'PROBLEMES POUR CHERCHER', QUELLE CONTRIBUTION A LA MODELISATION?

Catherine HOUDEMENT
MC, IUFM de Haute-Normandie
DIDIREM Paris 7
catherine.houdement@rouen.iufm.fr

Résumé
Les programmes de 2002 mettent en avant les problèmes, notamment ceux dits « pour chercher » (MEN 2005). Le rapport IGEN 2006 rapporte que lors des séances de résolution de 'problèmes pour chercher', les problèmes choisis et les pratiques de classe sont très variées et d'impacts potentiels auprès des élèves très différents.
Ce texte pose des jalons pour une harmonisation des intentions d'apprentissage liées aux séances de résolution de 'problèmes pour chercher' et des critères de choix de ces problèmes.

Les programmes de 2002 mettent en avant les problèmes, notamment ceux dits « pour chercher » (MEN 2005). Certains comprennent cela comme une invitation à faire des « rallyes », à lancer des « défis », à introduire de l'extraordinaire dans la classe de mathématiques par exemple par le biais d'énigmes récoltées sans analyse critique (et parfois même sans intention mathématique) dans maint ouvrage ou sur maint site. Quand la séance fait partie de l'ordinaire de la classe, elle est parfois ponctuelle, sans véritable enjeu, comme le montre notamment le rapport de l'Inspection Générale (IGEN 2006).

Les interprétations des 'problèmes pour chercher' posent donc question : elles semblent faire la part trop faible à des apprentissages mathématiques.

C'est cette interrogation qui a suscité cet atelier, se limitant volontairement **aux problèmes numériques ou à traitement numérique.**

Les intentions du travail commun étaient donc de :

- faire prendre conscience aux formateurs de nos conceptions différentes des 'problèmes dits pour chercher';

- harmoniser ces conceptions notamment sur le point suivant : les 'problèmes pour chercher' sont des prétextes à mettre en jeu des connaissances mathématiques et contribuent à augmenter la culture mathématique de nos élèves ; à ce titre (réinvestir des connaissances mathématiques), les 'problèmes pour chercher' ont une place dans l'enseignement des mathématiques ; restent à déterminer leur spécificité et leurs apports ;

- poser les premiers éléments d'une organisation de ces problèmes (voire une praxéologie au sens de Chevallard) notamment en cherchant à regrouper les problèmes par type, à pointer les 'techniques' dont ils pourraient relever ; à préciser le discours à tenir sur ces techniques.

Remarquons cependant le caractère paradoxal de cette entreprise : il est d'usage de construire une technique pour d'un type de tâches routinier ; de quelle routinisation pourrait il s'agir concernant les problèmes pour chercher ? Nous verrons plus loin notre proposition : elle a à voir avec des types de raisonnement. Et quid de la technologie, discours sur la technique ? Nous faisons l'hypothèse que la technologie en jeu ne fournirait pas là la justification mathématique de la technique, mais plutôt le mode d'emploi de la technique (technologie pratique versus technologie théorique).

Ce texte reprend et enrichit une partie de la présentation, en y intégrant des apports des participants.

I – MOTIVER ET SITUER LA REFLEXION.

I – 1 Un objet déjà ancien dans les programmes

Les 'problèmes pour chercher' ont une place particulière dans l'enseignement français : valorisés dès les années 1980 sous le nom de *problèmes ouverts (*voire *situations-problèmes*[1]*),* ils ont donné lieu à de multiples expérimentations dans les IREM, en particulier celui de Lyon (ARSAC 1988), se sont poursuivies notamment par les *narrations de recherche* (par exemple BONAFE ET AL. 2002), analysant le travail de l'élève du côté du processus de recherche plus que du côté de la réponse au problème, avec comme objectif annoncé de développer des « attitudes »…... L'équipe ERMEL de l'INRP a produit un certain nombre d'écrits sur ce type de problèmes, soit intégrés dans des aides pédagogiques numériques par niveau d'école primaire (ERMEL post 1991), soit plus spécifiques visant un travail des élèves sur l'argumentation (ERMEL 1999).

À l'école primaire, ils existent dans les programmes depuis 1985 mais sans nom particulier… Les programmes 2002 leur donnent un nom : *Problèmes pour chercher* et leur consacre un chapitre spécifique des *Documents d'accompagnement* (2005, pages 7 à 14) qui précise l'objectif spécifique des séances qui leur sont liées, par rapport aux autres séances qui font intervenir des problèmes : « *problèmes centrés sur le développement des capacités à chercher : en général pour ces problèmes, les élèves ne connaissent pas encore de solution experte* » (MEN 2005 page 7). Les Programmes 2002 distinguent trois autres types de problèmes selon la fonction qu'ils ont dans le projet du professeur : construire des nouvelles connaissances (exigibles en fin de cycle), les exercer et les réinvestir, mobiliser plusieurs connaissances déjà travaillées (problèmes plus complexes).

Cette explicitation nouvelle des *Problèmes pour chercher* interpelle différents acteurs (professeurs d'école, inspecteurs, formateurs...) ou collaborateurs plus occasionnels (didacticiens, mathématiciens) de l'enseignement primaire qui en questionnent les

---

[1] Nous n'en dirons pas plus sur la signification de ces deux expressions : elles ont eu des sens très différents depuis 1980. C'est d'ailleurs sans doute à cause de son ambiguïté que l'expression 'situation-problème' a disparu de tous les programmes de mathématiques.

différentes interprétations (transpositions) et s'interrogent sur la légitimité de cet objet d'enseignement dans les programmes de mathématiques.

Certains questions restent cruciales : quelle place, quelle fonction ont de tels problèmes (de telles séances autour de problèmes) dans l'institution école ? Qu'apprennent –ils ? Comment doit on les organiser pour qu'ils apprennent des 'choses' aux élèves ? Quelles sont ces 'choses' ? Quel est le rôle du professeur dans cet apprentissage ?

I – 2 Un rapide regard sur les pratiques

Les sources de problèmes qui se disent « pour chercher » ou que les professeurs utilisent comme tels abondent, notamment sur la toile, sous la rubrique Défis mathématiques, Rallyes. Les dispositifs, organisant un jour par an des compétitions entre équipes d'élèves de classes différentes participent pour les professeurs au traitement de cet objet du programme (et parfois se résument à cela).

Un rapport de l'Inspection Générale de juin 2006 fait état d'ailleurs des dérives que suscite le traitement en classe de cet objet.

Il souligne fort justement la maladresse de l'expression ' problème pour chercher' qui produit un effet de brouillage, rendant cette expression synonyme de problèmes pour lesquelles la résolution n'est pas automatique, sans nécessairement y intégrer une part de connaissances mathématiques. Dans cet esprit, il conseille, pour les problèmes en général, une typologie en quatre parties : « *Problèmes à une opération, avec étapes intermédiaires explicites, avec étapes intermédiaires trouvées par l'élève, plus complexes*. ». On sait les limites d'un tel classement : par exemple Vergnaud (VERGNAUD 1990) a montré qu'à contexte identique, des problèmes ternaires (deux nombres donnés, un troisième à trouver) relevant de la même opération et des mêmes nombres, ne présentaient pas tous la même facilité de raisonnement

Le rapport souligne l'inadaptation de la gestion de classe associée à un tel objet d'enseignement. Les professeurs restent démunis face aux questions pratiques suivantes : comment exploiter de façon constructive les erreurs des élèves, relativiser des procédures lourdes, valoriser des procédures efficaces, conclure effectivement la séance dans un cadre mathématique ?

Le rapport s'interroge finalement sur les objectifs de la présence d'un tel objet d'enseignement dans les programmes de mathématiques du primaire.

I – 3 Construire une typologie ?

L'intention déclarée des programmes 2002 avec l'expression 'problèmes pour chercher' correspond à une exploitation spécifique de problèmes pour lesquels les élèves n'ont pas a priori une procédure automatique disponible : « *développer chez les élèves un comportement de recherche et des compétences d'ordre méthodologique : émettre des hypothèses et les tester, faire et gérer des essais successifs, élaborer une solution originale et en éprouver la validité, argumenter* » (*Documents d'application des programmes* Mathématiques 2002, cycle 3, page 7). On peut d'abord constater qu'il ne s'agit pas uniquement de chercher… Ces compétences doivent être à l'oeuvre quelle que soit l'activité mathématique pratiquée par l'élève. Mais il est vrai que l'injonction (présente dans les programmes depuis 1985) de faire passer tous les enseignements de mathématiques par le filtre des problèmes est encore très mal comprise.

Il est donc nécessaire de préciser les choses et les raisons des choses…: en chercher les motivations, construire des éléments de typologie….

I – 4 Quelle motivation pour ces problèmes ?

Les problèmes pour chercher sont souvent justifiés par le fait de permettre à l'élève de mener lui-même une partie de l'activité mathématique réelle du mathématicien, celle qui consiste à tâtonner, chercher, recommencer pour avancer, sans viser l'acquisition d'une connaissance notionnelle à plus ou moins long terme, ce dont se chargent les problèmes spécifiquement pensés à ces fins et dont l'idéal théorique est les situations didactiques de la Théorie des Situations. En quelque sorte ils offriraient une liberté et une gratuité que Glaeser (GLAESER1976) avait déjà pointées.

Mais justement cette liberté et cette gratuité n'est elle pas antinomique de l'avancée des apprentissages, qui suppose qu'un savoir doit émerger explicitement (grâce à l'institutionnalisation du professeur) des situations étudiées ? Cela pose la question de l'existence dans les mathématiques des connaissances qu'il ne serait pas possible d'institutionnaliser, mais qu'il faut cependant avoir pour faire des mathématiques, et donc qu'il ne serait peut-être possible que d'apprendre par frayage, comme le souligne la production d'un des groupes de participants à l'atelier [2]

En effet ces 'problèmes pour chercher' (tels qu'ils sont ordinairement proposés, isolés, avec une question déjà donnée) n'ont pas de statut stricto sensu dans les mathématiques : non pas que les mathématiciens n'en rencontrent pas, mais s'ils les rencontrent, c'est plus pour atteindre des éléments de réponse que (au moins dans un premier temps) pour analyser le processus de recherche. Actuellement les 'problèmes pour chercher' tel que décrits dans les DA 2005 restent un 'objet d'enseignement' aux contours flous.

Pourtant dans d'autres pays, ils sont revendiqués y compris par des didacticiens justement parce qu'ils motivent, de façon externe, les apprentissages mathématiques. DaPonte dans un article à paraître sur la Résolution de Problèmes au Portugal dans la revue *Zentral Blatt der Mathematik* insiste sur le côté effectivement formateur des 'problèmes pour chercher', notamment pour la participation des élèves (et donc comme une raison d'apprendre des mathématiques) et le développement de compétences transversales (capacités d'expression, d'échange, de collaboration). Il modère cependant leur impact pour mettre en réseau des connaissances, sauf pour les élèves forts.

En résumant, il pourrait, semble-t-il, s'installer un certain accord sur les **motivations externes** (aux mathématiques) des problèmes pour chercher.

- Donner un meilleur aperçu des positions respectives du professeur et des élèves vis-à-vis des apprentissages :

---

[2] Un groupe de recherche à l'IUFM de Haute Normandie travaille sur ce thème autour de C.Castela (*Enjeux cachés d'apprentissage*).

- préciser un aspect du métier d'élève, pas seulement exécuteur, mais aussi contrôleur et initiateur ; on sait que cette conception du métier d'élève (agir, essayer, se tromper, contrôler) n'est pas dominante, notamment en cycle 3 ;
- aider aussi le professeur à être d'abord un accompagnateur dans la recherche de la vérité (de la réponse exacte), pas uniquement celui qui sanctionne la réponse ou révèle la solution.

- Initier des démarches collaboratives moyennant des dispositifs adaptés : par exemples les rallyes mathématiques des origines se contentaient de faire travailler en équipes les élèves sur une liste de problèmes déterminée ; la modification qui consiste à doter chaque problème d'un quota de points qui affecte positivement le total du groupe en cas de réussite et négativement en cas d'échec, amène les élèves à changer leur rapport à la réponse (dont le groupe doit être sûr qu'elle est correcte) et à mobiliser l'équipe pour contrôler les raisonnements produits. Bien entendu ces dispositifs de rallyes gagnent à être accompagnés de séances plus ordinaires autour de tels problèmes.

Ces motivations externes ne sont pas négligeables, mais qu'en est-il des **motivations internes** aux mathématiques ? Moyennant l'hypothèse de travail raisonnable « pour qu'il y ait apprentissage, il est nécessaire qu'il n'y ait pas seulement des tâches isolées », quelle progression prévoir, quels problèmes choisir ? Et bien sur, quelles séances mener autour de ces problèmes ?[3]

II – QUELQUES HYPOTHESES DE TRAVAIL

S'intéresser à un objet d'enseignement amène d'abord à questionner sa légitimité a priori. Sans rentrer dans une recension des divers travaux qui se sont intéressés à la question, un consensus existe sur le fait que les problèmes ont globalement deux fonctions dans l'enseignement : contribuer à construire des connaissances mathématiques dans une dynamique connaissances–savoirs, fonction particulièrement pointée par les approches didactiques (BROUSSEAU 1990, BRUN et CONNE 1992 , DOUADY 1986) et faire fréquenter une partie de l'activité du mathématicien, chercher, valider, fonction mise en avant par des mathématiciens (GLAESER 1976) épistémologues et des praticiens chercheurs (IREM de Lyon dès 1988).

Je souhaiterais compléter par deux apports. Julo (1995, 2002) insiste particulièrement sur le rôle que jouerait la mémoire des problèmes résolus dans la résolution de nouveaux problèmes. Il fait l'hypothèse qu'il existe trois types de structures en mémoire, qu'il appelle schémas. Les schémas de type 'cas' seraient formés des traces sémantiques en mémoire de problèmes particuliers ; la théorie des situations, par les situations fondamentales, viserait une installation de tels problèmes, en contrôlant la qualité de leur adaptation au savoir visé. Les schémas de type 'regroupement' fonctionneraient avec des critères de surface et de nature pragmatique (par exemple les problèmes d'achats dépenses). Enfin le troisième type, les schémas de type 'abstrait',

---

[3] Mais cette dernière question sera à peine traitée ici.

s'appuierait sur des analogies structurales (analogie relationnelle au sens de Vergnaud 1990 ou procédure de résolution ou outil de modélisation).

Sous ces hypothèses, les 'problèmes pour chercher' contribueraient à enrichir les schémas du premier type (par l'expérience de construction d'un raisonnement non automatique) et du troisième type. Mais comment déclencher la possibilité d'une mémorisation organisée de tels problèmes réussis ? Peut-être par une rencontre organisée avec de tels problèmes selon certains critères (ce que nous envisagerons par la suite). En l'état actuel des connaissances, nous ne pourrons aller plus loin, les recherches restent ouvertes.

Le second apport de type réflexif concerne la problématique des enjeux cachés d'apprentissage développée à l'IUFM de Haute Normandie autour de C. Castela. Prenant appui sur la croyance partagée et ressentie par des praticiens chercheurs (IREM, INRP, mais pas seulement) des bénéfices pour les élèves de séances bien pensées de 'problèmes pour chercher', réfléchir aux types de connaissances effectives déclenchées par de telles séances et lister les conditions de ces déclenchements pourrait mettre à jour des connaissances cachées, non simplement institutionnalisables[4], que possèderaient certains élèves et pas d'autres, et qui seraient très utiles pour les apprentissages mathématiques ordinaires. Autrement dit on expliciterait ainsi la niche didactique des 'problèmes pour chercher'. Là encore les recherches restent ouvertes.

III – VERS DES ELEMENTS D'ANALYSE DES PROBLEMES

III – 1 Les travaux du groupe

Pour permettre un travail commun, j'ai choisi de livrer à la sagacité de mes collègues une liste fort importante de problèmes numériques pour le cycle 3 (cf. annexe 1), récoltés dans différentes ressources (cf. annexe 2) du professeur (manuels scolaires, aides pédagogiques, site Internet…) sous les rubriques 'problèmes pour chercher', 'problèmes complexes', défis, rallyes... et de les laisser échanger sur les questions suivantes :

Quel(s) argument(s) pour choisir ou rejeter tel problème (sous-entendu comme 'problème pour chercher'?
Quel(s) fil(s) conducteur(s) pour une idée de progression?

La tâche était certes importante, le but était de faire émerger des questions cruciales comme le manque d'accord existant déjà dans la communauté des formateurs, qui pouvait laisser préjuger des variations d'interprétation dans le milieu des acteurs (professeurs et inspecteurs). Il s'agissait de souligner le caractère sensible de cet objet d'enseignement et l'effort de clarification auquel nous devons nous atteler.

Les productions en annexe montrent l'étendue des préoccupations : coller aux injonctions des programmes, s'interroger sur les savoirs potentiels accessibles, réfléchir aux critères de sélection de ces problèmes (du point de vue mathématique, du point de

[4] non référencées ni à des technologies, ni à des théories (au sens de Chevallard).

vue élèves), repenser la typologie proposée : problèmes complexes, problèmes pour chercher.

Pour information, une brochure de l'IREM de Nantes (HERSANT 2006) propose une grille d'analyse des 'problèmes de recherche' (plus exactement de séquences de problèmes pour chercher) qui regroupe ces différentes préoccupations : liaison avec les apprentissages mathématiques, compétences méthodologiques visées, compétences méthodologiques potentiellement accessibles par la mise en œuvre proposée.

III – 2 Éléments d'analyse a priori des problèmes pour cycle 3

Notre analyse repose sur l'analyse de la tâche d'un élève de la deuxième moitié du cycle 3, de façon à rendre a priori disponibles des connaissances sur les quatre opérations.

