons d'entrer dans un modèle, et le modèle « proportionnel » est particulièrement riche pour cela, avec la diversité des « registres » de représentations possibles d'une même situation :

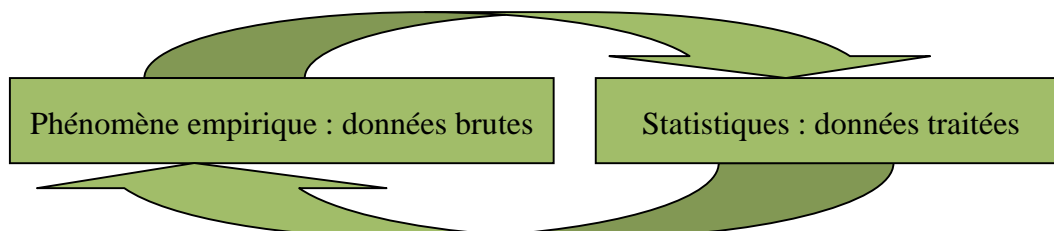
- **Registre numérique** : suites proportionnelles, tableaux, « règle de trois »...Ce registre est celui de l'entrée dans ce modèle à l'école primaire.
- **Registre algébrique** : « $y = kx$ », propriétés de linéarité...On trouve ce registre dès l'école primaire avec l'utilisation en action des propriétés de linéarité.
- **Registre fonctionnel** : application linéaire, traduction graphique...Ce registre est plus spécifique du collège.
- **Registre géométrique** : théorème de Thalès, lien entre parallélisme et proportionnalité...Là encore ce registre est présent en action dès l'école primaire, avec par exemple le « guide-ânes » au cycle 3.

La conceptualisation, le traitement et la validation vont être spécifiques dans chacun de ces registres, et notre enseignement doit à la fois travailler au maximum ces spécificités et les passages d'un registre à l'autre pour donner des éclairages complémentaires d'une même situation.

LES STATISTIQUES

La statistique descriptive

Un premier niveau des statistiques développé dans notre enseignement est la statistique descriptive. Elle a pour objectif essentiel « la transformation synthétique » d'informations. En ce sens, son enseignement participe à la formation du citoyen : comprendre cette transformation, pouvoir analyser correctement, et donc prudemment la synthèse effectuée. De manière plus précise, il faut faire comprendre aux élèves que le problème fondamental de la statistique descriptive est de résoudre le dilemme résultant de la transformation de données « brutes » en une synthèse qui parvienne à concilier le mieux possible deux pôles antagonistes : la « fidélité » et la « clarté ».



Les statistiques constituent le modèle mathématique de traitement de l'information, et cette modélisation présente là encore un aller-retour entre le monde « réel » et ce monde mathématique comme l'illustre le schéma ci-dessus.

De la « réalité » vers les mathématiques, les statistiques vont transformer les données brutes en les représentant de façon « classée » pour pouvoir en faire des « résumés ».

En sens inverse, ces « résumés » vont donner des interprétations du phénomène empirique. On pourrait caractériser leur enseignement par le vocable « mathématiques du citoyen », c'est à dire :

- une formation à l'analyse et au traitement de l'information,
- en développant des aptitudes à trier, ranger, transformer des informations,
- en s'appuyant sur de fréquents changements de registre : texte, tableau, graphique, résultat numérique...

Une question épineuse

A partir d'une question qui se pose dans le monde « réel », un premier travail sera de mettre en place une situation descriptive de cette question, et le passage aux statistiques va offrir un traitement mathématique qui permette de proposer une réponse à cette question.

Prenons la question « *Les garçons sont-ils meilleurs en maths que les filles ?* »

Pour traiter cette question, on propose de faire passer un test à 700 garçons et 600 filles de troisième d'une petite ville de province (en prenant comme hypothèse que cet échantillon est représentatif !). On leur laisse le choix de passer ce test en algèbre ou en géométrie.

Voici les résultats à ce test, c'est à dire le nombre d'élèves qui ont réussi (avec par exemple comme indicateur une note supérieure à 10).

| | Garçons | Filles |
|-----------|-------------------|------------------|
| Algèbre | $\frac{23}{200}$ | $\frac{85}{500}$ |
| Géométrie | $\frac{400}{500}$ | $\frac{90}{100}$ |

Les filles sont meilleures que les garçons !

Pour arriver à cette conclusion, on calcule le pourcentage respectif de réussite des garçons et des filles en algèbre et en géométrie :

| | Garçons | Filles |
|-----------|---------|--------|
| Algèbre | 11,5% | 17% |
| Géométrie | 80% | 90% |

Les filles sont meilleures à la fois en algèbre et en géométrie...donc meilleures en maths.

Quoique !

On regroupe maintenant les résultats pour établir le pourcentage de réussite au test :

| | Garçons | Filles |
|-------|-------------------|------------------|
| Total | $\frac{423}{700}$ | $\frac{85}{600}$ |
| En % | 60,5% | 29,2% |

On arrive à la conclusion contraire : les garçons sont meilleurs en maths.

On joue ici sur un effet de structure des sous-populations, mais le fait qu'un traitement statistique d'un même problème puisse conduire à deux réponses opposées pose à la fois la question de la complexité du modèle, et celle de la fiabilité des réponses pour une personne « non avertie » de ces « subtilités ».

Les « nombres » dans la société

Nous vivons dans un monde d'informations baigné de pourcentages, et le citoyen a beaucoup de peine à s'y repérer, à la fois par le manque de référence aux populations, et aussi parce qu'avec les mêmes données on peut arriver à deux conclusions contradictoire comme ci-dessus. Les statistiques apparaissent alors au mieux comme une science de la manipulation, au pire comme une science du mensonge, comme en témoignent les trois citations ci-dessous :

Interprétation manipulatoire des résumés du modèle :

« Il existe trois sortes de mensonges : les mensonges, les affreux mensonges, et les statistiques » (Benjamin DISRAELLI)

Rétention d'une partie de l'information :

« Les statistiques, c'est comme le bikini, ça montre tout, mais ça cache l'essentiel » (Louis ARMAND)

Caution intellectuelle :

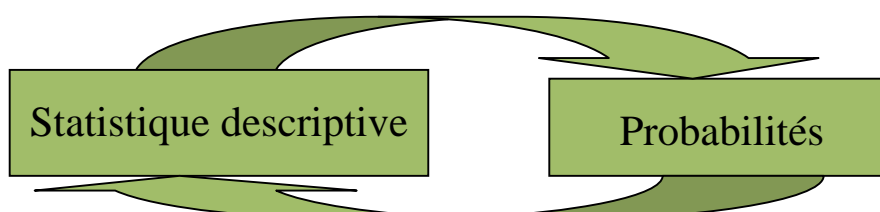
« Les statistiques sont formelles : il y a de plus en plus d'étrangers dans le monde » (Pierre DESPROGES)

LE MONDE DE L'INCERTITUDE : LE MODÈLE PROBABILISTE

Nous vivons dans un « monde de hasard et d'incertitude ». Et pour modéliser ce monde, les mathématiques vont prendre comme hypothèse qu'il est « probable » : elles vont alors nous offrir avec le modèle probabiliste une représentation des informations pour les traiter et en tirer des conclusions « vraisemblables » et « probables » comme outils d'aide à la décision. Les mathématiques vont alors nous interroger sur la pertinence du modèle choisi, sur la fiabilité des affirmations qu'on peut produire à partir de cette modélisation, sur l'interprétation qu'on peut en tirer.

DES STATISTIQUES AUX PROBABILITES

La statistique descriptive est une première mathématisation et donc une première abstraction du monde. Les probabilités vont offrir une modélisation de cette « réalité abstraite » intégrant et mathématisant une dimension fondamentale du monde de l'incertitude : le hasard. Le schéma ci-dessous traduit bien ce passage des statistiques aux probabilités, appelées statistiques « inférentielles » ou « inductives ».



| | |
|-----------------|--------------------|
| Données | Données calculées |
| Résultats | Résultats |
| Distribution de | Loi de probabilité |
| Moyenne | Espérance |

Des statistiques aux probabilités : un problème historique

Le prince de Toscane demande à Galilée (1554-1642) pourquoi, alors que les nombres 9 et 10 ont autant de décomposition en somme de 3 chiffres compris entre 1 et 6, on obtient plus souvent 10 lorsqu'on lance 3 dés ?

| | |
|-------|-------|
| 9 | 10 |
| 1+2+6 | 1+3+6 |
| 1+3+5 | 1+4+5 |
| 1+4+4 | 2+2+6 |
| 2+2+5 | 2+3+5 |
| 2+3+4 | 2+4+4 |
| 3+3+3 | 3+3+4 |

Galilée fait alors un des premiers calculs probabilistes en considérant la notion « d'événement élémentaire ». Supposons qu'il y ait un dé vert, un dé jaune et un dé rouge. Il n'y a qu'une façon de réaliser 3+3+3, à savoir 3 quelle que soit la couleur du dé. Par contre il y a 6 façons de réaliser 1+3+5, suivant que ces nombres soient sur le dé vert, le dé jaune ou le dé rouge. Considérant alors l'ensemble des événements élémentaires, il établit que 9 a 11,85% de « chance » de sortir, alors que 10 en a 12,5%.

Cette modélisation repose sur l'équiprobabilité de sortie des faces des dés et sur l'indépendance des jets de dés.

Mais ce qui m'a toujours fasciné, c'est le fait que le prince de Toscane ait pu émettre cette conjecture, alors que les résultats mathématiques sont si proches. Combien de fois avait-il du jouer à ce jeu là ! Et, quelque part, il présentait la « loi des grands nombres », que je résumerai ici par une relative stabilisation d'une fréquence par répétition d'événements indépendants. Quand je dis ici « relative », je fais référence à la troisième approche de la mesure que j'ai donnée beaucoup plus avant dans mon exposé, à savoir un intervalle.

Des probabilités aux statistiques

Un calcul probabiliste montre que la probabilité que deux personnes soient nées le même jour de l'année devient supérieure à son contraire à partir d'un groupe de 23 personnes. Ce calcul repose sur l'équiprobabilité des jours d'une année pour les naissances.

Où trouver 23 personnes ? Sur un terrain de football avec les 22 joueurs et l'arbitre !

Robert Matthews, journaliste britannique et mathématicien, et Fiona Stones se sont intéressés aux matchs de première division du Royaume-Uni joués le 19 avril 1997. Sur 10 rencontres, six étaient avec coïncidences (deux personnes nées le même jour), et quatre sans.

On est ici avec la démarche inverse : vérifier un calcul probabiliste par des statistiques. On mesure ici la fonction justificative du modèle vers la réalité, et la formidable capacité d'anticipation qu'elle donne : sachant qu'il y a 365 jours dans une année, qui irait parier sur cette coïncidence dans les tribunes d'un stade...sinon les mathématiciens !

DES PISTES POUR TRAVAILLER L'ALÉATOIRE AU CYCLE 3

Que ce soit dans le domaine des statistiques ou dans celui des probabilités, notre enseignement français accuse un certain retard par rapport à d'autres pays, en particulier les pays anglo-saxons. Différentes raisons peuvent expliquer ce retard :

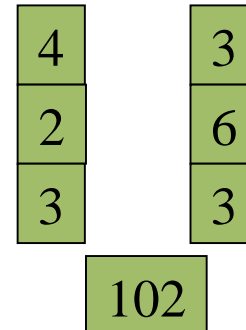
- *Impression que ce ne sont pas de " vraies mathématiques "* : si on se contente en effet de remplir des tableaux " tout prêts ", de faire des graphiques sans réfléchir à la pertinence de leurs choix en fonction du phénomène étudié, si on ne donne pas un sens profond à cette activité, les statistiques n'apparaissent que comme une suite de recettes.
- *Manque de formation des enseignants* : c'est une des raisons principales, car donner du sens à un enseignement de statistiques suppose une solide formation, débordant le cadre des contenus du collège, formation qui n'a jamais été vraiment assurée.
- *Manque de temps* : devant la difficulté à " boucler " les programmes, grande est la tentation de reléguer cette partie en fin de programme, s'il reste du temps ; ce choix est souvent argumenté par le fait que l'absence, ou la faible part accordée à ce domaine sera sans conséquence pour les élèves pour suivre en mathématiques dans les années ultérieures.

Et pourtant dès l'école primaire on peut mener des activités mettant en jeu l'aléatoire, comme en témoigne cette situation proposée par Claudine Schwartz et Catherine Houdement :

Qui peut le plus ?

Règles du jeu :

1. Dans chaque binôme, un élève lance un dé. Chaque élève du binôme choisit de placer le nombre obtenu dans une des deux cases de la première ligne (à gauche ou à droite).
2. Puis c'est au tour du second élève du binôme de lancer. Chaque élève place alors le nombre dans la case restée vide de la première ligne.
3. On recommence pour la deuxième et la troisième ligne.
4. On additionne les trois nombres obtenus et on met le résultat dans la case du bas.



Objectif :

Il s'agit d'obtenir le plus grand nombre possible dans la case inférieure. Ce nombre est obtenu comme la somme de trois nombres à deux chiffres (cases au-dessus).

Du hasard aux stratégies

Nous avons pu observer des classes sur cette activité, et assez vite se dégagent trois catégories de stratégies :

- des stratégies toujours gagnantes : le 6 à gauche et le 1 à droite,
- des stratégies fortement gagnantes : le 5 à gauche et le 2 à droite,
- des stratégies plus souvent gagnantes : le 4 à gauche et le 3 à droite.

S'appuyant sur l'hypothèse de l'équiprobabilité de sortie des faces d'un dé, ces élèves comme Galilée, dénombrent le nombre d'évènements favorables.

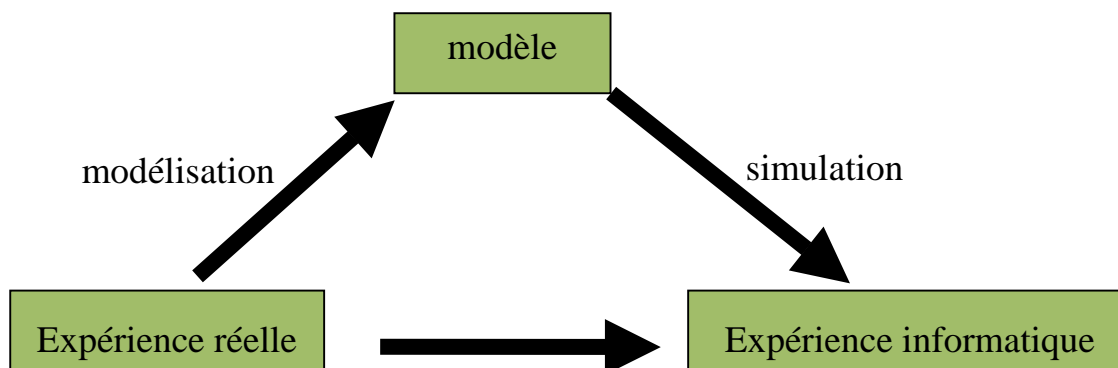
On peut donc s'appuyer sur cette conceptualisation précoce pour sensibiliser les élèves à l'entrée mathématique dans le monde de l'aléatoire.

LES SPAGHETTIS : LE RETOUR !

Je vais maintenant revenir sur mes problèmes de spaghettis du début de mon exposé pour entrer encore plus avant dans ce processus de modélisation. Et je vais pour cela utiliser la « simulation », qui, comme son nom l'indique, est une façon de représenter le problème de façon analogique, mais avec des outils mathématiques.

La place de la simulation :

Pour comprendre la place de la simulation, j'utiliserai ce schéma ternaire que Bernard Parzys propose dans son article « Expérience aléatoire et simulation » (Repères-IREM n° 66).



Pour simuler, il est nécessaire d'avoir modélisé le problème, c'est à dire d'en avoir fait une représentation qui permette de travailler avec des outils comme les calculatrices ou l'ordinateur. Mais cela ne veut pas dire qu'on connaisse une « loi mathématique » qui explique le phénomène étudié.

La simulation repose sur les générateurs aléatoires qui doivent avoir pour qualité essentielle l'équirépartition des nombres.

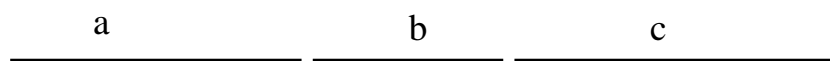
représentation

Mes spaghettis de quatrième

Mon expérience malheureuse de quatrième consistait à couper un spaghetti en trois « au hasard ». Je suis bien incapable de modéliser cette expérience réelle. Mais elle va m'éclairer pour simuler. En observant les élèves, on constate deux grandes façons de faire : soit ils essaient de couper le spaghetti d'un « seul coup » en trois, avec peu de chances d'obtenir trois morceaux, soit ils font une première cassure aléatoire, puis recasse l'un des deux morceaux obtenus.

Pour simuler cette expérience, je prends mon spaghetti mathématique de troisième (de longueur 1 et avec équiprobabilité de cassure), et je décris en langage « informatique » chacune des deux expériences :

Couper un spaghetti « au hasard » en 3 morceaux « simultanément »



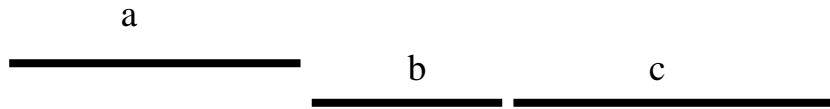
- $x = \text{rnd} ; y = \text{rnd}$
- $a = \min(x, y) ; b = \max(x, y) - a ; c = 1 - (a+b)$
- Test : $\max\{a, b, c\} < \frac{1}{2}$ (la somme des trois longueurs étant 1)

On peut alors :

- soit faire des « échantillons » (par exemple de 100 tirages), et on trouve comme fréquences de triangles : 0,26 ; 0,23 ; 0,25 ; 0,27 ; 0,24...
- soit programmer et laisser tourner l'ordinateur, et constater une certaine stabilisation de la fréquence dans l'intervalle $[0,24, 0,26]$

Les probabilités traitent avec le même modèle ces deux approches (voir mon article « *L'apprenti fréquentiste* »).

Couper un spaghetti « au hasard » en 2 morceaux, puis « le morceau restant » en 2



$$-x = \text{rnd} ; y = \text{rnd}$$

$$a = x ; b = (1 - x)y ; c = 1 - (a+b)$$

$$\text{Test : } \max \{a, b, c\} < \frac{1}{2}$$

- Le tirage d'échantillons donne comme fréquences de triangles : 0,22 ; 0,18 ; 0,19 ; 0,20 ; 0,21 ; 0,17 ; 0,17.....
- La suite obtenue en faisant tourner l'ordinateur a une certaine stabilisation dans l'intervalle [0,18, 0,21]

Au-delà de montrer que la mesure de la fréquence est ici un intervalle (voir la typologie que je vous avais proposée), cette double expérience met en évidence que « au hasard » mérite d'être précisé. Dans les deux cas on a coupé un spaghetti au hasard, mais ce sont les conditions de l'expérience qui permettent de modéliser ce hasard (cf « le paradoxe de Bertrand »).

Modélisation géométrique

Comment alors trouver un modèle mathématique qui permette de calculer « la » « probabilité » d'obtenir un triangle dans les conditions d'expérience ci-dessus ? Il faut passer du modèle discret au modèle continu, et de l'équiprobabilité à la probabilité uniforme.

Chacun des tirages me donne un couple (x, y) qui peut être représenté par un point dans un repère. La probabilité cherchée est donc le rapport du nombre de points satisfaisant à l'obtention d'un triangle par rapport au nombre de points possibles.

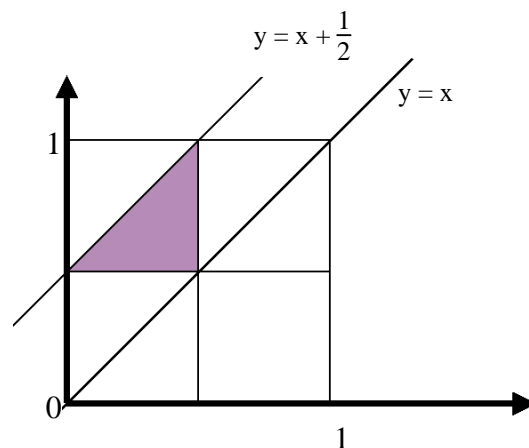
En plongeant dans le modèle continu, cela va se traduire par le rapport de l'aire de la surface où se trouvent ces points solutions à l'aire totale possible qui est ici celle du carré $[0,1] \times [0,1]$, c'est à dire 1 (la notion d'ouvert et de fermé n'ayant pas d'importance compte tenu de la modélisation).

Couper un spaghetti « au hasard » en 3 morceaux « simultanément »

Distinguons les deux cas $x < y$ et $x > y$

Si $x < y$

L'aire de la surface « solution » et donc la probabilité est $1/8$



Si $x > y$

On trouve comme surface « solution » le triangle symétrique de celui ci-dessus par rapport à la diagonale du carré « $y = x$ », donc de nouveau une probabilité de $\frac{1}{8}$

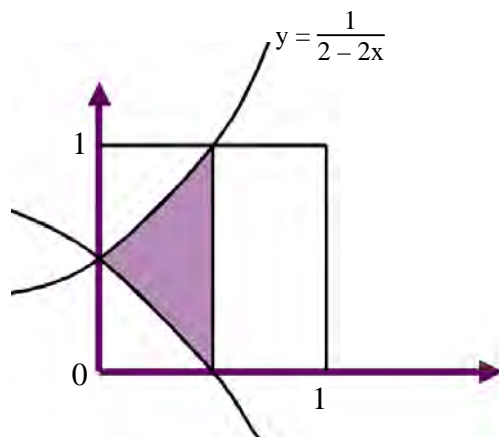
Ces deux cas étant exclusifs, la probabilité cherchée est donc :

$$p = \frac{1}{4}, \text{ soit } 0,25$$

...ce qu'on aurait pu « pronostiquer » compte tenu des fréquences obtenues !

Couper un spaghetti « au hasard » en 2 morceaux, puis « le morceau restant » en 2

La modélisation géométrique donne :



Le calcul de l'aire de la « surface solution » donne, via le calcul intégral, la probabilité :

$$p = \ln 2 - \frac{1}{2}, \text{ soit environ } 0,1931$$

Là, c'était beaucoup plus difficile de « pronostiquer » à partir des fréquences !

Et mes spaghettis de troisième ?

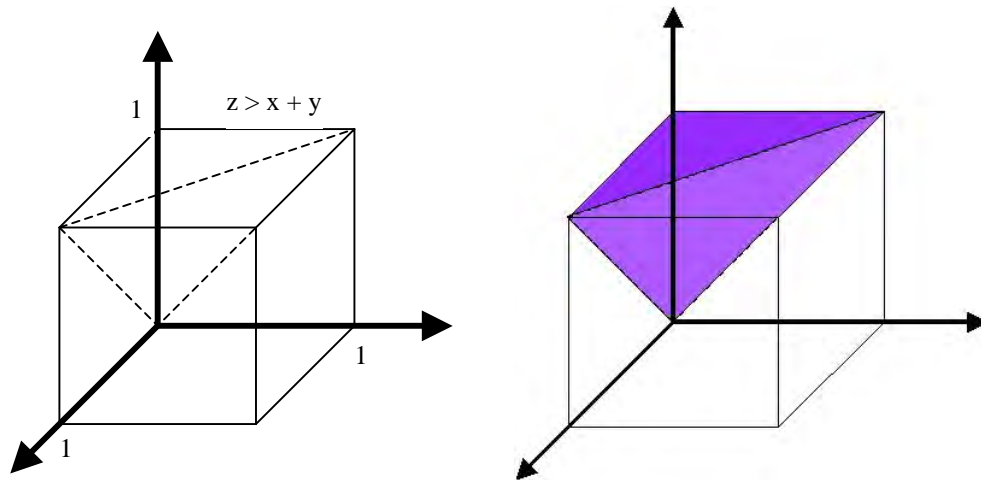
Il m'a fallu un certain temps pour « quitter le plan », et comprendre que je travaillais avec trois spaghettis indépendants, et que les trois « cassures » pouvaient être représentées par un triplet (x, y, z) coordonnées d'un point de l'espace. La modélisation géométrique donne alors comme solution le rapport du volume du « solide solution » par le volume du « solide possible », ici le cube $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$, soit 1.

Pour trouver ce solide solution, il suffit d'enlever le solide non solution.

Celui-ci se découpe en trois solides élémentaires du cube donné par les conditions :

$$z > x+y ; y > x+z ; x > y+z$$

Le cas $z > x+y$



On trouve un tétraèdre de volume $\frac{1}{6}$

Les deux autres cas donnent chacun un tétraèdre de volume $\frac{1}{6}$, et n'ont pas de points communs.

La probabilité de non solution est donc $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$, soit $\frac{1}{2}$

Donc la probabilité d'obtenir un triangle dans mon expérience de troisième est :

$$p = 1 - \frac{1}{2}, \text{ soit } p = \frac{1}{2}$$

Lorsque j'ai trouvé cette modélisation et ce résultat, j'étais heureux ! Ma pensée était devenue libre par rapport à ce problème, et c'est avec confiance que je regardais tourner mon ordinateur, ou répétais cette expérience par échantillon avec mes élèves.

Ce qu'apportent les mathématiques, c'est cette merveilleuse compétence d'anticipation et de contrôle !

LA LOI DE BENDFORD

Supposons une situation qui nous donne une grande quantité de nombres qui nous apparaissent tout à fait aléatoires, et que l'on nous pose la question suivante :

« Prenons le premier chiffre de chacun de ces nombres : quelle est la répartition des 1, des 2, ..., des 9 ? ».

En absence de toute autre connaissance, notre réflexe sera l'équiprobabilité, c'est à dire de dire que chaque chiffre a une probabilité d'apparition de $1/9$.

Trois références de données

La situation suivante nous a été proposée par Claudine Schwartz lors d'une réunion de la CREM.

Le tableau ci-dessous donne la fréquence d'apparition du premier chiffre de nombres pris respectivement :

- Colonne 2 : 1000 nombres du Monde daté du vendredi 23 avril 1999 ;
- Colonne 3 : 914 nombres d'un historique de compte de la société Gilibert ;
- Colonne 4 : nombres d'habitants de 1229 communes obtenus lors du recensement de 1992.

| Premier chiffre | Le monde | Gilibert | Commune |
|-----------------|----------|----------|---------|
| 1 | 0,322 | 0,317 | 0,321 |
| 2 | 0,151 | 0,161 | 0,168 |
| 3 | 0,108 | 0,142 | 0,133 |
| 4 | 0,099 | 0,088 | 0,081 |
| 5 | 0,073 | 0,070 | 0,087 |
| 6 | 0,081 | 0,061 | 0,067 |
| 7 | 0,055 | 0,070 | 0,055 |
| 8 | 0,065 | 0,040 | 0,045 |
| 9 | 0,046 | 0,050 | 0,044 |

Deux constats s'imposent :

- On est bien loin de l'équiprobabilité (qui est pourtant notre premier réflexe).
- Les trois expériences donnent des résultats vraiment proches.

La loi de Bendford

Claudine Schwartz, en s'appuyant sur le constat que les résultats étaient invariants par changement d'échelle, a « modélisé » ces situations en utilisant la loi de Bendford :

« La probabilité que le premier chiffre à gauche dans l'écriture en base 10 soit $i = 1, \dots, 9$ est $\log(1 + 1/i)$ (logarithme décimal) »

La dernière colonne du tableau ci-dessous donne les fréquences théoriques obtenues par calcul avec cette loi. La modélisation par cette loi apparaît comme très bonne d'un point de vue qualitatif.

| Premier chiffre | Le monde | Gilibert | Commune | Loi de Benford |
|-----------------|----------|----------|---------|----------------|
| 1 | 0,322 | 0,317 | 0,321 | 0,301 |
| 2 | 0,151 | 0,161 | 0,168 | 0,176 |
| 3 | 0,108 | 0,142 | 0,133 | 0,125 |
| 4 | 0,099 | 0,088 | 0,081 | 0,097 |
| 5 | 0,073 | 0,070 | 0,087 | 0,080 |
| 6 | 0,081 | 0,061 | 0,067 | 0,067 |
| 7 | 0,055 | 0,070 | 0,055 | 0,058 |
| 8 | 0,065 | 0,040 | 0,045 | 0,051 |
| 9 | 0,046 | 0,050 | 0,044 | 0,046 |

Mais avoir modélisé mathématiquement nous donne-t-il le sens profond du phénomène ? Cette question m'a conduit à deux pistes de réflexion :

Comment Bendford a-t-il eu l'idée d'une telle loi ?

Celle-ci repose sur le fait que les logarithmes des nombres sont uniformément distribués, ce qui peut se traduire par : un nombre a autant de chances d'être entre 100 et 1000 ($\log 2$ et $\log 3$) qu'entre 10 000 et 100 000 ($\log 4$ et $\log 5$). Cette répartition va s'appliquer aux phénomènes de type exponentiels.

Bendford a établi cette loi en 1938, à la suite d'étude de nombreuses données ; il s'appuyait sur les travaux d'un astronome américain, Simon Newcomb, qui en avait donné les prémisses en 1881 en s'appuyant sur un constat : la forte usure des premières pages des tables de logarithme !

Comment donner du sens à cette loi ?

Nous sommes devant des phénomènes « évolutifs ». Pour donner du sens à cette modélisation, j'ai essayé d'imaginer une simulation (qui ne peut reposer sur le tirage « au hasard » de nombres) : j'écris la suite des entiers naturels en déclenchant un chronomètre ; le chronomètre s'arrête « au hasard », et je fais mes comptes ! Il y a donc bien du hasard là-dedans, mais pas là où on le croit.

Connaître le bon modèle, ça sert !

Tout cela me direz-vous n'est que jeu de mathématicien ! Ceux qui se sont fait « épinglés » par le fisc qui utilisait cette loi pour vérifier leur comptabilité n'en sont pas complètement convaincus !

CONCLUSION

Comme je vous l'avais annoncé, j'ai essayé dans cet exposé de « revisiter » un certain nombre de « mondes mathématiques » de notre enseignement sous l'angle du rapport au réel et de la modélisation. Compte tenu de l'ampleur du sujet et du temps dont je disposais, cela a pu apparaître comme un survol.

S'il fallait garder une idée forte, c'est que les mathématiques sont au regard de l'histoire un formidable outil intellectuel pour penser le monde qu'a créé l'homme, qu'il a enrichi au fil des siècles et des civilisations ! Et si nous pouvions persuader nos élèves de cela, peut-être notre enseignement produirait-il moins « d'écorchés vifs des mathématiques » !

Nous avons le devoir de transmettre ce patrimoine de l'humanité, et Joseph Fourier résume bien cela en disant des mathématiques qu'elles sont « *une faculté de la raison humaine, destinée à suppléer à la brièveté de la vie et à l'imperfection des sens* ».

BIBLIOGRAPHIE

- BARROW J.D. (1996) Pourquoi le monde est-il mathématique ? ; éditions Odile Jacob
- BRISSIAUD R. (2007) « *Calcul mental, symbolisme arithmétique et résolution de problèmes* » ; Bulletin APMEP n°469.
- DUPERRET JC (1995) « *L'apprenti fréquentiste* » ; Repères-IREM n°21
- DUPERRET et JC FENICE JC. (1999) « *L'accès au littéral et à l'algébrique : un enjeu du collège* » ; Repères-IREM n° 34
- DUPERRET JC (2001) « *Le geste géométrique ou l'acte de démontrer* » ; Repères-IREM n° 43
- HOUEMENT C. et KUZNIAK A (2006) « *Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie* » Annales de didactique et de sciences cognitives, vol 11, IREM de Strasbourg
- HOUEMENT C ; (2007) « *A la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège* » ; Repères-IREM n° 67
- IREM de Montpellier (2002) Les narrations de recherche ; Brochure APMEP n° 151
- KAHANE JP. (1997) « *Le théorème de Pythagore, l'analyse multifractale et le mouvement brownien* » ; Repères-IREM n° 29
- KAHANE JP et al (2002) L'enseignement des sciences mathématiques : rapport de la CREM ; éditions Odile Jacob
- PARZYSZ B (2007) « *Expérience aléatoire et simulation* » ; Repères-IREM n° 66

**L'EMPLOI DIDACTIQUE DES MODELES
DANS L'ENSEIGNEMENT « REALISTIQUE »
DES MATHEMATIQUES :
UN EXEMPLE LONGITUDINAL D'ENSEIGNEMENT SUR
LES POURCENTAGES**

Marja VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN

Freudenthal Institute Utrecht University

L'objectif de cette conférence est de décrire comment les modèles sont utilisés dans le cadre de l'approche hollandaise de l'enseignement des mathématiques, désignée sous le nom de « Realistic Mathematics Education (RME) », pour développer la compréhension des mathématiques par les élèves. Après avoir donné des éléments sur les caractéristiques de « RME » en liaison avec la place des modèles dans cette approche, nous présenterons l'utilisation du « bar-model » qui a été développé pour un programme américain de « Mathématiques en Contexte » destiné aux élèves de la middle school. En partant d'un dessin qui représente un contexte relatif aux pourcentages, puis en s'appuyant sur une bande pour estimer et raisonner, on parvient à un outil abstrait qui permet l'utilisation des pourcentages comme opérateur. La force de ce modèle est qu'il développe de manière étroite enseignement et apprentissage.

Le texte de cette conférence ne figure pas dans les actes du colloque. On peut le retrouver avec la référence ci-dessous :

Van denHeuvel-Panhuizen, M. (2003). The learning paradox and the learning miracle : thoughts on primary school mathematics education. *Journal für Mathematik-Didaktik* 24(2), 96-12

MODELISATION ET CONSTRUCTION DE SAVOIRS EN SCIENCES DE LA VIE ET DE LA TERRE

Christian ORANGE

Professeur de Sciences de l'éducation
IUFM des Pays de la Loire, université de Nantes
CREN, EA 2661

Le but de cette contribution est de présenter, d'un point de vue didactique, les liens qui existent, en sciences de la vie et de la Terre, entre modélisation et apprentissages. En espérant que cela puisse éclairer les réflexions sur les relations entre modélisation et enseignement des mathématiques, même si les modélisations scolaires en biologie ne font pas nécessairement appel aux mathématiques.

Partant de l'état actuel des relations entre biologie et modélisation dans les pratiques usuelles d'enseignement, nous donnerons, en contrepoint, des éléments de l'histoire des relations entre modélisation et savoirs en biologie. Ces repères nous permettront alors de revenir à la question de la modélisation en classe de sciences et de la place qu'elle pourrait y tenir.

1. Enseignement de la biologie et modélisation : une relation encore bien tenue

La question de la modélisation est une question difficile, et peut être davantage en biologie que dans des domaines scientifiques plus mathématisés. Si on en croit Georges Canguilhem, historien et épistémologue, « *s'il n'est pas aisé de s'entendre sur le rôle et la portée des modèles dans les sciences physiques... il paraît plus malaisé encore de s'entendre sur le rôle et la portée des modèles dans les sciences biologiques, et même de s'entendre sur la définition de tels modèles* » (Canguilhem, 1983). Il n'est donc pas étonnant de trouver un certain nombre d'ambiguïtés dans les programmes d'enseignement des SVT en ce qui concerne la place des modèles et de la modélisation.

Pour l'école élémentaire, les programmes de 2002 (cycle 3) faisaient une seule mention aux modèles ; elle concernait le « ciel et la Terre » : « *L'objectif est en tout premier lieu d'observer méthodiquement les phénomènes les plus quotidiens et d'engager les élèves dans une première démarche de construction d'un modèle scientifique* ». Cette phrase disparaît en 2007, mais on trouve une mention aux modèles dans le tableau des capacités attendues en fin de cycle 3 : « *Pratiquer une démarche d'investigation. Savoir observer, questionner, formuler une explication possible (hypothèse), en utilisant éventuellement un modèle* ». On ne construit plus des modèles, on les utilise. Notons que modèle et modélisation ne sont pas mentionnés dans la description de la démarche d'investigation.

Pour le collège, l'« Introduction commune aux différentes disciplines scientifiques » (BO n°6, HS, 19 avril 2007), fait référence d'une manière générale à la modélisation, en

lien avec les mathématiques : « *Les mathématiques fournissent des outils puissants pour modéliser des phénomènes et anticiper des résultats, en particulier dans le domaine des sciences expérimentales* ». Mais les programmes de SVT sont très avares sur la question. Une mention dans l'introduction des programmes de 5^{ème} dans un acception particulière (modélisation analogique) : « *L'expérimentation et le recours à la modélisation analogique (maquette) sont introduits avec toute la prudence nécessaire* ». Un peu plus loin, dans la partie géologie, un exemple d'activité est défini ainsi : « *Modélisation de processus de fossilisation* ». Il s'agit également d'un travail de maquette.

En quatrième la modélisation est à nouveau évoquée en introduction des programmes : « *C'est l'occasion d'entreprendre les apprentissages liés à l'élaboration de modèles simples et d'exercer la capacité de synthèse qui se développe progressivement chez l'élève de cet âge.* » On la retrouve par la suite, surtout en géologie. Concernant les séismes : « *modélisation de l'enregistrement d'ondes avec un dispositif adapté* ». Et pour le volcanisme est mentionnée la capacité : « *Observer, questionner, formuler une hypothèse et la valider, modéliser la formation des roches volcaniques* ».

En troisième, dans la partie « diversité et unité des êtres humains », un exemple d'activité est donné : « *Fabrication de maquette afin de modéliser un chromosome* ».

Donc, à l'exception peut être de la phrase extraite de l'introduction aux programmes de 4^{ème} (voir plus haut), en SVT, au collège, le modèle est une maquette qui sert à rendre l'enseignement concret quand observations et expériences ne le permettent pas : c'est un pis-aller.

Par opposition, un texte intitulé « l'enseignement des sciences au lycée » (BO HS n°6, 1999), qui coiffe les programmes de sciences physiques, de sciences de la vie et de la Terre et de mathématiques, donne toute sa place à la modélisation dans l'activité scientifique :

« *L'exercice de modélisation du réel est sans doute la démarche la plus importante et aussi la plus difficile dans la démarche scientifique. Passer du concret à l'abstrait, de l'observation à sa traduction formalisée demande que l'on soit capable d'extraire du monde réel une représentation simplifiée, le degré de simplification dépendant du niveau où l'on se situe. La modélisation fait appel à des langages symboliques qui, suivant les cas, peuvent être des diagrammes, des schémas ou des expressions mathématiques. Le professeur doit s'efforcer sur des exemples simples de montrer comment se fait la modélisation, ceci dans toutes les sciences.* » Mais ce texte n'est pratiquement pas connu des enseignants de SVT et il y a fort à parier que les concepteurs des programmes de cette discipline n'ont pas vraiment participé à sa rédaction. Les programmes de SVT de lycée donnent cependant une image plus complète des modèles et de la modélisation que ceux du collège, principalement pour les sciences de la Terre, mais aussi pour la biologie moléculaire. Voilà quelques extraits

« *Prolongeant les acquis du collège et de la classe de seconde, il s'inscrit dans une démarche scientifique visant à la construction de modèles explicatifs qui constituent un cadre conceptuel au questionnement et à la pratique expérimentale* » (programme de première S, 2000, présentation générale, Sciences de la Terre)

« *Exploitation de logiciels sur les modèles moléculaires et structures spatiales de protéines enzymatiques et du complexe enzyme-substrat* » (programmes de première S 2000, activités possibles concernant les enzymes)

« *L'identification des paramètres qui contrôlent le climat de la Terre est essentielle pour construire des modèles climatiques* » (programme terminale S 2001, enseignement de spécialité, « les climats passés de la Terre ».)

On voit donc, sur l'ensemble des enseignements des SVT, de l'école au lycée, une évolution nette de l'utilisation du terme de modèle : de simples maquettes illustratives, les modèles deviennent des constructions explicatives prenant, pour certains domaines de biologie et surtout de géologie, une réelle importance dans l'activité scientifique. S'agit-il d'une évolution curriculaire voulue ou n'est-ce qu'une trace de l'hétérogénéité rédactionnelle des programmes ? Difficile à dire dans la mesure où les concepts de modèle et de modélisation ne sont jamais explicités.

2. Petit détour par l'histoire des modèles et de la modélisation

De façon à mieux comprendre les relations possibles de la modélisation avec l'apprentissage des SVT, il n'est pas inutile de faire un détour historique. Quand commence-t-on à parler de modèles ? Au 19^{ème} siècle, en sciences physiques, en pleine période du positivisme qui, sur le continent européen, pose un interdit sur tout recours à des explications et limite la science à l'établissement des lois. Des scientifiques, anglais notamment, développent alors des travaux de modélisation en physique qui s'appuient sur ce qui leur semble le fondement de toute la physique : la mécanique.

Ainsi Lord Kelvin déclare-t-il que le vrai sens de la question « *comprendons-nous ou ne comprenons-nous pas tel sujet de Physique? est celui-ci : pouvons-nous ou ne pouvons-nous pas construire un modèle mécanique correspondant* » (cité par Duhem, 1914). Maxwell développe des modèles de tourbillons qui conduiront à ses fameuses équations de l'électromagnétisme.

Le débat entre partisans et opposants des modèles fait rage ; les développements par Boltzmann de modèles moléculaires qui donneront naissance à la thermodynamique statistique sont très critiqués. Celui-ci a beau revendiquer le droit de recourir à des analogies et des images mécaniques à des fins heuristiques, sans affirmer pour autant la "réalité" de l'hypothèse moléculaire, ses travaux sont nettement rejetés par beaucoup de physiciens. C'est cette problématique de scientifiques, contraints de justifier l'utilisation d'hypothèses mécanistes face à une opposition positiviste, qui définit alors le concept de modèle. Comme le note Suzanne Bachelard (1979), l'apparition consciente des modèles dans la science de cette époque n'est pas contingente. C'est un débat méthodologique qui conduit à l'explicitation et à la thématization de l'idée de modèle et de modélisation. Une querelle proche existe à la même période en biologie, dans le domaine qui deviendra la génétique, mais sans que le mot modèle ne soit à ma connaissance utilisé. Des constructions théoriques concernant la transmission des caractères d'une génération à l'autre se développent qui font intervenir des "particules": Darwin et ses "gemmules", de Vries et ses "pangènes", Weismann et ses biophores (Mayr E., 1989). Mais ces unités génétiques décrivent-elles des particules réelles ou ont-elles une simple valeur heuristique ? Doit-on rejeter ce type d'explication ? Johannsen, celui qui invente le mot gène en 1909, ne veut y voir que des unités de calcul : « *En aucun cas nous n'avons le droit de définir le gène comme une unité morphologique* » (cité par Mayr E., 1989). Ce qui est rejeté alors, c'est l'explication mécaniste qui ferait perdre à la biologie son indépendance par rapport à la physique. Il y a plus qu'une similitude dans ces débats en physique et en biologie: il s'agit, dans les deux cas, de délimiter le territoire d'un domaine scientifique et de définir ce qui est recevable ou non comme explication.

Citons encore Suzanne Bachelard (1979) : « *Les problèmes posés par l'utilisation des modèles renvoient toujours finalement à des questions fondamentales telle que: "Qu'est-ce qu'expliquer pour la science de telle époque?"* ».

Le développement de la biologie moléculaire, au milieu du 20^{ème} siècle, consacre la place des modèles en biologie. Un des cas les plus emblématiques est le travail de Watson et Crick sur la molécule d'ADN. Alors que des biologistes londoniens (Rosalind Franklin et Maurice Wilkins) accumulent des analyses de cette molécule par spectrographie aux rayons X en espérant ainsi découvrir sa structure, à Cambridge Watson et Crick imaginent et construisent, sous forme de schémas et de maquettes, des formes possibles, sans jamais faire une expérience, mais en puisant des informations ici ou là (et notamment chez Franklin et Wilkins) pour éprouver leurs modèles. Cette méthode, qui ne plaît guère à Franklin, les conduira, après plusieurs essais (voir figure 1), à proposer une structure qui semble remplir toute les conditions (voir notamment Watson, 1984). On touche là une caractéristique importante du processus de modélisation : il s'agit, comme le dit François Jacob, d'imaginer un monde possible et de la soumettre à la critique. Si cette critique est en partie de type expérimental, le pouvoir explicatif du modèle ainsi produit a au moins autant d'importance que son adéquation aux résultats expérimentaux le concernant directement. Ainsi, le modèle finalement retenu par Watson et Crick, qu'ils présentent en un article de deux pages dans Nature (Watson & Crick, 1953), est conforme aux images de spectroscopie : « *les documents obtenu par rayons X publiés antérieurement sont insuffisants pour vérifier rigoureusement* » (Watson & Crick, 1953, traduction dans Watson, 1984) ; mais surtout, en proposant un appariement des bases (adénine avec thymine, guanine avec cytosine), il permet de rendre compte des fonctions biologiques fondamentales de cette molécule : « *Il n'a pas échappé à notre attention que l'appariement spécifique des bases que nous avons proposé suggère immédiatement un mécanisme possible de transcription pour la matériel génétique* », concluent Watson et Crick dans ce même article (ibidem).

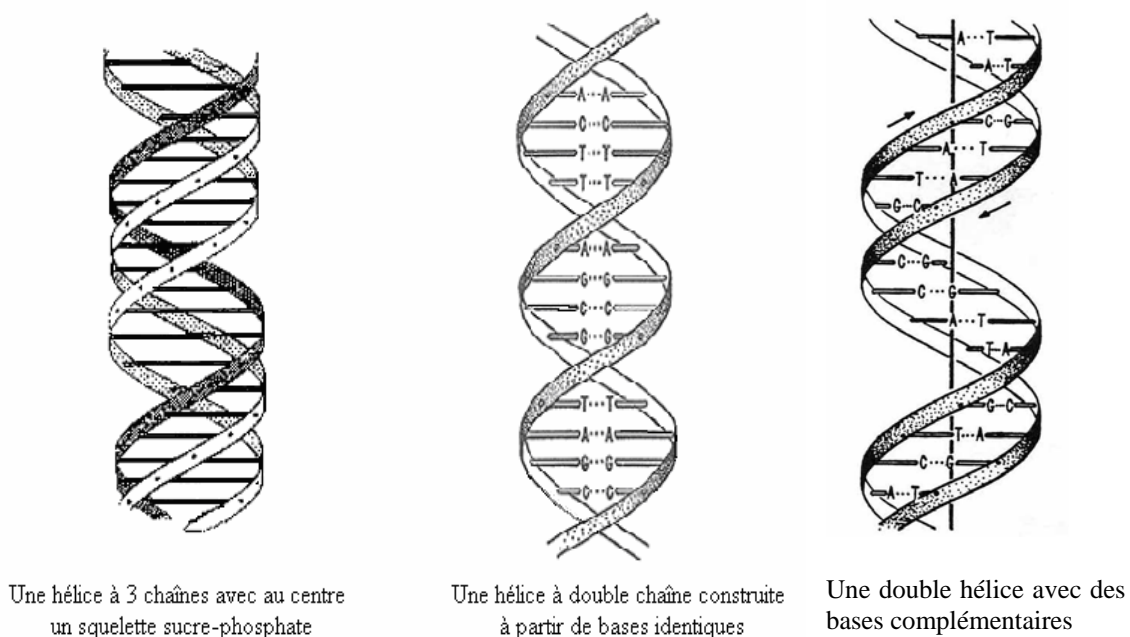


Figure 1
Trois modèles d'ADN construits par Watson et Crick

(C'est le troisième qui sera finalement retenu)

On aurait pu choisir d'autres exemples en biologie moléculaire, comme l'opéron lactose de Jacob et Monod (Jacob, 1987) ou les modèles allostériques de Changeux et Monod. La modélisation biologique a pris également une grande importance dans l'étude des écosystèmes et en physiologie, sous forme de modélisations à compartiments notamment (voir par exemple Magot & Champarneau, 1989 ; Pavé, 1994).

Dans tous les cas il s'agit « *d'articuler ce qu'on observe sur ce qu'on imagine* » (Jacob, 1981). On peut ainsi définir l'activité scientifique par un schéma où la modélisation a toute sa place (figure 2).

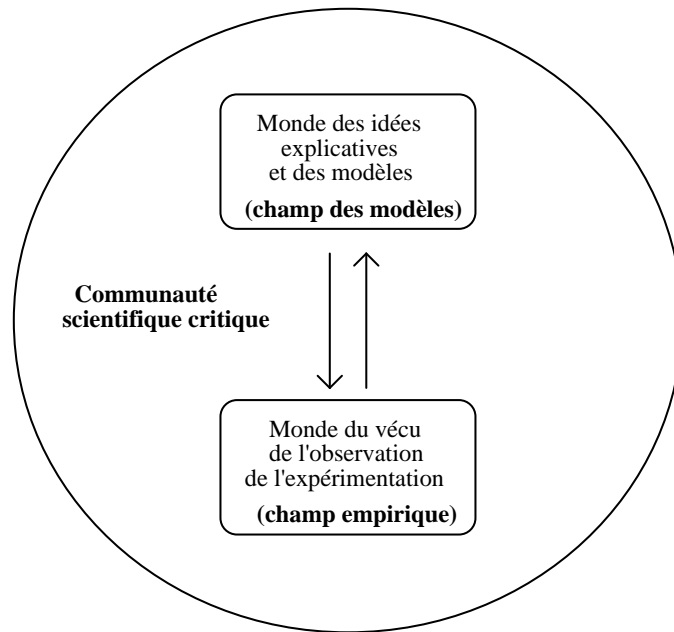


Figure 2
Un schéma de l'activité scientifique

Ainsi présentée, la modélisation n'est pas réduite à une méthode particulière propre à certains domaines de la biologie ou de la géologie, comme pourrait le laisser penser la lecture des programmes d'enseignement français : c'est une activité fondamentale de toute investigation scientifique. Cela plaide pour une place importante de la modélisation dans la classe de biologie. Est-ce possible ?

3. Les élèves modélisent-ils en classe de biologie ?

Nous avons vu que, même si les modèles sont présents dans les programmes du secondaire de SVT, ils n'y occupent pas la place que l'histoire et l'épistémologie des sciences leur donne dans l'activité scientifique. Que penser alors de la modélisation en biologie à l'école élémentaire ? Pourtant, les élèves de cette école peuvent modéliser ; et ils le doivent, s'il s'agit bien de leur faire faire des sciences. Mais cela n'est possible qu'en dépassant quelques idées naïves qui accompagnent la ritualisation de la « prise des représentations » et en prenant « *les conceptions des élèves comme base explicite d'un processus de modélisation* » (Johsua & Dupin, 1993).

Soit une classe de cycle 3 qui travaille sur la nutrition¹ humaine. Dans un premier temps, l'enseignant demande aux élèves d'expliquer à quoi ça sert de manger. Un travail individuel, sur cahier de brouillon, est complété par une réflexion en groupes et une mise en commun. La classe retient que manger sert à faire grandir, donner des forces à tout le corps et, plus généralement, à vivre. Le maître propose alors de s'intéresser à l'une de ces propositions et de tenter d'expliquer « *Comment ce que j'ai mangé peut-il me donner des forces?* ». Cette fois encore un travail individuel est suivi d'un travail de groupes qui doivent produire texte et schéma. Les figures 3 et 4 présentent les productions de deux des groupes.

Texte de l'affiche :

« *Voilà ce que nous pensons :
Le hamburger et les frites descendent dans un tuyau appelé l'œsophage vers l'estomac. Après, certaines nourritures descendent dans le tuyaux des excréments. Les autres partiront dans tuyaux vers les muscles* »

Texte de l'affiche :

« *La nourriture va dans la bouche passe par un tuyau qui mène à l'estomac
L'estomac trie la mauvaise nourriture et la bonne nourriture. La mauvaise nourriture va dans l'intestin grêle qui passe dans le gros intestin qui devient du caca. La bonne nourriture va dans les ~~mus~~ muscle* »



Figure 3
Affiche du groupe 3



Figure 4
Affiche du groupe 4

Nous voulons insister sur le fait qu'un tel travail ne peut pas être simplement décrit par les termes pédagogiques de « prises de représentations » :

- il ne s'agit pas uniquement de savoir ce que les élèves « ont dans la tête », mais de les confronter à un vrai problème explicatif ; si, dans cet exemple, cela se fait plutôt en début de séquence, rien n'impose une telle règle ;

¹ Nous parlons de nutrition et non de digestion, qui n'est qu'une fonction périphérique de la nutrition. D'où les questions posées aux élèves qui ne se réduisent pas au devenir des aliments.

- devant ce problème explicatif, les élèves imaginent une explication qui prend en compte un certain nombre de faits qui leur semblent établis (entrée de la nourriture par la bouche, forme solide d'une partie de la nourriture, sortie des excréments, ...) et la fonction retenue pour la nutrition (donner des forces) ;
- pour cela ils s'inspirent à la fois de connaissances qu'ils ont sur le corps humain (existence d'un tube digestif, organes impliqués...) et de formes d'explication qu'ils maîtrisent plus ou moins (fonctionnement des tuyaux, par exemple).

Ce travail entre parfaitement dans le schéma de l'activité scientifique présenté plus haut (figure 2). On peut donc considérer qu'il s'agit de modélisation. Cette affirmation pourrait être discutée en mettant en avant qu'il n'y a pas d'utilisation explicite d'un formalisme. Il y a bien cependant des règles de construction de ces modèles : celle, par exemple, qui considère que, pour que la nourriture puisse donner des forces à un muscle, quelque chose de cette nourriture doit aller jusqu'au muscle. Ce point de vue est très fréquent à cet âge, mais il n'est pas général. Voici le cas d'une élève, d'une autre classe (CE2-CM1) qui s'intéressait aux relations entre nourriture et croissance :

(1) Manuela: la pomme, on la mange, ça passe par des boyaux et après ça va dans une petite poche [...]
 (2) Instituteur: ça sert à quoi cette poche? Qu'est ce que c'est?
 (3) Manuela: ce qui reste dedans, c'est ce qui fait grandir.
 (21) Manuela: la poche, elle grossit et elle grandit un peu par la nourriture. Et puis ça nous fait grandir, grossir. Et au bout d'un moment ça arrête de grandir, ça nous fait quand même grossir.

Seule dans sa classe, Manuela semble penser qu'il suffit que la nourriture soit stockée dans la poche (l'estomac ?) pour quelle fasse grandir (ou grossir) tout le corps. Cela pour illustrer le fait que, si les modélisations en biologie à l'école n'utilisent pas, au moins dans un premier temps, de formalismes précis, elles mettent bien en jeu ce que nous avons appelé un « registre explicatif » (Orange, 1994, 1997) qui les organise et leur donne sens. Dans le cas de la nutrition, et pour la plupart des élèves de cycle 3, ce registre explicatif est un monde mécanique de tuyaux, de broyeur etc. Pour d'autres, comme Manuela, c'est un monde où la nourriture a des propriétés qu'elle peut exercer sur le corps, tout le corps, à partir du moment où celui-ci l'a ingérée.

C'est ce genre de considérations, complété par une étude épistémologique de la modélisation en sciences, qui nous a conduit à proposer (1994) le schéma suivant (figure 5) pour la modélisation. Il reprend, en le complétant, le schéma de la modélisation proposé par Martinand (1992)².

² Martinand, par la suite, reprendra cette idée de troisième registre (1996), en discutant le terme de « registre explicatif » et en proposant à la place « matrice cognitive ». Cette dernière appellation ne nous semble pas assez rendre compte de la fonction épistémologique de ce registre. Quitte à généraliser, aussi bien reprendre le concept de « cadre épistémique » de Piaget (Piaget & Garcia, 1983).

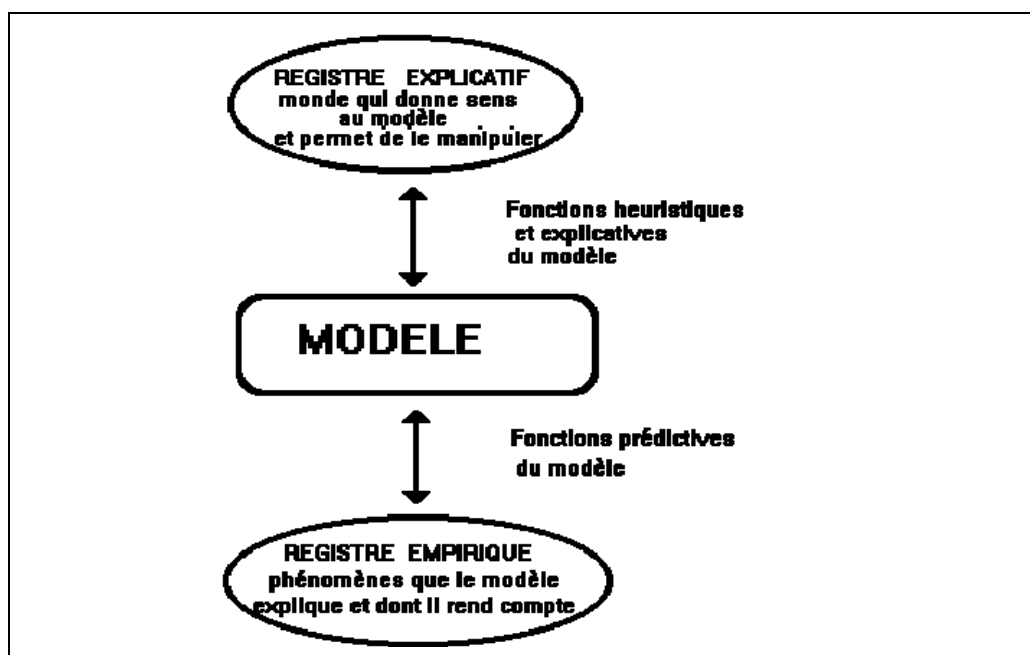


Figure 5
Un schéma de la modélisation (Orange, 1994, 1997)

Faire du travail des élèves sur un problème explicatif une modélisation et non une simple prise de représentations, c'est ne pas le cantonner à une activité préparatoire mais l'inclure totalement dans l'activité scientifique de la classe. Reste à discuter à quels savoirs cela peut conduire.

4. Modéliser en classe, pour quoi faire ?

Nous avons vu que la modélisation avait une place importante dans l'activité scientifique en SVT et que des élèves de l'école élémentaire pouvaient modéliser. Cela suffit-il pour faire de la modélisation est une activité didactiquement pertinente ? Quels savoirs sont visés ?

Les travaux en didactique des sciences autour de la modélisation ont été très vite reliés à la question du débat scientifique dans la classe (Johsua & Dupin, 1989) : il s'agit, par le débat, de permettre aux élèves de donner du sens au savoir et au maître de provoquer un changement conceptuel.

Se posent alors deux problèmes :

- d'une part, celui de la production par les élèves de modèles à la fois divers (pour qu'il y ait débat) et pas trop exotiques par rapport aux savoirs visés. La seconde condition ne revient pas à dire que les modèles produits au départ dans la classe doivent être scientifiquement corrects, mais que leur discussion permet d'avancer vers les savoirs visés. C'est pour tenir compte de cette condition que des analogies modélisantes (Johsua & Dupin, 1989) ou des « germes de modèles » (Chomat & al., 1992) sont introduits par le professeur qui viennent étayer la construction des modèles par les élèves.

- D'autre part, la validation des modèles produits. En sciences de la nature, les situations ne permettent que très rarement une validation par les élèves eux-mêmes, au sens où on l'entend dans les situations didactiques les plus pures. Des observations ou des expériences peuvent intervenir : elles permettent, à certaines conditions, de rejeter des modèles, mais jamais d'en valider au sens strict (voir K. Popper, le rejet de l'inductivisme et le concept de réfutabilité). D'où la nécessité d'apporter des documents divers qui permettent aux élèves de confronter les modèles de la classe à des modèles retenus par la culture scientifique.

Tout en faisant nôtres ces questions, nous ne voulons pas les développer davantage ici pour insister sur un troisième point, propre au cadre théorique de la problématisation (Fabre et Orange, 1997 ; Orange, 2002). Dans ce cadre, qui se réfère à Bachelard et Canguilhem notamment, les savoirs scientifiques ne sont pas seulement des savoirs plus performants que les savoirs communs ou que les idées initiales des élèves ; ils sont organisés par des raisons et ont une part de nécessité conférée par ces raisons. Le travail de modélisation et les débats qui se font autour des modèles proposés ont comme fonction importante la construction des raisons.