Le problème 1 est un problème non immédiat : il faut savoir reconstituer, en sélectionnant des informations, un sous problème à traitement immédiat (350 kg pour 25 tables). C'est un problème de réinvestissement (de connaissances sur la division), à une solution, qui demandera un temps de recherche aux élèves, pour déduire la première réponse (poids de la table). Il est souvent qualifié de problème complexe.

Le problème 2 est, dans la version du manuel, supporté par un dessin, ce qui peut rendre la représentation du problème (au sens de JULO 1995, 2002) plus facile. Il a une seule solution, est résoluble par essais successifs sur la valeur de la zone. Il met en jeu des connaissances arithmétiques simples.

Le problème 3 est aussi supporté par un dessin. Une démarche par essais peut s'avérer complexe. Par contre une déduction des jeux de Jo et Léa permet d'avancer sur la valeur de la zone B, comme dans le problème 1. Cette déduction peut être facilitée par les trois dessins des parties sur la cible. Le problème 3 met en jeu des connaissances arithmétiques simples.

Le problème 4 nécessite des essais limités par des déductions par exemple sur la parité… Il met en jeu des connaissances sur la numération.

Le problème 5 est un problème presque immédiat (déduction immédiate relevant de la division).

Compte tenu des différents types de déduction que nous rencontrons, essayons de les indexer ainsi : D1 déduction immédiate, D2 déduction après juxtaposition de plusieurs informations, D3 déduction après combinaison de plusieurs informations. Ainsi nous nous trouvons face aux raisonnements suivantes : pb 1 D2 ; pb2 E (essais) ; pb 3 D3 ; pb 4 E (+D3) ; pb 5 D1 .

Nous pouvons ainsi regrouper plusieurs problèmes selon les raisonnements, ce qui ne présage pas de la difficulté des reformulations… (cf. pb 12 :).

D1	D2	D3	essais	Essais+D
5 - 11	1- 7	3- 10- 12- 13- 14-17- 18- 20	2- 12- 15- 16	4- 6-

Remarquons

- que certains problèmes se résolvent quasi aussi économiquement par déduction ou essais : cependant un des buts (cachés en primaire ??) est d'activer les résolutions par déduction, souvent plus directes ;
- que d'autres problèmes engagent l'élève à mener une véritable expérience : par exemple les problèmes 8 ; 15 ; 16 ; 21 ; 22 ; 23 ; on peut considérer la résolution par essais comme une démarche expérimentale, avec tous ses critères de qualité ;
- que tous les problèmes qui évoquent un certain réel mettent en jeu des connaissances extra-mathématiques qui peuvent être sophistiquées : connaissance du fonctionnement d'un calendrier pour le pb 9 ; vocabulaire lié à l'aviation commerciale pour le pb 17…

III – MOTIVATIONS INTERNES AUX MATHEMATIQUES

L'étude précédente peut nous faire avancer sur des raisons d'être de problèmes non immédiats, notamment en pointant certaines ressemblances qui permettraient d'organiser ces listes de problèmes pour une progression. Cette progression ne prend pas en compte ici les gestions associées : type de consigne, support, variantes et variables, travail individuel ou en groupe, temps de recherche, de synthèse, conclusion, éléments à institutionnaliser.

III – 1 Connaissances mathématiques en jeu

Les problèmes complexes et 'pour chercher' doivent d'abord permettre de **réinvestir** de façon non immédiate **des connaissances mathématiques** en cours d'apprentissage. Les problèmes retenus ont donc d'abord une fonction de réinvestissement. Les pb 1, 5, 6, 7 et 11 sont d'abord des problèmes multiplicatifs, le pb 6 nécessite une connaissance des fractions. Attention cela ne signifie pas que l'outil le plus général pour résoudre le problème soit un savoir visé du niveau de classe où se donne le problème : le pb 16 relève d'un système de deux équations à deux inconnues, mais il est résoluble par une démarche expérimentale arithmétique.

III – 2 Le rapport aux raisonnements

Les différentes formes de raisonnement

Nous prenons comme synonyme de *raisonnement,* comme ERMEL 1999, toute suite organisée d'inférences conduisant à une conclusion ; l'inférence consistant en la production d'informations nouvelles à partir d'informations déjà là dans le texte et de connaissances avérées en mémoire.

A. Weil-Barais (WEIL-BARAIS 1993, p.526) recense plusieurs formes de raisonnement. Elle qualifie les uns de non canoniques (ils ne suivent pas des règles bien définies), tels le raisonnement par analogie (une conclusion est tirée par ressemblance, il s'agit souvent d'un raisonnement heuristique), le raisonnement en contexte (une sorte de reconnaissance de forme qu'appliqueraient les experts) ; elle insiste aussi sur les liens étroits entre raisonnement et processus de sémiotisation, qui est à l'œuvre dans les mathématiques, sous l'égide de règles bien établies. Nous y ajoutons le raisonnement par induction où il s'agit de tirer une loi générale de l'examen de cas particuliers. Il nous semble trouver dans cette approche bon nombre d'analogies avec la mémoire des problèmes sous forme de schémas de problèmes, pointée par Julo (JULO 2002).

Weil-Barais distingue deux types de raisonnements canoniques : le raisonnement déductif et le raisonnement expérimental ou raisonnement par test d'hypothèses.

Le raisonnement déductif est directement associé aux mathématiques (comme moyen et comme but), notamment sous les formes diverses que sont l'implication logique (contraposée et contre-exemple), le raisonnement par l'absurde, le raisonnement par disjonction des cas, le raisonnement par récurrence[5].

Le raisonnement expérimental est un raisonnement conditionnel à trois aspects : énoncé des hypothèses, recherche d'informations pour mettre à l'épreuve les hypothèses, traitement des informations.

J'y ajoute une autre forme de raisonnement canonique : celui pris en charge par les règles de fonctionnement des écritures mathématiques (ici les écritures arithmétiques voire algébriques) : par exemple 45 x 32 = 1440 nous permet de savoir que 4500 x 320 = 1440000. Je place ce raisonnement dans les raisonnements déductifs.

Quels raisonnements pour l'école ?

La résolution de problèmes devrait être une occasion de **rencontrer des modes de raisonnement** différents pour ouvrir une palette de possibles : déduction simple mais aussi plus complexe, puissance des écritures arithmétiques voire algébriques, raisonnement expérimental y compris dans les mathématiques.

Dans les propositions de problèmes dits complexes, on trouve souvent des problèmes déductifs (D2 D3). La complexité du traitement (donc le temps de recherche) peut aussi être liée au nombre d'informations : il est alors nécessaire de savoir trouver parmi toutes ces informations celles susceptibles par déduction de produire une réponse permettant d'avancer dans le problème. Ce qui est en jeu est alors la capacité simultanée à planifier (construire les questions intermédiaires) et à mobiliser la déduction ad hoc (qui se réduit souvent à une opération).

Mais les élèves d'école primaire peuvent ne pas mettre en œuvre de raisonnement déductif pourtant efficace, notamment par manque de connaissances et/ou de système symbolique efficace : les problèmes 2, 15 et 16 en sont des exemples. Là le raisonnement expérimental (ou par test d'hypothèses) peut leur permettre d'avancer. On sait bien que dans les problèmes additifs de type recherche de l'état initial d'un problème de type état-transformation-état, les élèves simulent l'action, testent des valeurs pour l'état initial, bien avant d'appliquer à l'état final la transformation inverse (mi CE2) (FAYOL 1990, p. 160).

---

[5] Ce qui ne signifie pas que toutes ces formes soient exploitables à l'école.

À tout niveau d'enseignement donné, la rencontre avec deux types nécessaires de problèmes semble nécessaire : avec ceux prétexte à un raisonnement déductif ET avec ceux qui nécessiteraient un autre raisonnement, un test d'hypothèses. Bien entendu souvent ces types de raisonnement se croisent…

III – 3 Le rapport au vrai et au faux

La résolution de tels problèmes doit engager les élèves dans un rapport à la vérité. Se pose donc légitimement la question de la validation de chacun de ces problèmes : peut-on institutionnaliser des éléments de validation de façon à conduire l'élève à prendre en charge lui-même la validation de sa réponse, ou du moins à en contrôler certains éléments ?

H.Péault (PEAULT 1992) avait déjà examiné cette question des différents types de validation, notamment pour enrichir la liste des problèmes qu'il proposait dans les rallyes mathématiques du Maine et Loire. Nous partons de sa typologie pour dégager cinq niveaux de validation que nous avons codés.

- La réponse est validable quasi immédiatement par un calcul élémentaire (reconstitution de calculs) **I**
- La réponse est à confronter à chaque élément du problème (déduction logique) **D** ou chaque contrainte (problème à plusieurs contraintes, figure avec telles caractéristiques) **C**
- Dans le cas d'une recherche exhaustive : il faut vérifier que la méthode permet de tout parcourir **E**

Quand il n'est pas possible de mettre en œuvre une validation du type de celles qui précèdent, deux cas sont à envisager :

- il faut alors argumenter, prouver en référence au problème, **sur le plan mathématique P :** il s'agit de construire une preuve ; par exemple la recherche de trois nombres qui se suivent pour une somme fixée (pb 15) est I-validable, mais le problème retourné (BLOCH 2005) , la recherche des nombres qui possèdent une telle décomposition nécessite une P-validation ;
- il faut argumenter, prouver en référence au problème **sur le plan du réel R** ou en faisant appel à des connaissances non stricto sensu à l'intérieur des mathématiques : le pb 9 relève de ce cas puisqu'il nécessite des connaissances sur les calendriers et peut être validé par un document.

Ce qui donne, pour illustrer cette grille avec notre liste de problèmes.

I	D ou C	E	P	R
15-17	1- 2 -3- 4- 5- 6- 7 -10- 11 - 12- 14- 16- 20- 21- 22	2- 16 pour unicité 21 pour multiplicité	15- 22	8- 9-24 13 -17 19 -18-19

Intéressons nous aux validations « non simples » : **P** et **R**

- La validation de type **P** est un des enjeux de la liaison école-collège : elle correspond à l'intégration systématique d'arguments textuels strictement mathématiques dans le raisonnement.

Par exemple si on propose de répartir 45 jetons dans deux boites vertes et quatre boites rouges comme dans le problème 21, le fait de ne trouver aucune réponse ne peut pas clore le problème : encore faut-il transformer ce fait en la certitude qu'il n'existe aucune solution, notamment par des considérations de parité. Idem pour le problème 15, quand il est retourné. Ainsi par certains problèmes dont il est possible de modifier les variables pour conduire à des nombres de solutions différents (une solution, aucune ou plusieurs), les élèves peuvent être engagés vers des types de validation différents, en particulier vers la construction d'une preuve élaborée.

Le problème 22 est particulièrement décrit dans ERMEL 1999, avec toutes ses variantes pour construire littéralement des théorèmes arithmétiques faisant avancer vers la réponse.

On voit là tout l'intérêt de tels problèmes… mais la gestion du groupe classe reste encore la partie immergée (et elle le restera dans ce texte).

- La référence à la réalité (validation **R**) peut être plus ou moins forte. Par exemple le problème 17 nécessite de savoir s'il est d'usage que d'autres personnes que commandant de bord et copilote soient assis dans le cockpit ; le problème 18 nécessite de porter sur la plaque les bonnes dimensions, etc.

La référence à la réalité est très plus forte dans le problème 8. Elle est aussi à l'œuvre dans le problème 24, mais ce problème ne fait pas fonctionner de contenu mathématique du cycle 3. Un tel problème devrait rester anecdotique.

Le problème 13 relève d'une démarche expérimentale au cycle 3 et doit être aussi contrôlé par la réalité évoquée ; mais ce problème n'est pas très intéressant pour le cycle 3 dans la mesure où les erreurs (mauvais film des transvasements) ne permettent pas d'avancer vers la solution.

Les quatre premières vérifications sont à mettre en parallèle avec ce que d'aucuns ont appelé **contrôle syntaxique** (organisation mathématique des informations) et la dernière R avec **contrôle sémantique** (confrontation au réel, irréfutabilité du domaine d'expérience).

Ainsi le problème 19, malgré une forme simple et une solution intuitive, nécessite une validation complexe sur les plans sémantique et syntaxique (deux fonctions linéaires en jeu pour modéliser remplissage et vidage). Cette validation n'est pas accessible à des élèves de cycle 3.

Le problème 9 fait appel à des connaissances sur le fonctionnement du calendrier. L'étude lors de la recherche d'un calendrier (d'une autre année) peut contribuer à mobiliser ou construire ces connaissances.

IV LA QUESTION DE LA MODELISATION

Dans ce paragraphe, je m'intéresse à la question de la modélisation vue sous l'angle de la fabrication de modèles ou la mobilisation de modèles. Que retenir comme définition de modèle ?

Pour ce faire je m'inspirerai de Fischbein (FISCHBEIN 1989) qui définit l'intérêt des modèles pour le raisonnement. Je me limiterai aux modèles externes (non seulement mentaux) explicites.

Un modèle serait d'abord un artefact, un signe (ou des signes), un écrit susceptible de rapprocher la situation de départ du but et portant un caractère génératif : dans ce cadre, les dessins figuratifs, supports possibles de raisonnement des jeunes élèves, seraient des pré-modèles (par leur absence de caractère génératif) ; les dessins épurés peuvent déjà être des modèles ; une écriture arithmétique est un modèle issu des mathématiques. Pour qu'un dessin devienne modèle, il est nécessaire qu'ils aient des vertus génératives.

Cette question du potentiel génératif d'un dessin est d'importance à l'école : l'enfant de CP perd beaucoup de temps à dessiner le personnage du problème avec tous ses attributs, il doit apprendre à n'en garder que les éléments liés à la question posée pour lui conférer un pouvoir génératif. Un des apprentissages de cycle 2 concernant cet aspect de la modélisation est celui d'une transformation (épuration) raisonnée du dessin en un schéma fonctionnel pour raisonner. Cet apprentissage n'est pas terminé au cycle 3 : des élèves devant dessiner des cubes colorés dans une phase heuristique s'appliquent à colorier, alors que d'autres symbolisent la couleur par une croix (dans Exemple de mise en place d'un problème pour chercher : le pavé bicolore HERSANT 2006 p.51).

Plus tard avec l'enrichissement du répertoire didactique, un modèle peut être un réseau de connaissances mathématiques (par exemple modèle additif, multiplicatif, modèle de la proportionnalité….) qu'il s'agit alors de mobiliser avec son domaine de validité.

Dans cet article, je laisse de côté la question de la genèse chez l'apprenant des modèles mathématiques (dans le domaine numérique les quatre opérations et la proportionnalité) émergeant d'un équilibre entre problèmes à résoudre, invariants opératoires et éléments sémiotiques (langage, écritures mathématiques) (VERGNAUD 1990). Je ne m'intéresse qu'à leur réinvestissement dans des problèmes.

« Petite modélisation »

Un des critères de choix des problèmes pour chercher (ou complexes) et indirectement une façon de les regrouper pourrait être leur potentialité de création de types de modèles.

- Prenons l'exemple du problème 16, une histoire de poules et de lapins (PLUVINAGE 2007- non publié), trois types de raisonnement peuvent lui être associés : un raisonnement algébrique supporté par la traduction du problème en système de deux équations à deux inconnues (non disponible en fin de primaire), un raisonnement arithmétique par test d'hypothèses, une mise en schéma de type une tête par un rond et une patte par un trait : le dessin de toutes les têtes suivi d'une distribution raisonnée des pattes (par exemple 2 pattes par tête d'abord, puis une nouvelle distribution de 2 pattes supplémentaires jusqu'à épuisement) donne la réponse : ce dernier dessin serait un modèle au sens où nous l'avons défini plus haut. Bien entendu le modèle ne sera construit comme génératif que si l'élève a l'occasion de rencontrer plusieurs fois ce type de problèmes (système de 2 équations à 2 inconnues potentiellement lié à un tel schéma).

- De même les problèmes 20 et 23 peuvent s'appuyer sur trois types de raisonnements : algébrique, arithmétique par test d'hypothèses et géométrique par l'utilisation de segments mesurés.

Il nous semble intéressant, grâce à des rencontres régulières avec des problèmes pour chercher relevant de schémas voisins, de mettre les élèves en face de raisonnements potentiellement liés à des « démarches modélisantes » (PLUVINAGE 2007 non publié).

« Grande modélisation »

Un autre type de problèmes est étudié dans des équipes de recherche : les *situations recherche* du projet *Maths à modeler* (par exemple GODOT 2006) dont nous rappelons certains caractéristiques : point de départ facilement compréhensible par l'élève, situation non formalisée en termes mathématiques (« *c'est la situation qui amène l'élève au cœur des mathématiques* ») ; méthodes de résolution non désignées ; une, plusieurs ou aucune solution.

Ces caractéristiques-là sont déjà celles de bon nombre de problèmes pour chercher (par exemple le problème 21 selon le nombre de jetons et la série de boites peut avoir plusieurs ou aucune solution). La spécificité des *situations recherche* réside dans le fait que les *variables de recherche,* qui définissent les sous-problèmes liés à la question initiale et peuvent donner lieu à des tâches très différentes, ne sont pas fixées au préalable. Certaines situations sont fondées par un jeu avec un support matériel qui joue alors le rôle d'une aide à la formulation d'hypothèses et leur validation.

Ces dispositifs présentent de grandes potentialités, ils permettent notamment de modéliser différents aspects d'un jeu pour mieux y jouer ou hiérarchiser sa complexité. Ils demandent cependant une bonne maîtrise mathématique et didactique de la part de l'enseignant qui les installe dans sa classe : dans les travaux cités, c'est d'ailleurs toujours un « matheux » qui gère la séance.

Domaine de validité d'un modèle

Mais on peut aussi s'interroger sur l'apprentissage d'un sens critique du modèle. Est-il licite d'appliquer tel modèle intuitivement mobilisé ? Quelle sensibilité au contexte développer ? Quel contrôle par le réel (sémantique) mettre en place ?

Prenons l'exemple classique suivant : « 38 personnes décident de partir en voiture ; une voiture peut transporter 5 personnes ; de combien de voitures ont-elles besoin ? ». Il est usuel que les élèves donnent comme réponse le quotient par défaut. C'est un des rares exemples dans les habitudes françaises où l'élève est amené à questionner la pertinence d'un modèle (celui du quotient par défaut). Verschaeffel qualifie cet énoncé de *problematic item* (**Pi)** par rapport au suivant : « nombre de sachets pleins si on empaquette 38 objets par paquets de 5 » qu'il qualifie de *standard item* **(Si).**

Verschaeffel (par exemple VERSCHAEFFEL 2000) étudie parallèlement les réussites à des *standard items* **Si** (validations sémantique et syntaxique en correspondance) et aux *problematic items* **Pi** (problèmes dont la validation sémantique invalide le modèle intuitif) de même contexte, tels que :

- Peter organise une fête. Il invite tous ses amis : 8 garçons et 4 filles. Combien d'amis invite–il ? **Si**
- Charles a 5 amis et Georges a 6 amis. Ils décident d'organiser une fête à deux et d'inviter tous leurs amis. Combien d'amis invitent- ils? **Pi**
- Paul a acheté 5 planches de 2 m de long chacune. Combien peut il faire de planches de 1m? **Si**
- Paul a acheté 4 planches de 2,5 m de long. Combien peut il faire de planches de 1m? **Pi**
- Chris a fait une ballade à pied : 8 km ce matin et 15 km cet après midi. Quelle distance a-t-il parcourue? **Si**
- Léo et Alice vont à la même école. Léo habite à 17 km de l'école et Alice à 8 km de l'école. À quelle distance habitent-ils l'un de l'autre? **Pi**

Il montre la difficulté qu'ont les sujets à bloquer pour les Pi l'utilisation du modèle intuitif. Verschaeffel parle même à ce sujet d'un phénomène de *suspension de sens commun*[6], résistant même aux mises en garde.

Pourtant la culture citoyenne devrait comporter aussi cette capacité à choisir ou rejeter tel modèle pour tel problème et contrôler certes syntaxiquement mais aussi sémantiquement les problèmes. Dans l'usage français, seule la validation syntaxique est prise en compte. Il nous faudrait aussi prendre en compte la dimension sémantique, de façon non anecdotique[7], dans nos enseignements.

CONCLUSION

Notre ambition était de chercher des motivations internes pour les 'problèmes pour chercher'. Nous avons en réalité étudié les problèmes autres que ceux qui engagent vers de nouvelles connaissances (problèmes d'introduction) ou les entraînent et les exercent (problèmes d'application ou exercices) et essayé de poser les jalons d'une organisation de ces problèmes.

Tout problème donné à l'école doit engager des connaissances mathématiques, soit parce qu'elles seront sous peu pointées comme savoirs (Conne) et exercées, soit parce

[6] Voir dans ces mêmes actes la communication de C.Lemonidis.

[7] On sait que le faire de façon anecdotique conduit à une rupture du contrat tacitement passé avec les élèves et reste peu significatif et peu efficace.

qu'elles sont supposées déjà là, suite au processus d'enseignement. Les problèmes dont il est question dans cette étude sont du second type.

Par exemple, en CP, un problème de commande de gommettes conditionnées par bandes de 5 gommettes pour « habiller » une fleur est déjà légitime dans la mesure où il réinvestit le nombre : il apprend aussi à distinguer les grandeurs des nombres qui les mesurent (2 bandes, c'est aussi 10 gommettes alors que 2 n'est pas 5) et contribue à l'apprentissage de la numération décimale (2 dizaines, c'est aussi 20). Il peut faire entrer dans *une démarche modélisante* en apprenant à faire des dessins épurés. Bien sûr il est nécessaire que les professeurs des écoles aient bien été informés de ces objectifs afin qu'ils l'exploitent dans ce sens.

Il nous semble important que l'élève rencontre des problèmes dans lesquels il va avoir l'occasion de réinvestir des connaissances supposées déjà là, lors de raisonnements plus complexes qu'inférer une seule déduction : combiner plusieurs déductions, combiner des informations aboutissant à des déductions licites, construire des démarches expérimentales. Ces catégories de raisonnements pourraient être une façon de décrire problèmes complexes et problèmes pour chercher.

Il nous semble important que l'élève soit confronté à l'importance des validations dans les mathématiques et à des validations diverses, notamment celles qui l'engageront dans une dynamique de preuve.

Enfin dans la perspective du socle commun scientifique, il nous semblerait raisonnable d'intégrer, aussi dans les mathématiques du cycle 3, des problèmes propices à un démarche modélisante et des problèmes 'réalistes' pour former les élèves à un apprentissage critique de la modélisation.

BIBLIOGRAPHIE

ARSAC, G., GERMAIN, G., & MANTE, M. (1988). *Problème ouvert et situation problème.* Lyon: IREM de Lyon.

BONAFE F., CHEVALIER A., COMBES M.C. et alii. (2002) *Les narrations de recherche de l'école primaire au lycée*. IREM de Montpellier.

BROUSSEAU G. (1970-1990, édition 1998) *Théorie de situations didactiques*. 25-43. Grenoble : La Pensée Sauvage

BLOCH I. (2005) Dimension adidactique et connaissance nécessaire. Un exemple de « retournement » d'une situation. *Sur la théorie de situations didactiques*. 143-152. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHAPPAZ J., MICHON F. (2003) Il était une fois la boîte du pâtissier. *Grand N* n°72. 19-32.

CHARNAY R. (2006) Rallyes mathématiques : quel intérêt ? *Grand N* **78**. 53-62.

CONNE F. et BRUN J. (1992) Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* **12/2-3**. 221-270.

COPPE S., HOUDEMENT C. (2002) Réflexions sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire. *Grand N* **69**. 53-63.

DOUADY R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des mathématiques,* **7/2.** 5-32.

DUPUIS C., GRUGNETTI L. (2003) Le nez de Pinocchio, un problème de mathématiques «inverse». *Grand N* **72**. 33-40.

ERMEL (1977 à 1982). *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire (CP au CM2).* Paris : Hatier.

ERMEL (post 1991). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes (CP au CM2).* Paris : Hatier.

ERMEL (1999) *Vrai ? Faux ?... On en débat*. Paris : INRP

FAYOL (1990) *L'enfant et le nombre*. Lausanne : Delachaux et Niestlé.

GLAESER, G. (1976). *Le livre du problème. Pédagogie de l'exercice et du problème*. Paris : Editions CEDIC (second edition).

GODOT K. (2006) La roue aux couleurs : une situation recherche pour apprendre à chercher dès le cycle 3. *Grand N* **78**. 31-52

GR IREM ELEM BESANÇON (2005) La conduite en classe d'une situation de recherche : un exercice périlleux. *Grand N* **76**. 65-74.

GRAND N (2003) N°spécial *Points de départ*. IREM de Grenoble.

GUEUDET G., LE POCHE G. (2006) Séquences de résolution de problèmes complexes. *Grand N* **77.** 35-54. Hersant M. (dir) 2006 *Des problèmes pour chercher à l'école primaire*. IUFM des Pays de la Loire et IREM de Nantes.

HERSANT M. dir (2006) des problèmes pour chercher à l'école primaire. IREM des Pays de Loire.

HOUDEMENT C. (1998) Le choix des problèmes pour la résolution de problèmes. *Grand N* **63**. 59-77.

HOUDEMENT C. (2003) La résolution de problèmes en question. *Grand N* **71**. 7-23

IGEN MENESR (juin 2006) *L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire*. En ligne sur http://www.education.gouv.fr/cid4172/l-enseignement-des-mathematiques-au-cycle-3-de-l-ecole-primaire.html

JULO J. (1995) *Représentation de problèmes et réussite en mathématiques*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes

JULO J. (2002) Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N* **69**. 31-52.

LEPINE L. (1996) Tout problème ouvert n'engage pas nécessairement une bonne recherche. *Grand N* **60.** 43-55

MEN (2005) Les problèmes pour chercher. *Documents d'accompagnement Mathématiques*. SCEREN CNDP

PEAULT H. (1992) Vers une pratique collective des mathématiques. *Grand N* **51**. 5-65.

THOMAS Y. (…) Gommettes et étiquettes, des problèmes pour chercher. *Grand N* (à paraître)

TOUSSAINT N., FROMENTIN J. (2006) *Fichier Evariste Ecole*. Brochure APMEP **175**

VERSCHAFFEL L., GREER B. & DE CORTE E. (2000) *Making sense of word problems*. Lisse (Netherlands) : Swets & Zeitlinger Publishers.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 10/2.3, 133-170.

WEIL-BARAIS A. (1993) *L'homme cognitif*. Paris : PUF

ANNEXE 1 : LISTE DES PROBLEMES CYCLE 3 ÉTUDIES

1) Le mobilier de l'école. Une entreprise a expédié trois chargements de 300 kg chacun pour équiper en mobilier une école. Le premier chargement contient 15 tables et 30 chaises. Le second contient 25 tables. Le troisième contient 10 tables, 20 chaises et 5 armoires. Combien pèse une chaise, une table, une armoire ?

2) Luc et Marc lancent chacun trois fléchettes dans une cible (dessin cible à deux zones). Luc met deux flèches au centre et une dans la couronne, il obtient 22 points. Marc obtient 17 points avec une fléchette au centre et deux dans la couronne. Quelles sont les valeurs des zones ?

3) Jo, Léa et Toto ont lancé des flèches sur la même cible (dessin de trois fois la même cible à trois zones : A centre puis couronne B puis couronne C) : Jo : 33 points 2A, 5C // Léa : 39 points 2A, 1B, 5C // Toto : 18 points 2B, 2C. Nombre de points que chaque zone permet de marquer.

4) Deux lettres différentes représentent deux chiffres différents. S vaut 2, il n'y a pas de 9, M est plus grand que T : MOI + TOI= NOUS (en colonne).

5) Neuf chercheurs dont le chef se répartissent 180g, le chef prenant une double part. Combien de grammes d'or recevra le chef ?

6) Dimitri, Thierry, Oscar comptent leurs billes à la fin de la partie. Sandrine en a presque 100. Oscar en a le quart de Sandrine. Thierry en a le tiers d'Oscar. Et Dimitri en a la moitié de Thierry. Combien en ont-ils à eux quatre ?

7) Paul a pesé ensemble deux dictionnaires identiques et trois livres de mathématiques eux aussi identiques. La balance marque 3 kg 300 g. Valérie lui a pesé cinq livres de mathématiques identiques à ceux de Paul. La balance marque 1 kg 500g. Quel est le poids d'un dictionnaire ?

8) Un sac contient 12 bonbons rouges et 8 bonbons verts. Mais ces bonbons sont enveloppés d'un papier doré si bien qu'on ne peut pas voir leur couleur en les prenant. Combien de bonbons Laurent Outan doit-il prendre au minimum pour être sûr d'en avoir deux de la même couleur ? De couleurs différentes ?

9) Nous sommes lundi 11 juin 2007. Dans 70 jours, nous serons le …. ?

10) Dans la tirelire de Juan, il n'y a que des pièces de 10 centimes, de 20 centimes et de 50 centimes. Il y a autant de pièces de chaque sorte ; en tout cela représente 8 €. Combien de pièces de chaque sorte ?

11) Pour un malabar et un croissant Fatma a payé 1 € 5 c. Pour deux croissants, Lucas a payé 1 € 60 c. Trouve combien coûte un malabar.

12) 1 sucette et 2 petites brioches coûtent 2 €. 5 sucettes et 2 petites brioches coûtent 4 €. Quel est le prix d'une sucette ? Quel est le prix d'une petite brioche ?

13) Lucie veut prendre 4 litres d’eau dans un récipient. Elle en possède que deux pots, l’un pouvant contenir 3 litres, l’autre pouvant contenir 5 litres. En utilisant seulement ces deux pots, explique comment elle peut mesurer 4 litres.

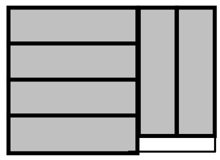
14) Dans la classe du Cours Moyen de Werner, tout le monde est sportif ! Lorsqu’on demande « qui fait de l’athlétisme ? », 16 mains se lèvent ; à la question « Qui fait du basket ? », 10 mains se lèvent. Chaque élève a levé la main au moins une fois, et quatre élèves ont levé la main deux fois. Combien la classe compte-t-elle d’élèves ?

15) Trouve trois nombres entiers consécutifs dont la somme est 48 ; 87 ; 120 ; 97 ; 612… (99, 3429, 56) ET Donne des nombres qui sont la somme de trois nombres entiers consécutifs et des nombres qui ne peuvent pas être la somme de trois nombres entiers consécutifs. Justifie ta réponse.

16) Combien y a-t-il de poules et de lapins dans votre ferme ? Tu vas le trouver toi-même : lorsque je rassemble toutes les poules et les lapins de la ferme, il y a en tout 25 têtes et 64 pattes.

17) Un avion gigantesque contient 150 places assises en première classe, 400 en seconde et 4 dans le cockpit. L’équipage qui doit rester assis au décollage et à l’atterrissage, est composé d’un commandant de bord, un copilote, 8 hôtesses et 6 stewards. Combien l’avion peut-il prendre de passagers ?

18) Sur une plaque de carton rectangulaire de 8 cm sur 11 cm.
Kid a dessiné des vignettes rectangulaires toutes identiques.
Sur ce schéma on indique comment il s’y est pris.
Calcule les dimensions d’une vignette.



19) Antoine ouvre à fond le robinet et remplit la baignoire en 3 minutes. Bain pris, il la vide en 6 minutes. Cléopâtre fait alors couler son bain, mais elle laisse la vidange ouverte. Au bout de combien de temps la baignoire commence à déborder ?

20) Deux fûts contiennent ensemble 2800 litres de cidre. On a tiré 300 litres de l’un et 100 litres de l’autre. Il reste alors la même quantité dans chaque fût. Quelle est la contenance de chaque fût ?

21) Tu disposes de deux boites vertes, trois boites rouges et 50 jetons. Il faut mettre les 50 jetons dans les boites ; aucune boite ne doit être vide et il doit y avoir le même nombre de jetons dans les boîtes de la même couleur.

22) Pour le nombre 10, quel est le plus grand produit possible des termes d’une de ses décompositions additives ? Même question pour le nombre 14.

23) Le pépiniériste a vendu ce matin ce matin 420 arbres ; des poiriers, des cerisiers, et des pommiers. Il a vendu 45 poiriers de plus que de cerisiers ; 30 pommiers de plus que de cerisiers. Combien d’arbres de chaque espèce a-t-il vendus ?

24) Je dois scier un petit tronc d’arbre en six morceaux. Il me faut une minute pour le scier en deux morceaux. . Combien de temps pour le scier en six morceaux ?

ANNEXE 2 : REFERENCES DE LA LISTE DE PROBLEMES

ERMEL (post 1995) Apprentissages mathématiques et résolution de problèmes CE2, CM1, CM2. Hatier

Toussaint N., Fromentin J. (2006) *Fichier **Evariste** Ecole*. APMEP n°175

(1995) *Les **récré**ations mathématiques d'Evariste et de Sophie*. Editions Pôles

Revue **Grand N** IREM de Grenoble.

***Cap** maths* CE2 (2002) *Cap maths* CM1 (2003) *Cap maths* CM2 (2004) Editions Hatier

***Euro**maths* CE2 (2003) *Euro Maths* CM1 (2006) *Euro Maths* CM2 (2006) Editions Hatier

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ERMEL CM2 et *Grand N* 77	*Euro CM1* p198	*Cap CM1* p194	*Evariste* 61	*Evariste* 98	*Evariste* 62	*Cap CM1* p194	*Evariste* 54	*ERMEL CM* t 1 1981 p44	*Cap CM1* p178	*Cap CM1* p178	*Cap CM2* p100

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Grand N 60 p44	*Récré* p19	*Euro CM1* p161 *CM2* p194	*Cap CM1* p113	*Récré* p44	*Euro CM2* p161	*Récré* p45	*Euro CM2* p121	*Euro CM1* p198	*ERMEL CM1* p 74	*Euro CM2* p31	*Evariste* 59

ANNEXE 3 : PRODUCTIONS DES PARTICIPANTS

Groupe 1

Le problème pour chercher…

- Pourquoi on le donne ?
  - Qu'est ce qu'on fait travailler ?
  - Qu'est ce qu'on apprend ?
    - Construire une représentation du problème.
    - Construire une stratégie de résolution.
    - Rédiger et/ ou communiquer la (les) solution(s).

Groupe 2

→ Reprise des programmes
L'élève ne dispose pas de technique (solution) éprouvée et plusieurs démarches sont possibles.
En quelque sorte l'objet de savoir en jeu n'a pas été institutionnalisé (et ne fait donc pas partie de la culture de la classe).
→ l'objectif : « l'activité de recherche » ; le présupposé : « on apprend à chercher par frayage ».

Groupe 3

3 critères possibles pour retenir un problème :

- plusieurs approches possibles (tâtonnement, logique…) ;
- TENTATION : une solution qui se révèle fausse ;
- existence ou non de plusieurs solutions (0,1…).

→ conscience des connaissances et méthodes en jeu (pour le prof et pour les élèves) ?
→ problème de la constitution d'une mémoire des problèmes ?

Groupe 4

- Le texte est limpide et incitatif.
- Chaque élève doit être persuadé qu'il peut trouver (s'il cherche).
- Le problème doit être résistant aux premières tentatives amorcées.
- L'activité de recherche est nécessaire et la solution doit avoir une portée large (ne pas s'appuyer uniquement sur une astuce).