Reprenons l'exemple de la classe de cycle 3 qui travaille sur la nutrition. Les affiches (figures 3 et 4), que nous avons identifiées à des modèles, sont discutées au cours de la séance 2. Voici plusieurs interventions d'une élève, Auberi, qui concerne l'affiche 3 (les tours de parole supprimés entre ces quatre interventions sont peu significatifs ; Juliette appartient au groupe qui a produit l'affiche).

- 196 Auberi : Dans votre dessin, il y a quelque chose de bizarre parce que tu vois il y a un tuyau de l'oesophage et puis XXX Et puis il y a un truc qui va par là et l'autre par là. Mais on ne sait pas qu'est-ce qui va XXX exactement. On dirait que tout va d'un côté et XXX va de l'autre. C'est comme ça, ça fait bizarre. (Elle va au tableau près de l'affiche)
- 199 Auberi : (elle explique en montrant l'affiche) Vous avez tout dessiné mais c'est un peu bizarre parce qu'on croirait qu'ici ça va dans les muscles (montre le tuyau vers le bas) et là ... dans le muscle aussi (montre les tuyaux sur le côté).
- 201 Juliette : Là ça va dans les muscles (montre les tuyaux sur les côtés) et là ça va dans les ... (montre le tuyau vers le bas)
- 203 Auberi : (en retournant à sa place) On pourrait croire que dans les muscles que ça va partout.

L'argumentation d'Auberi porte sur le fait que, dans le schéma de l'affiche 3, la même chose (le contenu de la poche en triangle) semble aller aux muscles (tuyaux latéraux) et dans les excréments (tuyau vers le bas). Cela ne lui semble pas possible. La discussion continuera à se développer pendant plus de cent interventions où interviennent plusieurs élèves jusqu'à ce que l'un d'entre eux conclue : « *Elles ont oublié de dire que ça trie parce que sinon il y a de la mauvaise nourriture qui va dans les muscles* ».

Non seulement la notion de tri est apparue dans le débat, mais ce tri est présenté comme nécessaire par les argumentations développées. Il devient ainsi une condition de possibilité des modèles. D'autres « nécessités » sont aussi discutées lors de ce débat, notamment celle de la distribution (nécessité que quelque chose venant de la nourriture aille dans tout le corps) et de la transformation (nécessité que les aliments soient

transformés). Ci-dessous, quelques échanges portant sur la nécessité d'une transformation.

- 300 Steven1 : Si tu regardes des excréments par rapport à de la nourriture, tu verras que ce sera pas...
- 301 Adrien : Ah, d'accord, je goûte les excréments...
- 302 M : Steven, qu'est-ce que ça prouve?
- 303 Steven1 : Ca prouve quand même que c'est l'estomac aussi qui broie tout. Après l'estomac il broie tout... Toutes les vitamines elles partent dans les muscles et puis après, ben, tout ce qui est mauvais ... dans l'estomac

Dans le cadre théorique de l'apprentissage par problématisation, il ne s'agit pas de valider ou de rejeter telle ou telle idée explicative. Le cœur du travail ne se situe pas autour de la question de ce qui est vrai et de ce qui est faux, mais concerne le possible, l'impossible et le nécessaire. Modéliser consiste alors, dans une visée de construction de savoirs scientifiques, en une exploration et une délimitation du champ des possibles. Plus concrètement, le débat autour des modèles proposés dans cette classe de cycle 3 n'a pas pour but de se mettre d'accord sur tel ou tel modèle, mais de dégager des raisons, prenant ici la forme de nécessités fonctionnelles, qui sont autant de conditions de possibilité des modèles. Cette recherche de nécessités représente un changement de niveau dans les savoirs construits, une abstraction par rapport aux idées qui organise le travail de conceptualisation.

Cela ne demande pas, au moins pour l'instant, d'accord sur un modèle. A la fin du débat, certains optent encore pour une distribution par tuyaux nourriciers, d'autres par le sang ; des désaccords persistent sur les organes intervenant dans la transformation, etc. Mais le schéma suivant est élaboré par la classe, où la forme est proposée par le maître et le contenu défini par les élèves :

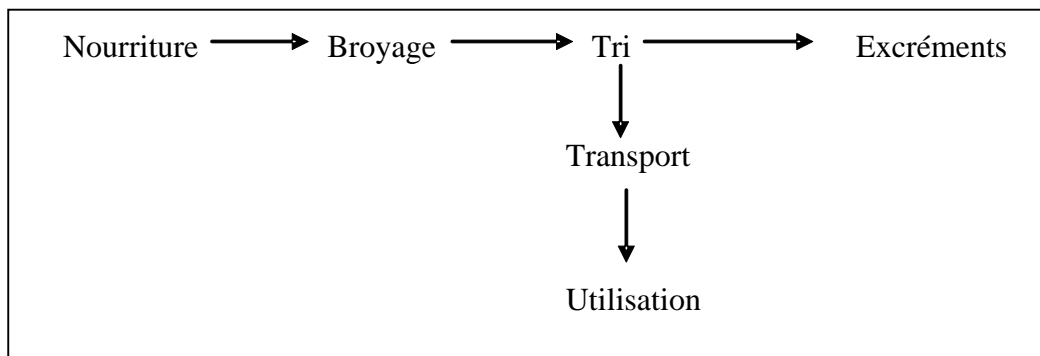


Figure 6
Organisation des nécessités fonctionnelles élaborée par la classe

L'étape suivante du travail va consister à interpréter cette structure de nécessités fonctionnelles dans le cas de la nutrition humaine ; autrement dit à comprendre comment chacune de ces nécessités est réalisée.

Pour cela, lors de la séance suivante, le maître propose à la classe le tableau ci-dessous :

| | La transformation | Le tri | Le transport | L'utilisation |
|-----------|-------------------|--------|--------------|---------------|
| OU ? | | | | |
| COMMENT ? | | | | |

Pour remplir ce tableau, on peut recourir à différents moyens : investigations empiriques (observations, expériences), recherche documentaire etc. Compte tenu du faible caractère informatif des observations classiques (dissection notamment), c'est le recours aux documents qui a été privilégié dans cette séquence. Les élèves ont travaillé par groupes sur des documents différents d'un groupe à l'autre. Lors de la mise en commun des conflits d'interprétation sont apparus qui montrent toute l'importance et la difficulté d'un tel travail. Une fois l'accord fait sur le tableau rempli, il reste encore à le traduire en un modèle sous forme de schémas et de texte.

Conclusion

Le point de vue que nous venons de développer et d'illustrer donne à la modélisation une place centrale dans les apprentissages en SVT. Non pas avec l'idée que les élèves pourraient, par eux-mêmes, construire des modèles pertinents scientifiquement, mais parce que le travail critique sur les modèles qu'ils proposent est le moyen d'identifier des nécessités qui organisent les savoirs scientifiques. En ce sens la modélisation ne s'oppose pas, bien au contraire, aux investigations empiriques ou documentaires. Ce n'est donc pas un travail de modélisation en terme de vrai et de faux, ou de validé et non-validé qui est mis ici en avant, mais une exploration des possibles : la modélisation y est au service de la problématisation, et non l'inverse.

Bibliographie

- Bachelard, S. (1979). Quelques aspects historiques des notions de modèle et de justification des modèles in Delattre, P. & Thellier, M. (éd.). *Elaboration et justification des modèles*. Paris : Maloine.
- Canguilhem, G. (1983). Modèles et analogies dans la découverte en biologie in *Etude l'histoire et d'épistémologie des sciences*. Paris : Vrin (prem. édition: 1968).
- Chomat, A., Larcher, C. & Méheut, M. (1992). Modèle particulière et démarches de modélisation in *Enseignement et apprentissage de la modélisation en sciences*. Paris : INRP.
- Duhem, P. (1914). *La théorie physique, son objet - sa structure*. Paris : Chevalier & Rivière (fac-similé 1989, Paris, Vrin).
- Fabre, M. & Orange, C. (1997). Construction des problèmes et franchissements d'obstacles. *ASTER*, 24, 28-38.
- Jacob, F. (1981). *Le jeu des possibles*. Paris : Fayard.
- Jacob, F. (1987). *La statue intérieure*. Paris : Odile Jacob.
- Johsua, S. & Dupin, J.-J. (1989). *Représentations et modélisations : le "débat scientifique" dans la classe et l'apprentissage de la physique*. Berne : Peter Lang.
- Johsua, S. & Dupin, J.-J. (1993). *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*. Paris : P.U.F.
- Magot, T. & Champarneau G. (1989). *La modélisation des métabolismes*. Paris : Masson.
- Martinand, J.-L. (1992). Présentation in *Enseignement et apprentissage de la modélisation en sciences*. Paris : INRP.
- Mayr, E. (1989). *Histoire de la biologie*. Paris : Fayard.
- Orange, C. (1994). *Intérêt de la modélisation pour la définition de savoirs opérants en biologie-géologie; l'exemple de la modélisation compartimentale*. Mémoire de doctorat de didactique des disciplines, Université de Paris 7.
- Orange, C. (1997). *Problèmes et modélisation en biologie; quels apprentissages pour le lycée?* Paris : P.U.F.
- Orange, C. (2002). Apprentissages scientifiques et problématisation. *Les Sciences de l'éducation, pour l'ère nouvelle*. 35, 1, 25-42
- Pavé, A. (1994). *Modélisation en biologie et en écologie*. Lyon : Aléas.
- Piaget, J. & Garcia, R. (1983). *Psychogénèse et histoire des sciences*. Paris : Flammarion.
- Watson, J. D. & Crick, F. H. C. (1953). A structure for desoxyribose nucleic acid. *Nature*, 171, 737-738
- Watson, J. D. (1984). *La double hélice*. Paris : Laffont.

REGARDS CROISES

MATHEMATIQUES - BIOLOGIE

Joël BRIAND

Maître de conférences, IUFM Aquitaine
DAESL, Bordeaux 2
briandjoel@free.fr

Patricia SCHNEEBERGER

Maître de conférences, IUFM Aquitaine
DAESL, Bordeaux 2
schneepat@aol.com

Résumé

La modélisation est souvent évoquée pour traiter de la proximité entre mathématiques et biologie. Mais si les mathématiques sont considérées comme une discipline théorique pétrie de modèles où les données empiriques sont mises au second plan, les sciences expérimentales leur sont souvent opposées de ce point de vue. Notre présentation vient battre en brèche cette conception pourtant fort développée chez les professeurs stagiaires. Nous abordons ici la question de la genèse du modèle dans l'apprentissage et nous étudions la fonction que les enseignants font jouer à la modélisation. Nous présentons ensuite un exemple d'action de formation susceptible de développer une réflexion des stagiaires sur cette genèse.

L'étude de la proximité des mathématiques et des sciences expérimentales a fait l'objet de nombreuses réflexions. Ainsi, la question de la dimension expérimentale en mathématiques n'est pas nouvelle. De nombreuses tentatives de rapprochement des mathématiques avec « l'expérience » avaient été faites antérieurement¹. Pourtant, « *En quelques décennies, l'idée a été expulsée de la mathématique scolaire qu'elle est un outil pour penser le réel en les trois grands domaines [que sont] le spatial, le numérique, le variable* » [CHEVALLARD Y. 2004].. Enseignants-chercheurs dans le même IUFM, nous effectuons nos recherches dans le même laboratoire. Dans le cadre de nos recherches respectives, nous avons tous deux travaillé sur la modélisation et nous avons croisé nos points de vue à l'occasion d'une action de formation conduite conjointement.

Notre IUFM propose aux Professeurs des lycées collèges un module bi-disciplinaire. À cette occasion, nous avons travaillé, avec des stagiaires de mathématiques et de biologie, sur la modélisation dans l'enseignement de chacune de ces deux disciplines. Au cours de cette formation, nous partons d'exemples pour introduire l'étude de la genèse du modèle dans l'apprentissage et nous interrogeons la fonction que les enseignants lui font jouer. Ce type de réflexion commune permet de revoir la question des relations entre mathématiques et biologie en plaçant la modélisation au centre des préoccupations des enseignants. Ainsi la formation à l'interdisciplinarité ne se réduit pas à un simple inventaire des sujets communs mais oblige à définir le statut épistémologique des modèles dans chaque discipline.

Nous résumons les objectifs de ce module en quatre points :

¹ En 1957, il était déjà en effet question d'une introduction généralisée de Travaux Pratiques dans les classes de Sixième et de Cinquième. (Instructions officielles de l'époque).

- Ne pas réduire la formation des enseignants à la présentation de méthodes d'enseignement ;
- Envisager les relations entre disciplines avec un autre regard que la recherche de complémentarité et/ou de cohérence ;
- Aider les stagiaires à se construire un autre rapport à leur discipline à partir d'analyses d'ordre épistémologique ;
- Engager le travail des enseignants vers une réflexion de nature didactique (situation, obstacle, débat, modélisation).

I – PREMIERE PARTIE : APPUIS THEORIQUES.

Dans cette partie, nous exposons, pour chacune de nos disciplines, des appuis théoriques. Pour cela, nous nous servons d'exemples d'observations pris à l'école, au collège et au lycée.

I – 1 Fréquentation expérimentale des savoirs en mathématiques et modélisation

I – 1.1 Un exemple d'activité en collège :

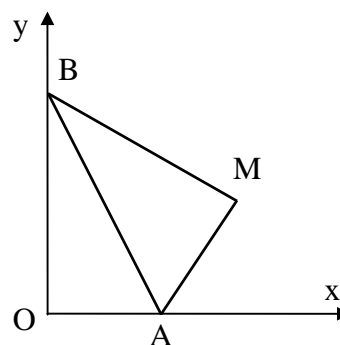
« On prend trois entiers naturels consécutifs ; on soustrait au carré de celui du milieu le produit des deux autres. Quel résultat obtient-on ? ».

Les élèves constatent sur un ou deux essais que le résultat est 1. Ils expérimentent alors sur d'autres exemples numériques et constatent que le résultat est toujours 1. Pourquoi ? La modélisation va consister à construire un nouveau milieu d'apprentissage, fait d'écritures littérales, qui permet d'analyser le problème sous une forme générale. La façon dont ces écritures littérales seront construites et maniées influera sur la résolution certes, mais la modélisation va permettre de cheminer vers la démonstration². Il s'agit autant de produire des formules que de les mettre en œuvre. Ces niveaux de modélisation permettent en outre de « s'évader » du contexte du problème : elle permet par exemple de s'affranchir de l'hypothèse « entier naturel » (en remplaçant le terme « consécutif » par « distants de 1 »). Le modèle issu de l'expérimentation a permis d'aller au delà de l'exercice initial.

I – 1.2 Un exemple d'activité en formation

Prenons cette fois un exemple dans une situation de formation professeurs de lycées collèges :

Voici un exercice qui leur est proposé : Une équerre glisse. A sur [Ox) et B sur [Oy). Comment se déplace le point M ?



Nous demandons aux professeurs de faire très rapidement une conjecture sur la nature du lieu du point M :

- 1- une droite ou un segment de droite,
- 2- un cercle ou un arc de cercle,
- 3- une autre courbe.

² Dans l'ouvrage collectif de COMBIER, GUILLAUME, PRESSIAT [COMBIER, GUILLAUME, PRESSIAT 1996], « Donner du sens à l'utilisation de la lettre en mathématiques en faisant construire par les élèves une écriture mathématique généralisant une situation donnée », les auteurs donnent plusieurs exemples de situation de classe observées en collèges.

Assez régulièrement, nous obtenons : 60% pour la conjecture 3, 30% pour la 2, 10 % pour la 1.

Nous leur demandons ensuite de mettre tout en oeuvre pour convaincre les collègues n'ayant pas fait la même conjecture du bien fondé de la leur. La difficulté à redessiner une équerre parfaitement à l'identique fait que la « règle des trois points M » pour discriminer 1 de 2 et 3 ne fonctionne pas vraiment. Le milieu du traçage, s'il permet d'éliminer un cercle de petit rayon, ne permet pas d'éliminer une de ces conjectures. Certains stagiaires s'engagent dans la géométrie analytique, sans grand succès en général. Nous insistons pour qu'ils mettent tout en oeuvre, non pas pour démontrer comme un (bon) élève, mais pour convaincre. Petit à petit, des dispositifs matériels prennent forme : équerre, crayon lié à l'équerre, règles pour fixer les supports Ox et Oy . Ce milieu matériel emporte bien souvent l'adhésion et tous sont convaincus de la validité de la conjecture 1. La question est alors : et si on se contentait de cette réponse (le dispositif) comme solution au problème posé. S'en suit tout un débat sur le passage à la modélisation, aux niveaux de modélisation (les types de figures que l'on a rencontrés dans l'activité, le passage d'un système déjà mathématisé à un modèle permettant la démonstration³).

I – 1.3 Une micro-observation en mathématiques (CP)

Ces niveaux de modélisation sont-ils l'apanage de l'enseignement secondaire ?

Prenons cette fois un exemple d'observation en cours préparatoire : une enseignante fait lancer un dé par chaque élève. À chaque lancé, elle écrit le résultat au tableau et met, en même temps dans une tirelire, un nombre correspondant de jetons. Au bout de 9 jeux (par exemple), le texte suivant est produit par l'enseignante : $5+4+2+4+1+6+4+4+5$. Elle pose alors la question suivante : « Quand j'ouvrirai la tirelire, à chaque fois qu'il y aura 10 jetons, on les échangera contre un bonbon. D'après vous, combien de bonbons on va pouvoir avoir ? ».

Dès cette première séance, plusieurs élèves, en montrant le texte au tableau affirment « il n'y en aura pas dix, tu vois bien [en montrant ce qui est écrit], il n'y a que 5 maximum ».

Dans cette première phase, le professeur a constitué un premier milieu objectif (le dé, la tirelire, une règle du jeu, des joueurs, une production écrite) à partir duquel il installe un milieu d'apprentissage en ajoutant la question relative aux bonbons. Il s'agit de tenter d'anticiper des faits expérimentaux (il y aura (ou non) possibilité d'avoir des bonbons), de les vérifier de façon empirique (« on n'a qu'à ouvrir la boîte »), passage obligé pour que s'installe un milieu propice à une autre activité : celle de l'élaboration de modèles (langage) qui permettront l'élaboration de processus de vérification d'une autre nature, sans ouverture de la tirelire. C'est en cela que « l'écrit mathématique constitue bien lui-même un observable, différent des phénomènes dont il est issu » [A.DESCAVES]. On imagine bien la suite des séances qui feront que, par une dialectique entre construction progressive d'un modèle (travail sur ce que nous appelons la suite additive, mais qui n'a pas du tout ce sens en début de lecture par les élèves) et mise à l'épreuve des faits, les élèves déboutés de leurs affirmations premières par la vérification expérimentale (en fait, les rétro-actions construites par un milieu d'apprentissage antagoniste), vont progressivement construire des règles qui assureront la cohérence.

Nous pouvons lister une partie des règles d'action qui vont, petit à petit émerger :

- l'addition entre deux signes consécutifs permet de prévoir le nombre de jetons obtenu à la suite de deux lancés,

³ Pour résoudre cet exercice, les savoirs géométriques du collège suffisent.

- Cette première règle permet de commencer à interroger l'affirmation première « il ne peut pas y avoir de 10 , puisque ce n'est pas écrit »,
- L'addition entre deux signes, même non consécutifs permet de prévoir le nombre de jetons obtenus à la suite des lancés correspondants, indépendamment des autres lancés,
- Une fois que l'on a pris un signe, celui-ci ne peut-être repris
- le résultat d'une addition entre deux signes peut être lui-même ajouté à un autre résultat.

Le milieu s'enrichit donc progressivement et ces règles d'action devenues théorèmes en acte ont pris naissance à partir des situations d'actions. Ces théorèmes sont nécessaires pour comprendre ultérieurement ce que sera une suite additive. Le professeur se sert de la première situation d'action pour construire un nouveau milieu qui produit une situation de formulation, marche obligée pour l'élaboration d'un modèle.

À l'école primaire, ces théorèmes ne seront pas prouvés par la démonstration. D'ailleurs, certains d'entre eux sont des règles de lecture construites à partir du milieu objectif⁴ [BLOCH 2001] pour maintenir une cohérence syntaxique là où il y a déjà une cohérence sémantique. En cours d'apprentissage, le professeur a comme projet de conduire les élèves à avoir suffisamment confiance en leurs théorèmes pour qu'ils s'émancipent progressivement du contenu de la boîte⁵.

À un moment, l'ouverture de celle-ci sera considérée comme superflue. À ce stade, les écrits qui étaient d'abord descriptifs vont constituer un milieu de preuves qui détermineront leur sens. Dans cette nouvelle situation (de validation), les énoncés produits dans la situation de formulation entrent à leur tour dans le milieu. On a en fait un emboîtement, chaque situation constituant le milieu de la situation suivante.

L'analyse faite jusqu'ici modélise l'élève comme un sujet mathématique ou épistémique, interagissant avec un certain milieu. Ceci suppose qu'il oublie au moins momentanément l'intention didactique de l'enseignant et accepte la responsabilité mathématique de la résolution du problème (dévolution). La connaissance produite dans le fonctionnement a-didactique précédemment décrit est une connaissance personnalisée et contextualisée. La notion d'institutionnalisation boucle le processus par lequel, sous la responsabilité de l'enseignant, cette connaissance va être dépersonnalisée, décontextualisée, et explicitement rattachée aux formes officielles du savoir mathématique visées par l'institution. Les deux processus de dévolution et d'institutionnalisation peuvent être perçus comme des processus inverses reliant deux niveaux d'analyse : le niveau a-didactique et le niveau didactique.

I – 1.4 Conclusions

- Que ce soit au collège, en formation ou au cours préparatoire, il s'est agi dans un premier temps de tenter d'anticiper des faits expérimentaux, de les vérifier de façon empirique, passage obligé pour que s'installe un milieu propice à une autre activité, mathématique celle-là, celle de l'élaboration de modèles (langage) ayant un fonctionnement relativement autonome.

- Construire des modèles est l'activité mathématique par nature. Ce sont les différents niveaux de modélisation, les niveaux de milieux qui permettent cette activité. La démonstration est l'aboutissement de la mise en œuvre d'un modèle syntaxique. Pour cela, à partir de la distinction habituelle en physique ou en biologie entre un système (à étudier) et les modèles (qui en permettent l'étude), Chevallard [CHEVALLARD 1989] propose d'appeler « mathématisé » le système et « mathématique » le modèle. Il affirme que la mise en rapport

⁴ Pour une compréhension du concept de milieu consulter le site <http://www-leibniz.imag.fr/EEDDM11/Theme2/Texte3.html> (Coulange L et Bessot A.)

⁵ S'il n'y a pas de place pour le sujet dans les mathématiques construites, sa place est primordiale dans la pratique des mathématiques.

entre les deux nécessite un troisième type de connaissance, ce qui lui « *donne les moyens d'étudier les types de rapports qui se cachent sous les vocables très utilisés tels que : application, activité, résolution de problèmes* ». [PRESSIAT 1996 p.20]

- La construction d'un modèle, plus tard, d'une démonstration, permet d'anticiper sur la réalité, mais aussi de la contester :

- l'exemple de l'équerre en formation PLC2 est intéressant en ce sens qu'une fois la démonstration faite par un stagiaire ou par le formateur, celle-ci entre en conflit avec certaines réalisations expérimentales qui prédisaient une courbe autre qu'une droite.
- à l'école primaire, imaginons un dispositif dans lequel, dans une boîte le professeur place n cubes, puis une autre boîte dans laquelle il place p cubes. Les élèves notent n et p . Le professeur leur demande de prévoir combien il y aura de cubes lorsqu'il versera le contenu de la première dans la seconde. Trichons un peu : au moment d'ouvrir la seconde boîte, il y a un nombre de cubes différent de $n+p$. Les élèves qui ne savent rien de l'addition ne vont pas contester, mais ceux qui avaient commencé à élaborer un modèle prédictif vont être surpris. Convenons que cette démarche n'est pas fréquente en classe et qu'elle choquera peut-être en formation. Mais elle provoque un questionnement : y-a-t-il la place, dans l'enseignement à cette autre fonction du savoir : être un instrument d'interrogation, de contestation, et pas seulement de prévision ? Il faut que les élèves aient la possibilité d'engager la négociation. Bien sûr, cette tension entre un savoir en gestation et des « anomalies » du milieu ne peut être entretenue artificiellement en permanence. Mais n'est-ce pas ce qui peut être demandé aux enseignants ou du moins abordé avec eux afin que les élèves aient la possibilité d'engager la négociation ? C'est alors un rôle différent du milieu et de l'expérience au sens classique du terme : celui de contester quand il n'y a pas ce que le modèle avait construit. Nous dirons que les mathématiques servent, non pas à voir la réalité, mais à dire comment elle doit être même si cela n'apparaît pas.

I – 2 EN SVT , deux types de Démarches

I – 2.1 Deux approches différentes

Du fait de sa complexité, un système vivant doit être appréhendé à travers un modèle. Or la modélisation d'un système requiert une analyse préliminaire de son organisation [ORANGE, 1997] qui peut se faire selon deux approches : une approche anatomique qui consiste à étudier les organes qui sont impliqués dans la réalisation d'une fonction et une approche fonctionnelle qui s'intéresse davantage aux interactions entre éléments intervenant dans le fonctionnement d'un système vivant. Cette deuxième approche exige de concevoir les êtres vivants comme des systèmes, c'est-à-dire comme un ensemble d'éléments en interaction.

Selon l'approche qui est choisie pour étudier une fonction biologique, les démarches mises en jeu sont radicalement différentes. Dans le cas de l'approche anatomique, il s'agit d'une démarche linéaire qui consiste à considérer les composantes anatomiques du système étudié et de déterminer les relations entre les parties tandis que l'approche fonctionnelle, qui s'inscrit dans une approche systémique du vivant, s'intéresse à la structure du système étudié en se détachant des considérations anatomiques.

Chacune de ces démarches renvoient à des modélisations qui correspondent à deux grandes catégories : la modélisation de type « symbolique » (ou analytico-organique) et la modélisation « formelle » ou structurale liées à des constructions théoriques. L'enseignement

de la biologie, qui privilégie la méthode analytique linéaire, fait souvent appel à la modélisation symbolique alors que la modélisation formelle, jugée trop complexe pour les élèves du secondaire, est peu présente.

Cependant, l'histoire des sciences montre que les conceptions des médecins et des physiologistes, qui ont prôné jusqu'au début du 20^{ème} siècle une vision analytique, ont fait obstacle pendant des siècles à la compréhension de certains troubles. Ainsi, les théories successivement adoptées pour expliquer le diabète : théorie rénale de Galien, théorie sanguine de Paracelse, théorie gastrique de Bouchardat, théorie hépatique de Claude Bernard et enfin théorie pancréatique confirmée par la découverte du rôle endocrinien du pancréas. Chacune de ces théories incrimine un organe dont le dysfonctionnement serait à l'origine des troubles constatés, attribuant ainsi la maladie à une cause unique. Cette façon de concevoir le fonctionnement de l'organisme montre les limites de ce type d'approche pour comprendre les mécanismes de la régulation de la glycémie: les scientifiques⁶ n'ont pas soupçonné la possibilité de coordination entre la fonction du foie et celle du pancréas. Forts de ces analyses, certains didacticiens s'efforcent de développer l'usage de l'approche systémique dans l'enseignement.

1 – 2.2 Le cas de la régulation en physiologie

L'étude de la régulation des grandes fonctions est abordée au lycée à partir de l'exemple de la régulation de la glycémie. En physiologie, le concept de régulation permet d'expliquer comment un organisme assure son indépendance vis à vis du milieu extérieur en maintenant la stabilité de son milieu intérieur (température, pression osmotique, pression artérielle, glycémie, ...). Pour étudier les mécanismes de la régulation, deux démarches différentes sont proposées selon les manuels consultés.

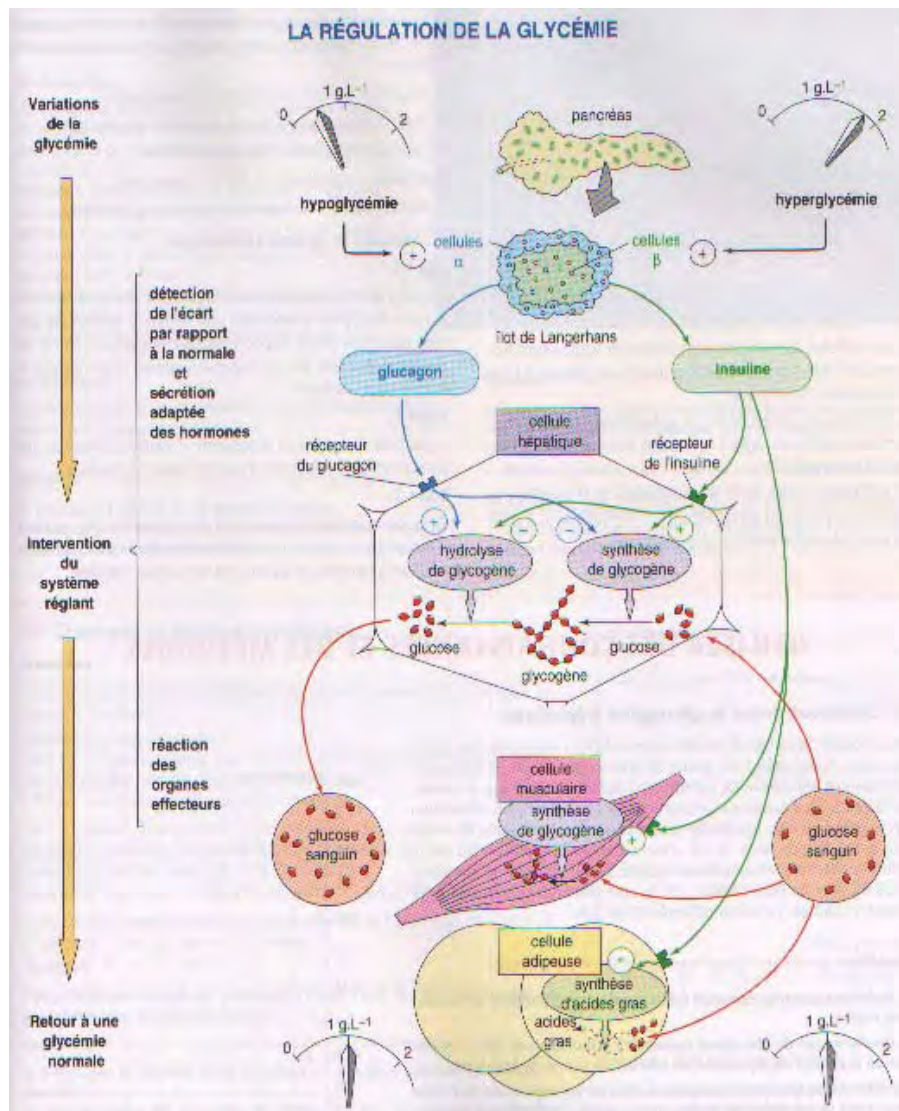
Approche 1 : la méthode analytique en lien avec l'utilisation de modèles symboliques

Dans de nombreux manuels la régulation de la glycémie est présentée selon une succession d'étapes, organisée de la manière suivante :

1. La glycémie est définie comme une constante physiologique.
 2. Le rôle du foie dans la mise en réserve du glucose est étudié, souvent en se référant à une expérience « historique » de Claude Bernard (expérience dite « du foie lavé »).
 3. Le rôle joué par le pancréas est envisagé à partir de données cliniques et expérimentales (expériences d'ablation et de greffe).
 4. La fonction hypoglycémisante du pancréas est attribuée à une hormone : l'insuline.
 5. La libération du glucose dans le sang est associée à un système d'hormones hyperglycémisantes. Leur mode d'action, les modalités de leurs sécrétions sont décrits.
 6. Un schéma de synthèse est proposé, intégrant l'ensemble des points précédents.
- Il s'agit d'une démarche progressive débouchant sur une synthèse qui cumule les éléments successivement abordés selon un modèle symbolique, donné pour représenter les mécanismes mis en jeu dans la régulation de la glycémie.

Figure 1 : Exemple de schéma de synthèse

⁶ Cl. Bernard lui-même a remarqué, à deux reprises, la dégénérescence du pancréas lors d'autopsie du diabétique mais cela n'a pas attiré son attention.



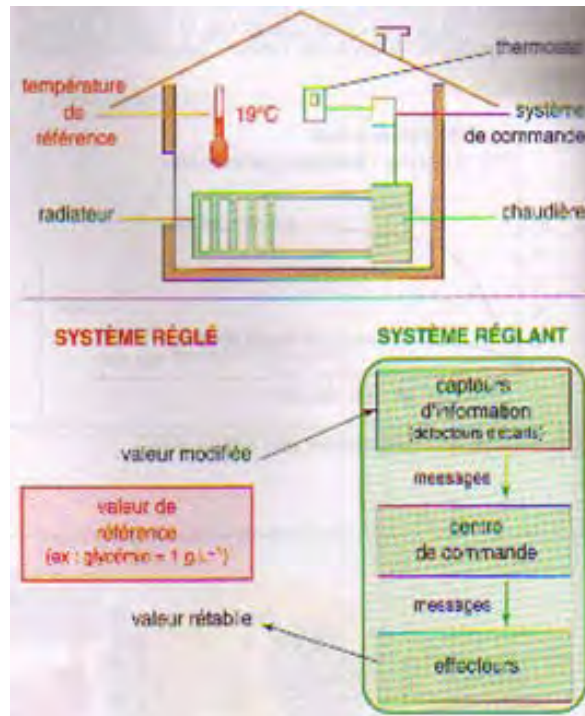
Bordas, Première S, 2001, page 153

Approche 2 : L'approche systémique en lien avec l'utilisation de modèles formels (ici le modèle cybernétique)

Dans certains manuels, les auteurs introduisent un modèle et proposent de l'utiliser pour expliquer le mécanisme de la régulation de la glycémie. Ils s'inscrivent ainsi dans une approche systémique en incitant les élèves à se référer à un modèle formel pour interpréter des phénomènes.

Dans ce cas, le modèle utilisé est le modèle cybernétique importé en physiologie à la fin des années 60 pour étudier les phénomènes de régulation. L'application à l'analyse du vivant des modèles empruntés à la cybernétique donne la priorité aux interactions entre les différents organes, ce qui constitue une véritable révolution. Dans l'exemple de la figure 2, il est introduit à partir d'une analogie : le maintien de la température dans un logement pourvu d'un système de chauffage avec thermostat.

Figure 2 : Exemple de modélisation formelle

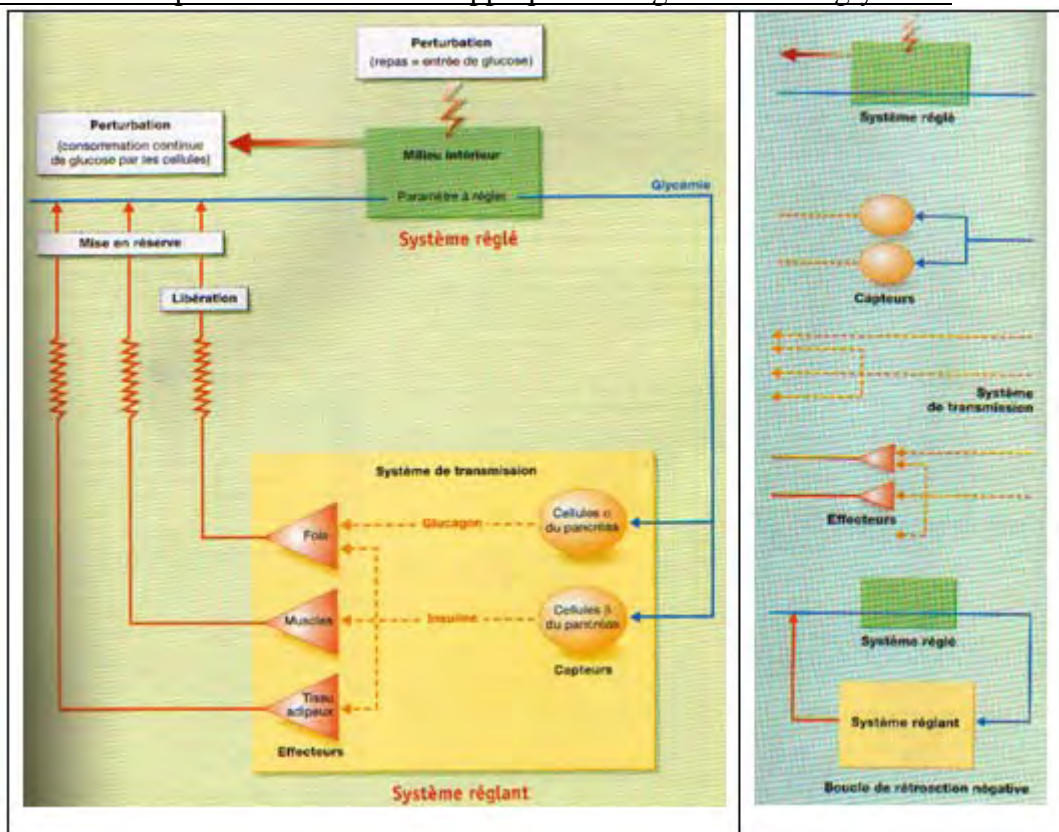


Bordas, Première S, 2001, page 148

Le modèle est ensuite traduit en schéma de principe qui sert de guide pour interroger un ensemble de données expérimentales et comprendre les mécanismes en jeu dans la régulation de la glycémie. L'étude conduit à la construction d'un schéma qui permet de matérialiser les interactions au sein d'un système (figure 3).

La théorie cybernétique constitue un cadre théorique adéquat pour l'interprétation de la régulation et des concepts liés à ce phénomène, comme l'information et le rétrocontrôle. Son utilisation oblige à accorder une importance capitale au transfert d'informations qui contrôle les transferts de matière au sein d'un organisme défini comme un système ouvert qui échange avec le milieu extérieur. De telles situations permettent aux élèves de concevoir le vivant non plus seulement comme une organisation mais comme un système composé d'éléments en interaction dynamique.

Figure 3 : un exemple de modèle formel appliqué à la régulation de la glycémie



Hatier, Première S, 2001, page 107

II – SECONDE PARTIE : UN TRAVAIL COMMUN MATHS-SVT EN FORMATION PLC2

II – 1 Un module de formation

Il s'agissait de créer des conditions relativement favorables afin que des PLC2 de mathématiques et de biologie puissent d'une part, à l'intérieur de leur discipline être interrogés sur « expérience » et « modélisation », d'autre part, en croisant les regards, mieux appréhender les différences consubstantielles aux deux disciplines.

Pour cela, nous avons proposé deux thèmes : celui de la régulation en biologie (plus particulièrement la régulation de la glycémie) et celui des probabilités-statistiques (tirages avec remise) en mathématiques.

II – 1.1 Deux situations de classe

Nous présentons aux stagiaires deux situations qui sont utilisées en classe de seconde pour la première, en classe de Première S pour l'autre.


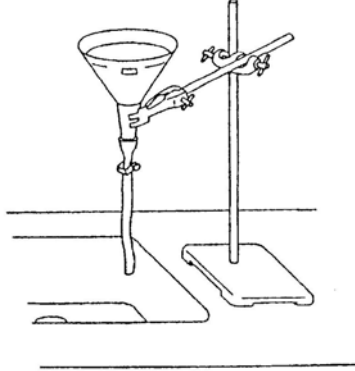
| Situation et dispositif « en maths » | Situation et dispositif « en SVT » |
|--|--|
| <p>Situation 1 : Il s'agit d'élaborer une méthode pour être sûr de la composition d'une bouteille contenant 5 billes identiques à la couleur près. Il y a des billes rouges et des billes vertes. En retournant la bouteille grâce à un dispositif de bouchon transparent (figure 5), il est possible d'apercevoir une bille de la bouteille et une seule.</p>  | <p>Situation 2 : Vous travaillez en groupe de 5 et vous devez vous organiser pour garder le niveau d'eau constant dans l'entonnoir après une perturbation (augmentation ou baisse du niveau d'eau dans l'entonnoir). Vous devez respecter deux contraintes : chacun ne peut réaliser qu'une seule action et ne communiquer qu'avec un membre du groupe à l'exception de celui qui a fait l'action précédente. Ensuite, chaque groupe doit réaliser, sur une affiche, un schéma qui rend compte des activités physiques et intellectuelles réalisées au cours de cette expérience.</p>  |

Figure 4 : dispositifs utilisés en situation

II – 1.2 Les étapes du module de formation

Etape 1 : Familiarisation avec deux dispositifs utilisés respectivement en SVT et en maths

Dans les deux cas, une réflexion s'engage sur l'usage que l'on peut faire du dispositif dans l'enseignement. En SVT, par exemple, il est nécessaire d'introduire la question de la correspondance entre les éléments du dispositif utilisé et les composantes du modèle cybernétique utilisé pour étudier les systèmes de régulation.

| | | |
|--|---|-------------------------------|
| Trait de référence | ↔ | valeur de référence |
| Augmentation ou baisse du niveau de l'eau | ↔ | perturbation. |
| Observation du niveau final | ↔ | mise en jeu du capteur |
| Comparaison avec le niveau initial | ↔ | mise en jeu du comparateur |
| Communication de l'information | ↔ | transmission de l'information |
| Réalisation de l'action (verser, enlever) | ↔ | mise en jeu de l'effecteur |

Figure 5 : Correspondance entre régulation du niveau d'eau et modèle cybernétique

Etape 2 :

Des séances enregistrées dans des classes permettent d'illustrer les étapes du dispositif didactique et d'enrichir le questionnement des stagiaires sur les apprentissages en jeu.

Etape 3 :

Une comparaison entre les deux situations (maths et SVT) permet d'initier un échange entre les enseignants de chacune des disciplines sur les points suivants :

- place des modèles dans l'enseignement de ces disciplines ;
- mode d'articulation modèle/ réel privilégié selon le type d'enseignement conduit.

II – 2 Les enjeux de cette formation

II – 2.1 Analyser des situations d'enseignement

Les stagiaires sont mis en présence de deux dispositifs matériels, qui permettent d'envisager deux milieux d'apprentissage construits intentionnellement. Les deux milieux créés doivent permettre aux stagiaires de s'interroger sur les enjeux spécifiques de chacun.

L'un est directement un milieu d'apprentissage d'un concept de mathématiques : la modélisation qui en découle constitue une construction d'un modèle mathématique (la loi des grands nombres) permettant de s'affranchir d'une approche empirique (on n'ouvrira pas les bouteilles), sans pour autant que la validation de cette loi soit totalement accomplie à l'intérieur du modèle : les probabilités.

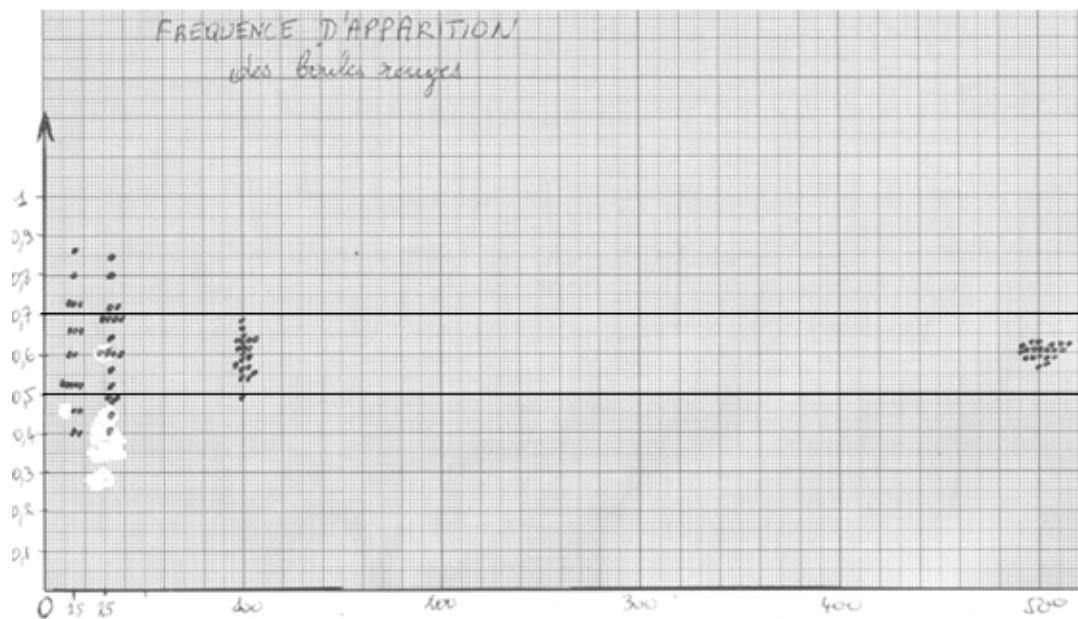
L'autre permet d'enseigner un modèle (proche du modèle cybernétique) qui sera un outil de construction d'un modèle de régulation et en même temps de travail sur le registre empirique.

II – 2.2 Susciter la réflexion des stagiaires

La question des rétroactions

Dans le dispositif des billes dans les bouteilles, les stagiaires sont confrontés à une nouvelle incertitude : celle de la non reproductibilité d'une expérience pourtant construite à dessein, ce qui constitue une rupture fondamentale par rapport à ce qui est habituellement vécu. La situation doit donc permettre d'ébaucher un modèle prenant comme objet d'étude cette nouvelle incertitude : celle de la variabilité. D'où, par exemple, un travail de mesurage

(effectif dans notre travail et non probabiliste) du «risque» lors d'une prise de décision en fonction du nombre de tirages.



Travail d'élève sur la composition 3R 2V : séries d'expériences pour 15, 25, 100, 500 tirages.

Dans le travail ci-dessus, un groupe d'élève prend comme objet d'étude un intervalle de confiance $[0,5 ; 0,7]$. Ce travail peut-être conduit de deux façons : avec une bouteille dont on ignore le contenu ou avec une bouteille dont on a constitué la composition. Le dispositif expérimental permet de quantifier statistiquement l'évolution du risque en fonction du nombre de tirages : ici, 9 expériences de 15 tirages sur 18 expériences « sortent » de l'intervalle et conduisent donc à une poser une hypothèse fausse (si l'on est sûr du contenu de la bouteille), 8 sur 20 conduisent à une hypothèse fausse pour 25 tirages (on a exclu les bornes) , 1 sur 20 conduit à une hypothèse fausse pour 100 tirages, aucune pour 500.

Il y a beaucoup d'obstacles à franchir avant que le stagiaire soit en mesure de considérer le milieu qui lui est proposé comme un milieu mathématique, c'est à dire dans lequel une organisation mathématique à construire lui permettra de mieux maîtriser les événements à venir. Cela signifie que l'on n'ouvrira pas la bouteille. Cette attitude empiriste qui serait celle d'ouvrir la bouteille est difficile à abandonner y compris chez ces jeunes enseignants.

Il va donc falloir composer :

- Avec la construction de la notion d'expérience. Qu'est ce qu'un sondage dans un ensemble que l'on ne conçoit pas encore ? Qu'est ce que répéter une expérience ? Quelle est la signification d'une expérimentation ? Comment vient l'idée d'ajouter des résultats d'expériences successives ?
- L'expérience en statistiques ne serait-elle pas l'attente d'une classe d'expériences qui produirait des résultats attendus ?
- Avec la pensée déterministe qui attribue au hasard l'imprévisibilité. La rationalité confondue avec le déterminisme mathématique peut, nous en faisons l'hypothèse, constituer un obstacle épistémologique, voire didactique, à la construction d'une pensée stochastique.
- Il faudra composer, comme nous l'analysions précédemment, avec l'incertitude nouvelle qu'apporte le milieu, qui induit un rapport modifié à la vérité : l'invalidation de conjectures fausses a encore moins de chances de fonctionner que dans une séquence faisant appel à des savoirs mathématiques classiques. De même, la validation de conjectures vraies peut être, à court et moyen terme, très difficile à valider dans le contexte de la classe, ce qui complique encore plus la tâche du professeur. Prenons l'exemple de la conjecture « dans cette bouteille, il y a plus de vertes que de rouges ». Cette conjecture peut paraître être invalidée par une expérience sur 10 tirages qui donnerait comme résultat 4 vertes et 6 rouges. C'est que

l'expérience ne renvoie pas systématiquement à la réalité du contenu de la bouteille, ce que les élèves peuvent pourtant penser.

La question de la légitimité des modèles

Au cours de ce module de formation, les stagiaires sont amenés à s'interroger sur la légitimité épistémologique de l'utilisation de l'approche systémique dans l'enseignement de la régulation de la glycémie. Cette réflexion les conduit à mettre l'accent non plus sur le déclenchement de l'action régulatrice mais sur son déroulement dans le temps en attribuant aux récepteurs sensoriels une fonction de contrôle permanent par l'intermédiaire des afférences nerveuses. Ainsi l'organisme n'est plus considéré comme un système « bien réglé » qui réagit parfaitement aux stimuli du milieu extérieur en ramenant inéluctablement une grandeur à sa valeur initiale mais comme un système ouvert qui réalise des échanges avec le milieu extérieur (échange d'information, de matière et d'énergie) et dont les différents éléments sont impliqués dans un réseau d'interactions.

Ce changement de conception du fonctionnement de l'organisme, qui se traduit par une autre manière d'envisager le rôle des récepteurs sensoriels, exige de reconfigurer sa pensée en s'appuyant sur un modèle du vivant différent. Canguihem (1968) distingue quatre conceptions de la vie : la vie comme animation, la vie comme mécanisme, la vie comme organisation et la vie comme information. L'étude réalisée avec les stagiaires permet de montrer la nécessité d'adopter une conception adéquate du vivant (« *la vie comme information* ») pour aborder le concept de régulation.

La question de la relation élève / modèle

Dans le cas de la régulation, l'étape 2 du module de formation permet de s'intéresser à la manière avec laquelle l'élève construit, s'approprie et applique un modèle formel. Ainsi en regardant un extrait de l'enregistrement d'une séance, les stagiaires peuvent observer des élèves qui tentent d'identifier les éléments du système de régulation en s'appuyant sur le modèle analogique (figure 4) qu'ils font progressivement fonctionner comme un modèle formel.

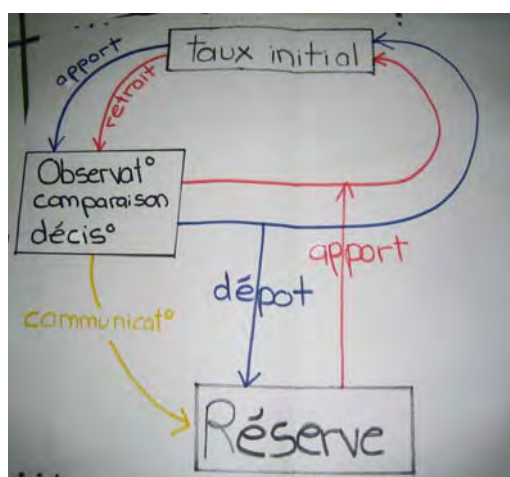


Figure 6 : Schéma réalisé par des élèves de première S

Dans l'exemple de la figure 6, les élèves ont fait fonctionner le dispositif et ont réalisé un schéma qui correspond à un modèle formel qu'ils pourront ensuite utiliser pour expliquer la régulation de la glycémie. La confrontation des productions des différents groupes a pour but d'aider certains élèves à passer du modèle analogique au modèle formel.

II – 2.3 Développer de nouvelles pratiques

Un de nos objectifs de formation est de réorienter les pratiques d'enseignement des stagiaires par la recherche des conditions favorisant la construction de l'objet de savoir en classe. Ainsi en analysant avec des collègues scientifiques la question de l'utilisation d'un modèle, les professeurs de SVT se rendent compte que l'objet de savoir en jeu est souvent mal circonscrit : ce ne sont pas que des organes qui font l'objet de régulation mais des valeurs telles que la glycémie ou la pression artérielle, le taux de CO₂ dans le sang, la pression osmotique.

De même en mathématiques, Il s'agit de permettre que s'établisse une réflexion sur la construction de situations d'apprentissage y compris au collège et au lycée. « *On entretient un commerce purement théorique et non pas expérimental avec les constructions mathématiques les plus essentielles.* » [CHEVALLARD Y. 2004]. Or l'absence d'expérience affecte le sens de la théorie, fait obstacle à l'émergence de « *concepts authentiques* » [DESCAVES 1992] c'est à dire ceux issus de l'expérience. Pour cela, le questionnement en terme de milieu semble être une bonne entrée afin que l'activité spontanée d'enseignement qui est le plus souvent fondée sur un enseignement frontal puisse être progressivement mise en question.

Ce travail conduit également les stagiaires à s'intéresser davantage au processus de problématisation en valorisant la construction du problème par les élèves. Dans cette perspective, l'enseignant rapproche le travail des élèves du travail des scientifiques et prend en compte les pratiques spécifiques de l'activité scientifique comme étant étroitement liées aux savoirs. Cette conception de l'enseignement remet en cause la séparation habituelle des objectifs méthodologiques et des objectifs cognitifs, comme on pouvait les travailler indépendamment les uns des autres.

CONCLUSION

En 2002, l'Inspection Générale de mathématiques écrivait à propos du collègue : « *les programmes de mathématiques mettent l'accent, depuis de nombreuses années, sur le rôle essentiel de la mise en activité de l'élève et du choix de situations de recherche et de découverte devant permettre une meilleure assimilation des notions. Pour être efficace, une activité devrait s'appuyer sur une mobilisation de connaissances antérieures et permettre la mise en place et la structuration de nouvelles connaissances ; elle devrait alterner les périodes de recherche et d'initiative individuelles et les mises en commun, préludes à l'institutionnalisation finale.* ». C'est dire si dans la pratique, l'enseignement des modèles restent assez souvent dominant.

Dans le domaine des Sciences de la Vie et de la Terre, voici ce qu'écrit Orange à propos d'une observation de classe sur la nutrition [ORANGE C. 2005] : « dans notre cadre théorique, l'enjeu [...] est de faire construire aux élèves des nécessités constitutives du savoir scientifique sur la nutrition : ce sont, entre autres, les nécessités de transformation et de tri. Ces nécessités, qui correspondent à des concepts scientifiques au sens où nous les avons définis, ne doivent pas être confondues avec les idées correspondantes : évoquer que les aliments sont broyés, qu'ils sont séparés entre « bons et mauvais » aliments etc., est bien différent d'énoncer la nécessité de ces processus. D'une certaine façon on peut dire que ce débat a comme fonction didactique de faire passer les élèves des idées aux nécessités, ou encore des solutions qu'ils ont construites à la problématisation explicite. » Pour l'auteur, c'est l'absence de modèle et l'empirisme qui dominent l'enseignement de sa discipline. Cette réflexion rejoint nos analyses à propos de l'enseignement des mécanismes de régulation.

Est-ce à dire que les mathématiques sont garanties contre l'empirisme ? Bien sûr que non : dans l'exemple déjà vu de la tirelire, l'ouverture de celle-ci doit devenir superflue pour que le milieu des nombres devienne le milieu de référence. Certains enseignants vont rechigner à se donner cet objectif.

Pour conclure, nous pourrions dire la didactique des SVT a à « batailler » pour donner une légitimité à une approche théorique par la construction de modèles (sciences de l'empirie). La didactique des maths a à « batailler » pour que les constructions théoriques (les modèles) soient l'aboutissement de rapports dialectiques avec des milieux objectifs. Nous avons fait l'hypothèse qu'en formation, ces deux chemins « en sens inverse » sont le moyen d'ouvrir un débat sur l'enseignement de chacune de ces deux disciplines.

Ce type de module de formation permet d'envisager les relations entre disciplines avec un autre regard que la recherche de complémentarité et/ou de cohérence. Il aide les stagiaires à se construire un autre rapport à leur discipline à partir d'analyses d'ordre épistémologique (qu'est-ce qu'une explication scientifique ?). Au lieu de réduire la formation des enseignants à la présentation de méthodes d'enseignement, il nous semble que la formation doit engager le travail des enseignants vers une réflexion de nature didactique (situation, obstacle, débat, modélisation) pour opérer des ruptures avec des pratiques non questionnées.

BIBLIOGRAPHIE

ASSUDE T. (2002) « Travaux pratiques au collège ? Conditions et contraintes d'émergence et de vie d'un dispositif », in M. Bridenne (eds) *Nouveaux dispositifs d'enseignement en mathématiques dans les collèges et les lycées*, IREM de Dijon.

BACHELARD G. (1938) *La formation de l'esprit scientifique*, Paris, J. VRIN, rééd 1996.

BAYRUBER H. & SCHAEFER G (1978) *Kybernetische Biologie*, Kiel, IPN

BLOCH I. (2002), « Différents niveaux de modèles de milieux dans la théorie des situations didactiques : recherche d'une dialectique scientifique entre analyse théorique et contingence », *Actes de la 11ème Ecole d'Eté de DDM*, 125-140, Grenoble : La Pensée Sauvage.

BRIAND J. (2005), « Une expérience statistique et une première approche des lois du hasard au lycée par une confrontation avec une machine simple », *RDM*, **25/2**, 247-282.

BROUSSEAU G. (1988), « Le contrat didactique : le milieu », *RDM*, **9.3**

CANGUILHEM G. (1968) article « Vie », in *Encyclopaedia Universalis*.

CANGUILHEM G., (1996) article « La régulation », in *Encyclopaedia Universalis*.

CHEVALLARD Y. (1989) « Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignements des mathématiques au collège », *petit x*, 19, 43-72, IREM de Grenoble.

CHEVALLARD Y. (2004) « Pour une nouvelle épistémologie scolaire », *Cahiers pédagogiques*, **427**.

COMBIER, GUILLAUME, PRESSIAT. (1996) « *Les débuts de l'algèbre au collège* », INRP.

FABRE, M. & ORANGE C. (1997) « Construction de problèmes et franchissements d'obstacle », *Aster*, **24**, p. 43.

FABRE M. (1999) *Situations-problèmes et savoir scolaire*, PUF

JACOB F. (1970) *La logique du vivant*, Paris, Gallimard.

JEBBARI S. (1994) *Schéma et schématisation : étude de quelques difficultés des élèves en biologie*, thèse de doctorat, Université Paris VII.

LEGAY J.-M. (1997) « *L'expérience et le modèle : un discours sur la méthode* ». Paris : INRA Éditions.

LEMOIGNE J.-L (1984) *La théorie du système général, théorie de la modélisation*, Paris, PUF.

MARTINAND J.-L. et al., (1994) *Nouveaux regards sur l'enseignement et l'apprentissage de la modélisation en sciences*, Paris, INRP.

ORANGE C. (1997) *Problèmes et modélisation en biologie*, Paris, PUF.

- ORANGE C. (2005) « Problématisation et conceptualisation en sciences et dans les apprentissages scientifiques » in *Les Sciences de l'éducation, Pour l'ère nouvelle*, **2005-3**, 69-93.
- PERES J. (1984), '*Construction et utilisation d'un code de désignation d'objets à l'école maternelle*' Thèse Bordeaux 2.
- POULAIN N. (1996) *Histoire du diabète sucré, Des origines à la découverte de l'insuline*, Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré-Nancy I.
- SCHNEEBERGER P. (1992) « *Problèmes et difficultés dans l'enseignement d'un concept transversal : le concept de la régulation* », thèse de doctorat, Paris VII.
- SCHNEEBERGER P. (1994) Place des modèles dans l'enseignement du concept de régulation. in RUMELHARD G., *La régulation en biologie, Approche didactique : représentation, conceptualisation, modélisation*, INRP.
- WALLISER B, (1977) *Systèmes et modèles : introduction critique à l'analyse des systèmes*, Paris, Seuil.

ATELIERS

‘PROBLEMES POUR CHERCHER’, QUELLE CONTRIBUTION A LA MODELISATION?

Catherine HOUEMENT

MC, IUFM de Haute-Normandie

DIDIREM Paris 7

catherine.houement@rouen.iufm.fr

Résumé

Les programmes de 2002 mettent en avant les problèmes, notamment ceux dits « pour chercher » (MEN 2005). Le rapport IGEN 2006 rapporte que lors des séances de résolution de ‘problèmes pour chercher’, les problèmes choisis et les pratiques de classe sont très variées et d’impacts potentiels auprès des élèves très différents.

Ce texte pose des jalons pour une harmonisation des intentions d’apprentissage liées aux séances de résolution de ‘problèmes pour chercher’ et des critères de choix de ces problèmes.