Groupe 5

Question 1
Est-ce qu'un problème dont la résolution « experte » est la résolution d'un système linéaire d'équations doit être systématiquement considéré comme étant un problème pour chercher ?
Question 2
Le problème pour chercher est-il nécessairement un problème nécessitant de faire des essais ?
Question 3
Le problème pour chercher est-il nécessairement un problème qui nécessite une représentation ?

Groupe 6

Des points de vue différents dans le groupe
Point de vue n°1 : certains problèmes (ex le n°1) de la liste donnée, bien que très difficile pour les élèves, ne nous semblent pas relever de la rubrique « problèmes pour chercher » des DA 2005 car ils correspondant à l'application d'une notion tout à fait travaillée (la division) : c'est un problème de réinvestissement.
Point de vue n°2 : le problème n°1 est un « problème pour chercher » complexe.

Le problème 22 paraît (à la majorité des participants du groupe) un problème pour chercher.

EXEMPLE D'UNE SITUATION DE FORMATION POUR ABORDER LA STRUCTURATION DE L'ESPACE AUX CYCLES 1 ET 2

Pascale MASSELOT
MCF, IUFM de VERSAILLES
DIDIREM
PMasselot@aol.com

Isabelle ZIN
PIUFM, IUFM de VERSAILLES
zinisa@free.fr

Résumé
Trop souvent, sur le terrain, le travail sur la structuration de l'espace se borne à une leçon de vocabulaire. Il nous semble particulièrement difficile de sensibiliser les enseignants à la complexité des apprentissages de certaines notions relatives à la structuration de l'espace. Nous avons donc élaboré une situation visant à atteindre cet objectif.
Nous avons proposé au cours de cet atelier, d'une part de la « mettre à l'épreuve » et d'autre part, d'en repérer les effets à travers l'analyse des comportements de différents publics.

Après avoir rappelé nos objectifs de travail, nous présentons plusieurs phases de la situation de formation ; cette description étant accompagnée d'un certain nombre de commentaires. Nous revenons ensuite sur certains points ayant fait l'objet de discussions au cours de l'atelier et avant de conclure, nous complétons par la présentation succincte de l'utilisation de cette situation et des prolongements de ce travail envisagés par des maîtres formateurs dans leur classe de PS et de GS.

I – NOS OBJECTIFS DE TRAVAIL

I – 1 Dans l'atelier

Nos objectifs de travail dans cet atelier sont d'enrichir, d'approfondir, de faire évoluer, de critiquer… une situation de formation sur un thème difficile à appréhender par les enseignants car différents registres sont à considérer et certains restent des points aveugles dans les programmes.

La narration de cette situation[1] se révèle difficile et risque de masquer certains aspects. Il nous apparaît indispensable de la vivre, mais aussi de se regarder faire, voire de

[1] Comme nous l'a confirmé la rédaction de cet article qui visait à rendre compte de ce qui s'était effectivement passé au cours de l'atelier

verbaliser ses actions et d'observer ses pairs pour repérer les prises d'indices, et prendre conscience que « l'on n'est pas tous pareils » !

Dans un premier temps, les participants ont donc vécu une partie des situations proposées en formation pour ensuite les analyser d'un point de vue mathématique (notamment en termes de modélisation) et du point de vue de la formation.

Dans un second temps, à partir de la présentation d'extraits d'enregistrements de séances effectives (avec un groupe de PE2, dans une classe de PS et une classe de GS), les participants ont été conviés à identifier des apports et des limites de ce scénario, les différentes questions qu'il fait émerger, en quoi il peut favoriser (pour le formateur) l'accès à un certain nombre de "représentations" des enseignants sur les mathématiques, sur les élèves et leurs compétences ...

I – 2 En formation

En mettant en situation les stagiaires, nous voulons essentiellement faire émerger un ensemble de questionnements liés à la structuration de l'espace : la pluralité des difficultés à reproduire une configuration proposée, les variables didactiques qui en découlent, la diversité des démarches utilisées, les difficultés à lever certaines ambiguïtés et/ou implicites dans le vocabulaire utilisé…

Dans le même temps, les stagiaires peuvent s'en inspirer pour élaborer des activités diverses à proposer en classe, en maternelle, voire au delà.

II – MISE EN SITUATION

II – 1 Description des différentes étapes de la situation de formation

Il est important de préciser que l'organisation de l'espace doit permettre aux participants d'avoir plusieurs angles de vue différents, en se trouvant autour[2] des scènes à analyser ou à reproduire.

II – 1.1 Le matériel

Des objets miniatures (issus des jeux de la marque Playmobyl®) sont ici utilisés :

- Trois personnages : un clown (en deux exemplaires), une dame à chapeau, un bonhomme à casquette

- Trois objets : un bac cylindrique faisant office de poubelle, 1 table, 1 chaise

[2] disposition en rectangle par exemple

Des accessoires complémentaires, en vraie grandeur, en relation avec ces objets, sont à prévoir : un nez de clown, un grand chapeau de dame, une casquette, ainsi qu'une chaise, une table et une poubelle.

II – 1.2 Les différentes phases du déroulement[3]

Dans chacune des phases, nous distinguons deux types de participants : les « observateurs » qui doivent repérer les différentes prises d'indices et inférer les procédures utilisées et les « acteurs » qui travaillent « en métacognition », c'est-à-dire qu'ils se « regardent » réfléchir, choisir leurs procédures …pour ensuite faire part de

[3] voir annexe 1 pour la description complète de la situation de formation

leurs procédures effectives. Il est important que chaque participant soit acteur à un moment de la séance.

Situation S1 : Prises de repères : Repère local, global, par rapport à soi, à l'autre…

Un « acteur 1 » (A1) pose le clown Playmobyl® sur sa table – pas « juste » devant lui. Il est alors demandé à un « acteur 2 » (A2) de « faire pareil » avec l'autre clown, A1 et A2 restant à leur place.

On distingue trois étapes pour cette situation qui est donc répétée trois fois en changeant d'acteurs. Au cours de la première étape, les deux acteurs sont orientés de la même façon, c'est-à-dire qu'ils « regardent dans la même direction ». Pour la deuxième, A2 est tourné d'un quart de tour par rapport à A1. Et pour la troisième étape, les deux acteurs sont face à face.

Premières observations :

Les transformations géométriques sont évoquées pour la première étape (translation). Dès la deuxième[4]étape, un débat s'engage : qu'entend-on par : « faire pareil » ?

Il est alors nécessaire de revenir sur les différents types de repères à considérer : soi-même, la table, un repère fixe dans la salle… et de lever les implicites en ayant pris conscience de tout ce que cela change. On convient alors de placer le clown par rapport à soi (au même endroit sur la table et orienté de la même façon par rapport à soi).

On remarque, en général à la deuxième étape, que A1 essaie (sans qu'on le lui ait demandé) de positionner le clown dans une certaine attitude pour que cela devienne plus difficile : un bras levé, tête tournée… Les deux dernières étapes font apparaître, au moment de la verbalisation les notions de droite et gauche (de l'acteur).

Deux grandes procédures émergent :

- s'imaginer à la place de A1 pour avoir le même point de vue sur le clown,

- analyser la position du clown par rapport à A1 (le clown est à sa droite, regarde vers l'extérieur…)

Cette première situation permet de montrer les différentes procédures utilisables et utilisées : on ne passe pas obligatoirement par le langage, une image mentale peut suffire, bien que les notions de gauche – droite, devant – derrière, près –loin, intérieur – extérieur soient évidemment en jeu.

Le choix d'un personnage articulé à la place d'un objet non articulé et/ou non orienté, n'est pas anodin : il faut à la fois prendre des indices pour repérer la place du clown sur la table, mais aussi pour reconnaître sa position (pied droit en avant, tête tournée vers A1…).

[4] La question ne se pose pas à la première étape.

Situation S2 : Visualisation globale ou locale d'une configuration

Cette situation se décompose en trois phases. Au cours de chacune d'elles, un « acteur 1 » (A1), différent à chaque fois, sort de la pièce.

<u>Première phase : Autour d'un objet orienté</u>

Une configuration du matériel Playmobyl® est proposée : les trois personnages autour de la chaise

Une chaise est placée à l'intérieur du rectangle constitué par les « observateurs ». Cette chaise (chaise ordinaire d'une salle de classe) n'est pas dans la même direction que la chaise de la « maquette ».

Trois « acteurs » reçoivent un attribut de chaque personnage : chapeau, casquette, nez rouge. Ils doivent tout d'abord se placer « de la même façon » (reproduire la configuration) que le personnage auquel ils s'identifient. La Dame à chapeau (D), le Bonhomme à casquette (B) et le Clown (C) se positionnent.

L'animateur pose la question : « Est-ce que tout le monde est d'accord ? » Quelques ajustements sont alors proposés : plus loin, plus près, B plus vers D, … Puis la validation[5] se fait en pivotant la table sur laquelle est posée la maquette pour que les deux chaises (celle de la salle de classe et celle de la maquette) soient orientées dans la même direction.

La maquette est remise dans sa position initiale et l'animateur récupère les attributs de B, C et D qui eux, restent en place. A1 est alors invité à entrer et il doit identifier les personnages en restituant à chacun son accessoire.

[5] En formation, il est demandé aux stagiaires de proposer des moyens de validation.

Premières observations

On remarque alors que A1 lors de ses prises d'indices utilise beaucoup son corps, pour se tourner comme les Playmobyl®, ou bien pour repérer les places de chacun en s'identifiant à eux.

Deux repères sont privilégiés :

- celui que constitue la chaise : B, C et D sont placés par rapport à la chaise

- un des personnages : celui-ci est d'abord situé par rapport à la chaise, les deux autres sont alors situés par rapport à lui.

On peut faire émerger la spécificité de la chaise qui est un objet orienté.

Deux grands types de procédures apparaissent :

- avoir une vue d'ensemble, « extérieure », de la scène

- se situer « à l'intérieur de » la scène en prenant le point de vue de l'un des personnages.

Deuxième phase : Autour d'un objet non orienté dans une configuration irrégulière

La même situation est proposée en remplaçant la chaise par une poubelle, l'un des personnages tournant le dos à la poubelle.

D'emblée les acteurs B, C, D s'orientent dans la salle de façon identique aux Playmobyl®. L'animateur modifie alors la position de C, les autres n'ont plus qu'à effectuer la même rotation que C autour de la poubelle. A1 qui a été observateur au cours de la phase précédente, entre.

Premières observations

Trois repères sont évoqués :

- le positionnement des personnages face ou dos à la poubelle

- la distance par rapport à la poubelle

- les personnages les uns par rapport aux autres

Apparaissent alors les notions d'angle, de sens de rotation (sens des aiguilles d'une montre), la poubelle induisant cette rotation. Le sens de rotation permet de positionner B, C, D les uns par rapport aux autres.

Le fait que la poubelle soit un objet « non orienté » (pas de « droite » ni de « gauche »…) oblige les participants à ne pas utiliser la poubelle comme repère de la configuration proposée.

Au lieu d'orienter différemment l'un des personnages par rapport à la poubelle, on aurait pu jouer sur la distance avec la poubelle, ou avec l'un des autres personnages.

On voit que la présence de la poubelle peut induire des procédures liées à une vue globale de la situation, ou bien liées à l'idée de rotation autour de cet objet. Sans la poubelle, des procédures liées aux repérages des personnages les uns par rapport aux autres auraient davantage émergé.

Troisième phase : Autour d'un objet non orienté dans une configuration régulière

La même situation est proposée avec au centre la poubelle, mais tous les personnages regardent maintenant la poubelle et la configuration est telle que BCD constitue un triangle équilatéral de centre de gravité P (poubelle). L'animateur place l'acteur clown C pour qu'il ne soit pas dans la même direction que celui de la configuration Playmobyl®.

Premières observations

A1 entre et échoue plusieurs fois avant de retrouver les personnages. Ainsi est mis en évidence le fait qu'il manque un repère : la poubelle ne suffit plus. Un indice supplémentaire doit être donné. Emerge alors le caractère non orienté de l'objet poubelle.

Cette rupture amène à travailler sur la notion d'objet orienté ou non, de repère s'appuyant sur les distances et les angles lorsque ceux-ci ne sont pas égaux. Ce faisant, les spécificités du triangle équilatéral peuvent émerger … Il s'agit de prendre conscience que la régularité de la configuration fait émerger des notions de repérage différentes : en excluant près-loin par exemple, on incite l'acteur à utiliser les notions de gauche-droite, devant-derrière, sans nécessairement les verbaliser.

Une réflexion s'engage également sur la nécessité de la présence de la poubelle.

Dans le cas d'une configuration faisant intervenir un triangle non équilatéral, en présence de la poubelle, les angles et les distances entre les personnages et la poubelle sont privilégiés. Ici A1 a utilisé une image mentale dans laquelle il se positionne à la place de la poubelle. D'autres se positionnent à la place d'un des personnages en positionnant les autres par rapport à eux.

Alors que l'absence de P fera émerger une prise d'indices sur les angles et les longueurs des côtés du triangle lui-même. A1 voit la configuration générale du triangle ou bien se positionne à la place de l'un des personnages.

Tous les modèles mathématiques qui permettent de gérer l'orientation sont convoqués.

Situation S3 : Parcours visualisé à reproduire

Un « acteur 1 » (A1) reçoit les éléments du matériel Playmobyl® : un personnage, une table, une chaise et une poubelle. Il les dispose devant lui puis fait effectuer dans cet environnement, un parcours à un des personnages miniatures. A1 gère ainsi un certain nombre de paramètres de la situation. Simultanément un « acteur 2 » (A2) doit effectuer le même déplacement « autour » des mêmes objets réels disposés de la même manière (les uns par rapport aux autres) mais selon une orientation globale différente.

Premières observations

La continuité du mouvement induit une prise d'indices relativement simple dès lors que le démarrage est correct, le repérage se faisant de proche en proche. Les notions de gauche, droite, entre, devant, derrière, dessus (dessous) sont travaillées sans vocabulaire. Une des variables peut être, en arrêtant le mouvement, de demander à A2 de dire où il est.

Situation S4 : Parcours visualisé à décrire – Parcours décrit à reproduire

Il s'agit de la même situation que S3 mais A2 ne voit pas le déplacement choisi par A1 et c'est un « acteur 3 » (A3) qui lui donne des instructions orales pour l'effectuer (A3 voit A1 et aussi A2).

Premières observations

Cette situation amène à percevoir « en direct », les limites du vocabulaire, puisque A2 exécute instantanément les ordres de A3. Certains termes, comme par exemple « entre », ne sont pas ambigus, mais pour d'autres, plusieurs interprétations sont pertinentes. Citons pour exemples la distinction entre « à droite de » et « à la droite de»[6] : « passe à droite de la chaise » / « passe à la droite de la chaise ». On peut attribuer à la chaise, en tant qu'objet orienté, une droite qui serait la droite de la personne assise

[6] Expressions qui selon qu'elles s'appliquent à un objet, ou une personne seront encore comprises différemment

(normalement !) sur cette chaise. De même avec « devant » : « devant » la table[7] / « le devant de » la table, qui selon l'objet mais aussi selon l'endroit d'où on le voit, peut être entendue différemment : « devant la table » / « devant l'ordinateur ». Pour une personne, se placer « devant la table », peut s'interpréter comme « se mettre dos à la table » et dépend souvent de l'endroit d'où l'on vient, alors que se placer « devant l'ordinateur » est interprété comme se placer « face à l'ordinateur »…

Apparaît alors une différence dans les difficultés du vocabulaire entre le statique et le mouvement, les implicites n'étant pas les mêmes : se placer devant le bureau dépend d'où l'on vient, ou de ce que l'on veut y faire…

De même, lorsque A3 utilise des verbes, comme « tourner », « pivoter » et constate que A2 ne se comporte pas exactement de la manière attendue, il apporte des compléments : « sur place », « d'un quart de tour » et affine ainsi sa consigne. Reste parfois des implicites (comme le sens de rotation) induits par le mouvement.

Pendant la description des actions, on observe souvent des changements de repères « passe à gauche de la chaise » / « laisse la chaise à ta droite », à l'insu de celui qui décrit, induit par la situation et la nécessité de se faire comprendre.

Cette situation permet aussi de voir apparaître des notions relatives comme « près / loin », « plus près de ».

Il s'agit ici de sensibiliser à l'ambiguïté du vocabulaire, des implicites… et de prendre conscience, de manière plus large, de la nécessité d'un effort de la part de l'enseignant qui doit dire plus de choses pour limiter les malentendus, et surtout en tenir compte lorsqu'il observe un décalage entre la tâche effective et la tâche attendue de ses élèves.

On constate que des adultes utilisent plus spontanément des repères internes aux objets ou à la configuration alors que des enfants, peu familiers avec les termes comme « gauche / droite », auront recours à des prises de repères externes (repères absolus).

Situation S5 : Configuration à décrire – Configuration décrite à reproduire

Une saynète est constituée avec les objets miniatures (personnages et objets). Un « acteur 1 » (A1) donne des indications pour qu'un groupe d'acteurs qui ne la voient pas se placent de la même manière.

Premières observations

De nombreux ajustements se révèlent encore nécessaires pendant la mise en place des acteurs. Ici, alors qu'en S2, seul le corps renseignait sur la procédure utilisée par celui qui cherchait sa place ou par celui qui identifiait les personnages, c'est le vocabulaire qui renseigne sur la procédure utilisée par A1.

---

[7] si cette expression est appliquée à une personne, c'est plus « clair »

Situation S6 : Ecrit de mémorisation d'un parcours : les mots, les schémas, les écrits mixtes

Deux « acteurs » (A2 et A3) sortent. Un « acteur 1 » (A1) effectue lentement un déplacement parmi les objets (table, chaise et poubelle). Les participants, présents dans la salle, sont chargés de produire « un écrit » qui permettra à quelqu'un (ici A2 ou A3) de reproduire le déplacement. Le document (choix d'un écrit de type texte d'abord, puis d'un second présentant uniquement un schéma) est ensuite utilisé successivement par chacun des acteurs A2 et A3, pour réaliser le parcours.