Les programmes de 2002 mettent en avant les problèmes, notamment ceux dits « pour chercher » (MEN 2005). Certains comprennent cela comme une invitation à faire des « rallyes », à lancer des « défis », à introduire de l’extraordinaire dans la classe de mathématiques par exemple par le biais d’énigmes récoltées sans analyse critique (et parfois même sans intention mathématique) dans maint ouvrage ou sur maint site. Quand la séance fait partie de l’ordinaire de la classe, elle est parfois ponctuelle, sans véritable enjeu, comme le montre notamment le rapport de l’Inspection Générale (IGEN 2006).

Les interprétations des ‘problèmes pour chercher’ posent donc question : elles semblent faire la part trop faible à des apprentissages mathématiques.

C’est cette interrogation qui a suscité cet atelier, se limitant volontairement **aux problèmes numériques ou à traitement numérique.**

Les intentions du travail commun étaient donc de :

- faire prendre conscience aux formateurs de nos conceptions différentes des ‘problèmes dits pour chercher’;
- harmoniser ces conceptions notamment sur le point suivant : les ‘problèmes pour chercher’ sont des prétextes à mettre en jeu des connaissances mathématiques et contribuent à augmenter la culture mathématique de nos élèves ; à ce titre (réinvestir des connaissances mathématiques), les ‘problèmes pour chercher’ ont une place dans l’enseignement des mathématiques ; restent à déterminer leur spécificité et leurs apports ;
- poser les premiers éléments d’une organisation de ces problèmes (voire une praxéologie au sens de Chevallard) notamment en cherchant à regrouper les problèmes par type, à pointer les ‘techniques’ dont ils pourraient relever ; à préciser le discours à tenir sur ces techniques.

Remarquons cependant le caractère paradoxal de cette entreprise : il est d’usage de construire une technique pour d’un type de tâches routinier ; de quelle routinisation pourrait il s’agir concernant les problèmes pour chercher ? Nous verrons plus loin notre proposition : elle a à voir avec des types de raisonnement. Et quid de la technologie, discours sur la technique ? Nous faisons l’hypothèse que la technologie en jeu ne

fournirait pas là la justification mathématique de la technique, mais plutôt le mode d'emploi de la technique (technologie pratique versus technologie théorique).

Ce texte reprend et enrichit une partie de la présentation, en y intégrant des apports des participants.

I – MOTIVER ET SITUER LA REFLEXION.

I – 1 Un objet déjà ancien dans les programmes

Les 'problèmes pour chercher' ont une place particulière dans l'enseignement français : valorisés dès les années 1980 sous le nom de *problèmes ouverts* (voire *situations-problèmes*¹), ils ont donné lieu à de multiples expérimentations dans les IREM, en particulier celui de Lyon (ARSAC 1988), se sont poursuivies notamment par les *narrations de recherche* (par exemple BONAFE ET AL. 2002), analysant le travail de l'élève du côté du processus de recherche plus que du côté de la réponse au problème, avec comme objectif annoncé de développer des « attitudes »..... L'équipe ERMEL de l'INRP a produit un certain nombre d'écrits sur ce type de problèmes, soit intégrés dans des aides pédagogiques numériques par niveau d'école primaire (ERMEL post 1991), soit plus spécifiques visant un travail des élèves sur l'argumentation (ERMEL 1999).

À l'école primaire, ils existent dans les programmes depuis 1985 mais sans nom particulier... Les programmes 2002 leur donnent un nom : *Problèmes pour chercher* et leur consacre un chapitre spécifique des *Documents d'accompagnement* (2005, pages 7 à 14) qui précise l'objectif spécifique des séances qui leur sont liées, par rapport aux autres séances qui font intervenir des problèmes : « *problèmes centrés sur le développement des capacités à chercher : en général pour ces problèmes, les élèves ne connaissent pas encore de solution experte* » (MEN 2005 page 7). Les Programmes 2002 distinguent trois autres types de problèmes selon la fonction qu'ils ont dans le projet du professeur : construire des nouvelles connaissances (exigibles en fin de cycle), les exercer et les réinvestir, mobiliser plusieurs connaissances déjà travaillées (problèmes plus complexes).

Cette explicitation nouvelle des *Problèmes pour chercher* interpelle différents acteurs (professeurs d'école, inspecteurs, formateurs...) ou collaborateurs plus occasionnels (didacticiens, mathématiciens) de l'enseignement primaire qui en questionnent les différentes interprétations (transpositions) et s'interrogent sur la légitimité de cet objet d'enseignement dans les programmes de mathématiques.

Certaines questions restent cruciales : quelle place, quelle fonction ont de tels problèmes (de telles séances autour de problèmes) dans l'institution école ? Qu'apprennent –ils ? Comment doit on les organiser pour qu'ils apprennent des 'choses' aux élèves ? Quelles sont ces 'choses' ? Quel est le rôle du professeur dans cet apprentissage ?

I – 2 Un rapide regard sur les pratiques

Les sources de problèmes qui se disent « pour chercher » ou que les professeurs utilisent comme tels abondent, notamment sur la toile, sous la rubrique Défis mathématiques, Rallyes. Les dispositifs, organisant un jour par an des compétitions entre équipes

¹ Nous n'en dirons pas plus sur la signification de ces deux expressions : elles ont eu des sens très différents depuis 1980. C'est d'ailleurs sans doute à cause de son ambiguïté que l'expression 'situation-problème' a disparu de tous les programmes de mathématiques.

d'élèves de classes différentes participent pour les professeurs au traitement de cet objet du programme (et parfois se résument à cela).

Un rapport de l'Inspection Générale de juin 2006 fait état d'ailleurs des dérives que suscite le traitement en classe de cet objet.

Il souligne fort justement la maladresse de l'expression 'problème pour chercher' qui produit un effet de brouillage, rendant cette expression synonyme de problèmes pour lesquelles la résolution n'est pas automatique, sans nécessairement y intégrer une part de connaissances mathématiques. Dans cet esprit, il conseille, pour les problèmes en général, une typologie en quatre parties : « *Problèmes à une opération, avec étapes intermédiaires explicites, avec étapes intermédiaires trouvées par l'élève, plus complexes.* ». On sait les limites d'un tel classement : par exemple Vergnaud (VERGNAUD 1990) a montré qu'à contexte identique, des problèmes ternaires (deux nombres donnés, un troisième à trouver) relevant de la même opération et des mêmes nombres, ne présentaient pas tous la même facilité de raisonnement

Le rapport souligne l'inadaptation de la gestion de classe associée à un tel objet d'enseignement. Les professeurs restent démunis face aux questions pratiques suivantes : comment exploiter de façon constructive les erreurs des élèves, relativiser des procédures lourdes, valoriser des procédures efficaces, conclure effectivement la séance dans un cadre mathématique ?

Le rapport s'interroge finalement sur les objectifs de la présence d'un tel objet d'enseignement dans les programmes de mathématiques du primaire.

I – 3 Construire une typologie ?

L'intention déclarée des programmes 2002 avec l'expression 'problèmes pour chercher' correspond à une exploitation spécifique de problèmes pour lesquels les élèves n'ont pas a priori une procédure automatique disponible : « *développer chez les élèves un comportement de recherche et des compétences d'ordre méthodologique : émettre des hypothèses et les tester, faire et gérer des essais successifs, élaborer une solution originale et en éprouver la validité, argumenter* » (Documents d'application des programmes Mathématiques 2002, cycle 3, page 7). On peut d'abord constater qu'il ne s'agit pas uniquement de chercher... Ces compétences doivent être à l'oeuvre quelle que soit l'activité mathématique pratiquée par l'élève. Mais il est vrai que l'injonction (présente dans les programmes depuis 1985) de faire passer tous les enseignements de mathématiques par le filtre des problèmes est encore très mal comprise.

Il est donc nécessaire de préciser les choses et les raisons des choses... : en chercher les motivations, construire des éléments de typologie....

I – 4 Quelle motivation pour ces problèmes ?

Les problèmes pour chercher sont souvent justifiés par le fait de permettre à l'élève de mener lui-même une partie de l'activité mathématique réelle du mathématicien, celle qui consiste à tâtonner, chercher, recommencer pour avancer, sans viser l'acquisition d'une connaissance notionnelle à plus ou moins long terme, ce dont se chargent les problèmes spécifiquement pensés à ces fins et dont l'idéal théorique est les situations didactiques de la Théorie des Situations. En quelque sorte ils offriraient une liberté et une gratuité que Glaeser (GLAESER1976) avait déjà pointées.

Mais justement cette liberté et cette gratuité n'est elle pas antinomique de l'avancée des apprentissages, qui suppose qu'un savoir doit émerger explicitement (grâce à l'institutionnalisation du professeur) des situations étudiées ? Cela pose la question de l'existence dans les mathématiques des connaissances qu'il ne serait pas possible d'institutionnaliser, mais qu'il faut cependant avoir pour faire des mathématiques, et donc qu'il ne serait peut-être possible que d'apprendre par frayage, comme le souligne la production d'un des groupes de participants à l'atelier ²

En effet ces 'problèmes pour chercher' (tels qu'ils sont ordinairement proposés, isolés, avec une question déjà donnée) n'ont pas de statut stricto sensu dans les mathématiques : non pas que les mathématiciens n'en rencontrent pas, mais s'ils les rencontrent, c'est plus pour atteindre des éléments de réponse que (au moins dans un premier temps) pour analyser le processus de recherche. Actuellement les 'problèmes pour chercher' tel que décrits dans les DA 2005 restent un 'objet d'enseignement' aux contours flous.

Pourtant dans d'autres pays, ils sont revendiqués y compris par des didacticiens justement parce qu'ils motivent, de façon externe, les apprentissages mathématiques. DaPonte dans un article à paraître sur la Résolution de Problèmes au Portugal dans la revue *Zentral Blatt der Mathematik* insiste sur le côté effectivement formateur des 'problèmes pour chercher', notamment pour la participation des élèves (et donc comme une raison d'apprendre des mathématiques) et le développement de compétences transversales (capacités d'expression, d'échange, de collaboration). Il modère cependant leur impact pour mettre en réseau des connaissances, sauf pour les élèves forts.

En résumant, il pourrait, semble-t-il, s'installer un certain accord sur les **motivations externes** (aux mathématiques) des problèmes pour chercher.

- Donner un meilleur aperçu des positions respectives du professeur et des élèves vis-à-vis des apprentissages :
 - préciser un aspect du métier d'élève, pas seulement exécuteur, mais aussi contrôleur et initiateur ; on sait que cette conception du métier d'élève (agir, essayer, se tromper, contrôler) n'est pas dominante, notamment en cycle 3 ;
 - aider aussi le professeur à être d'abord un accompagnateur dans la recherche de la vérité (de la réponse exacte), pas uniquement celui qui sanctionne la réponse ou révèle la solution.
- Initier des démarches collaboratives moyennant des dispositifs adaptés : par exemples les rallyes mathématiques des origines se contentaient de faire travailler en équipes les élèves sur une liste de problèmes déterminée ; la modification qui consiste à doter chaque problème d'un quota de points qui affecte positivement le total du groupe en cas de réussite et négativement en cas d'échec, amène les élèves à changer leur rapport à la réponse (dont le groupe doit être sûr qu'elle est correcte) et à mobiliser l'équipe pour contrôler les raisonnements produits. Bien entendu ces dispositifs de rallyes gagnent à être accompagnés de séances plus ordinaires autour de tels problèmes.

² Un groupe de recherche à l'IUFM de Haute Normandie travaille sur ce thème autour de C.Castela (*Enjeux cachés d'apprentissage*).

Ces motivations externes ne sont pas négligeables, mais qu'en est-il des **motivations internes** aux mathématiques ? Moyennant l'hypothèse de travail raisonnable « pour qu'il y ait apprentissage, il est nécessaire qu'il n'y ait pas seulement des tâches isolées », quelle progression prévoir, quels problèmes choisir ? Et bien sur, quelles séances mener autour de ces problèmes ?³

II – QUELQUES HYPOTHESES DE TRAVAIL

S'intéresser à un objet d'enseignement amène d'abord à questionner sa légitimité a priori. Sans rentrer dans une recension des divers travaux qui se sont intéressés à la question, un consensus existe sur le fait que les problèmes ont globalement deux fonctions dans l'enseignement : contribuer à construire des connaissances mathématiques dans une dynamique connaissances-savoirs, fonction particulièrement pointée par les approches didactiques (BROUSSEAU 1990, BRUN et CONNE 1992, DOUADY 1986) et faire fréquenter une partie de l'activité du mathématicien, chercher, valider, fonction mise en avant par des mathématiciens (GLAESER 1976) épistémologues et des praticiens chercheurs (IREM de Lyon dès 1988).

Je souhaiterais compléter par deux apports. Julo (1995, 2002) insiste particulièrement sur le rôle que jouerait la mémoire des problèmes résolus dans la résolution de nouveaux problèmes. Il fait l'hypothèse qu'il existe trois types de structures en mémoire, qu'il appelle schémas. Les schémas de type 'cas' seraient formés des traces sémantiques en mémoire de problèmes particuliers ; la théorie des situations, par les situations fondamentales, viserait une installation de tels problèmes, en contrôlant la qualité de leur adaptation au savoir visé. Les schémas de type 'regroupement' fonctionneraient avec des critères de surface et de nature pragmatique (par exemple les problèmes d'achats dépenses). Enfin le troisième type, les schémas de type 'abstrait', s'appuierait sur des analogies structurales (analogie relationnelle au sens de Vergnaud 1990 ou procédure de résolution ou outil de modélisation).

Sous ces hypothèses, les 'problèmes pour chercher' contribueraient à enrichir les schémas du premier type (par l'expérience de construction d'un raisonnement non automatique) et du troisième type. Mais comment déclencher la possibilité d'une mémorisation organisée de tels problèmes réussis ? Peut-être par une rencontre organisée avec de tels problèmes selon certains critères (ce que nous envisagerons par la suite). En l'état actuel des connaissances, nous ne pourrions aller plus loin, les recherches restent ouvertes.

Le second apport de type réflexif concerne la problématique des enjeux cachés d'apprentissage développée à l'IUFM de Haute Normandie autour de C. Castela. Prenant appui sur la croyance partagée et ressentie par des praticiens chercheurs (IREM, INRP, mais pas seulement) des bénéfiques pour les élèves de séances bien pensées de 'problèmes pour chercher', réfléchir aux types de connaissances effectives déclenchées par de telles séances et lister les conditions de ces déclenchements pourrait mettre à jour des connaissances cachées, non simplement institutionnalisables⁴, que possèderaient certains élèves et pas d'autres, et qui seraient très utiles pour les apprentissages mathématiques ordinaires. Autrement dit on expliciterait ainsi la niche didactique des 'problèmes pour chercher'. Là encore les recherches restent ouvertes.

³ Mais cette dernière question sera à peine traitée ici.

⁴ non référencées ni à des technologies, ni à des théories (au sens de Chevallard).

III – VERS DES ELEMENTS D'ANALYSE DES PROBLEMES

III – 1 Les travaux du groupe

Pour permettre un travail commun, j'ai choisi de livrer à la sagacité de mes collègues une liste fort importante de problèmes numériques pour le cycle 3 (cf. annexe 1), récoltés dans différentes ressources (cf. annexe 2) du professeur (manuels scolaires, aides pédagogiques, site Internet...) sous les rubriques 'problèmes pour chercher', 'problèmes complexes', défis, rallyes... et de les laisser échanger sur les questions suivantes :

Quel(s) argument(s) pour choisir ou rejeter tel problème (sous-entendu comme 'problème pour chercher' ?

Quel(s) fil(s) conducteur(s) pour une idée de progression ?

La tâche était certes importante, le but était de faire émerger des questions cruciales comme le manque d'accord existant déjà dans la communauté des formateurs, qui pouvait laisser préjuger des variations d'interprétation dans le milieu des acteurs (professeurs et inspecteurs). Il s'agissait de souligner le caractère sensible de cet objet d'enseignement et l'effort de clarification auquel nous devons nous atteler.

Les productions en annexe montrent l'étendue des préoccupations : coller aux injonctions des programmes, s'interroger sur les savoirs potentiels accessibles, réfléchir aux critères de sélection de ces problèmes (du point de vue mathématique, du point de vue élèves), repenser la typologie proposée : problèmes complexes, problèmes pour chercher.

Pour information, une brochure de l'IREM de Nantes (HERSANT 2006) propose une grille d'analyse des 'problèmes de recherche' (plus exactement de séquences de problèmes pour chercher) qui regroupe ces différentes préoccupations : liaison avec les apprentissages mathématiques, compétences méthodologiques visées, compétences méthodologiques potentiellement accessibles par la mise en œuvre proposée.

III – 2 Éléments d'analyse a priori des problèmes pour cycle 3

Notre analyse repose sur l'analyse de la tâche d'un élève de la deuxième moitié du cycle 3, de façon à rendre a priori disponibles des connaissances sur les quatre opérations.

Le problème 1 est un problème non immédiat : il faut savoir reconstituer, en sélectionnant des informations, un sous problème à traitement immédiat (350 kg pour 25 tables). C'est un problème de réinvestissement (de connaissances sur la division), à une solution, qui demandera un temps de recherche aux élèves, pour déduire la première réponse (poids de la table). Il est souvent qualifié de problème complexe.

Le problème 2 est, dans la version du manuel, supporté par un dessin, ce qui peut rendre la représentation du problème (au sens de JULO 1995, 2002) plus facile. Il a une seule solution, est résoluble par essais successifs sur la valeur de la zone. Il met en jeu des connaissances arithmétiques simples.

Le problème 3 est aussi supporté par un dessin. Une démarche par essais peut s'avérer complexe. Par contre une déduction des jeux de Jo et Léa permet d'avancer sur la valeur de la zone B, comme dans le problème 1. Cette déduction peut être facilitée par les trois

dessins des parties sur la cible. Le problème 3 met en jeu des connaissances arithmétiques simples.

Le problème 4 nécessite des essais limités par des déductions par exemple sur la parité... Il met en jeu des connaissances sur la numération.

Le problème 5 est un problème presque immédiat (déduction immédiate relevant de la division).

Compte tenu des différents types de déduction que nous rencontrons, essayons de les indexer ainsi : D1 déduction immédiate, D2 déduction après juxtaposition de plusieurs informations, D3 déduction après combinaison de plusieurs informations. Ainsi nous nous trouvons face aux raisonnements suivantes : pb 1 D2 ; pb2 E (essais) ; pb 3 D3 ; pb 4 E (+D3) ; pb 5 D1 .

Nous pouvons ainsi regrouper plusieurs problèmes selon les raisonnements, ce qui ne présage pas de la difficulté des reformulations... (cf. pb 12 :).

| D1 | D2 | D3 | essais | Essais+D |
|--------|------|---------------------------------|---------------|----------|
| 5 - 11 | 1- 7 | 3- 10- 12- 13- 14-17- 18- 20 | 2- 12- 15- 16 | 4- 6- |

Remarquons

- que certains problèmes se résolvent quasi aussi économiquement par déduction ou essais : cependant un des buts (cachés en primaire ??) est d'activer les résolutions par déduction, souvent plus directes ;
- que d'autres problèmes engagent l'élève à mener une véritable expérience : par exemple les problèmes 8 ; 15 ; 16 ; 21 ; 22 ; 23 ; on peut considérer la résolution par essais comme une démarche expérimentale, avec tous ses critères de qualité ;
- que tous les problèmes qui évoquent un certain réel mettent en jeu des connaissances extra-mathématiques qui peuvent être sophistiquées : connaissance du fonctionnement d'un calendrier pour le pb 9 ; vocabulaire lié à l'aviation commerciale pour le pb 17...

III – MOTIVATIONS INTERNES AUX MATHÉMATIQUES

L'étude précédente peut nous faire avancer sur des raisons d'être de problèmes non immédiats, notamment en pointant certaines ressemblances qui permettraient d'organiser ces listes de problèmes pour une progression. Cette progression ne prend pas en compte ici les gestions associées : type de consigne, support, variantes et variables, travail individuel ou en groupe, temps de recherche, de synthèse, conclusion, éléments à institutionnaliser.

III – 1 Connaissances mathématiques en jeu

Les problèmes complexes et 'pour chercher' doivent d'abord permettre de **réinvestir** de façon non immédiate **des connaissances mathématiques** en cours d'apprentissage. Les

problèmes retenus ont donc d'abord une fonction de réinvestissement. Les pb 1, 5, 6, 7 et 11 sont d'abord des problèmes multiplicatifs, le pb 6 nécessite une connaissance des fractions. Attention cela ne signifie pas que l'outil le plus général pour résoudre le problème soit un savoir visé du niveau de classe où se donne le problème : le pb 16 relève d'un système de deux équations à deux inconnues, mais il est résoluble par une démarche expérimentale arithmétique.

III – 2 Le rapport aux raisonnements

Les différentes formes de raisonnement

Nous prenons comme synonyme de *raisonnement*, comme ERMEL 1999, toute suite organisée d'inférences conduisant à une conclusion ; l'inférence consistant en la production d'informations nouvelles à partir d'informations déjà là dans le texte et de connaissances avérées en mémoire.

A. Weil-Barais (WEIL-BARAIS 1993, p.526) recense plusieurs formes de raisonnement. Elle qualifie les uns de non canoniques (ils ne suivent pas des règles bien définies), tels le raisonnement par analogie (une conclusion est tirée par ressemblance, il s'agit souvent d'un raisonnement heuristique), le raisonnement en contexte (une sorte de reconnaissance de forme qu'appliqueraient les experts) ; elle insiste aussi sur les liens étroits entre raisonnement et processus de sémiotisation, qui est à l'œuvre dans les mathématiques, sous l'égide de règles bien établies. Nous y ajoutons le raisonnement par induction où il s'agit de tirer une loi générale de l'examen de cas particuliers. Il nous semble trouver dans cette approche bon nombre d'analogies avec la mémoire des problèmes sous forme de schémas de problèmes, pointée par Julio (JULO 2002).

Weil-Barais distingue deux types de raisonnements canoniques : le raisonnement déductif et le raisonnement expérimental ou raisonnement par test d'hypothèses.

Le raisonnement déductif est directement associé aux mathématiques (comme moyen et comme but), notamment sous les formes diverses que sont l'implication logique (contraposée et contre-exemple), le raisonnement par l'absurde, le raisonnement par disjonction des cas, le raisonnement par récurrence⁵.

Le raisonnement expérimental est un raisonnement conditionnel à trois aspects : énoncé des hypothèses, recherche d'informations pour mettre à l'épreuve les hypothèses, traitement des informations.

J'y ajoute une autre forme de raisonnement canonique : celui pris en charge par les règles de fonctionnement des écritures mathématiques (ici les écritures arithmétiques voire algébriques) : par exemple $45 \times 32 = 1440$ nous permet de savoir que $4500 \times 320 = 1440000$. Je place ce raisonnement dans les raisonnements déductifs.

Quels raisonnements pour l'école ?

La résolution de problèmes devrait être une occasion de **rencontrer des modes de raisonnement** différents pour ouvrir une palette de possibles : déduction simple mais aussi plus complexe, puissance des écritures arithmétiques voire algébriques, raisonnement expérimental y compris dans les mathématiques.

Dans les propositions de problèmes dits complexes, on trouve souvent des problèmes déductifs (D2 D3). La complexité du traitement (donc le temps de recherche) peut aussi être liée au nombre d'informations : il est alors nécessaire de savoir trouver parmi toutes

⁵ Ce qui ne signifie pas que toutes ces formes soient exploitables à l'école.

ces informations celles susceptibles par déduction de produire une réponse permettant d'avancer dans le problème. Ce qui est en jeu est alors la capacité simultanée à planifier (construire les questions intermédiaires) et à mobiliser la déduction ad hoc (qui se réduit souvent à une opération).

Mais les élèves d'école primaire peuvent ne pas mettre en œuvre de raisonnement déductif pourtant efficace, notamment par manque de connaissances et/ou de système symbolique efficace : les problèmes 2, 15 et 16 en sont des exemples. Là le raisonnement expérimental (ou par test d'hypothèses) peut leur permettre d'avancer. On sait bien que dans les problèmes additifs de type recherche de l'état initial d'un problème de type état-transformation-état, les élèves simulent l'action, testent des valeurs pour l'état initial, bien avant d'appliquer à l'état final la transformation inverse (mi CE2) (FAYOL 1990, p. 160).

À tout niveau d'enseignement donné, la rencontre avec deux types nécessaires de problèmes semble nécessaire : avec ceux prétexte à un raisonnement déductif ET avec ceux qui nécessiteraient un autre raisonnement, un test d'hypothèses. Bien entendu souvent ces types de raisonnement se croisent...

III – 3 Le rapport au vrai et au faux

La résolution de tels problèmes doit engager les élèves dans un rapport à la vérité. Se pose donc légitimement la question de la validation de chacun de ces problèmes : peut-on institutionnaliser des éléments de validation de façon à conduire l'élève à prendre en charge lui-même la validation de sa réponse, ou du moins à en contrôler certains éléments ?

H.Péault (PEAULT 1992) avait déjà examiné cette question des différents types de validation, notamment pour enrichir la liste des problèmes qu'il proposait dans les rallyes mathématiques du Maine et Loire. Nous partons de sa typologie pour dégager cinq niveaux de validation que nous avons codés.

- La réponse est validable quasi immédiatement par un calcul élémentaire (reconstitution de calculs) **I**
- La réponse est à confronter à chaque élément du problème (déduction logique) **D** ou chaque contrainte (problème à plusieurs contraintes, figure avec telles caractéristiques) **C**
- Dans le cas d'une recherche exhaustive : il faut vérifier que la méthode permet de tout parcourir **E**

Quand il n'est pas possible de mettre en œuvre une validation du type de celles qui précèdent, deux cas sont à envisager :

- il faut alors argumenter, prouver en référence au problème, **sur le plan mathématique P** : il s'agit de construire une preuve ; par exemple la recherche de trois nombres qui se suivent pour une somme fixée (pb 15) est I-validable, mais le problème retourné (BLOCH 2005), la recherche des nombres qui possèdent une telle décomposition nécessite une P-validation ;
- il faut argumenter, prouver en référence au problème **sur le plan du réel R** ou en faisant appel à des connaissances non stricto sensu à l'intérieur des mathématiques : le pb 9 relève de ce cas puisqu'il nécessite des connaissances sur les calendriers et peut être validé par un document.

Ce qui donne, pour illustrer cette grille avec notre liste de problèmes.

| I | D ou C | E | P | R |
|-------|---|--|--------|--------------------------------|
| 15-17 | 1- 2 -3- 4- 5- 6- 7 -10- 11 - 12- 14- 16- 20- 21- 22 | 2- 16 pour unicité 21 pour multiplicité | 15- 22 | 8- 9-24 13 -17 19 -18-19 |

Intéressons nous aux validations « non simples » : **P** et **R**

- La validation de type **P** est un des enjeux de la liaison école-collège : elle correspond à l'intégration systématique d'arguments textuels strictement mathématiques dans le raisonnement.

Par exemple si on propose de répartir 45 jetons dans deux boites vertes et quatre boites rouges comme dans le problème 21, le fait de ne trouver aucune réponse ne peut pas clore le problème : encore faut-il transformer ce fait en la certitude qu'il n'existe aucune solution, notamment par des considérations de parité. Idem pour le problème 15, quand il est retourné. Ainsi par certains problèmes dont il est possible de modifier les variables pour conduire à des nombres de solutions différents (une solution, aucune ou plusieurs), les élèves peuvent être engagés vers des types de validation différents, en particulier vers la construction d'une preuve élaborée.

Le problème 22 est particulièrement décrit dans ERMEL 1999, avec toutes ses variantes pour construire littéralement des théorèmes arithmétiques faisant avancer vers la réponse.

On voit là tout l'intérêt de tels problèmes... mais la gestion du groupe classe reste encore la partie immergée (et elle le restera dans ce texte).

- La référence à la réalité (validation **R**) peut être plus ou moins forte. Par exemple le problème 17 nécessite de savoir s'il est d'usage que d'autres personnes que commandant de bord et copilote soient assis dans le cockpit ; le problème 18 nécessite de porter sur la plaque les bonnes dimensions, etc.

La référence à la réalité est très plus forte dans le problème 8. Elle est aussi à l'œuvre dans le problème 24, mais ce problème ne fait pas fonctionner de contenu mathématique du cycle 3. Un tel problème devrait rester anecdotique.

Le problème 13 relève d'une démarche expérimentale au cycle 3 et doit être aussi contrôlé par la réalité évoquée ; mais ce problème n'est pas très intéressant pour le cycle 3 dans la mesure où les erreurs (mauvais film des transvasements) ne permettent pas d'avancer vers la solution.

Les quatre premières vérifications sont à mettre en parallèle avec ce que d'aucuns ont appelé **contrôle syntaxique** (organisation mathématique des informations) et la dernière **R** avec **contrôle sémantique** (confrontation au réel, irréfutabilité du domaine d'expérience).

Ainsi le problème 19, malgré une forme simple et une solution intuitive, nécessite une validation complexe sur les plans sémantique et syntaxique (deux fonctions linéaires en

jeu pour modéliser remplissage et vidage). Cette validation n'est pas accessible à des élèves de cycle 3.

Le problème 9 fait appel à des connaissances sur le fonctionnement du calendrier. L'étude lors de la recherche d'un calendrier (d'une autre année) peut contribuer à mobiliser ou construire ces connaissances.

IV LA QUESTION DE LA MODELISATION

Dans ce paragraphe, je m'intéresse à la question de la modélisation vue sous l'angle de la fabrication de modèles ou la mobilisation de modèles. Que retenir comme définition de modèle ?

Pour ce faire je m'inspirerai de Fischbein (FISCHBEIN 1989) qui définit l'intérêt des modèles pour le raisonnement. Je me limiterai aux modèles externes (non seulement mentaux) explicites.

Un modèle serait d'abord un artefact, un signe (ou des signes), un écrit susceptible de rapprocher la situation de départ du but et portant un caractère génératif : dans ce cadre, les dessins figuratifs, supports possibles de raisonnement des jeunes élèves, seraient des pré-modèles (par leur absence de caractère génératif) ; les dessins épurés peuvent déjà être des modèles ; une écriture arithmétique est un modèle issu des mathématiques. Pour qu'un dessin devienne modèle, il est nécessaire qu'ils aient des vertus génératives.

Cette question du potentiel génératif d'un dessin est d'importance à l'école : l'enfant de CP perd beaucoup de temps à dessiner le personnage du problème avec tous ses attributs, il doit apprendre à n'en garder que les éléments liés à la question posée pour lui conférer un pouvoir génératif. Un des apprentissages de cycle 2 concernant cet aspect de la modélisation est celui d'une transformation (épuration) raisonnée du dessin en un schéma fonctionnel pour raisonner. Cet apprentissage n'est pas terminé au cycle 3 : des élèves devant dessiner des cubes colorés dans une phase heuristique s'appliquent à colorier, alors que d'autres symbolisent la couleur par une croix (dans Exemple de mise en place d'un problème pour chercher : le pavé bicolore HERSANT 2006 p.51).

Plus tard avec l'enrichissement du répertoire didactique, un modèle peut être un réseau de connaissances mathématiques (par exemple modèle additif, multiplicatif, modèle de la proportionnalité....) qu'il s'agit alors de mobiliser avec son domaine de validité.

Dans cet article, je laisse de côté la question de la genèse chez l'apprenant des modèles mathématiques (dans le domaine numérique les quatre opérations et la proportionnalité) émergeant d'un équilibre entre problèmes à résoudre, invariants opératoires et éléments sémiotiques (langage, écritures mathématiques) (VERGNAUD 1990). Je ne m'intéresse qu'à leur réinvestissement dans des problèmes.

« Petite modélisation »

Un des critères de choix des problèmes pour chercher (ou complexes) et indirectement une façon de les regrouper pourrait être leur potentialité de création de types de modèles.

- Prenons l'exemple du problème 16, une histoire de poules et de lapins (PLUVINAGE 2007- non publié), trois types de raisonnement peuvent lui être associés : un raisonnement algébrique supporté par la traduction du problème en système de deux équations à deux inconnues (non disponible en fin de primaire), un raisonnement arithmétique par test d'hypothèses, une mise en schéma de type une tête par un rond et une patte par un trait : le dessin de toutes les têtes suivi d'une distribution raisonnée des pattes (par exemple 2 pattes par tête d'abord, puis une nouvelle distribution de 2 pattes supplémentaires jusqu'à épuisement) donne la réponse : ce dernier dessin serait un modèle au sens où nous l'avons défini plus haut. Bien entendu le modèle ne sera construit comme génératif que si l'élève a l'occasion de rencontrer plusieurs fois ce type de problèmes (système de 2 équations à 2 inconnues potentiellement lié à un tel schéma).
- De même les problèmes 20 et 23 peuvent s'appuyer sur trois types de raisonnements : algébrique, arithmétique par test d'hypothèses et géométrique par l'utilisation de segments mesurés.

Il nous semble intéressant, grâce à des rencontres régulières avec des problèmes pour chercher relevant de schémas voisins, de mettre les élèves en face de raisonnements potentiellement liés à des « démarches modélisantes » (PLUVINAGE 2007 non publié).

« Grande modélisation »

Un autre type de problèmes est étudié dans des équipes de recherche : les *situations recherche* du projet *Maths à modeler* (par exemple GODOT 2006) dont nous rappelons certains caractéristiques : point de départ facilement compréhensible par l'élève, situation non formalisée en termes mathématiques (« *c'est la situation qui amène l'élève au cœur des mathématiques* ») ; méthodes de résolution non désignées ; une, plusieurs ou aucune solution.

Ces caractéristiques-là sont déjà celles de bon nombre de problèmes pour chercher (par exemple le problème 21 selon le nombre de jetons et la série de boîtes peut avoir plusieurs ou aucune solution). La spécificité des *situations recherche* réside dans le fait que les *variables de recherche*, qui définissent les sous-problèmes liés à la question initiale et peuvent donner lieu à des tâches très différentes, ne sont pas fixées au préalable. Certaines situations sont fondées par un jeu avec un support matériel qui joue alors le rôle d'une aide à la formulation d'hypothèses et leur validation.

Ces dispositifs présentent de grandes potentialités, ils permettent notamment de modéliser différents aspects d'un jeu pour mieux y jouer ou hiérarchiser sa complexité. Ils demandent cependant une bonne maîtrise mathématique et didactique de la part de l'enseignant qui les installe dans sa classe : dans les travaux cités, c'est d'ailleurs toujours un « matheux » qui gère la séance.

Domaine de validité d'un modèle

Mais on peut aussi s'interroger sur l'apprentissage d'un sens critique du modèle. Est-il licite d'appliquer tel modèle intuitivement mobilisé ? Quelle sensibilité au contexte développer ? Quel contrôle par le réel (sémantique) mettre en place ?

Prenons l'exemple classique suivant : « 38 personnes décident de partir en voiture ; une voiture peut transporter 5 personnes ; de combien de voitures ont-elles besoin ? ». Il est

usuel que les élèves donnent comme réponse le quotient par défaut. C'est un des rares exemples dans les habitudes françaises où l'élève est amené à questionner la pertinence d'un modèle (celui du quotient par défaut). Verschaeffel qualifie cet énoncé de *problematic item* (**Pi**) par rapport au suivant : « nombre de sachets pleins si on empaquette 38 objets par paquets de 5 » qu'il qualifie de *standard item* (**Si**).

Verschaeffel (par exemple VERSCHAEFFEL 2000) étudie parallèlement les réussites à des *standard items* **Si** (validations sémantique et syntaxique en correspondance) et aux *problematic items* **Pi** (problèmes dont la validation sémantique invalide le modèle intuitif) de même contexte, tels que :

- Peter organise une fête. Il invite tous ses amis : 8 garçons et 4 filles. Combien d'amis invite-t-il ? **Si**
- Charles a 5 amis et Georges a 6 amis. Ils décident d'organiser une fête à deux et d'inviter tous leurs amis. Combien d'amis invitent-ils ? **Pi**
- Paul a acheté 5 planches de 2 m de long chacune. Combien peut-il faire de planches de 1m ? **Si**
- Paul a acheté 4 planches de 2,5 m de long. Combien peut-il faire de planches de 1m ? **Pi**
- Chris a fait une ballade à pied : 8 km ce matin et 15 km cet après-midi. Quelle distance a-t-il parcourue ? **Si**
- Léo et Alice vont à la même école. Léo habite à 17 km de l'école et Alice à 8 km de l'école. À quelle distance habitent-ils l'un de l'autre ? **Pi**

Il montre la difficulté qu'ont les sujets à bloquer pour les **Pi** l'utilisation du modèle intuitif. Verschaeffel parle même à ce sujet d'un phénomène de *suspension de sens commun*⁶, résistant même aux mises en garde.

Pourtant la culture citoyenne devrait comporter aussi cette capacité à choisir ou rejeter tel modèle pour tel problème et contrôler certes syntaxiquement mais aussi sémantiquement les problèmes. Dans l'usage français, seule la validation syntaxique est prise en compte. Il nous faudrait aussi prendre en compte la dimension sémantique, de façon non anecdotique⁷, dans nos enseignements.

CONCLUSION

Notre ambition était de chercher des motivations internes pour les 'problèmes pour chercher'. Nous avons en réalité étudié les problèmes autres que ceux qui engagent vers de nouvelles connaissances (problèmes d'introduction) ou les entraînent et les exercent (problèmes d'application ou exercices) et essayé de poser les jalons d'une organisation de ces problèmes.

Tout problème donné à l'école doit engager des connaissances mathématiques, soit parce qu'elles seront sous peu pointées comme savoirs (Conne) et exercées, soit parce qu'elles sont supposées déjà là, suite au processus d'enseignement. Les problèmes dont il est question dans cette étude sont du second type.

⁶ Voir dans ces mêmes actes la communication de C.Lemonidis.

⁷ On sait que le faire de façon anecdotique conduit à une rupture du contrat tacitement passé avec les élèves et reste peu significatif et peu efficace.

Par exemple, en CP, un problème de commande de gommettes conditionnées par bandes de 5 gommettes pour « habiller » une fleur est déjà légitime dans la mesure où il réinvestit le nombre : il apprend aussi à distinguer les grandeurs des nombres qui les mesurent (2 bandes, c'est aussi 10 gommettes alors que 2 n'est pas 5) et contribue à l'apprentissage de la numération décimale (2 dizaines, c'est aussi 20). Il peut faire entrer dans *une démarche modélisante* en apprenant à faire des dessins épurés. Bien sûr il est nécessaire que les professeurs des écoles aient bien été informés de ces objectifs afin qu'ils l'exploitent dans ce sens.

Il nous semble important que l'élève rencontre des problèmes dans lesquels il va avoir l'occasion de réinvestir des connaissances supposées déjà là, lors de raisonnements plus complexes qu'inférer une seule déduction : combiner plusieurs déductions, combiner des informations aboutissant à des déductions licites, construire des démarches expérimentales. Ces catégories de raisonnements pourraient être une façon de décrire problèmes complexes et problèmes pour chercher.

Il nous semble important que l'élève soit confronté à l'importance des validations dans les mathématiques et à des validations diverses, notamment celles qui l'engageront dans une dynamique de preuve.

Enfin dans la perspective du socle commun scientifique, il nous semblerait raisonnable d'intégrer, aussi dans les mathématiques du cycle 3, des problèmes propices à un démarche modélisante et des problèmes 'réalistes' pour former les élèves à un apprentissage critique de la modélisation.

BIBLIOGRAPHIE

ARSAC, G., GERMAIN, G., & MANTE, M. (1988). *Problème ouvert et situation problème*. Lyon: IREM de Lyon.

BONAFE F., CHEVALIER A., COMBES M.C. et alii. (2002) *Les narrations de recherche de l'école primaire au lycée*. IREM de Montpellier.

BROUSSEAU G. (1970-1990, édition 1998) *Théorie de situations didactiques*. 25-43. Grenoble : La Pensée Sauvage

BLOCH I. (2005) Dimension adidactique et connaissance nécessaire. Un exemple de « retournement » d'une situation. *Sur la théorie de situations didactiques*. 143-152. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHAPPAZ J., MICHON F. (2003) Il était une fois la boîte du pâtissier. *Grand N* n°72. 19-32.

CHARNAY R. (2006) Rallyes mathématiques : quel intérêt ? *Grand N* 78. 53-62.

CONNE F. et BRUN J. (1992) Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 12/2-3. 221-270.

COPPE S., HOUEMENT C. (2002) Réflexions sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire. *Grand N* 69. 53-63.

DOUADY R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des mathématiques*, 7/2. 5-32.

DUPUIS C., GRUGNETTI L. (2003) Le nez de Pinocchio, un problème de mathématiques «inverse». *Grand N* 72. 33-40.

- ERMEL (1977 à 1982). *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire (CP au CM2)*. Paris : Hatier.
- ERMEL (post 1991). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes (CP au CM2)*. Paris : Hatier.
- ERMEL (1999) *Vrai ? Faux ?... On en débat*. Paris : INRP
- FAYOL (1990) *L'enfant et le nombre*. Lausanne : Delachaux et Niestlé.
- GLAESER, G. (1976). *Le livre du problème. Pédagogie de l'exercice et du problème*. Paris : Editions CEDIC (second edition).
- GODOT K. (2006) La roue aux couleurs : une situation recherche pour apprendre à chercher dès le cycle 3. *Grand N* **78**. 31-52
- GR IREM ELEM BESANÇON (2005) La conduite en classe d'une situation de recherche : un exercice périlleux. *Grand N* **76**. 65-74.
- GRAND N (2003) N°spécial *Points de départ*. IREM de Grenoble.
- GUEUDET G., LE POCHE G. (2006) Séquences de résolution de problèmes complexes. *Grand N* **77**. 35-54. Hersant M. (dir) 2006 *Des problèmes pour chercher à l'école primaire*. IUFM des Pays de la Loire et IREM de Nantes.
- HERSANT M. dir (2006) *des problèmes pour chercher à l'école primaire*. IREM des Pays de Loire.
- HOUEMENT C. (1998) Le choix des problèmes pour la résolution de problèmes. *Grand N* **63**. 59-77.
- HOUEMENT C. (2003) La résolution de problèmes en question. *Grand N* **71**. 7-23
- IGEN MENESR (juin 2006) *L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire*. En ligne sur <http://www.education.gouv.fr/cid4172/l-enseignement-des-mathematiques-au-cycle-3-de-l-ecole-primaire.html>
- JULO J. (1995) *Représentation de problèmes et réussite en mathématiques*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes
- JULO J. (2002) Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N* **69**. 31-52.
- LEPINE L. (1996) Tout problème ouvert n'engage pas nécessairement une bonne recherche. *Grand N* **60**. 43-55
- MEN (2005) Les problèmes pour chercher. *Documents d'accompagnement Mathématiques*. SCEREN CNDP
- PEAULT H. (1992) Vers une pratique collective des mathématiques. *Grand N* **51**. 5-65.
- THOMAS Y. (...) Gommettes et étiquettes, des problèmes pour chercher. *Grand N* (à paraître)
- TOUSSAINT N., FROMENTIN J. (2006) *Fichier Evariste Ecole*. Brochure APMEP **175**
- VERSCHAFFEL L., GREER B. & DE CORTE E. (2000) *Making sense of word problems*. Lisse (Netherlands) : Swets & Zeitlinger Publishers.
- VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10/2.3, 133-170.
- WEIL-BARAIS A. (1993) *L'homme cognitif*. Paris : PUF

ANNEXE 1 : LISTE DES PROBLEMES CYCLE 3 ÉTUDIÉS

- 1) Le mobilier de l'école. Une entreprise a expédié trois chargements de 300 kg chacun pour équiper en mobilier une école. Le premier chargement contient 15 tables et 30 chaises. Le second contient 25 tables. Le troisième contient 10 tables, 20 chaises et 5 armoires. Combien pèse une chaise, une table, une armoire ?
- 2) Luc et Marc lancent chacun trois fléchettes dans une cible (dessin cible à deux zones). Luc met deux flèches au centre et une dans la couronne, il obtient 22 points. Marc obtient 17 points avec une fléchette au centre et deux dans la couronne. Quelles sont les valeurs des zones ?
- 3) Jo, Léa et Toto ont lancé des flèches sur la même cible (dessin de trois fois la même cible à trois zones : A centre puis couronne B puis couronne C) : Jo : 33 points 2A, 5C // Léa : 39 points 2A, 1B, 5C // Toto : 18 points 2B, 2C. Nombre de points que chaque zone permet de marquer.
- 4) Deux lettres différentes représentent deux chiffres différents. S vaut 2, il n'y a pas de 9, M est plus grand que T : MOI + TOI = NOUS (en colonne).
- 5) Neuf chercheurs dont le chef se répartissent 180g, le chef prenant une double part. Combien de grammes d'or recevra le chef ?
- 6) Dimitri, Thierry, Oscar comptent leurs billes à la fin de la partie. Sandrine en a presque 100. Oscar en a le quart de Sandrine. Thierry en a le tiers d'Oscar. Et Dimitri en a la moitié de Thierry. Combien en ont-ils à eux quatre ?
- 7) Paul a pesé ensemble deux dictionnaires identiques et trois livres de mathématiques eux aussi identiques. La balance marque 3 kg 300 g. Valérie lui a pesé cinq livres de mathématiques identiques à ceux de Paul. La balance marque 1 kg 500g. Quel est le poids d'un dictionnaire ?
- 8) Un sac contient 12 bonbons rouges et 8 bonbons verts. Mais ces bonbons sont enveloppés d'un papier doré si bien qu'on ne peut pas voir leur couleur en les prenant. Combien de bonbons Laurent Outan doit-il prendre au minimum pour être sûr d'en avoir deux de la même couleur ? De couleurs différentes ?
- 9) Nous sommes lundi 11 juin 2007. Dans 70 jours, nous serons le ?
- 10) Dans la tirelire de Juan, il n'y a que des pièces de 10 centimes, de 20 centimes et de 50 centimes. Il y a autant de pièces de chaque sorte ; en tout cela représente 8 € Combien de pièces de chaque sorte ?
- 11) Pour un malabar et un croissant Fatma a payé 1 €5 c. Pour deux croissants, Lucas a payé 1 €60 c. Trouve combien coûte un malabar.
- 12) 1 sucette et 2 petites brioches coûtent 2 € 5 sucettes et 2 petites brioches coûtent 4 € Quel est le prix d'une sucette ? Quel est le prix d'une petite brioche ?
- 13) Lucie veut prendre 4 litres d'eau dans un récipient. Elle en possède que deux pots, l'un pouvant contenir 3 litres, l'autre pouvant contenir 5 litres. En utilisant seulement ces deux pots, explique comment elle peut mesurer 4 litres.
- 14) Dans la classe du Cours Moyen de Werner, tout le monde est sportif ! Lorsqu'on demande « qui fait de l'athlétisme ? », 16 mains se lèvent ; à la question « Qui fait du basket ? », 10 mains se lèvent. Chaque élève a levé la main au moins une fois, et quatre élèves ont levé la main deux fois. Combien la classe compte-t-elle d'élèves ?
- 15) Trouve trois nombres entiers consécutifs dont la somme est 48 ; 87 ; 120 ; 97 ; 612... (99, 3429, 56) ET Donne des nombres qui sont la somme de trois nombres entiers consécutifs et des nombres qui ne peuvent pas être la somme de trois nombres entiers consécutifs. Justifie ta réponse.

16) Combien y a-t-il de poules et de lapins dans votre ferme ? Tu vas le trouver toi-même : lorsque je rassemble toutes les poules et les lapins de la ferme, il y a en tout 25 têtes et 64 pattes.

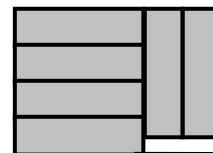
17) Un avion gigantesque contient 150 places assises en première classe, 400 en seconde et 4 dans le cockpit. L'équipage qui doit rester assis au décollage et à l'atterrissage, est composé d'un commandant de bord, un copilote, 8 hôtesses et 6 stewards. Combien l'avion peut-il prendre de passagers ?

18) Sur une plaque de carton rectangulaire de 8 cm sur 11 cm.

Kid a dessiné des vignettes rectangulaires toutes identiques.

Sur ce schéma on indique comment il s'y est pris.

Calcule les dimensions d'une vignette.



19) Antoine ouvre à fond le robinet et remplit la baignoire en 3 minutes. Bain pris, il la vide en 6 minutes. Cléopâtre fait alors couler son bain, mais elle laisse la vidange ouverte. Au bout de combien de temps la baignoire commence à déborder ?

20) Deux fûts contiennent ensemble 2800 litres de cidre. On a tiré 300 litres de l'un et 100 litres de l'autre. Il reste alors la même quantité dans chaque fût. Quelle est la contenance de chaque fût ?

21) Tu disposes de deux boîtes vertes, trois boîtes rouges et 50 jetons. Il faut mettre les 50 jetons dans les boîtes ; aucune boîte ne doit être vide et il doit y avoir le même nombre de jetons dans les boîtes de la même couleur.

22) Pour le nombre 10, quel est le plus grand produit possible des termes d'une de ses décompositions additives ? Même question pour le nombre 14.

23) Le pépiniériste a vendu ce matin ce matin 420 arbres ; des poiriers, des cerisiers, et des pommiers. Il a vendu 45 poiriers de plus que de cerisiers ; 30 pommiers de plus que de cerisiers. Combien d'arbres de chaque espèce a-t-il vendus ?

24) Je dois scier un petit tronc d'arbre en six morceaux. Il me faut une minute pour le scier en deux morceaux. . Combien de temps pour le scier en six morceaux ?

ANNEXE 2 : REFERENCES DE LA LISTE DE PROBLEMES

ERMEL (post 1995) Apprentissages mathématiques et résolution de problèmes CE2, CM1, CM2. Hatier

Toussaint N., Fromentin J. (2006) *Fichier Evariste Ecole*. APMEP n°175

(1995) *Les récréations mathématiques d'Evariste et de Sophie*. Editions Pôles

Revue **Grand N** IREM de Grenoble.

Cap maths CE2 (2002) **Cap maths** CM1 (2003) **Cap maths** CM2 (2004) Editions Hatier

Euromaths CE2 (2003) **Euro Maths** CM1 (2006) **Euro Maths** CM2 (2006) Editions

Hatier

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|--|----------------------------|---------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|---------------------------|-----------------------|---------------------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| <i>ERMEL</i> CM2 et <i>Grand</i> N 77 | <i>Euro</i> CM1 p198 | <i>Cap</i> CM1 p194 | <i>Evariste</i> 61 | <i>Evariste</i> 98 | <i>Evariste</i> 62 | <i>Cap</i> CM1 p194 | <i>Evariste</i> 54 | <i>ERMEL</i> CM t 1 1981 p44 | <i>Cap</i> CM1 p178 | <i>Cap</i> CM1 p178 | <i>Cap</i> CM2 p100 |

| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
|-----------------------------|---------------------|---|---------------------------|---------------------|----------------------------|---------------------|----------------------------|----------------------------|-----------------------------|---------------------------|-----------------------|
| <i>Grand</i> N 60 p44 | <i>Récré</i> p19 | <i>Euro</i> CM1 p161 CM2 p194 | <i>Cap</i> CM1 p113 | <i>Récré</i> p44 | <i>Euro</i> CM2 p161 | <i>Récré</i> p45 | <i>Euro</i> CM2 p121 | <i>Euro</i> CM1 p198 | <i>ERMEL</i> CM1 p 74 | <i>Euro</i> CM2 p31 | <i>Evariste</i> 59 |

ANNEXE 3 : PRODUCTIONS DES PARTICIPANTS

Groupe 1

Le problème pour chercher...

- Pourquoi on le donne ?
 - Qu'est ce qu'on fait travailler ?
 - Qu'est ce qu'on apprend ?
 - Construire une représentation du problème.
 - Construire une stratégie de résolution.
 - Rédiger et/ ou communiquer la (les) solution(s).

Groupe 2

→ Reprise des programmes

L'élève ne dispose pas de technique (solution) éprouvée et plusieurs démarches sont possibles.

En quelque sorte l'objet de savoir en jeu n'a pas été institutionnalisé (et ne fait donc pas partie de la culture de la classe).

→ l'objectif : « l'activité de recherche » ; le présupposé : « on apprend à chercher par frayage ».

Groupe 3

3 critères possibles pour retenir un problème :

- plusieurs approches possibles (tâtonnement, logique...);
- TENTATION : une solution qui se révèle fausse ;
- existence ou non de plusieurs solutions (0,1...).

→ conscience des connaissances et méthodes en jeu (pour le prof et pour les élèves) ?

→ problème de la constitution d'une mémoire des problèmes ?

Groupe 4

- Le texte est limpide et incitatif.
- Chaque élève doit être persuadé qu'il peut trouver (s'il cherche).
- Le problème doit être résistant aux premières tentatives amorcées.
- L'activité de recherche est nécessaire et la solution doit avoir une portée large (ne pas s'appuyer uniquement sur une astuce).

Groupe 5

Question 1

Est-ce qu'un problème dont la résolution « experte » est la résolution d'un système linéaire d'équations doit être systématiquement considéré comme étant un problème pour chercher ?

Question 2

Le problème pour chercher est-il nécessairement un problème nécessitant de faire des essais ?

Question 3

Le problème pour chercher est-il nécessairement un problème qui nécessite une représentation ?

Groupe 6

Des points de vue différents dans le groupe

Point de vue n°1 : certains problèmes (ex le n°1) de la liste donnée, bien que très difficile pour les élèves, ne nous semblent pas relever de la rubrique « problèmes pour chercher » des DA 2005 car ils correspondent à l'application d'une notion tout à fait travaillée (la division) : c'est un problème de réinvestissement.

Point de vue n°2 : le problème n°1 est un « problème pour chercher » complexe.

Le problème 22 paraît (à la majorité des participants du groupe) un problème pour chercher.

EXEMPLE D'UNE SITUATION DE FORMATION POUR ABORDER LA STRUCTURATION DE L'ESPACE AUX CYCLES 1 ET 2

Pascale Masselot

MCF, IUFM de VERSAILLES DIDIREM
PMasselot@aol.com

Isabelle Zin

PIUFM, IUFM de VERSAILLES
zinisa@free.fr

Au cours de cet atelier, les animateurs nous font vivre une partie des différentes phases d'une situation de formation qu'ils ont l'occasion de pratiquer avec les PE2 afin d'aborder les notions difficiles de repérage dans l'espace.

Phase après phase, il s'agit d'analyser le vécu en se focalisant sur l'aspect modélisation mathématique et sur leur intérêt en formation.

Dans un premier temps, l'article relate de façon très détaillée les différentes phases des situations qui ont été proposées aux participants et donne, pour chacune d'elles, les premiers éléments d'analyse. Cette analyse est complétée par des éléments de réflexion qui concernent les programmes et les outils didactiques à disposition des formateurs.

Dans un second temps, les auteurs fournissent quelques compléments d'utilisation de ces situations avec des PE2 et avec des maîtres formateurs d'école maternelle qui s'en sont inspiré pour élaborer des situations dans leurs classes.

Exploitations possibles

L'intérêt d'un tel article est de fournir aux formateurs un enchaînement raisonné de situations qui permettent d'aborder avec les stagiaires, professeurs des écoles, les problèmes complexes liés à l'appréhension des concepts relevant de la structuration de l'espace chez les élèves.

Mots clés

Espace. Vocabulaire Spatial. Représentation spatiale. Ecole Maternelle. Variable didactique. Situation de formation des professeurs des écoles.

APPRENTISSAGE DES SOLIDES AU CYCLE 3 : PROPOSITION ET ANALYSE DE SITUATIONS ; PLACE DANS LA FORMATION.

Jacques DOUAIRE

PIUFM IUFM de Versailles

Equipe ERMEL, INRP

Jacques.Douaire@wanadoo.fr

Fabien EMPRIN

PIUFM IUFM Champagne-Ardenne

Equipe ERMEL

Fabien.emprin@univ-reims.fr

Claude RAJAIN

PIUFM IUFM Champagne-Ardenne

Claude.rajain@wanadoo.fr

Le texte présente quelques aspects d'une recherche concernant l'apprentissage des solides et des relations d'incidence autour du « rôle de l'argumentation dans les phases de validation en géométrie au cycle 3 », conduite par l'équipe ERMEL de l'INRP.

Cette recherche est initialisée par deux questions relatives à l'enseignement de la géométrie en cycle 3 : l'articulation avec les connaissances spatiales acquises antérieurement et la perspective de la construction progressive d'une géométrie déductive au collège.

L'atelier propose une réflexion et des échanges sur des travaux menés dans les classes et en formation des maîtres sur le thème des solides.

Une fois précisé l'objet de la recherche, en premier lieu, l'analyse des compétences des élèves en lien avec le rôle de l'argumentation et en second lieu, l'élaboration de dispositifs d'enseignement pour le cycle 3, le texte rappelle la méthodologie suivie : analyse du savoir géométrique (objets, relations) et des problèmes qui en permettent l'apprentissage, repérage des connaissances initiales des élèves, construction d'une programmation sur le cycle 3, élaboration et expérimentations de situations didactiques.

Après avoir clarifié les objets (et les relations entre eux) auxquels les élèves sont confrontés, le texte s'attache à définir les apprentissages liés au travail sur les objets de l'espace, puis développe un exemple de situation d'apprentissage « le grand tétra ». D'autres situations sont citées mais ne sont pas décrites en détails (se reporter à l'ouvrage « Apprentissages Géométriques au cycle 3 – ERMEL »).

Enfin, le document décrit en détails et analyse la mise en œuvre, au cours d'une séance de formation des maîtres, d'une situation d'apprentissage sur les solides « communiquer le solide », s'inscrivant dans une démarche de formation par homologie/transposition.

Exploitations possibles

Le texte constitue une ressource utile aux formateurs de professeurs des écoles pour aborder les questions relatives à l'apprentissage de la géométrie dans l'espace à l'école primaire en formation initiale ou continue.

Il fournit un schéma synthétique des aspects essentiels de la problématique de l'apprentissage des connaissances relatives à l'espace à l'école.

Il donne un aperçu des travaux élaborés et présentés par l'équipe ERMEL dans l'ouvrage « Apprentissages Géométriques au cycle 3 », auquel il est nécessaire de se reporter pour avoir une vision plus complète de cette recherche.

Mots clés

- géométrie dans l'espace – solide- résolution de problèmes -

PLIAGES ET CONSTRUCTIONS A LA REGLE ET AU COMPAS

Françoise JORE

Maître de conférences, UNIVERSITE CATHOLIQUE DE L'OUEST,
ANGERS.

Didirem Paris 7 & Cream UCO
jore@uco.fr

Résumé

La proposition qui est faite ici consiste à exploiter un travail autour de deux types d'activités : d'une part des pliages, nécessitant la mise en œuvre consciente de propriétés géométriques, d'autre part des constructions à la règle et au compas avec la rédaction et la justification des scénarios de construction correspondants. Ces activités sont l'occasion avec les PEI de revoir bon nombre de théorèmes de géométrie en acte, c'est-à-dire en les utilisant pour effectuer une construction. Ce type d'activité, non habituel, permet à tous les étudiants de s'investir dans la tâche proposée, quel que soit leur niveau de compétences, souvent très hétérogène.

LE FICHER « ÉVARISTE-ÉCOLE »

Nicole TOUSSAINT

nicoletoussaint@wanadoo.fr

Le fichier « Evariste-Ecole » est un recueil de problèmes issus de différentes compétitions mathématiques. Ce fichier constitue une réserve de problèmes destinés à des élèves de cycle 2 et de cycle 3. Ces problèmes entrent dans la rubrique des « Problèmes pour chercher » du document d'accompagnement des programmes de 2002 de l'école primaire. Le texte présente le fichier « Evariste-Ecole » et montre sur quelques problèmes la richesse des procédures associées possibles.

Exploitations possibles

En formation des maîtres, la résolution de tels problèmes et la confrontation des procédures peut amener à interroger l'activité mathématique et à préciser ses différentes composantes.

Mots clés

Problèmes. Chercher. Reasonner. Argumenter. Valider. Défis

UN RALLYE INTERNET SUR LE CALCUL MENTAL

Sébastien HACHE

Professeur de Mathématiques, fondateur de Sésamath
Collège Villars à Denain (59)
Sebastien.hache@sesamath.net

Katia HACHE

Professeur de Mathématiques, membre de Sésamath
Collège Voltaire à Louches (59)
Katia.hache@sesamath.net

L'Inspection Académique du Nord, en partenariat avec l'association Sésamath, a organisé un rallye sur le calcul mental (CM1, CM2, 6^{ème}) entièrement réalisé sur Internet (les réponses des élèves étant directement saisies en ligne) du 10 au 19 mai 2007. L'intégralité de ce Rallye est sous licence libre et à ce titre réutilisable par quiconque.