<u>Premières observations</u>

Avec cette consigne « ouverte », chacun comprend « l'écrit » de façon différente. La question de contrat est soulevée: quel type d'écrit, adressé à qui, s'appuyant sur quel registre, quel niveau … Nous obtenons trois types d'écrit : certains comportant uniquement du texte, uniquement un schéma ou des écrits mixtes mêlant les deux.

<u>Ecrits de type texte :</u>

<u>Ecrit n° 1 :</u>

Elle avance, passe à **droite** de la table, tourne à **gauche** vers la poubelle, laisse la poubelle à **droite**, va **vers** la chaise, passe **devant** la chaise, **tourne autour** de la chaise, va vers la poubelle, laisse la poubelle à gauche, va vers la table, laisse la table à sa gauche.

<u>Ecrit n° 2 :</u>

Passer à droite de la table puis à gauche de la poubelle, s'arrêter à gauche de la chaise, en faire le tour en passant devant, puis se diriger vers la poubelle en passant devant (la laisser sur sa gauche) – Revenir vers la table au point de départ.

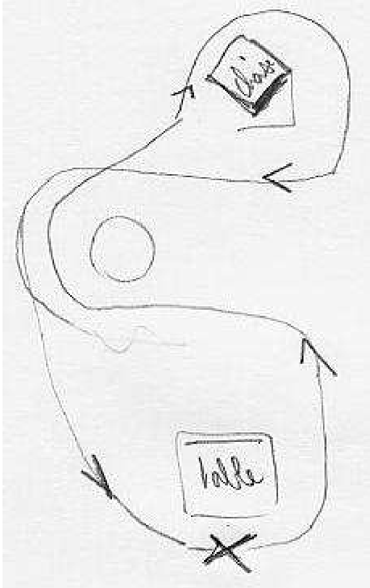
<u>Ecrit n° 3 :</u>

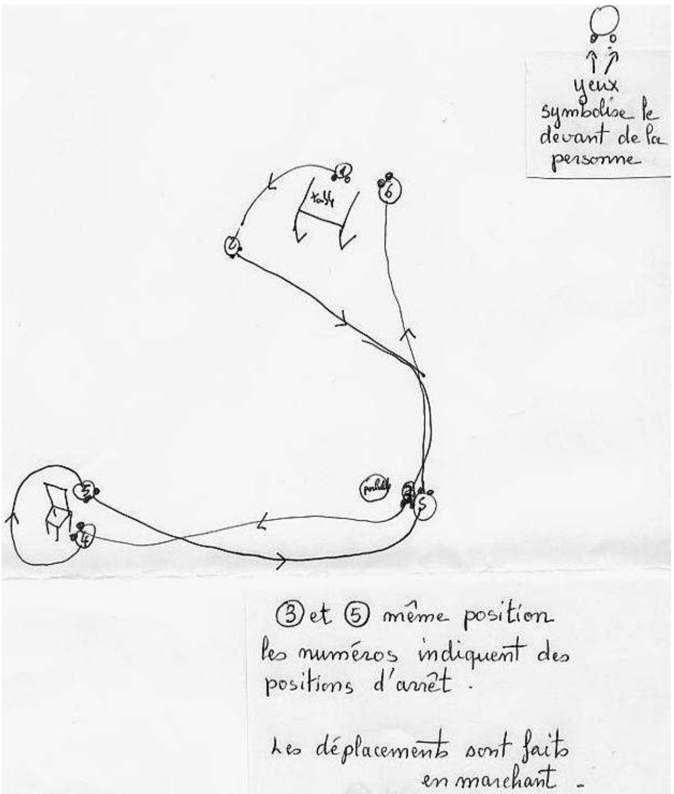
Le clown C part à gauche d'Annie. C avance, passe à la droite de la table. C tourne sur sa gauche en direction de la poubelle, passe entre table et poubelle. C tourne sur sa droite, va vers chaise. C passe à gauche de la chaise. C tourne autour de la chaise. C retourne vers la poubelle par trajet exactement inverse. C passe à gauche de la table.

<u>Ecrit n° 4 :</u>

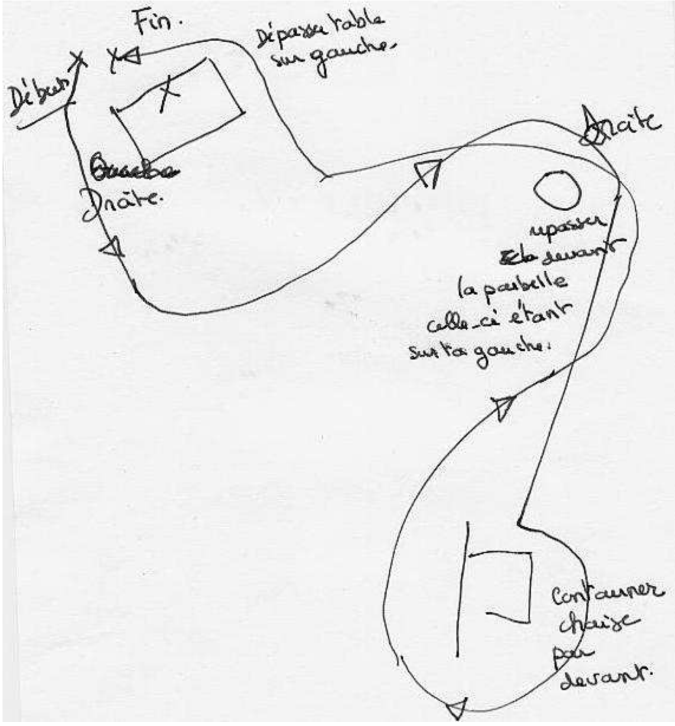
Début : derrière la table – passe à droite de la table, à gauche de la poubelle (entre poubelle et tables proches), vers la chaise, contournée par son devant, passage à droite poubelle (entre poubelle et chaises proches) vers table, passage à sa gauche (entre la table et tables proches).

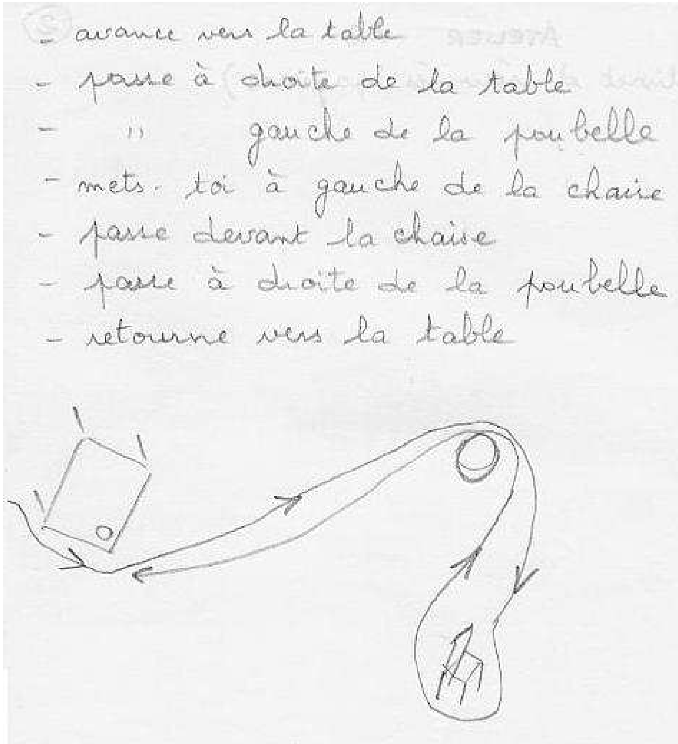
Ecrits de type schéma :





Ecrits mixtes :





Ces écrits, dessins, qui marquent ou non le « rythme » du déplacement (mode de déplacement, pauses …) sont plus ou moins performants et leur validation peut se faire en partie[8] par la reproduction du parcours par A2 et A3, mais aussi par ce que chaque observateur peut dire de ce que son propre écrit a pris en compte.

Le plus « performant » est sans doute l'écrit mixte, mélange de texte et de schéma, qui permet une grande précision, et une rapidité d'exécution.

On voit les limites du schéma, liées aux insuffisances de description de certains mouvements (tourner sur elle même, mouvement sur place, sens du mouvement), du texte insuffisamment précis et très long à rédiger.

Le propos reste axé sur le travail « direct » autour du déplacement et des différents modes de codages mais les quelques exemples d'écrits mis en annexe montrent qu'un prolongement très riche dans le cadre de la maîtrise de la langue peut s'engager[9].

---

[8] analogie avec les situations de communication utilisées en géométrie

[9] voir par exemple l'article de L. Leroyer dans Grand N n°75

II – 2 Présentation de la situation au cours de l'atelier et apports des participants

Les situations proposées sont extraites des propositions faites habituellement en formation, et sont ici vécues dans les mêmes conditions ; le matériel est identique.

Cependant, certaines étapes visant à faire émerger les différentes variables didactiques par les stagiaires ont été éludées pour faire ressortir uniquement les grandes phases et les ruptures dans le déroulement proposé.

Il n'est pas toujours facile d'identifier les compétences en référence aux programmes, ni de mettre directement en relation les extraits des programmes (voir annexe 2) avec chacune des situations proposées. Les programmes ne prennent pas en compte certains aspects comme les indices strictement liés au corps, pas nécessairement verbalisés, et pourtant essentiels à la compréhension et à l'apprentissage de ces notions. Le difficile travail d'explicitation, les malentendus ou les implicites liés au vocabulaire ne sont pas évoqués.

Un certain nombre de notions mathématiques intervenant dans le domaine de la structuration de l'espace sont évoquées ainsi que la complexité de certaines situations souvent proposées très tôt dans les classes : points de vue en CP/CE1 ; utilisation de photos, plan de la classe, parcours en motricité (matériel Asco® ou Gym Projet® avec les mêmes objets en miniature), … et toutes les questions de désignation, de codage … Subsistent beaucoup de questions au niveau de l'implicite mais déjà si l'enseignant en a conscience …

Des outils didactiques sont mobilisés dans les analyses : variables didactiques (notamment l'importance du choix des objets « rien n'est anodin… », des changements d'échelles) et analyse a priori, ruptures, obstacles, jeu micro-espace / méso-espace…

Un retour sur les choix globaux du formateur permet d'identifier qu'il vise d'une part, une certaine prise de conscience, en suscitant des interrogations à partir de l'exploration de ces situations, et d'autre part, un changement de regard sur les élèves, sur leurs manières d'assimiler ces notions qui ne s'appréhendent pas de la même façon pour tous[10] et dont l'apprentissage n'est pas seulement fonction du développement de l'enfant mais prend du temps et nécessite une multitude d'expériences. Il ne s'agit pas ici d'une situation d'homologie.

Pour le formateur, chaque étape mais aussi l'enchaînement, la chronologie des situations peut favoriser l'accès à un certain nombre de "représentations" des enseignants sur les mathématiques, sur les élèves et leurs compétences... et les faire évoluer.

---

[10] il nous semble que l'on peut ici faire un parallèle avec les situations qui proposent la réalisation de pliages par exemple.

III – DES UTILISATIONS DE CES SITUATIONS

III – 1. En formation

Cette situation est proposée à des groupes de stagiaires PE2, mais aussi en formation continue. Quelques fois une même situation peut être proposée avec davantage de variantes que nous n'en avons proposées ici, ceci lorsque le groupe a des difficultés à comprendre les enjeux. A chaque expérience et quelque soit le public, les stagiaires ont pris conscience des difficultés que l'on voulait pointer, même si parfois la réflexion reste plus en surface pour les PE2. A chaque fois, des stagiaires sont inquiets, ont peur de ne pas pouvoir résoudre le problème qui leur est proposé. Il est alors très important de les rassurer et d'axer l'ensemble de la séance sur les différentes procédures qu'ils mettent en place pour répondre aux questions posées, qu'ils soient acteurs ou observateurs. Ils voient alors la diversité des stratégies adoptées, ce qui leur permet de mieux analyser leur propre difficulté et de mieux comprendre comment on peut travailler ces points liés à la structuration de l'espace. Un temps important est pris aussi pour réfléchir à la mise en œuvre de la validation des réponses données. Ces validations sont cherchées par l'ensemble du groupe, le formateur pouvant s'appuyer sur les difficultés de certains en leur demandant si les propositions sont pertinentes, c'est-à-dire si leur mise en œuvre les convainc de façon définitive de la validité ou non des réponses. Les stagiaires ont été sensibilisés à l'importance de l'expérience du corps dans ce domaine, préalable à la mise en place du vocabulaire.

III – 2. Avec un groupe de Maîtres Formateurs

Un groupe de maîtres formateurs a travaillé avec nous sur la mise en place de situations similaires dans leurs classes (PS et GS).

A chaque fois, la mise en scène avec le clown[11] a été remplacée par trois personnages de couleurs différentes. Le plus pertinent des dispositifs a été celui où les enfants avaient des dossards de la couleur des personnages.

En PS, nous n'avons expérimenté qu'une partie du processus : 2 ou 3 adultes (ou 2 ou 3 enfants) avec leur dossard se positionnent autour d'une chaise, les groupes de 2 ou 3 enfants autour d'une autre chaise orientée dans le même sens que la chaise initiale doivent reproduire la configuration proposée.

En GS, à partir de cette même situation, la maîtresse a pu faire évoluer l'apprentissage : d'abord en changeant la chaise d'orientation, puis en proposant une configuration Playmobyl® que chaque groupe d'élèves devaient reproduire. Ensuite est venu un travail de représentation sur feuille des configurations possibles. Ce travail a permis l'émergence de code pour schématiser les personnages et la chaise. Les différentes notions travaillées ont été : sur, sous, devant, derrière, près, loin, à côté de. L'expérience a prouvé que le travail initial en salle de motricité a permis à l'ensemble des élèves d'être très à l'aise au bout de deux à trois mois : ils étaient tous capables de reproduire n'importe quelle configuration dans n'importe quelle orientation.

[11] Première phase de la situation S2

IV – CONCLUSION

Le travail engagé dans cet atelier nous a confortées dans l'intérêt, les multiples apports et les limites que nous voyions à cette situation et nous a également permis d'envisager encore d'autres variantes. Il s'agissait aussi pour nous d'engager des échanges sur ce thème sur un plus long terme et nous remercions à l'avance les participants à l'atelier qui, par manque de temps, ont trop peu évoqué leurs propres exemples de situations de formation ou de situations proposées à des élèves de cycle 1 ou 2, et les lecteurs de cet article qui voudront bien apporter leurs propres expériences et témoignages.

ANNEXE 1 : PLAN DE LA SEANCE DE FORMATION

PE2 Maternelle : Structuration de l'espace et du temps

I – Repérage dans l'espace :

La construction de l'espace n'est pas une leçon de vocabulaire

Pour chaque activité, dire quelle est la compétence travaillée :

a) Un stagiaire pose un objet à un endroit, un autre stagiaire doit poser un objet identique pour qu'il soit dans la même configuration par rapport à lui même.

→ Repérer des objets ou des déplacements dans l'espace par rapport à soi

b) Cache-tampon. On cache un objet : un stagiaire doit donner des indications spatiales pour qu'un autre retrouve l'objet.

→ Repérer des objets ou des déplacements dans l'espace par rapport à soi

c) Un stagiaire sort. Des playmobils sont positionnés les uns par rapport aux autres.

Des stagiaires sont positionnés de la même façon, mais pas dans la même orientation par rapport à la pièce. Chercher qui est le clown.

1. avec 3 ou 4 personnages et une chaise
2. avec 3 personnages dont un qui tourne le dos aux autres
3. avec 3 ou 4 personnages et une poubelle, dont un personnage qui tourne le dos à la poubelle

→ Savoir reproduire l'organisation dans l'espace d'un ensemble limité d'objets (en les manipulant, en les représentant)

d) Quatre stagiaires se placent devant le groupe. Chaque stagiaire donne le nom de son personnage. Ils se positionnent les uns par rapport aux autres. Un stagiaire doit reproduire la configuration avec les playmobils.

→ Savoir reproduire l'organisation dans l'espace d'un ensemble limité d'objets (en les manipulant, en les représentant)

e) Une configuration de playmobils est donnée, un stagiaire donne des indications pour qu'un groupe de stagiaires se positionne de la même façon.

→ Décrire des positions ou des déplacements à l'aide d'indicateurs spatiaux en se référant à des repères stables variés

f) Un parcours avec un playmobil est réalisé. Un stagiaire effectue le même parcours en regardant le déplacement du personnage. Les deux parcours n'ayant pas la même orientation par rapport à la pièce.

→ Suivre un parcours décrit oralement (pas à pas), décrire ou représenter un parcours simple

g) Même chose sauf que le stagiaire ne voit pas le déplacement, et un autre stagiaire décrit le déplacement du personnage.

→ Suivre un parcours décrit oralement (pas à pas), décrire ou représenter un parcours simple

h) Un stagiaire sort. Un stagiaire effectue un parcours, incluant une chaise (objet orienté) et une poubelle (objet non orienté) sans rien dire. Puis on fait rentrer le stagiaire, un des stagiaires présents décrit le déplacement, afin que celui qui n'a pas vu sa réalisation puisse le réaliser.

→ Suivre un parcours décrit oralement (pas à pas), décrire ou représenter un parcours simple

i) Même chose mais les stagiaires présents produisent des messages écrits et le stagiaire qui rentre réalise le parcours à partir de ce seul document (plusieurs stagiaires sortent pour comparer les différentes productions).

Mise en forme : Puces et numéros

ANNEXE 2 : EXTRAITS DES PROGRAMMES

Les nouveaux programmes de l'école primaire - Mathématiques

Document d'accompagnement

Vers les mathématiques : Quel travail en maternelle ?

Domaines d'activités

Repérage dans l'espace

L'exploration et la structuration de l'espace sont des objectifs fondamentaux de l'école maternelle. Ils conditionnent la construction de compétences utiles au développement de l'enfant, qu'il s'agisse de la construction de ses repères (spatiaux et temporels), du développement de son autonomie ou encore de ses apprentissages dans les différents domaines d'activités.

La construction des compétences liées au repérage dans l'espace se fait en lien avec le développement des aptitudes sensorielles (vue, toucher, odorat, ouïe, goût) et des facultés motrices et intellectuelles. L'expérience spontanée de l'espace, incontestablement nécessaire, ne saurait à elle seule garantir ces apprentissages. Le recours au langage et la verbalisation des actions réalisées ou des relations utilisées sont indispensables au progrès des enfants. Dans ce domaine, tout particulièrement, les activités papier-crayon ne doivent pas se substituer aux expériences effectuées dans l'espace réel.

L'identification et la connaissance des espaces communs de l'école (salle de classe, salle de jeu, couloirs, cour) permettent à l'enfant de s'y repérer. La possibilité d'explorer de « grands espaces » aménagés (école, quartier) doit également être envisagée. Ces espaces constituent les terrains privilégiés de ses expériences spatiales. L'enfant découvre et occupe ces lieux en se situant par rapport aux « objets » (ou aux personnes) et en situant les « objets » (ou les personnes) les uns par rapport aux autres. Par des déplacements contrôlés, effectués selon des règles à respecter, anticipés et exprimés verbalement avant d'être codés, par des actions finalisées (aménagements, transformations), il devient capable d'investir différents espaces : familiers, proches ou plus lointains.

L'utilisation du langage, la lecture d'images, de photos ou de dessins, leur production à partir de contraintes à respecter, la construction de maquettes (pâte à modeler, légo…), la production de dessins sont, pour l'enfant, autant d'aides à la structuration de l'espace. Ce travail est évidemment à conduire en liaison avec les activités langagières, physiques ou plastiques proposées aux enfants.

En Petite Section, l'enfant explore et agit dans l'espace qui l'entoure. L'enseignant accompagne par le langage ses découvertes et ses progrès. L'aménagement et l'utilisation des coins, les activités dans la salle de jeu, la recherche d'objets cachés ou déplacés conduisent l'enfant à investir différents espaces (la classe, la salle d'évolution, la cour, par exemple).

Les localisations d'abord données oralement par le maître, puis formulées par les enfants eux-mêmes, offrent des occasions de structurer l'espace par rapport à des repères fixes. Elles aident à comprendre et à utiliser des locutions spatiales, en particulier celles qui sont fondées sur des oppositions : proche et lointain, sur et sous (la marionnette est cachée sous la table ou est posée sur la table), dedans et dehors, à côté de et loin de, d'un côté et de l'autre côté…

La structuration de l'espace se construit également dans des parcours d'itinéraires suivant des consignes orales directionnelles (aller vers la porte, monter sur le banc…) et par le récit qui permet de situer les événements de la vie quotidienne dans l'espace et le temps (nous sommes dans la salle de classe, avant nous étions dans la salle de jeux et tout à l'heure, nous serons dans la cour).

La manipulation et la réalisation d'objets ou encore des jeux d'empilement et d'emboîtement (comme la construction de tours avec du matériel modulaire ou avec des cartons) conduisent les enfants à expérimenter l'équilibre, la gravité et à envisager une première approche de la verticalité et l'horizontalité.

Observer, reconnaître, commenter, décrire des photos et des images représentant des espaces connus permettent d'approcher de premières représentations de l'espace. Il est, par exemple, possible de demander à un enfant de se placer dans un endroit de la classe montré sur une photo.

En Moyenne Section, l'espace de l'enfant s'agrandit. Certains jeux obligent à l'expression d'un repérage par rapport à une personne (soi-même ou un camarade) ou par rapport à un objet fixe orienté (devant moi, derrière Thomas, devant la chaise), ou encore à respecter des consignes directionnelles (en avant, en arrière, en haut, en bas, monter, descendre). C'est le cas, par exemple, en motricité lors de jeux collectifs ou de danses.

La confrontation à des problèmes où l'enfant doit communiquer oralement à un autre camarade la position d'un objet caché dans un espace connu l'amène à choisir des repères (orientés ou non) et à utiliser un vocabulaire adéquat pour exprimer la localisation de l'objet par rapport aux repères choisis (près de l'arbre, à côté du banc, sous le tableau, entre les deux fenêtres…) ou pour décrire un espace de son point de vue propre (en haut, derrière le poteau, devant le tableau…). Ce type d'activité oblige à un effort de décentration pour adopter le point de vue d'une autre personne.

Certaines activités visent à initier l'enfant au repérage sur une ligne orientée : un vocabulaire temporel peut alors être utilisé : début, fin, avant, après…

Des jeux comme le Memory aident l'enfant à développer progressivement une mémoire spatiale ou à construire des organisations spatiales plus performantes.

Des activités du type " jeux de Kim visuels" contribuent à développer le recours à des organisations spatiales pour contrôler l'invariance d'une collection : par exemple, dans une configuration d'objets, il s'agit de retrouver celui qui a été déplacé par l'enseignant (sans que les enfants ne soient témoins du déplacement).

Progressivement, l'enfant est amené à reconnaître et à utiliser des représentations d'espaces connus. Par exemple, il peut être invité :

- à réaliser un parcours passant par quatre endroits de la cour qui lui sont indiqués par des photos ;

- à retrouver une cachette indiquée sur une représentation ;

- à communiquer à un camarade un emplacement sur une photo ou sur une autre représentation d'un espace réel.

En Grande Section, les activités décrites précédemment se poursuivent et s'enrichissent. Des espaces plus larges peuvent être explorés. L'enfant améliore la construction de sa latéralité, il repère progressivement sa droite et sa gauche.

Il décrit, de son point de vue, des dispositions plus complexes d'objets ou d'assemblages d'objets, par exemple en vue de leur reconnaissance ou de leur reproduction, en repérant les éléments les uns par rapports aux autres (au-dessus de, devant, à droite de, à gauche de).

Ces situations où il faut décrire des positions dans un espace sont souvent d'une grande complexité, liée à des conflits entre les différents systèmes de repère en présence, notamment celui centré sur le locuteur et celui centré sur la personne ou l'objet qui est observé. Si, sur une image représentant une poupée de face, une fleur est dans la main droite de la poupée, dira-t-on que la fleur est à droite de la poupée ou à sa gauche ? De même, les mots comme devant et derrière ont diverses significations, prenant ou non le point de vue du locuteur : " mets-toi dans la file indienne derrière Yann " ou " cache-toi derrière le buisson "… Il convient donc d'éviter dans un premier temps toute ambiguïté, génératrice de confusion de significations, en choisissant convenablement les espaces et les objets qui sont les supports des situations d'apprentissage. Ainsi, l'enseignant peut poser des questions nécessitant d'orienter l'espace par rapport à une marionnette, à une poupée, à un autre enfant, ce qui amène à comparer son point de vue propre avec celui d'un camarade dans des jeux du type Jacques a dit. Plus tard, au cours des cycles suivants, les élèves seront initiés à cette complexité et amenés à la gérer. Mais, dès la Grande Section, ils sont sensibilisés au fait qu'un même objet ou une même situation peuvent être perçus et décrits de différents points de vue, selon la position des observateurs.

Le " pilotage " d'objets programmables ou d'enfants jouant les robots sur un parcours fixé oblige à une décentration des systèmes de repère sur un « objet » lui aussi orienté et mobile : va en avant, tourne à droite…

Des activités peuvent être proposées dans des espaces plus vastes (cour, école, parc…) comme une course au trésor ou la mise en place d'un parcours. Par exemple, les enfants reçoivent, par écrit, des indications à propos de positions d'objets ou d'itinéraires. Celles-ci s'appuient sur des schémas (premières représentations) où sont identifiés des repères bien connus des élèves (arbres, toboggan…). Puis ils peuvent être amenés à communiquer eux-mêmes des positions ou des trajets à leurs camarades. Ces schémas pourront être par la suite confrontés à des représentations plus conventionnelles (photos, maquettes, plans). Toute première représentation doit ainsi être mise (ou construite) en relation avec l'espace vécu, en tenant compte des modifications d'orientation qui peuvent apparaître. Ainsi, les objets, les déplacements, les actions donnent lieu à des activités de codage ou de décodage lorsque la situation le nécessite : situation de communication, mise en mémoire d'un placement ou d'un déplacement en vue de sa reproduction ultérieure...

Certaines activités peuvent se dérouler dans l'espace particulier que constitue un quadrillage dessiné au sol ou sur papier : déplacements (en utilisant différents types de codage), placement d'objets par rapport à des objets déjà positionnés, reproduction de configurations. Ces activités ne doivent cependant pas constituer l'essentiel des expériences spatiales des enfants. Le codage des cases ou des nœuds du quadrillage est un objectif du cycle 2.

L'utilisation de notices de montage contribue aussi à cette lecture et à cette production de représentations conventionnelles d'actions spatiales.

Les activités dans lesquelles il est nécessaire de passer du plan horizontal au plan vertical (celui du tableau, par exemple) font l'objet d'une attention particulière :

- l'enseignant veille à faire contrôler la conservation des positions relatives, par exemple celles des objets situés sur le sol de la classe et celles de leurs représentations sur un plan dessiné au tableau ;

- cet apprentissage est conduit en lien avec l'apprentissage de l'écrit, au cours duquel les élèves ont à repérer des éléments sur le tableau et à les transposer sur la feuille de papier : les expressions comme en haut, en bas, à droite, à gauche…prennent alors une autre signification (en haut du tableau s'appuie sur la notion usuelle de verticalité, alors que en haut de la feuille se rapporte à l'orientation de la feuille dans le plan horizontal par rapport à la personne qui l'utilise).

Les activités de repérage sur une ligne orientée (avant, après…), de déplacements en suivant des directions (monter, descendre, …) ou une trajectoire (de gauche à droite…) sont également utiles à l'apprentissage de l'écrit.

Le vocabulaire spatial permet également de différencier les lignes ouvertes des lignes fermées et de préciser la notion de frontière.

En arrivant au CP, l'ensemble des compétences spatiales nécessaires aux élèves n'ont pas été construites et des différences importantes peuvent être constatées entre les élèves. Un repérage individuel de compétences doit être réalisé et de nouvelles activités d'apprentissage sont à envisager pour les deux années du cycle 2 (se reporter au programme, au document d'application et au document relatif aux apprentissages spatiaux et géométriques pour le cycle 2).

ANNEXE 3 : ELEMENTS THEORIQUES

Définitions extraites du texte : « L'étude de l'espace et de la géométrie » Guy Brousseau

Le jeu des variantes et des variables de la situation fondamentale de l'espace permet de déterminer au moins trois « conceptions » de l'espace et par conséquent trois « milieux » spatiaux correspondants : le micro-espace, le méso-espace et au moins trois macro-espaces.

Micro-espace : L'enfant construit ses premières expériences spatiales dans la manipulation de petits objets. Par le toucher avec ses mains ou avec sa bouche autant que par la vue, par les mouvements qu'il leur fait subir, il identifie leur consistance, leur forme solide, leurs positions relatives, et leurs propriétés. Le micro espace est le milieu de l'élaboration de la conception du mouvement des objets autres que l'observateur. Il s'agit de conception pas de taille objective des objets. Un pilote d'hélicoptère peut interpréter le sol à ses pieds à l'aide de sa conception micro-spatiale.

Meso-espace : Les situations où l'enfant doit concevoir ses propres déplacements dans un territoire placé sous le contrôle de sa vue, sont l'occasion de développer des représentations différentes de celles du micro-espace et qui préfigurent celles qui seront nécessaires dans le macro-espace.

Macro-espace : Les situations où un sujet doit prendre des décisions relatives à un territoire beaucoup trop grand pour qu'il puisse l'embrasser d'un regard, lui posent des problèmes, entre autres de recollement de cartes et d'incrustation. Pour identifier et retrouver un lieu, établir un trajet, déterminer la forme d'un territoire etc., il est nécessaire de développer des concepts et des moyens spécifiques.

Les formes de connaissances spatiales :

<u>Modèles implicites</u>

La description directe des connaissances spatiales implicites telle qu'elle se manifeste dans les situations d'action spatiale, est pour l'instant hors d'atteinte de nos investigations, malgré les progrès de la neurophysiologie. Sous le nom de vision spatiale, d'images mentales ou de représentations, nous les modélisons donc par l'espace lui-même, tel que nous le percevons et tel que la culture le représente.

<u>Langages</u>

La description de l'espace se manifeste d'abord dans les situations de communication d'informations spatiales. Les messages oraux, écrits ou graphiques se réfèrent à des systèmes de représentations plus ou moins analogiques ou à des langages et des syntaxes plus ou moins arbitraires. La complexité des répertoires utilisables provient de ce que les représentations étant elles-mêmes spatiales, elles se prêtent à toutes sortes de réifications. Parmi les informations spatiales et les images de toutes sortes qu'utilisent les humains, bien peu relèvent de la description géométrique, par contre les transformations que doivent subir ces images sont beaucoup plus souvent de nature géométrique.

Enoncés

Les véritables connaissances sur l'espace se manifestent dans des anticipations ou dans des inférences qui dépassent la perception, la reconnaissance ou la description de l'environnement. Ces connaissances que l'observateur représente par des énoncés peuvent se manifester dans des décisions (théorèmes en actes) ou dans des communications (de questions, d'ordres ou d'informations) mais elles apparaissent clairement au sujet lui-même dans leur fonction de justification d'une prévision qui se substitue à une vérification empirique. Ce genre d'énoncé apparaît dans des types de situations dits de validation explicite ou de preuves.

BIBLIOGRAPHIE

BERTHELOT R. – SALIN M-H. (1992) *Représentation de l'espace chez l'enfant et enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire,* thèse Université de Bordeaux I.

BOLON J. coord. par (1997) *Pourquoi pas des mathématiques à l'école maternelle ?,* Cahier IREM Paris 7, **87**.

BROUSSEAU G. (2000) *Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire : l'étude de l'espace et de la géométrie*, Conférence invitée au Séminaire de Didactique des Mathématiques du Département des Sciences de l'éducation de l'Université de Crète à Réthymon

DOCUMENTS D'ACCOMPAGNEMENT *Vers les mathématiques : Quel travail en maternelle ?*

DOCUMENTS D'ACCOMPAGNEMENT *Espace et géométrie au cycle 2*

LEROYER L. (2005) *S'approprier le vocabulaire spatial et temporel par le « faire et le dire »,* Grand N n° 75, 31-43.

LURÇAT L. (1979) *L'enfant et l'espace, le rôle du corps,* ESF.

LURÇAT L. (1985) *Espace vécu, espace connu,* ESF.

APPRENTISSAGE DES SOLIDES AU CYCLE 3: PROPOSITION ET ANALYSE DE SITUATIONS PLACE DANS LA FORMATION

Jacques DOUAIRE
PIUFM IUFM de Versailles
Equipe ERMEL, INRP
Jacques.Douaire@wanadoo.fr

Fabien EMPRIN
PIUFM, IUFM Champagne Ardenne
Equipe ERMEL
Fabien.emprin@univ-reims.fr

Claude RAJAIN
PIUFM, IUFM Champagne Ardenne
Equipe ERMEL, INRP
Claude.rajain@wanadoo.fr

Résumé
Cet atelier présente des travaux sur les solides et les relations d'incidence issus de la recherche « Rôle de l'argumentation dans les phases de validation en géométrie au cycle 3 » menée par l'équipe ERMEL de l'INRP. La question de l'appropriation par les enseignants, des problématiques et des situations est aussi abordée.

Ces dernières années, l'équipe ERMEL (INRP), formée par des Professeurs d'IUFM et des Maîtres-Formateurs de huit académies a travaillé sur les questions posées par les apprentissages géométriques au cycle 3 de l'école primaire dans le cadre de deux recherches successives : « Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3 » (1998/2001), puis « Rôle de l'argumentation dans les phases de validation en géométrie au cycle 3 » (2001/2004). D'autres recherches récentes, auxquelles ont participé certains des membres de l'équipe, ont eu pour buts, pour l'une, d'expliciter les questions posées par la gestion des mises en commun par les enseignants débutants, et, pour l'autre, de comparer le rôle de l'argumentation dans différentes disciplines à l'école et au collège

Nous proposons pour cet atelier une réflexion et des échanges sur des travaux menés dans les classes et en formation sur le thème des solides. Nous avons choisi de privilégier ce domaine pour cet atelier, d'une part car deux d'entre nous, Fabien Emprin et Claude Rajain y ont plus particulièrement travaillé, et d'autre part, car ces questions n'avaient pas été abordées par notre équipe dans les précédents colloques de la COPIRELEM.

Cet atelier se compose de trois moments centrés sur :

- les problématiques de la recherche ;
- des questions spécifiques sur l'apprentissage des solides ;
- une analyse d'actions de formation initiale et continue.

I – PRESENTATION DE LA RECHERCHE

I – 1 Questions à l'origine de la recherche

L'enseignement de la géométrie au cycle 3 pose la question de son articulation d'une part avec les connaissances spatiales acquises antérieurement et d'autre part avec la construction progressive d'une géométrie déductive au collège. Aussi plusieurs interrogations sont à l'origine de notre recherche :

- Pour chaque concept (objet ou relation), quels aspects peuvent être abordés et quelles propriétés peuvent être institutionnalisées ? Qu'est-ce qui relève de chacun des niveaux du cycle ?

- Quelle place donner à la résolution de problèmes dans ces apprentissages, dans la mesure où nous constations que la géométrie enseignée se réduisait parfois au vocabulaire et aux tracés?

- Comment introduire l'usage d'un instrument de géométrie (équerre,…) ? Quand recourir à tel ou tel vocabulaire géométrique ?