L'article suit la chronologie du déroulement de l'atelier. Au cours de la première partie, nous revenons sur la genèse d'un tel rallye : équipes mises en jeu, scénarisation des exercices, choix didactiques, contraintes liées à l'informatique... mais aussi retombées attendues avant, pendant et après ce Rallye (concernant en particulier l'utilisation des outils autonomes dérivés des épreuves du Rallye). Dans la deuxième, nous présentons quelques exercices issus des épreuves du Rallye. Les troisième et quatrième paragraphes reprennent, en partie, les échanges avec les participants, visant en particulier à :

- * éclairer les apports, limites... d'un tel outil (différents usages possibles en classe...);
- * explorer les pistes liées à la paramétrisation des outils autonomes associés (en particulier le lien entre paramètre informatique et variable didactique);
- * confronter les idées des uns et des autres pour la création d'outils complémentaires.

Exploitations possibles

Les ressources présentées, leur conception et leur utilisation dans le cadre du Rallye offrent des pistes très intéressantes concernant l'utilisation du support informatique pour proposer des activités de calcul mental aux élèves. L'analyse, amorcée ici, des activités qu'elles suscitent côté élèves et de l'exploitation de ces outils pour l'enseignant (marges de manœuvre, retour sur les procédures et les réponses des élèves ...) pourrait se poursuivre par celle des utilisations possibles dans le cadre de la formation des professeurs des écoles.

Mots clés

Rallye, Internet, Calcul mental.

UTILISATION DE RESSOURCES NUMERIQUES CONCUES POUR LA FORMATION

Laurence MAGENDIE

Professeur de mathématiques, IUFM d'Aquitaine
laurence.magendie@aquitaine.iufm.fr

Claire WINDER

Professeur de mathématiques, IUFM de Nice
claire.winder@free.fr

L'utilisation de vidéos pour la formation des enseignants n'est pas nouvelle ; son intérêt, ses modalités, ses limites, ... ont déjà été souvent travaillées, notamment lors des précédents colloques de la Copirelem. La demande d'images est telle que, dans la plupart des IUFM, des séances de classe sont filmées et exploitées par les formateurs, mais ces ressources sont généralement réservées à un usage local.

L'objectif de l'atelier lors du colloque était de présenter et de questionner quelques-uns des dispositifs de formation initiale et continue de Professeurs des Ecoles que les deux formatrices mettent en œuvre autour de ressources numériques.

Dans un premier temps, les participants ont été placés dans la situation de formation « Combien de bûchettes ? » initialement conçue pour la formation continue des PE. Le problème posé lors de cette activité est de dénombrer une collection importante de bûchettes (entre 500 et 600 dans la situation présentée). Puis, après l'analyse collective de cette situation, deux autres supports numériques ainsi que des dispositifs de formation qui les intègrent, ont été présentés. Le plan de cet article reprend cette chronologie qui correspond en outre à la présentation successive des trois outils numériques :

- le DVD¹ « *Enseigner les mathématiques au cycle 2 - Deux situations d'apprentissage en images* » de Muriel Fénichel et Catherine Taveau, SCEREN – CRDP Créteil, 2006.
- le DVD² « *Chacun son chemin. Un problème de partage. Apprentissages numériques au cycle 2* » coordonné par Jeanne Bolon, SCEREN – CRDP Académie de Versailles, 2004.
- le cédérom³ « *Apprentissages mathématiques en maternelle* » de Joël Briand, Martine Loubet et Marie-Hélène Salin, Hatier, 2004.

¹ Les extraits vidéos contenus dans le DVD montrent des moments de trois séances incluses dans une séquence mise en place en CP-CE1 au mois de mars à partir de l'activité des « Fourmillions », ainsi que les entretiens avec l'enseignante de la classe à l'issue de ces séances.

² Ce DVD présente la mise en œuvre de « problèmes de partage » dans trois classes de cycle 2, de niveaux différents (GS, CP et CE1). Les problèmes proposés sont issus des manuels ERMEL. Dans les trois classes filmées, des dispositifs de différenciation permettent la prise en compte de l'hétérogénéité des élèves. Les extraits vidéos des séances montrent la gestion de ces dispositifs par les enseignants, les procédures utilisées par les élèves pour résoudre les problèmes et leurs difficultés. Des entretiens filmés avec les enseignants complètent le document.

³ Ce cédérom rassemble un ensemble de documents (textes, photographies et vidéos) présentant des situations d'apprentissage par adaptation en maternelle sur : le concept de collection et la classification, la désignation, l'énumération, le rangement et la notion d'ordre, le dénombrement, la comparaison de grandeurs.

LA MODELISATION DANS UNE PERSPECTIVE DE FORMATION ET D'ENSEIGNEMENT

Robert ADJIAGE

MCF, IUFM d'Alsace

LISEC EA 2310

robert.adjiage@alsace.iufm.fr

Richard CABASSUT

PIUFM, IUFM d'Alsace

Didirem Paris 7

richard.cabassut@alsace.iufm.fr

Résumé

Le thème traité portera sur des tâches de modélisation et sur leur scénarisation dans un cursus d'enseignement à l'école primaire et de formation des professeurs des écoles.

Dans un premier temps, on introduira les principaux concepts et enjeux des tâches de modélisation dans une perspective d'enseignement, de formation et d'apprentissage (Blum, 2004). On rappellera le contexte institutionnel (PISA, recommandations du parlement européen, socle commun...) qui a contribué à mettre au premier plan les tâches de modélisation. On apportera enfin quelques commentaires personnels. Dans un deuxième temps, les participants seront invités à analyser, en groupes, différentes tâches de modélisation. Enfin, dans un troisième temps, les différentes productions seront discutées collectivement. Pour conclure, on invitera les participants à préciser les incontournables d'un scénario de formation continue à la modélisation.

Après un exposé théorique sur le sujet, les participants à cet atelier sont invités à résoudre des problèmes de modélisation puis à s'interroger sur leur pertinence à figurer dans un cursus d'enseignement à l'école primaire et de formation, initiale et continuée, des professeurs des écoles. Au-delà de l'analyse de ces tâches et de leur scénarisation, les participants sont amenés à préciser leur conception de la modélisation et sa place dans l'enseignement à l'école et en formation.

I – CONCEPTS ET ENJEUX DES TACHES DE MODELISATION

Cette première partie est menée sous forme d'exposé interactif. Un cadre conceptuel, essentiellement issu des travaux d'ICMI 2004, est présenté aux participants. Ce cadre constitue une base de discussion avec l'ensemble du groupe. Les travaux personnels des animateurs, engagés dans un projet européen sur le sujet (COMENIUS LEMA), ainsi que les remarques et analyses des participants, relativisent les conceptions issues d'ICMI. La chaîne de valorisation de la modélisation comme moyen privilégié de « faire » des mathématiques et d'évaluer les acquisitions est précisé à travers les recommandations européennes et PISA.

I – 1 Les sources

Les documents auxquels se réfèrent les animateurs sont brièvement présentés et commentés. Quatre sources sont examinées.

- Discussion Document ICMI (International Commission on Mathematical Instruction).
- Ressources COMENIUS LEMA (Learning and Education in and through Modelling and Applications), projet européen visant à développer un cours de formation des maîtres à la modélisation.
- Sites officiels (OCDE-PISA, Parlement Européen, MEN...).
- Publications et travaux personnels des animateurs.

I – 2 Premières définitions (ICMI 2004)

- La modélisation s'appuie plutôt sur un processus menant de la réalité aux mathématiques.
- L'application s'appuie plutôt sur un processus menant des mathématiques à la réalité.

I – 3 Chaîne de valorisation

La modélisation est un sujet d'importance, pris en compte et étudié par de nombreux didacticiens, et présent dans diverses conférences internationales depuis plusieurs décennies. Citons par exemple : Freudenthal (années 70) ; Niss, 1987 ; Blum et al.1989 ; Galbraith et al., 1990 ; Lesh et al., 2002 ; Comité scientifique des IREM, 2003. On assiste néanmoins à sa promotion accélérée au cours des dernières années. Que s'est-il passé ? On trouve au départ de ce processus une demande du ministère de l'Education danois (projet KOM, 2002) de réorganisation des curricula scolaires. Le projet KOM a été piloté par M. Niss. Il s'appuie sur deux idées directrices :

- Dans une société de plus en plus dépendante de modèles mathématiques, donner aux élèves les moyens mathématiques de comprendre le monde pour développer leur esprit citoyen. D'où le centrage sur l'acquisition de compétences plus que sur la transmission de connaissances
- Pédagogie du projet : enseigner les mathématiques comme réponse à un besoin issu des exigences du monde.

Suite à une demande de l'OCDE, M. Niss pilotera la partie mathématique du projet PISA d'évaluations internationales. Sa conception de l'enseignement des mathématiques a été déterminante dans les choix qui ont présidé à la sélection des items de cette évaluation. Ainsi, la compétence mathématique de base mise au premier plan par PISA (OCDE, 2006, p. 73) est « la capacité d'un individu à identifier, comprendre, le rôle que les mathématiques jouent dans le monde... d'utiliser les mathématiques... en tant que citoyen constructif, concerné et réflexif. ». Le parlement européen (2006, Annexe p.7) a repris cette option à son compte en émettant des recommandations parmi lesquelles on trouve en bonne place : « La compétence mathématique est l'aptitude à développer et appliquer un raisonnement mathématique en vue de résoudre divers

problèmes de la vie quotidienne ». Les résultats obtenus par leurs élèves à PISA, jugés insatisfaisants par certaines nations européennes majeures, pourraient avoir eu un effet non négligeable sur la teneur de ces recommandations. Enfin, en France, le socle commun dont le préambule mentionne qu'il « se réfère... aux évaluations internationales, notamment... PISA. », précise (2006, pp. 9-10) : « La maîtrise des principaux éléments de mathématiques s'acquiert et s'exerce essentiellement par la résolution de problèmes, notamment à partir de situations proches de la réalité. ». La modélisation apparaît donc comme un sujet d'étude didactique sérieuse, que la conjoncture a néanmoins propulsé sur le devant de la scène. L'impact de PISA, qui n'est qu'une mesure parmi d'autres de la performance des élèves, semble avoir été déterminant dans cette promotion.

I – 4 Processus de modélisation

Le « *discussion document* » d'ICMI 2004 précise les différentes phases du processus de modélisation que nous déclinons ci-dessous :

- Point de départ, une situation du monde réel ;
- On l'épure, on la structure, on la précise ;
- Formulation d'un modèle qui est toujours ancré dans le monde réel ;
- Mathématisation :
 - Soit saisie d'un modèle mathématique disponible ;
 - Soit élaboration d'un modèle mathématique adéquat ;
- Traitement mathématique avec production de résultats ;
- Interprétation des résultats en fonction de la situation réelle d'origine ;
- Validation du modèle par la pertinence des résultats ;
- Le cas échéant, reprise de tout le processus avec un modèle rectifié ou tout à fait différent ;
- Le problème d'origine est reformulé et communiqué.

Nous y retrouvons le solide ancrage dans le monde réel préconisé par la chaîne de valorisation. Ce qui est un choix, et non une nécessité de la définition d'un processus de modélisation. Rappelons que des acceptions plus larges ont été proposées, notamment au colloque de la COPIRELEM 2007 (voir par exemple Duperret ou Orange), que nous pourrions synthétiser par : modéliser, c'est substituer des choses (objets ou relations) à d'autres choses dans un but explicatif et/ou prédictif. « Les mathématiques ont-elles pour objet de « décrire » la réalité, ou ne se contentent-elles pas d'une action intellectuelle sur une réalité déjà abstraite ? » (Duperret, COPIRELEM, 2007).

I – 5 Thèmes d'étude

Le « *discussion document* » d'ICMI 2004 propose ensuite de délimiter le champ de recherche sur la modélisation. Il propose pour cela la définition générale d'un thème

d'étude (« *issue* ») comme surface d'un espace à deux dimensions : niveau scolaire x domaine (Figure 1), puis quatre perspectives (Figure 2) d'où il est possible d'examiner un thème d'étude, et enfin un cadre pour la formulation d'un thème d'étude décliné en un défi et un questionnement.

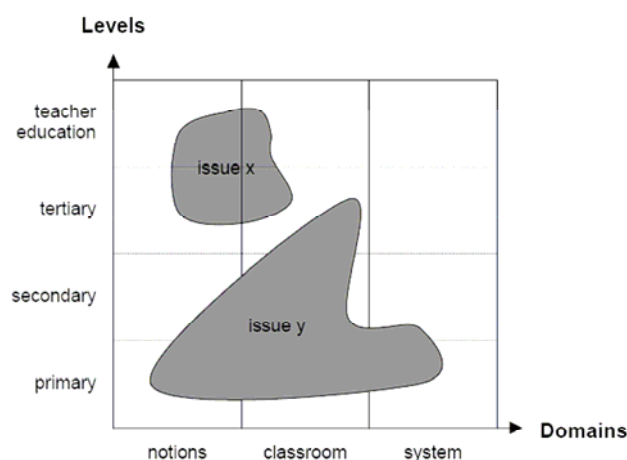


Figure 1: The "reality" of applications and modelling

Figure 1 (extraite de Blum, 2004)



Figure 2 (extraite de Blum, 2004)

Par exemple, le thème 1, épistémologie, se décline comme suit :

–**Défi** : caractériser l'activité d'applications/modélisation en termes de fondements, de ruptures, de continuités, d'obstacles...

–**Questionnement (extraits)**

- Quelles sont les composantes du processus de modélisation ?
- Quelles parties des mathématiques sont les moins susceptibles d'être représentées dans le champ de la modélisation et inversement ?
- Y a-t-il des caractéristiques communes aux champs de la modélisation et de la preuve ?
- Qu'est-ce que la généralisation et le transfert dans un travail inter-contextes ?

D'autres thèmes d'étude sont proposés parmi lesquels on trouve : Authenticité et familiarité, Redresser l'image des mathématiques, Curricula existants et à venir, Evaluations spécifiques des compétences et des programmes du champ de la modélisation.

Dans la partie II de l'atelier, les participants seront invités à rattacher les tâches de modélisation qui leur seront soumises à un des thèmes d'étude ci-dessus, à situer ces tâches dans l'espace de la Figure 1, et enfin à adopter successivement, dans leur analyse de tâche, le point de vue d'un enseignant du primaire puis d'un formateur de professeurs d'école.

I – 6 Quelques commentaires

La modélisation a été mise sur le devant de la scène au terme d'un processus de valorisation que nous avons rappelé en I-3. Une conséquence fâcheuse de ce processus est la tentation de définir des programmes d'enseignement à partir des standards de réussite à PISA. Dans ce schéma, l'enseignement ne vise plus l'acquisition de savoirs et savoir-faire structurés par l'épistémologie d'une discipline. Il vise l'acquisition de compétences destinées à rendre les élèves performants à PISA. Quant aux savoirs, ils risquent de se réduire à des moyens occasionnels d'acquérir de la compétence ! L'évaluation est alors au centre du processus d'enseignement au lieu d'en être à la sortie. La modélisation quant à elle, vue comme processus de mathématisation du réel, risque d'apparaître comme un simple maillon de ce dispositif.

Pour nous, un curriculum doit s'appuyer sur la cohérence et la cohésion mathématique de paliers qui structurent l'apprentissage en termes d'obstacles, de continuités et de ruptures. Dans le domaine numérique, on distingue ainsi quatre champs de connaissances/compétences qui ont été étudiés et continuent à l'être par les didacticiens.

-Etude des entiers : substitution des nombres aux quantités et opérations sur les nombres, formation de mots et de phrases mathématiques le long d'une ligne d'écriture.

-Etude des nombres rationnels comme rapports de **deux** entiers : nécessité de briser en **deux** la ligne d'écriture pour la formation des mots et des phrases mathématiques.

-Etude de l'algèbre : redésignation par des variables de quantités exprimées dans des registres numériques, verbaux, schématiques, autres... ; réduction du lexique par élimination de variables « redondantes » (expression de variables en fonction d'autres variables) ; formation et traitement d'expressions différentes mais référentiellement équivalentes (si $4x - 1 = 3 + x$, alors $3x = 4$).

-Etude des fonctions : introduction des objets-fonctions, apparition de nouvelles opérations (composition des fonctions) et de nouveaux traitements (limite, dérivation...) des phrases mathématiques.

Notre projet de formateurs est de regarder la modélisation comme un moyen parmi d'autres d'acquérir des connaissances/compétences dans un de ces quatre champs. Notre projet de chercheur est d'étudier les effets de l'introduction substantielle de tâches de modélisation dans l'enseignement.

Nous avons étudié toutes sortes de tâches de modélisation, pour la plupart élaborées et expérimentées par des chercheurs et formateurs européens. Ces tâches ont pour caractéristique principale d'être très ouvertes (pas ou très peu de données numériques) et toutes ancrées dans le monde réel. Elles débouchent donc sur un recueil de données qu'il s'agit de traiter en mobilisant un modèle mathématique éprouvé, le plus fréquent étant celui de la proportionnalité. Très peu de tâches nécessitent l'élaboration d'un modèle mathématique pas encore abordé.

Nous avons proposé à des élèves de différents niveaux de l'école élémentaire ces tâches de modélisation. Nos premières conclusions sont que :

- elles dynamisent les classes ;

- elles fonctionnent à tout le moins comme d'excellents révélateurs de déficit d'apprentissage et facilitent les remédiations en offrant des références contextuelles ;

- elles déstabilisent l'enseignant et tendent à augmenter son interventionnisme, parfois de façon intempestive, ce qui est le contraire du but recherché ! D'où la nécessité d'une formation à la modélisation ;

- pour fonctionner comme moyen d'acquérir des connaissances / compétences, ces tâches devraient déboucher sur l'élaboration d'un modèle mathématique et pas seulement sur l'application d'un modèle déjà disponible. D'où la nécessité de concevoir de nouvelles tâches de modélisation intégrant cette contrainte.

La partie II « travaux pratiques » de l'atelier sollicite la contribution du groupe pour prolonger l'analyse de tâches de modélisation expérimentées et évaluer leur pertinence à être intégrées à un enseignement ou une formation.

II – ANALYSE PAR GROUPES DE TACHES DE MODELISATION ET DISCUSSION

II – 1 Tâches de modélisation à analyser

Différentes tâches sont proposées à l'analyse que l'on pourra relier aux thèmes d'étude abordés dans la partie précédente, et notamment l'authenticité, la faisabilité à un niveau donné, la validation des résultats des élèves, les compétences sollicitées et de leur évaluation, la nécessité pour les élèves d'élaborer un modèle mathématique ou de saisir un modèle disponible, l'épistémologie, l'intention de « redresser » l'image des maths, les principes pédagogiques adéquats à un enseignement des applications ou de la modélisation. On pourra adopter successivement le point de vue d'un enseignant du primaire puis d'un formateur de professeurs d'école.

II – 1.1 Le géant

Quelle est la taille approchée de la silhouette, dont on peut voir seulement un pied?



Cette photo a été prise dans un parc de loisirs.

II – 1.2 Le bouchon

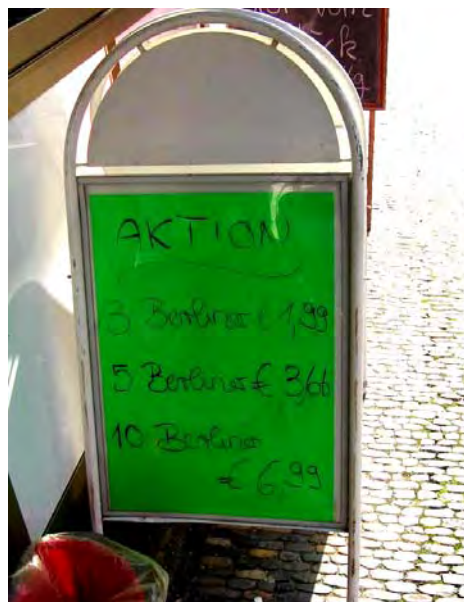
Sur l'autoroute, à l'entrée de Strasbourg, il y a un accident juste avant la sortie Baggersee. La circulation est bloquée entre La Vigie et Baggersee. Combien de véhicules sont bloqués?

II – 1.3 La course

Dans la cour de récréation il y a deux arbres, un petit et un grand, et un mur. On organise une course : chaque élève part du petit arbre; il va toucher le mur; puis il doit toucher le grand arbre ; enfin il retourne toucher le petit arbre. Où toucher le mur pour être le plus rapide?

II – 1.4 Les Berliner

Anne est en vacances dans la Forêt Noire. Elle trouve une offre spéciale pour un type de pâtisserie appelée « Berliner » comme vous pouvez le voir sur la photo. Le boulanger propose le gâteau à 0,80€ l'unité. Si vous étiez le boulanger, auriez-vous proposé les mêmes prix sur l'affiche?



II – 1.4 Le rebond

A quelle hauteur rebondit une balle de tennis, si on la lâche d'une hauteur de 10 mètres?

II – 2 Analyse des tâches et discussion

Voici un rapide résumé des échanges qui ont eu lieu dans l'atelier, concernant l'analyse des tâches de modélisation des exemples précédents.

Pour la tâche du géant, le support semble authentique. En revanche, la question posée représente-t-elle un « vrai » problème, en comparaison par exemple avec la situation du puzzle de Brousseau ? Différentes compétences semblent sollicitées relatives à la proportionnalité ou aux approximations. La mise en œuvre paraît possible au CM1. Mais cette situation est-elle un bon outil pour l'apprentissage de la proportionnalité ? N'est-elle pas trop riche ? Le risque n'est-il pas de la prendre comme situation d'apprentissage ?

Pour cette tâche, le but principal n'est pas la résolution de problème ou l'apprentissage d'une notion, mais prioritairement apprendre à modéliser le réel. Mais peut-on enseigner la modélisation ? La modélisation est-elle un but en soi ou n'est-elle qu'un moyen de savoir ?

Pour la tâche des Berliner, l'authenticité dépend du niveau des élèves, du contexte social, de la mise en situation pour l'enseignement, de la formulation de l'énoncé. Ici selon qu'on se place du point de vue du boulanger ou de celui du client, l'approche est différente.

Pour réaliser cette tâche, il faut combiner un savoir mathématique (par exemple sur la proportionnalité) et un savoir de la vie quotidienne (le prix payé est en général proportionnel à la quantité achetée). Cependant le modèle de la proportionnalité n'est pas toujours le modèle dominant dans la vie quotidienne. Ici le boulanger a peut-être appliqué des lois du commerce qui indiquent qu'il y a des seuils psychologiques de prix qui attirent plus le client que les règles de proportionnalité sur le prix payé.

L'enseignant doit scénariser l'articulation des savoirs mathématiques et de la vie quotidienne. Mais il peut y avoir différentes conceptualisations de la réalité et les mathématiques ne se construisent pas uniquement en confrontant les élèves à des situations « authentiques ».

Dans la tâche du rebond, la validation du modèle de la proportionnalité rappelle celle des sciences expérimentales. On observe deux sortes de modèles : un modèle mathématique à chercher dans le répertoire des modèles mathématiques, et un modèle explicatif de cette situation, construit pour résoudre le problème. On observe que la vérification, possible dans la tâche du rebond, n'est pas possible dans la tâche du géant. Cependant former à la modélisation, ce n'est pas enseigner le syncrétisme physique-réalité.

Pour la tâche de la course, on remarque qu'elle est dangereuse à faire réaliser par des élèves qui doivent courir en direction d'un mur. La vitesse est un élément perturbateur. Les connaissances mathématiques en jeu sont relatives à la symétrie axiale et à l'inégalité triangulaire. Au niveau du cycle 3, est-il souhaitable de poser ce problème qui paraît difficile à comprendre? La situation apparaît bien lourde au niveau heuristique. Quel modèle mathématique permet de comprendre la notion de plus courte distance à l'école primaire? N'est-ce pas une situation pseudo-réelle, bien dans la tradition française ? Un des intérêts est de pouvoir invalider des faux modèles.

III – CONCLUSION

Le temps manquant, il n'a pas été possible de développer le projet Lema et l'atelier s'est conclu sur le questionnement suivant : Quels sont les incontournables d'un scénario de formation continue à la modélisation ?

Différentes propositions ont été discutées. Nous en donnons un bref aperçu ci-dessous.

-Pour proposer un scénario de formation, il convient que le formateur ait choisi sa définition de la modélisation et qu'il s'y tienne.

-Pour un problème donné, il convient que formateur et formé aient conscience que plusieurs modélisations sont possibles et que tout processus de traitement du problème passe par un choix entre ces possibles.

-Les formés doivent traiter eux-mêmes les problèmes de modélisation qu'ils proposeront à leurs élèves.

-Un formé doit percevoir qu'un objet mathématique peut être considéré tantôt comme indépendant de la réalité, tantôt comme susceptible d'interpréter la réalité.

-Il convient que l'élève dispose d'une base de modèles mathématiques pouvant avoir été acquis à travers des activités de modélisation fonctionnant comme situation-problème.

-Un modèle peut être vu comme la forme opérationnelle d'objets mathématiques et des traitements associés. Cette définition ne préjuge en rien de l'ancrage de ces derniers : réel tangible, domaine mathématique ...

Bibliographie

BLUM W. (2004) ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education – Discussion document. Educational Studies in Mathematics. Volume 51, N° 1-2. <http://www.springerlink.com/content/p11244802942w921/>

BOEN (2006) Socle commun de connaissances et de compétences, *bulletin officiel de l'éducation nationale* n° 29 du 20 juillet 2006.

CABASSUT R. (2006) Exemples de modélisation à l'école primaire allemande : quels enjeux pour la formation des maîtres? in *Actes su 24^e colloque Copirelem*, Dourdan, 119-120

KUZNIAK A. (2006) Diversité des mathématiques enseignées « ici et ailleurs » , in *Actes du 23^e colloque Copirelem*, Strasbourg, 47-66.

LEMA Learning and Education in and through Modelling and Application
<http://www.lemma-project.org>

MAASS K. (2005) "Barriers and Opportunities for the Integration of modelling in Mathematics Classes- Results of an Empirical Study". *Teaching Mathematics and its Applications* Vol 24 61-74.

OCDE (2006), *Assessing scientific, reading, and mathematical literacy*,
<http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/63/35/37464175.pdf>

PARLEMENT EUROPÉEN (2006) *Compétences clés pour l'éducation et la formation tout au long de la vie*, <http://www.europarl.europa.eu/sides/getDoc.do?pubRef=-//EP//NONSGML+TA+P6-TA-2006-0365+0+DOC+PDF+V0//FR>

PETER-KOOP A. (2002). Real-world problem solving in small Groups : Interaction patterns of third and fourth graders. In B.Barton, C. Irwin, M. Pfannkuch, & M. O. J. Thomas (Eds.), *Mathematics education in the South Pacific* (Proceedings of the 25th annual conference of the Mathematics Research Group of Australasia, Auckland, pp. 559- 566). Sydney: MERGA.

MINISTÈRE de l'EDUCATION (2006) *Le socle commun des connaissances et des compétences*, Direction Générale de l'enseignement scolaire,
<http://media.education.gouv.fr/file/51/3/3513.pdf>

SITUATIONS DE FORMATION POUR ABORDER LA MODELISATION DE NOTIONS MATHÉMATIQUES CHEZ LES PE1

Michel JAFFROT

Formateur à l'IUFM des Pays de la Loire

Catherine TAVEAU

Formatrice à l'IUFM de Paris

Cet atelier a été un lieu de réflexion et d'échanges concernant la modélisation de savoirs mathématiques en formation.

Dans un premier temps, les participants de l'atelier ont analysé une situation proposée en PE1, « Les poignées de mains » en explorant différentes dimensions : du côté du vécu des PE1, du côté des mathématiques en jeu, du côté des productions possibles et du côté de la modélisation.

Dans un deuxième temps, les échanges autour de différents modèles proposés par les étudiants ont conduit à une interrogation sur la notion de modélisation et par suite à un débat concernant une institutionnalisation possible : un savoir ou des savoirs mathématiques, une démarche d'investigation, différentes représentations ?

Dans un troisième temps, le groupe a recherché d'autres situations de formation qui pourraient favoriser des conditions de modélisation mathématique.

En annexe

Annexe 1 : Les affiches d'analyse produites par les participants à l'atelier

Annexe 2 : Choix d'affiches produites par des PE1

Annexe 3 : Exercices donnés aux PE1 à la suite de la situation des *poignées de mains*.

Annexe 4 : Définition de modèle selon le dictionnaire d'histoire et de philosophie des sciences

Exploitations possibles

- Une situation de résolution de problème à faire vivre en formation initiale ou continue.
- Une mise au point illustrée du processus de modélisation.

Mots-clés

Modélisation, démarche, représentation, formation des maîtres, résolution de problème.
Texte non communiqué.

DES ALBUMS NUMERIQUES : POUR QUELS APPRENTISSAGES EN FRANÇAIS ET EN MATHÉMATIQUES ?

Annie CAMENISCH

Maître de Conférences Lettres, IUFM d'Alsace
EA 1339, Université Marc Bloch, Strasbourg
annie.camenisch@alsace.iufm.fr

Serge PETIT

Formateur en mathématiques, IUFM d'Alsace
EA 1339, Université Marc Bloch, Strasbourg
serge.petit@alsace.iufm.fr

Les albums numériques, souvent appelés « albums à compter », se caractérisent par la présence explicite de nombres qui en constituent la thématique principale. Ils font partie d'une production abondante qui dépasse souvent le simple cadre documentaire par ses qualités littéraires ou plastiques. Leur utilisation en classe demeure parfois anecdotique et les apprentissages qui y sont liés semblent aller de soi.

Pourtant leur simplicité même recouvre une complexité tant au niveau du fonctionnement linguistique que des contenus mathématiques.