- A quel type de validation les élèves du cycle 3 peuvent-ils accéder ? Les méthodes de validation des productions des élèves pouvant évoluer de la vérification pratique (superposition de figures…), au recours à la mesure, mais aussi à l'élaboration de raisonnements basés sur des propriétés mathématiques.

I – 2 Objet de la recherche

L'objet de la recherche était double :

- Analyser les compétences des élèves et conduire des investigations plus précises sur le rôle de l'utilisation de l'argumentation dans la construction des connaissances.

- Élaborer des dispositifs d'enseignement pour l'ensemble du cycle 3 prenant en compte ces connaissances initiales, spatiales ou géométriques, ainsi que les significations des concepts, et recourrant à la résolution de problèmes.

I – 3 Éléments de méthodologie

Élaborer des réponses à ces questions nous a conduit à :

- Analyser le savoir géométrique, en particulier les significations des différentes notions (objets, relations et leurs propriétés) et les problèmes susceptibles de développer l'apprentissage de ces notions, en nous appuyant sur des travaux existants.

- Repérer les connaissances initiales des élèves.

- Organiser l'enseignement sur l'ensemble du cycle en privilégiant pour les deux premières années du cycle, l'étude des objets géométriques à partir de celle des relations.

- Élaborer des situations didactiques et les expérimenter dans de nombreuses classes de différentes académies et de divers milieux sociaux. Ces expérimentations qui se sont déroulées sur plusieurs années ont conduit à des modifications des situations (et des abandons…) liées aux résultats obtenus et aux questions émergentes.

- Rédaction de ces propositions pour les enseignants et les formateurs.

I – 4 Articulations avec les connaissances spatiales des élèves

Les connaissances spatiales concernent l'espace sensible ; elles permettent à l'enfant de maîtriser ses rapports usuels avec cet espace, rapports qui sont contrôlés par la perception. Liées à l'expérience, elles s'acquièrent à l'école depuis la maternelle (repérage, positions relatives d'objets, parcours…), mais aussi pour certaines d'entre elles en dehors de tout enseignement. Les connaissances géométriques portent sur des objets idéaux, mais qui ont des représentations dans l'environnement familier des élèves. La géométrie entretient donc des liens complexes avec l'espace physique qui nous entoure. Ce double aspect de la géométrie : modélisation de l'espace sensible et théorie mathématique composée d'un ensemble d'énoncés, est présent dans la géométrie enseignée au cycle 3 : les élèves peuvent élaborer ou utiliser des modélisations de situations spatiales à l'aide de dessins ou de tracés, cette modélisation pouvant ou non s'appuyer sur des relations géométriques. Cet espace sensible étant analysable en différents espaces : le micro-espace, le méso-espace, le macro-espace[1].
En outre, quand des objets théoriques sont représentés par l'élève sur sa feuille de papier, ou quand il schématise des objets du monde sensible, l'élève travaille dans un domaine bien particulier, que nous appelons le domaine spatio-graphique. Il s'agit d' un espace que l'élève contrôle, en partie du moins, par la perception et qui est constitué à la fois d'un ensemble d'objets spatiaux, d'un ensemble de représentations d'objets de l'espace sensible et d'un ensemble de représentations des objets théoriques. Dans les activités que nous proposons, nous utiliserons le domaine spatio-graphique à la fois comme domaine de représentation d'objets théoriques (sans pour autant vouloir dire que les élèves sont dans la théorie) et comme un domaine de représentations d'objets spatiaux usuels. Dans certains cas, le domaine spatio-graphique pourra être alternativement le « papier-crayon » et l'écran de l'ordinateur (ce dernier pouvant avoir des caractéristiques spécifiques).

Nous proposons un travail effectif dans l'espace sensible qui permet d'y développer des significations importantes des concepts géométriques (par exemple, le contrôle d'un alignement par la visée). Certains problèmes peuvent être résolus par une modélisation sur la feuille de papier, que cette modélisation soit à la charge de l'élève ou fournie par le maître. Les connaissances géométriques sont alors enrichies en devenant des outils

[1] En référence aux travaux de R. Berthelot et M.-H. Salin

nécessaires à la résolution de problèmes spatiaux. Toutefois nous pensons que le recours au méso-espace pour motiver l'étude d'une notion peut générer des procédures qui ne sont pas transférables dans le domaine spatio-graphique. Par conséquent, la modélisation de situations dans le méso-espace ou le macro-espace ne constitue pas pour nous, par principe, un passage obligé : les progressions dans l'étude des connaissances géométriques sont en relation avec les significations des notions étudiées et leur organisation, et pas simplement avec les expériences sensibles potentielles. Des activités sont néanmoins proposées dans l'espace usuel (de la cour ou de la classe) de façon à confronter les élèves avec les connaissances particulières se rapportant à la maîtrise de ces espaces.

I - 5 Objets et relations

Les constituants des savoirs géométriques sont notamment :

I – 5.1 Les objets

Les « objets » : un point, un segment, une droite, un rectangle, un pavé… termes qui peuvent désigner aussi bien des objets théoriques que des objets matériels existant dans l'espace sensible, ou qui peuvent être spécifiques de la théorie (segment) ou de l'espace (trait, bord). Par ailleurs, certains objets (droite) n'ont d'existence que dans la théorie.

Une simple étude d'un objet spatial ne sera pas très riche si les relations entre les éléments le composant ou entre cet objet et d'autres n'interviennent pas dans la résolution de problèmes. Par exemple, un cube peut être étudié du point de vue :

- de ses faces, de ses arêtes, de ses sommets, des relations que ces objets entretiennent entre eux dans le cube

- de ses relations avec d'autres objets, qui ne sont pas des cubes (d'autres polyèdres par rapport à leur nombre de faces), ne sont pas des polyèdres, ou sont d'autres cubes que le cube étudié (comparaison des faces, des arêtes…).

Aussi, nous avons fait le choix d'organiser les apprentissages en entrant par les relations, parce que nous estimons que c'est un moyen d'inciter les élèves à passer :

- du global à l'analytique pour la résolution de problèmes, ce que la simple description des objets perçus n'induit généralement pas ;

- du spatio-graphique au « théorique » parce que l'évidence spatiale est moins présente et que les jugements « théoriques » sont nécessaires.

I – 5.2 Les relations

Ce terme est pris dans son sens habituel en mathématiques et désigne des liens de la théorie pouvant exister entre les objets. Pour chaque relation, nous distinguons plusieurs significations qui peuvent faire appel à des propriétés du domaine théorique. Prenons l'exemple du parallélisme. Deux droites distinctes sont parallèles :

- si elles n'ont pas de point commun (incidence) ;

- si leur écart est constant (distance) ;

- si elles ont la même direction ou si elles ont la même orientation par rapport à une droite donnée (angle) ;

- si elles ont une perpendiculaire commune (perpendicularité) ;
- si l'une est l'image de l'autre par une translation ;
- si elles sont supports de côtés opposés d'un quadrilatère familier…

Nous ne pensons pas qu'il suffise de résoudre des problèmes relevant de chacune des significations d'une relation (et encore moins d'une seule !) pour en garantir l'acquisition. C'est pourquoi il nous a fallu compléter ce travail, en proposant, essentiellement au CM2, des problèmes de synthèse qui sollicitent plusieurs de ces relations ou qui sont relatifs aux propriétés des objets ; mais cet apprentissage suppose aussi de découvrir et de stabiliser, au cours de l'étude d'une relation, un vocabulaire spécifique, des propriétés, des techniques instrumentales, qui sont rencontrés ou institutionnalisés selon les situations.

Si l'ensemble des situations d'apprentissage que nous proposons est organisé autour des relations sur les deux premières années du cycle, cela ne veut pas bien sûr dire que les objets du plan sont oubliés. Les propriétés des objets sont analysées au CE2 et au CM1 dans le cadre du travail sur les relations et ils sont étudiés, pour eux-mêmes, plus systématiquement au CM2. En effet, nous pensons que les différents savoirs concernant les objets et les relations ne peuvent être appris indépendamment les uns des autres

I - 6 La question de la validation

Comme nous l'avons énoncé au début de cet atelier, les « géométries » rencontrées au cycle 3 diffèrent par le type de connaissances mais aussi par les types de validation spécifiques à chacune : la validation pratique (par exemple, plier ou déplacer deux figures pour vérifier qu'elles sont superposables), le recours à des mesures, le recours à des raisonnements et à des propriétés. La simple perception, ou le recours à une validation pratique ne remettent pas toujours en cause des procédures erronées pouvant aboutir à des productions apparemment satisfaisantes ; en effet, les élèves en restent parfois à l'évidence de la perception visuelle ou interprètent des erreurs comme n'étant que des imprécisions de mesure ou de tracé. De plus, une production erronée peut être seulement le résultat de difficultés techniques de tracés malgré un recours explicite à des connaissances appropriées,

Au cycle 3, plusieurs types de preuve vont donc coexister, parfois chez le même élève, en fonction de la situation. L'objectif ne nous semble pas tant d'éliminer les critères liés à la validation pratique que de permettre aux élèves d'appréhender les différences entre ces preuves.

Par ailleurs, les procédures de résolution réellement utilisées sont parfois difficiles à formuler par les élèves car elles s'appuient non seulement sur des techniques, en relation ou non avec des savoirs institutionnalisés dans la classe, mais aussi sur des images mentales, des actions ou des gestes fugaces dont ils n'ont pas toujours conscience. Le passage à une validation fondée sur les propriétés (la réponse à la question « Est-ce que c'est juste et pourquoi ?») ne peut pas toujours être obtenue par l'explicitation des procédures. Les élèves doivent alors recourir à un discours en partie dégagé de l'action et qui mette en évidence les relations ou les propriétés. C'est alors qu'il nous paraît nécessaire de mettre en place des débats argumentatifs entre les élèves pour discuter de la validité des réponses obtenues en différant la validation pratique.

Il nous paraît donc utile de différer la validation pratique et de commencer la phase de validation par un débat sur les productions. La fonction des « mise en commun » est de permettre aux élèves de formuler leurs résultats, et donc d'en prendre conscience, de préciser, à la demande, les termes employés, mais aussi de critiquer leurs solutions et celles des autres élèves, c'est-à-dire de juger par eux-mêmes de leur validité. La validation qui s'appuie sur l'analyse, permet donc, dans certains cas, de remettre en cause une conception ou une procédure et ainsi de développer ou réinvestir une connaissance ou une procédure.

Notre recherche nous a donc conduits à expliciter des questions posées par cette coexistence et à élucider des choix concernant la validation proposée dans les situations didactiques, en particulier relativement aux limites de la validation pratique et aux difficultés liées à la critique des procédures. Nous avons aussi expérimenté des situations rendant possible, voire pour certaines nécessaire, le recours à une validation fondée sur des raisonnements et dégagée de la mesure.

II – APPRENTISSAGE DES SOLIDES AU CYCLE 3, PROPOSITIONS ET ANALYSE DE SITUATIONS.

II – 1 Précisions concernant le 3D

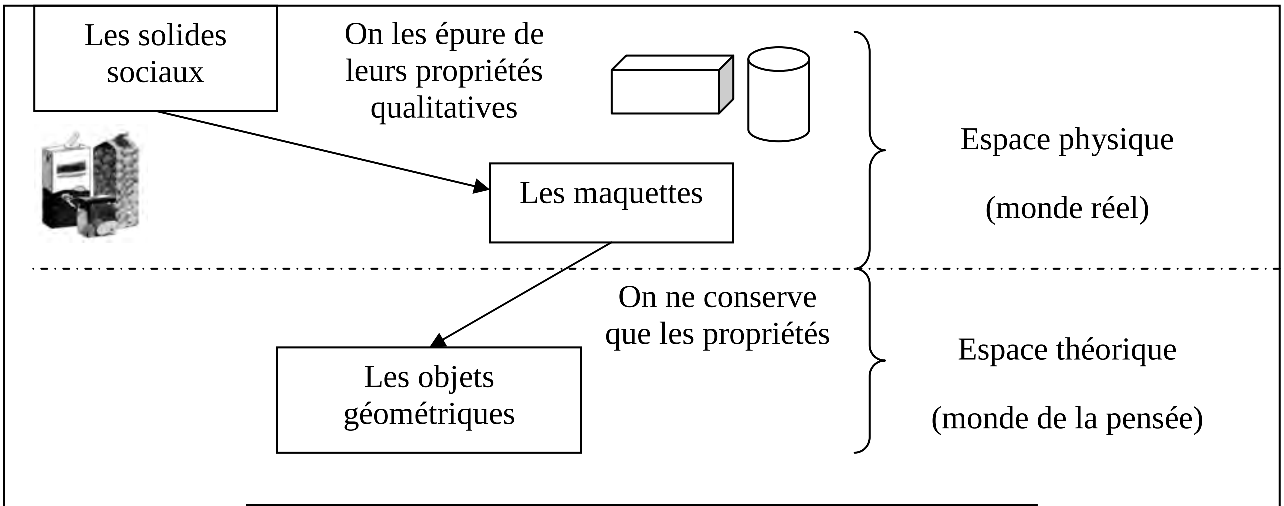
Rappelons d'abord quelques termes qui permettent d'identifier les objets sur lesquels les élèves travaillent et les obstacles qui y sont associés.

- Nous parlerons de solides, en conservant le sens physique du terme, pour décrire tous les objets matériels en trois dimensions. On peut en donner la définition suivante : au cours de tous les déplacements, la distance entre deux points quelconques d'un solide est constante ; en fait, il s'agit d'objets matériels rigides. Parmi ces solides, nous distinguerons les solides sociaux et les maquettes.

- Nous parlerons de solides sociaux pour les objets qui existent dans le monde physique environnant : les boîtes, les emballages, les meubles, les constructions, etc…

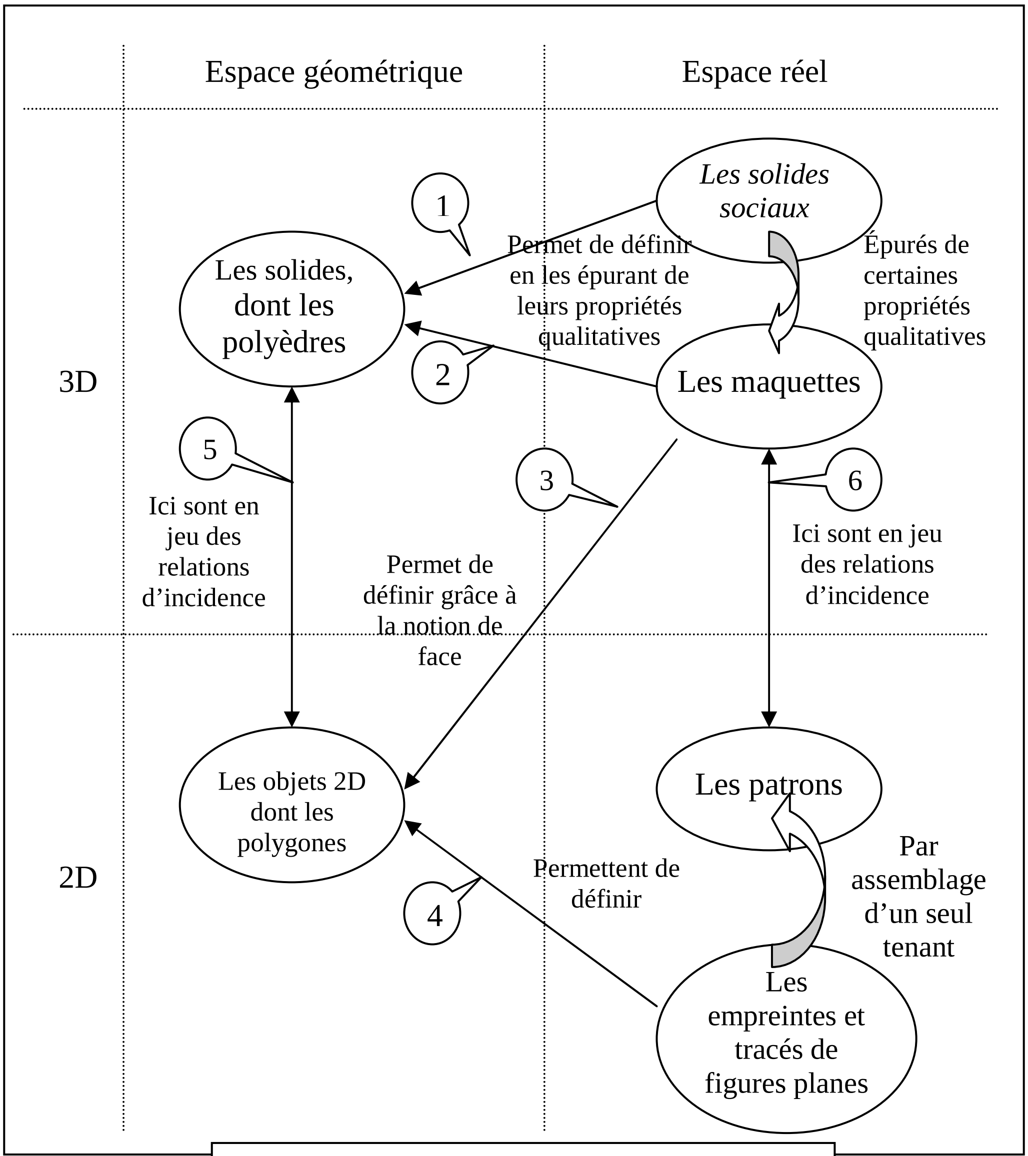
- Les maquettes peuvent être considérées comme des représentations d'objets mathématiques ou comme un solide social épuré de propriétés qualitatives. Pour élaborer ces objets, on a cherché à éliminer un certain nombre de propriétés, en particulier son usage, son contenu, etc. On demandera aux élèves de faire également abstraction de la matière et de la couleur.