L'atelier a mis en œuvre différents dispositifs didactiques permettant d'utiliser les albums numériques pour réaliser des apprentissages tant en français qu'en mathématiques. Il s'agissait d'une part de s'interroger sur la place des pratiques littéraires et sur les formes linguistiques récurrentes favorisant des apprentissages sur la langue écrite, et d'autre part, de se demander comment ces aspects littéraires et linguistiques, étroitement imbriqués aux notions mathématiques convoquées, peuvent constituer des obstacles ou des soutiens aux apprentissages mathématiques.

L'article présente le dispositif proposé pendant l'atelier, les albums analysés et les synthèses des travaux des groupes. Il propose des pistes de contenus, linguistiques et mathématiques, pouvant être travaillées en classe à partir d'albums numériques ainsi que des éléments d'analyse permettant de choisir de tels albums et de les utiliser avec pertinence.

Exploitations possibles

- Utilisation d'albums numériques dans les classes de primaire (notamment C1 et C2)
- Formation initiale et continue des professeurs d'école

Mots clés

Albums numériques, compter, comptine numérique, numération, école primaire, interdisciplinarité, chiffre, français - mathématiques, maîtrise de la langue

ÉLÉMENTS POUR LA FORMATION INITIALE DES PROFESSEURS D'ÉCOLE À PARTIR DE L'ALGORITHME DE KAPREKAR

Jean-Claude RAUSCHER

MAITRE DE CONFERENCES, IUFM D'ALSACE
DIDIREM

Jc.Rauscher@wanadoo.fr

L'algorithme de D.R. Kaprekar peut être le support d'une aventure, riche d'étonnements et de réflexions mathématiques. Dans le cadre de cet atelier, les participants ont vécu cette aventure qui donne lieu à des démarches d'observations, d'expérimentations, de communications et de validations tant au niveau de formateurs que d'étudiants et d'élèves de cycle trois, de collège et de lycée.

Parallèlement, les apports de ce support dans le cadre de la formation initiale de futurs professeurs ont été discutés et mis en lumière : présentation et mise en œuvre de démarches d'enseignement des mathématiques (Brousseau 1972), repérage des finalités de l'enseignement des mathématiques (G. Vergnaud, 1987), réactualisation des connaissances de la numération, repérage de l'importance de la prise en compte de différents registres d'écriture en mathématique (R. Duval, 1995), prise de conscience de modalités de pensée chez les élèves (C. De Block-Docq, 1994).

Exploitations possibles

L'atelier de Jean-claude Rauscher présente deux facettes exploitables. L'une purement mathématique et l'autre plus orientée sur les caractères pédagogique et didactique. Cet atelier peut ainsi servir de base pour une construction de séance mathématique tant au cycle 3 qu'au collège ; mais aussi, à la formation des PE1 et PE2 pour traiter de différents aspects de l'enseignement des mathématiques et de ses finalités.

Mots clés :

Algorithme – Kaprekar – numération – résolution de problèmes – homologie.

LES ENJEUX D'UN ENSEIGNEMENT DU CALCUL MENTAL A L'ECOLE.

Nicolas DE KOCKER

PIUFM, IUFM de Lorraine
nicolas.dekocker@lorraine.iufm.fr

Annie GREWIS

PIUFM, IUFM d'Alsace
annie.grewis@wanadoo.fr

Claude MAURIN

PIUFM, IUFM d'Aix-Marseille
maurindesmaures@wanadoo.fr

Floriane Wozniak

Maître de conférences, IUFM de Lyon
 LEPS-LIRDHIST Lyon 1¹
floriane.wozniak@lyon.iufm.fr

La nécessité d'enseigner le calcul mental à l'école a été réaffirmée dans les programmes scolaires mis en application à la rentrée 2002, avec la parution d'un document d'accompagnement qui lui était spécifiquement dédié. Plus récemment, la publication d'un rapport de l'Académie des Sciences, la parution d'une circulaire et, plus généralement, de nombreux débats portant sur le calcul à l'école ont agité la communauté éducative.

Dans un tel contexte, la COPIRELEM s'est proposé de réfléchir aux enjeux de l'enseignement du calcul mental et sa place dans la formation des professeurs des écoles.

Afin d'alimenter la réflexion sur ce sujet d'actualité, plusieurs questions ont été abordées dans l'atelier :

- Quelle formation en PE2 (ou en FC) sur l'enseignement du calcul mental ?
- Quels savoirs enseigner dans le domaine du calcul mental ?

A partir d'un exemple, l'organisation mathématique des tables de Pythagore, les participants à l'atelier ont été invités à concevoir par groupes une (ou plusieurs) séance(s) de formation initiale ou continue visant l'enseignement du calcul mental à l'école. C'est ainsi que deux types de calcul ont été explicités : calcul réfléchi et calcul automatisé et que le problème des points d'appui souhaitables a été soulevé. Les productions des différents groupes se trouvent en annexe.

Mots clés

Calcul mental, calcul réfléchi, calcul automatisé, formation, enseignement

¹ Laboratoire d'études du phénomène scientifique (LEPS) Lyon 1 : Institut de Recherche en Didactique et en Histoire des Sciences et des Techniques (LIRDHIST)

LA PLACE ET LA FORME DES APPRENTISSAGES MATHÉMATIQUES AU COURS D'UNE PREMIÈRE ANNÉE DE SCOLARISATION À L'ÉCOLE MATERNELLE

Pierre Eysseric

IUFM de l'académie d'Aix-Marseille

IREM de Marseille

p.eysseric@aix-mrs.iufm.fr

Au cours de cet atelier, une production multimédia de l'IUFM d'Aix – Marseille, en cours de réalisation, sur les apprentissages mathématiques dans une classe de TPS/PS a été présentée. Celle-ci est réalisée à partir de vidéos et de photos qui ne représentent qu'une petite part du travail réalisé au cours d'une même année scolaire (une matinée filmée en novembre et une autre filmée en avril et des images de quelques séquences). Il ne s'agit pas de modèles de situations à reproduire mais d'un échantillon représentatif de l'ordinaire du travail au cours d'une première année de scolarisation à l'école maternelle. À partir de l'analyse de pratiques professionnelles existantes, les documents présentés doivent permettre, dans le cadre d'une formation, d'engager un retour réflexif sur les pratiques de chaque enseignant et un travail approfondi sur la place et la forme des apprentissages mathématiques en TPS/PS.

Les principaux points abordés dans le DVD sont l'importance des différents espaces et la spécificité de leur structuration, le travail sur le repérage dans le temps, la place des mathématiques comme outil de modélisation pour permettre aux élèves de découvrir le monde, le caractère culturel des mathématiques et la dimension transversale de celles-ci dans les apprentissages à l'école maternelle.

Exploitations possibles

L'analyse des ressources présentées a permis d'évoquer des difficultés et des contraintes liées à la conception de tels supports. Ces éléments peuvent aider des formateurs envisageant de s'engager dans ce travail d'élaboration d'outils pour la formation. Les ressources présentées sont d'un grand intérêt et les échanges au sein du groupe ont permis de suggérer des pistes concernant leur utilisation en faisant apparaître la diversité des pratiques et des attentes des formateurs participants à cet atelier ...

Mots clés

première année de scolarisation, école maternelle, structuration de l'espace, structuration du temps, modélisation, mathématiques, formation des Professeurs des Ecoles, support multimédia

COMMUNICATIONS

QUE DEVIENT LA DIZAINÉ DANS UNE SEANCE MENEÉ PAR UNE DEBUTANTE AU CP ?

CROISEMENTS DE DIFFÉRENTES ANALYSES APPLIQUÉES A UN MEME PROTOCOLE

Pascale MASSELOT

MCF, IUFM de VERSAILLES
DIDIREM et réseau OPEN
PMasselot@aol.com

Line NUMA-BOCAGE

MCF, IUFM d'AMIENS
HABITER/RIICE réseau OPEN (CNAM)
line.numa@amiens.iufm.fr

Isabelle VINATIER

MCF, CREN de NANTES
et réseau OPEN
isabelle.vinatier@univ-nantes.fr

Résumé

Nous présentons une partie d'un travail de recherche conduit dans le cadre du réseau OPEN. Une séance de présentation de la dizaine en classe de CP par une enseignante débutante (T2) sert de support à nos analyses croisées. Nous en décrivons dans un premier temps les points de convergence. Dans un second temps, nous explicitons des objets (savoirs, médiation, relation enseignant/enseigné ...) en jeu dans les interactions entre l'enseignante et les élèves.

Nous faisons l'hypothèse qu'une analyse croisée d'une transcription des échanges verbaux (Vinatier & Numa-Bocage, 2007), nous apporte une nouvelle intelligibilité des interactions maître/élèves. Cette analyse croisée permet également d'identifier des éléments organisateurs stables de l'activité enseignante.

Mots-clés

Réseau OPEN, analyses croisées de pratiques d'enseignement, savoirs, médiation, relation enseignant/enseigné, organisateurs de la pratique enseignante

QUESTION DE TEMPS : ETUDE DES RAPPORTS ENTRE TEMPS LEGAL, TEMPS DIDACTIQUE ET GESTION DES HETEROGENEITES

Marie-Pierre CHOPIN

Doctorante, Université Victor Segalen Bordeaux 2
Équipe DAESL, Laboratoire LACES
marie-pierre.chopin@etud.u-bordeaux.fr

Les résultats présentés dans cette communication sont extraits d'une thèse, ils reposent sur un travail de terrain mené auprès de huit classes de CM2 (197 élèves).

La recherche porte sur l'enseignement de l'addition et de la soustraction basés sur la composition de transformations (Vergnaud, 1989, 1990) et concerne spécifiquement la question du temps de l'enseignement. Après un pré-test classique portant uniquement sur des problèmes de composition de transformations, les professeurs des classes observées ont eu pour objectif de faire progresser leurs élèves dans la résolution de ce type de problème : la moitié d'entre eux devait réaliser deux leçons d'une heure (classes CLAM) ; l'autre, quatre leçons d'une heure (classes CLAP).

L'article résume alors les principales questions prises en charge par l'auteur dans sa thèse.

Quels effets didactiques la contrainte de temps introduite (classe CLAM ou classes CLAP), exerce-t-elle sur l'actualisation et la gestion du projet d'enseignement de ces huit professeurs ?

En quoi cette contrainte fait-elle pression sur l'effectivité de la diffusion des connaissances, ou, pour le dire autrement, sur l'avancée du temps didactique ?

Quels élèves progressent ? Dans quelles proportions ? Par quels mécanismes ?...

Sur la base d'analyses quantitatives et qualitatives concernant les acquisitions réalisées au cours des séquences et les dispositifs mis en œuvre, nous fournirons quelques éléments permettant de rendre compte de l'économie temporelle en jeu dans les processus didactiques observés.

Exploitations possibles

Cette communication, très dense et "pointue", peut alimenter la réflexion personnelle et professionnelle de tout formateur en mathématiques s'intéressant à la problématique liée aux notions de "temps" : temps légal d'enseignement et temps didactique, dans le cadre du traitement de problèmes additifs particuliers portant sur des compositions de transformation, au sens de Vergnaud.

Mots-clés

Didactique – professeur – temps légal – temps didactique – hétérogénéité – composition de transformations dans le cadre des structures additives.

PRODUCTIONS DE PREUVES ET RESOLUTIONS DE PROBLEMES ARITHMETIQUES AU CM

Jacques Douaire

Formateur IUFM de Versailles

Université de Cergy-Pontoise

Equipe ERMEL, INRP

Jacques.Douaire@wanadoo.fr

Les apprentissages mathématiques à l'école primaire, où coexistent plusieurs systèmes de validation, posent la question de la preuve et du rôle de l'argumentation dans l'accès à des raisonnements mathématiques. Ce cheminement, riche d'interactions langagières, pour qu'il puisse être proposé aux élèves par des maîtres loin d'être tous des spécialistes de la discipline, doit s'appuyer sur des dispositifs d'enseignements robustes. Dans cet article l'auteur fait le choix de problèmes ouverts d'arithmétique permettant aux élèves à la fois de développer des stratégies de recherche et de produire des preuves.

Après avoir dressé la typologie de ces situations au regard des questions de preuves auxquelles elles amènent les élèves, il analyse les procédures produites en distinguant les preuves qui s'appuient sur une réorganisation d'essais et sont donc en continuité avec la phase de recherche, de celles qui nécessitent l'élaboration de nouvelles propositions ayant une visée plus générale. Dans ce cas plusieurs niveaux de validité de ces formulations sont repérés.

L'observation sur deux années d'une classe de CM confirme la capacité des élèves à prendre conscience de la nécessité de prouver, à élaborer des preuves diverses et met en évidence la qualité, au regard de critères mathématiques, des justifications produites par une part significative d'entre eux.

Exploitations possibles

L'intérêt de cette étude est de pouvoir orienter les maîtres dans la définition de situations propices à une démarche de preuve, de leur proposer une trame pour élaborer des grilles d'analyse et de lecture des productions des élèves et finalement de renforcer leur motivation à mettre en œuvre de telles situations dans leur classe.

Mots clés

Preuves. Argumentation. Raisonnement. Problèmes ouverts. Arithmétique. Résolution de problèmes. Formation des professeurs des écoles.

INFLUENCES INSTITUTIONNELLES SUR L'INTEGRATION DES TICE EN MATHEMATIQUE

IMBERT Jean-Louis

IUFM Midi-Pyrénées

Doctorant UMR ADEF Aix-Marseille

Jean-louis.imbert@toulouse.iufm.fr

Cette communication rend compte d'un aspect d'un travail de recherche, entrepris dans le cadre de la préparation d'une thèse sous la conduite de Teresa ASSUDE, UMR ADEF Aix-Marseille. Ce travail porte sur l'étude des conditions et contraintes de l'intégration des TICE dans les pratiques mathématiques à l'école élémentaire.

Dans la première partie sont caractérisés des éléments d'assujettissement auxquels sont soumis les enseignants et la distance qu'ils prennent avec ces contraintes (CHEVALLARD), dans les différentes institutions. L'objectif étant de dégager des indicateurs sur les conditions d'intégration.

L'état des lieux des pratiques déclarées par les enseignants en matière de TICE décrit un faible niveau d'intégration en mathématiques.

Après avoir présenté ces données, l'auteur s'intéresse ensuite aux résultats de l'analyse de l'influence que peut avoir des institutions sur l'usage des TICE en s'appuyant sur :

L'influence de la chaîne des représentants institutionnels IEN, CPAIEN, AIM (maître animateur informatique)

L'influence des programmes à partir de leur évolution depuis le plan IPT (Informatique pour tous)

L'influence des manuels à partir des choix fait par cinq « auteurs ».

Mots clés

Intégration des TICE, Théorie Anthropologique du Didactique, contraintes institutionnelles, manuels.

MODÉLISATION ET ENSEIGNEMENT DE LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES BASÉ SUR UNE MISE EN RÉSEAU

Maryvonne PRIOLET

Conseillère pédagogique, Doctorante, ED485-EPIC
Université de Lyon
maryvonne.priolet@wanadoo.fr

Jean-Claude REGNIER

Professeur des Universités
Université de Lyon
jean-claude.regnier@univ-lyon2.fr

Le présent article s'inscrit dans la problématique d'une recherche en cours portant sur l'étude des relations entre les performances des élèves et une pratique d'enseignement basée sur la mise en réseau des énoncés de problèmes verbaux à données numériques. La place du recours à la modélisation dans l'enseignement de la résolution de problèmes est étudiée, notamment à travers les transcriptions d'enregistrements vidéoscopés dans huit classes de CE2 (3ème année d'école élémentaire) et d'entretiens d'autoconfrontation. Pour les quatre classes du groupe expérimental, les résultats révèlent une amélioration des performances des élèves à résoudre les problèmes numériques, contrastant avec les quatre classes du groupe témoin qui n'ont pas vécu d'incitation à une mise en réseau des énoncés. Il nous semble que cette amélioration peut être en partie expliquée par l'incitation à une modélisation basée à la fois sur l'usage de schémas, de boîtes de références, et sur la conversion de représentations

Exploitations possibles

Les résultats présentés dans cette recherche proposent des outils supplémentaires aux formateurs dans le cadre de l'aide à la résolution de problèmes numériques. Une bibliographie assez complète sur ce thème est proposée dans cet article.

Mots-clé

Résolution de problèmes verbaux – Mise en réseau – Registres de représentation de R. Duval – Typologie de G.Vergnaud - Modélisation -Formation continue

EXPERIMENTATION EN MATHEMATIQUES DANS LE CONTEXTE DE L'ENSEIGNEMENT SPECIALISE

Etude des apports d'un dispositif de type "rallye" mathématiques

Thierry DIAS

Université de Lyon

IUFM de Lyon & LEPS/LIRDHIST

Université Claude Bernard Lyon 1

thierry.dias@lyon.iufm.fr

Au sein de l'académie de Lyon, un dispositif de type "rallye mathématiques" auquel participent depuis trois ans une cinquantaine de classes spécialisées volontaires a été mis en place. A travers ce projet, ce sont les pratiques d'enseignement mises en œuvre dans les classes participantes, qui sont questionnées et analysées afin d'étudier comment elles prennent en compte la dimension expérimentale des mathématiques. Ce projet s'appuie sur deux documents institutionnels récents concernant, pour l'un, la scolarisation des élèves à besoins spécifiques, et pour l'autre, la démarche d'investigation dans l'enseignement des disciplines scientifiques. Dans cet article, le dispositif rallye ainsi que les premiers éléments d'analyse produits à l'issue de l'analyse d'un questionnaire enseignant sont présentés.

Exploitations possibles

Cette communication apporte des pistes de situations susceptibles de provoquer de véritables activités mathématiques chez les élèves en difficulté ou en situation de handicap. Dans le cadre de la formation, le fait que « le dispositif doit aussi permettre aux enseignants de porter un regard différent sur l'activité mathématique de leurs élèves dans le cadre de l'enseignement par la résolution de problèmes » est élément qui peut être à prendre en compte lors de la conception d'interventions notamment dans le cadre de la formation continue des Professeurs des Ecoles. Enfin, les résultats de la recherche présentée constitueront, pour les formateurs, des ressources plus théoriques pour conforter l'intérêt de certains concepts, notamment celui de « milieu » par rapport à la démarche d'investigation.

Mots clés

Rallye, Problèmes, Résolution de problèmes, Enseignement spécialisé, Elèves en difficultés, Démarche d'investigation, Dimension expérimentale, Pratiques d'enseignement, Formation.

UN CADRE THEORIQUE POUR PENSER LE CALCUL MENTAL, L'USAGE DU SYMBOLISME ARITHMETIQUE ET LA RESOLUTION DE PROBLEME A L'ECOLE : LE MODELE HIERARCHIQUE DES STRATEGIES DE RESOLUTION DE PROBLEMES

Rémi BRISSIAUD IUFM de Versailles

Equipe Compréhension Raisonement et Acquisition des

Connaissances

Laboratoire Paragraphe Paris 8

<http://paragraphe.univ-paris8.fr>

/crac/remi.brissiaud@wanadoo.fr

Ce cadre théorique est issu de la « psychologie culturelle » (celle qui s'inspire des travaux de Vygotski). À partir des résultats d'une étude longitudinale au CE1, Brissiaud et Sander (2007 ; en préparation) avancent un modèle hiérarchique des stratégies de résolution des principaux problèmes additifs et multiplicatifs. L'expérimentation repose sur la distinction de deux sortes de problèmes en fonction des valeurs numériques utilisées :

a) des Q-problèmes (Q est une abréviation pour « quotidien »). Ceux-ci ont la caractéristique de pouvoir être résolus mentalement avant tout enseignement de l'opération arithmétique correspondante, à l'aide des seuls concepts quotidiens d'ajout, de retrait...

b) des E-problèmes (E est une abréviation pour Enseignement ou Ecole). Ceux-ci, dans les conditions de l'expérimentation, ne peuvent être résolus mentalement qu'après un Enseignement à l'Ecole de l'opération arithmétique en jeu dans le problème.

Les résultats obtenus soutiennent l'idée d'une hiérarchie dans l'usage des stratégies de résolution, y compris lorsque les opérations arithmétiques ont été enseignées à l'école : le codage spontané de la situation décrite dans l'énoncé active d'abord l'une des procédures informelles qu'on observe couramment avant tout enseignement de l'opération arithmétique (procédures de comptage ou d'utilisation de faits numériques connus). Lorsque la procédure informelle ainsi activée est d'un coût cognitif faible, c'est elle qui fournit la solution numérique. Sinon, l'accès à la solution numérique nécessite de modifier la représentation initiale, ce qui conduit éventuellement à l'usage de l'opération arithmétique. Ainsi, les résultats obtenus soutiennent l'idée que l'antériorité des procédures informelles n'est pas seulement développementale. Même après avoir appris les opérations arithmétiques à l'école, les enfants continuent à aborder les problèmes comme ils le faisaient auparavant (du moins ceux qui construisent un modèle mental de la situation décrite dans l'énoncé). Ainsi, la démarche suivie par les élèves lors de chaque résolution de problème est une sorte de résumé du développement.

Richard (2004) soutient qu'au-delà des typologies de situations « à la Vergnaud », il faut s'intéresser au réseau sémantique des propriétés de ces situations. À partir de cette idée, le modèle hiérarchique de stratégies permet de réfléchir sur les situations didactiques dans lesquelles il convient d'introduire les signes arithmétiques (le signe

« ÷ », par ex.). Cette dernière question est évidemment d'actualité. De même, Richard (2004, p. 166) pense que le recodage des propriétés d'une situation à un niveau plus abstrait est une étape importante de la conceptualisation parce qu'il permet d'accéder à l'usage de procédures que le codage spontané de la situation n'autorisait pas. À partir de cette idée, le modèle hiérarchique de stratégies permet d'imaginer des situations-problèmes favorisant la conceptualisation des opérations (Brissiaud, 2002).

Le texte de cette communication ne figure pas dans les actes du colloque. On peut le retrouver avec la référence suivante :

BRISSIAUD R. (2007) « Calcul mental, symbolisme arithmétique et résolution de problèmes » ; Bulletin APMEP n°469.

DISPOSITIFS EN LIGNE DANS LA FORMATION DES PROFESSEURS DES ÉCOLES. POTENTIALITES, SUCCES ET RESISTANCES

Fabien EMPRIN

IUFM Université de Reims Champagne Ardenne
Didirem Université Paris 7 Diderot
fabien.emprin@univ-reims.fr

Jean-Baptiste LAGRANGE IUFM

Université de Reims Champagne Ardenne
Didirem Université Paris 7 Diderot
jean-baptiste.lagrange@univ-reims.fr

Dans cette communication, les deux auteurs rendent compte d'une expérience de deux années de formation, en direction des PE, s'appuyant à la fois sur des activités menées en centre de formation et sur l'utilisation de dispositifs web.

Ces dispositifs, cohérents avec la recherche d'une individualisation de la formation et de la prise de responsabilité par les étudiants et professeurs stagiaires sur leur formation, ont aussi pour fonction de remédier à l'éloignement formateur-stagiaires.

En vue de recherches ultérieures confrontant ces potentialités aux réalités de la mise en œuvre, l'article présente quelques constats, hypothèses et perspectives à partir de la mise en place de « cours » pour les PE1 et PE2 en mathématiques sur la plate-forme de l'IUFM de Champagne – Ardenne ainsi que de l'expérimentation d'un CBI dans certains groupes de formation.

La bibliographie recense des articles et ouvrages récents, parus en anglais ou en français.

Les documents annexes présentent des éléments du cahier des charges concernant l'évaluation des compétences professionnelles des PE2, ayant servi à élaborer la fiche de contrat de validation des PE2.

Exploitations possibles

Comme cet article présente, résume, apporte des éléments évaluations et ouvre des perspectives liées à une expérience d'intégration volontaire et forte d'un dispositif de FOAD dans le cadre de la formation, il peut ainsi intéresser tout formateur motivé par la mise en place de ce type de dispositif de travail en ligne. Cette communication peut de plus alimenter la réflexion professionnelle d'une équipe disciplinaire en vue d'un montage d'une formation intégrant les idées et développements proposés.

Mots-clés

Internet – FOAD – Plate forme de formation – Claroline – carnet de bord informatisé – e-portfolio – C2i2e – enseignement des mathématiques – évaluation des compétences professionnelles des PE2.

LES COMPORTEMENTS DES ÉLÈVES DE L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE ET DES FUTURS ENSEIGNANTS FACE AUX PROBLÈMES RÉALISTES

Charalambos Lemonidis

Professeur, Université de la Macédoine de l'Ouest (Grèce)

lemonidi@auth.gr

Verschaffel, et al, (1994) distingue les problèmes en deux grandes catégories: les problèmes standard S (*Standard Problems*) et les problèmes non standard ou problèmes de type P (*Problematic Problems*). Les problèmes de type S sont les problèmes utilisés habituellement dans les manuels scolaires de plusieurs systèmes éducatifs. Les problèmes de type P, dits aussi problèmes réalistes (*realistic problems*) sont ceux pour lesquels le modèle mathématique n'est pas évident, il faut tenir compte de la réalité pour résoudre ces problèmes. Ces problèmes ne sont pas habituels dans l'enseignement, ils se rencontrent rarement dans les manuels scolaires. L'article présente comment sont traités les problèmes réalistes par différents groupes d'individus à Chypre : élèves de dernières classes de l'école élémentaire, étudiants et futurs enseignants à l'école élémentaire. Les résultats de la recherche montrent que les élèves échouent à la résolution de problèmes réalistes, qu'ils bénéficient d'une mise en garde ou non. Les futurs maîtres réussissent mieux que les élèves, mais ils ont des difficultés analogues à celles des élèves quant à l'interprétation de ces problèmes

Exploitations possibles

L'intérêt d'une telle étude est de pointer la difficulté d'une utilisation critique des outils mathématiques classiques dans des problèmes non traditionnels, y compris chez des adultes. Elle questionne l'intérêt de l'utilisation de tels problèmes pour la formation des professeurs des écoles et la place de tels problèmes dans les curricula français.

Mots clés

Problèmes. Résolution de problèmes. Modélisation. Formation des professeurs des écoles.

LES ANGLES EN SCIENCES ET EN MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE : VERS DES DÉMARCHES DECLOISONNÉES

Hélène MERLE

MCF en physique, IUFM, Montpellier
LIRDEF
helene.merle@montpellier.iufm.fr

Jean-François FAVRAT

MCF en mathématiques, IUFM, site de Nîmes
LIRDEF
favrat.jf@wanadoo.fr

Valérie MUNIER

MCF en physique, IUFM, Montpellier
LIRDEF
valerie.munier@montpellier.iufm.fr

Cet article propose une démarche articulant les enseignements scientifiques et mathématiques, permettant d'aider les élèves à élaborer le concept d'angle géométrique.

Il se compose de deux parties :

La première partie décrit le déroulement de deux expérimentations dans l'espace ordinaire (méso-espace) basées sur un problème physico-technologique, chaque description est suivie d'une modélisation de l'expérience vécue d'abord graphique, puis géométrique. Les élèves construisent ces différents modèles pour répondre aux sollicitations du maître qui les incite à anticiper le résultat d'une expérience (séquence des miroirs), ou à développer des procédures de comparaison et de reproduction (séquence du champ visuel). Chaque séquence se termine par une phase d'institutionnalisation suivie d'exercices d'application et d'un dispositif d'évaluation. La deuxième partie analyse la place des différents modèles dans les deux séquences précédentes, pour chaque séquence un tableau permet de comparer le rôle des différents modèles et leurs apports respectifs.

Remarque : Le terme « d'angle » est employé ici dans le sens de « secteur angulaire », couple de deux demi-droites de même origine. Deux secteurs angulaires superposables représentant le même angle.

LES EFFETS D'UN DISPOSITIF D'ACCOMPAGNEMENT SUR LES PRATIQUES EFFECTIVES DE PROFESSEURS DES ECOLES DEBUTANTS NOMMES EN ZEP : PREMIERS RESULTATS

Denis BUTLEN

PU, IUFM des Pays de la Loire
denis.butlen@iufm.univ-nantes.fr

Monique CHARLES-PEZARD

MCF, IUFM de CRETEIL
DIDIREM
monique.charles@creteil.iufm.fr

Pascale MASSELOT

MCF, IUFM de VERSAILLES
DIDIREM
PMasselot@aol.com

Cette communication rend compte d'une partie d'un travail de recherche portant sur l'élaboration et la mise en œuvre d'un dispositif d'accompagnement en mathématiques, conçu pour des enseignants débutants nommés en ZEP.

L'impact de ce dispositif sur les pratiques effectives des enseignants est évalué au regard des outils théoriques issus du cadre de la didactique des mathématiques et de celui de l'ergonomie cognitive et de la didactique professionnelle.

Les premiers résultats émanant de l'analyse des pratiques de quatre enseignants observés au cours de leurs deux premières années d'exercice sont présentés. Ils montrent notamment la nécessité de prendre en compte non seulement la « logique » de l'enseignant, ses représentations sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, mais aussi le contexte de l'école ainsi que les ressources privilégiées pour aider les enseignants débutants à investir les marges de manœuvre dont ils disposent et à dépasser certaines contradictions.

Ces premiers résultats permettent aussi de préciser comment se forment les pratiques des enseignants notamment au cours de leurs deux premières années d'exercice.

Mots clés

Formation initiale, scénario de formation, professeurs des écoles débutants, pratiques enseignantes, accompagnement, analyse de pratiques, genre, dévolution, élèves en difficulté, ZEP.

- Titre :** Actes du **XXXIV^{ème} Colloque COPIRELEM**
Troyes 11,12 et 13 juin 2007
Expérimentation et modélisation dans l'enseignement scientifique : quelles mathématiques à l'école ?
- Auteurs :** Conférenciers, orateurs du colloque, et animateurs d'ateliers, COPIRELEM
- Mots-clés :** Didactique des mathématiques – enseignement et apprentissage – formation des maîtres – écoles maternelle et élémentaire – expérimentation – modélisation
- Dépôt légal :** Juin 2008
- Nombre de pages :** 152 pages A4 + CD-ROM
- Editeur :** IUFM Champagne-Ardenne
- ISBN :** en cours d'obtention
- Public concerné :** Professeurs et formateurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres, professeurs des écoles et des collèges.
- Résumé :** Cette brochure contient les textes des conférences et des "regards croisés", ainsi que les résumés des ateliers et des communications du colloque.
Le CD-ROM joint, contient ces textes ainsi que les comptes-rendus des ateliers et la rédaction détaillée des communications.
- Prix :** 15 €(+3,80 €de frais d'envoi)