- Les objets mathématiques sont des objets théoriques, ils sont définis comme une portion de l'espace géométrique ; parmi eux, nous trouverons les polyèdres, délimités par des faces polygonales tels le cube, les prismes, les parallélépipèdes, etc.



Relation entre les différents types de solides

Le schéma ci-dessous présente les relations entre les différents objets auxquels les élèves sont confrontés. Le commentaire qui suit permet de définir les apprentissages liés au travail sur les objets 3D.



Relations entre les différents objets

Les relations 1 et 2

Les élèves doivent s'abstraire des propriétés qualitatives des solides sociaux et des maquettes pour considérer les objets géométriques comme un ensemble de propriétés.

Par exemple, l'élève doit être capable de désigner par le terme « cube » tous les solides qui ont six faces carrées.

Ici, interviennent des propriétés « numériques », telles que le nombre de faces, de sommets, d'arêtes (d'ailleurs régies par la relation d'Euler s + f – a = 2 avec s nombre de sommets, f de faces et a nombre d'arêtes).

L'élève doit être capable de caractériser les solides aux moyens de ces propriétés numériques et de la nature des faces.

Les relations 3 et 4

Il s’agit de définir les polygones comme faces des polyèdres.

Cette approche a plusieurs avantages :

- on diminue l’émergence des phénomènes liés à la présentation exclusive dans la feuille de papier, telle que la reconnaissance de figures par leur aspect dans une certaine position.

- dans cette approche, la figure plane n’est pas vue comme un ensemble de traits. En effet, la face du polyèdre a une frontière sans épaisseur, on se rapproche de la notion de ligne d’épaisseur nulle (une dimension). Il peut y avoir deux types d’empreintes, permettant de faire le lien avec les polygones : celle qui est obtenue en imprimant de la pâte ou du sable et celle obtenue par le tracé du contour.

Les relations 5 et 6

Les relations d’incidence sont, d’une part, les relations métriques entre les différentes faces du solide et, d’autre part, les degrés des sommets (nombre d’arêtes jointes par un sommet). Pour accoler deux faces, les côtés concernés doivent être de même longueur.

L’élève doit être capable d’identifier les faces accolées dans un solide et de déterminer que pour cela les côtés concernés sont nécessairement de même longueur.

Pour réaliser un patron, l’élève peut plier et déplier mentalement le solide (effectuer des rotations axiales dans l’espace « en acte », c’est-à-dire sans l’interpréter comme tel mathématiquement) ou encore mettre en œuvre les relations d’incidence de façon théorique.

Le travail sur les solides s’appuie donc principalement sur le travail autour de l’approche des solides par leurs propriétés mathématiques et sur les relations d’incidence, donc de la notion de patron. L’approche des polyèdres par les polygones intervient dans le travail sur les patrons sans être un axe spécifique de notre travail.

Parallèlement à cette analyse sur les relations entre objets se pose également le problème de la représentation des objets.

C’est grâce aux procédures employées par les élèves que nous allons déceler si les représentations qu’ils ont des objets sont de l’ordre du spatial (carré comme ensemble de « traits ») ou de l’ordre du géométrique (carré comme ensemble des propriétés qui le définissent). Par exemple, si un élève utilise les propriétés d’une figure pour résoudre un problème lorsque la situation n’incite pas à y faire appel, on peut penser que l’élève voit cet objet par ses propriétés géométriques.

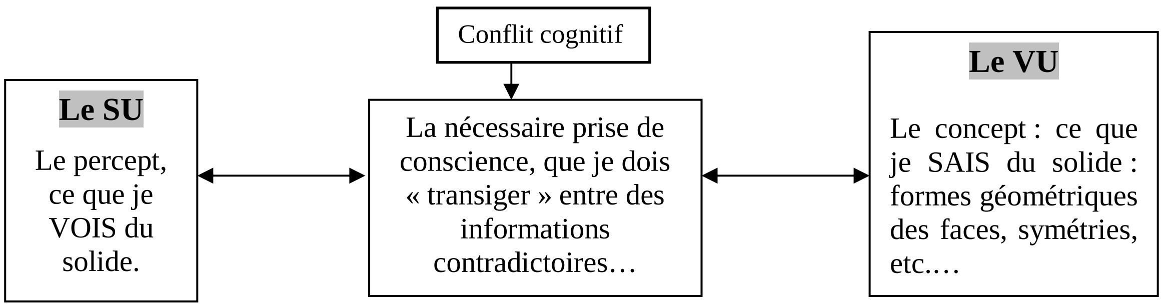
II – 2 Nos idées forces au sujet du contenu :

- Les relations « numériques » servent de passage entre les objets spatiaux et les objets idéaux.
- Le vocabulaire n’est pas une priorité, mais un outil à la communication.
- La représentation n’est pas une priorité, mais il est possible de la mettre à l’œuvre dans des situations de communication.

- Les maquettes permettent la construction « d'images mentales ».
- Le travail sur les patrons permet de proposer des problèmes intéressants (minima de papier).

II - 3 Nos idées-forces au sujet des situations:

- L'approche des concepts d'objets mathématiques en épurant les objets physiques de leurs propriétés qualitatives.
- Le travail sur les relations d'incidences et la notion de patron.
- Une approche de la représentation plane des objets 3D par la prise en charge du conflit entre le « VU » et le « SU ».(nous nous appuyons sur les travaux de F. Colmez et B. Parzysz qui proposent une analyse en fonction de deux pôles antagonistes: le « VU » et le « SU ». Le schéma ci-dessous est sensé la résumer)

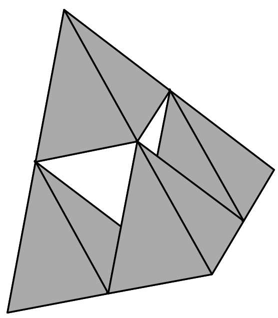


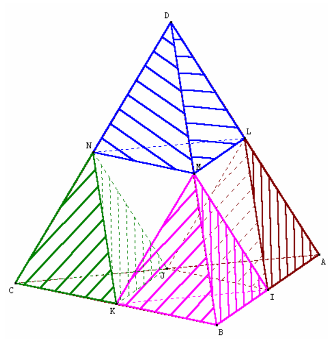
Trois types de situations:

- Des situations d'action pour résoudre des problèmes spatiaux.
- Des situations de communication ou de description.
- Des problèmes ouverts…

II - 4 Un exemple : « le grand tétra »

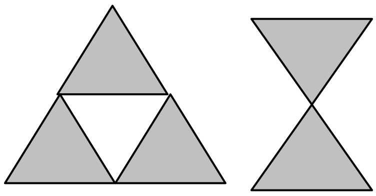
Problème : « Quatre tétraèdres posés l'un sur l'autre par les pointes, forment un grand tétraèdre avec un « trou » de forme octaédrique (cf. représentations 3D ci-contre). Il s'agit de construire le patron de ce solide « virtuel » afin de boucher le « trou ».



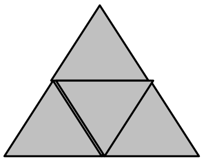


La situation se déroule en 3 temps :

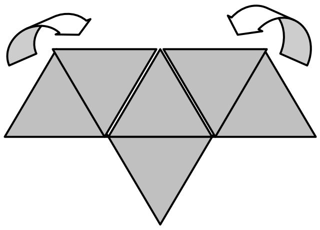
- Les élèves font un schéma du patron qu'ils souhaitent réaliser.
- La mise en commun sert à débattre de la validité des schémas proposés.
- Les élèves recopient au propre leur patron avec un gabarit et bouchent le trou.



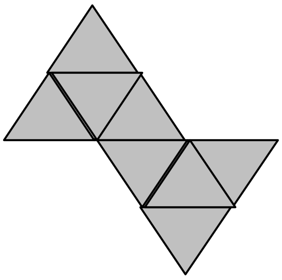
P1 -L'élève cherche à boucher les « trous » des faces



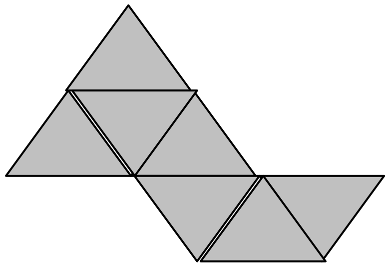
P2 Construction de tétraèdres



P3 - Il replient et bouchent les trous



P5 - Résultat correct obtenu soit par assemblage de deux patrons de tétraèdre soit par comptage des faces



P3 - Patron correct : les élèves disent nous avons oublié de compter « le fond »

La spécificité de la situation :

- Situation de synthèse autour du concept de patron,
- Mise en commun préalable à la validation,
- Utilisation du schéma pour augmenter les possibles et limiter le temps de construction.

II - 5 Les autres situations:

Devinez le solides (CE2) : Trouver un solide dans un lot ; c'est une situation de communication.

Habiller le solide (CE2) : C'est trouver les bonnes faces d'un solide ; c'est également une situation de communication.

Construire un solide (CE2) : Déterminer les bonnes faces dans un catalogue afin de construire un solide identique ; c'est encore une situation de communication,

Représenter le solide 1 (CE2) : Dessiner un solide pour le reconnaître dans un lot.

Assemblons les faces (CM1) : Construire un solide à partir d'une représentation plane. Aborder la notion de patron.

Patrons de solides (CM1) : Chercher le maximum de patrons du cube.

Cube tronqué (CM1) : A partir d'un solide non-usuel, communiquer la procédure de construction à partir d'un schéma.

Boucher le trou 1 (CM1) : Trouver le solide qui bouche un trou. Faire le schéma du patron (pyramide).

Patron de pavé (CM2): Reproduire un pavé non accessible directement à l'identique.

Boucher le trou 2 (CM2): C'est l'exemple « Grand Tétra » décrit ci-dessus.

Représenter un solide 2 (CM2): C'est une situation de communication. Il s'agit de faire le schéma d'un solide afin qu'un autre puisse le construire avec un matériel donné (cette situation est sensée commencer à gérer le conflit décrit par le schéma du paragraphe II-1).

III – REFLEXION SUR L'UTILISATION DES SITUATIONS EN FORMATION

Le champ de l'analyse des formations est encore assez peu exploré, ainsi l'enjeu de cette partie est de mener une première réflexion sur l'utilisation en formation de la programmation ERMEL concernant les objets 3D. Cette réflexion est empirique et doit servir de point de départ. Nous commençons par un exemple de situation basée sur l'homologie puis nous analysons les travaux soumis par des stagiaires pour la validation de leur formation.

III – 1 Un exemple de formation par homologie – la situation « communiquer le solide »

Nous analysons en particulier le premier module de formation des PE2 du centre IUFM de Châlons en Champagne. L'exemple choisi ici est une base pour la discussion. L'analyse qui en est faite est principalement empirique, elle n'est pas issue de travaux de recherche (en particulier, elle ne se situe pas dans le cadre du travail de l'équipe ERMEL) et doit être considérée comme une expérience de formateurs. Ainsi l'enjeu n'est ni de proposer un modèle ni même de tirer des généralités de cette expérience.

En 2006-2007, le premier module de formation en didactique des mathématiques à l'IUFM de Champagne Ardenne a pour objectif de travailler sur la situation d'apprentissage. Le ou les thèmes sur lesquels portent ce module ont été laissés au choix des formateurs de chaque centre. L'évolution de la formation des PE2 et en particulier le Stage Filé (SF) ont amené les formateurs du centre de Châlons en Champagne à choisir de faire porter ce premier module sur la géométrie. En effet, la répartition des différentes disciplines d'enseignement entre stagiaire et directeur déchargé amène les stagiaires à enseigner principalement la géométrie durant ce SF. Le fait que le centre IUFM concerné n'ait que deux classes de PE2 en formation exclut un regroupement des stagiaires par cycle, le module n'est donc pas attaché à un cycle. Enfin le choix de commencer par le travail sur le 3D est guidé par deux idées : la première est pragmatique et stratégique : plus les stagiaires sont formés tôt dans l'année plus ils ont de temps pour fabriquer et récolter le matériel nécessaire au travail dans l'espace et pour mettre en œuvre cette partie du programme souvent reléguée à la fin de l'année ; la seconde est plus didactique et lié au travail de l'équipe ERMEL, c'est l'idée que le travail sur le 2D découle du travail sur le 3D, qu'il est plus simple de passer du solide à la face du solide et enfin à la figure plane. Enfin, les formateurs ont choisi d'aborder la situation d'apprentissage en commençant par les situations de communication au sens de Brousseau (1987). Ce type de situation est apparu comme plus propice à une réflexion sur les situations d'apprentissage que les autre types de situations (action ou validation). Les caractéristiques des situations de communication semblent moins subtiles à appréhender que les autres types de situations problèmes. Il semble aux formateurs que l'a-didacticité y est plus facile à percevoir (sans pour autant que nous puissions argumenter cette idée ou l'étayer par des références théoriques).

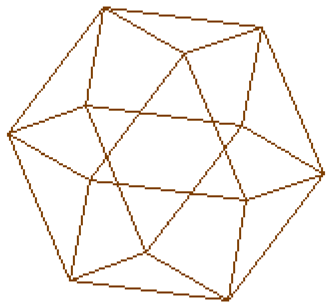
La situation de formation proposée est une situation d'homologie au sens de Houdement et Kuzniak (1996), Kuzniak (1994). Nous explicitons le processus de formation au stagiaire en développant l'idée de situations « pas de côté ». Nous les invitons à vivre une situation en tant qu'élève, c'est-à-dire à faire un pas de côté par rapport à leur statut d'enseignant. La situation peut être plus ou moins adaptée de la situation réelle se trouvant dans le travail du groupe ERMEL. Le cas échéant, la situation est une transposition de la situation « communiquer le solide » (ERMEL - 2006). Une fois le travail réalisé, les stagiaires font à nouveau un pas de côté pour revenir en position d'enseignants et analysent la situation qu'ils ont vécue, les procédures qu'ils ont mises en œuvre. Le travail se termine par l'analyse de la situation en terme d'enjeu didactique, de compétences travaillées et de type de situations d'apprentissage. Elle peut alors déboucher sur la construction de situations pour les élèves. Dans l'exemple que nous présentons, les concepts didactiques en jeu sont principalement l'opposition entre le VU et le SU tiré des travaux de Colmez et Parzysz (1993).

La situation proposée aux stagiaires en position d'élèves est la suivante : un stagiaire est derrière le tableau avec une vue en perspective d'un solide (il s'agit d'un solide archimédien obtenu par troncature du cube : le cuboctaèdre - voir dessin 1). Ce solide est choisi suffisamment complexe pour que les stagiaires n'en connaissent ni le nom, ni les caractéristiques. Les autres stagiaires sont répartis en groupes de quatre. Dans chaque groupe, deux stagiaires ont le matériel « solide avec paille »[2] de Fernand Nathan et deux autres ont le matériel « Plot »[3] de l'AMPEP d'Orlean-Tours. Les groupes doivent poser des questions fermées au stagiaire de façon à pouvoir construire le solide avec le matériel donné. Afin de mettre un enjeu supplémentaire et de limiter le nombre de questions, une contrainte supplémentaire est ajoutée : Les stagiaires ont 30 points au départ. Une question fermée coûte 1 point, une question numérique 3 points, une demande de validation 5 points, une question à laquelle il n'est pas possible de répondre soit par « oui » ou « non » ou par un nombre coûte 5 points. Il faut alors réaliser le solide en conservant le maximum de points. Les questions sont posées par écrit pour garder une trace de l'activité des stagiaires.

---

[2] Le matériel est constitué de pailles de différentes longueurs qui sont reliables par des sommets de différentes puissances (2, 3, 4 et 5).

[3] Ce matériel est constitué de faces en cartons. Les formes présentes sont un carré, un rectangle constitué de deux carrés, un triangle équilatéral de même côté que le carré, un pentagone régulier également de même côté. Ces faces ont des bords qui permettent de les attacher par un élastique. Les polyèdres dans l'espace; les dossiers du PLOT. MARS 1987. PLOT APMEP d'Orléans-Tours.



Dessin 1 : la représentation en perspective fournie au stagiaire

III – 2 Quels enjeux pour la situation de formation proposée ?

Lors des mises en œuvre de cette situation, il apparaît invariablement des erreurs dans l'appréhension de la perspective par le stagiaire derrière le tableau. Il n'envisage pas que lorsqu'il voit un rectangle sur sa feuille, il peut s'agir d'un carré dans l'espace. Il en est de même pour les triangles isocèles dessinés qui peuvent être en fait des triangles équilatéraux dans l'espace. Alors qu'avec le matériel Fernand Nathan il est possible de construire un solide avec des rectangles et des triangles isocèles, cela est impossible avec le matériel plot. Les stagiaires sont donc confrontés à une impossibilité de construction et à un blocage de la situation. Cela amène l'émetteur à modifier des réponses. Cette situation met donc en lumière l'opposition entre le VU et le SU. Le stagiaire voit que ce sont des rectangles mais sa connaissance des solides et de la perspective doit l'amener à identifier que ce peut être la représentation en perspective de carrés dans l'espace. Au travers de cette situation, les stagiaires sont amenés à réfléchir à la notion de situation de communication, au rôle des variables didactiques (ici principalement le choix du solide pour l'émetteur et la façon dont il y accède, celui du matériel pour le récepteur et le type de communication).

Cette situation peut être considérée comme un peu « brutale » dans le sens où elle met les stagiaires en difficulté, certains peuvent même penser qu'il s'agit d'un « piège ». Certains formateurs peuvent craindre que cette situation ait des effets pervers en laissant penser aux futurs enseignants que puisque eux-mêmes ont eu des difficultés, la situation est impossible à mener avec des élèves. Ces questions font apparaître un des biais de la situation d'homologie en elle-même : quand les compétences des stagiaires sont assez proches de celles des élèves (c'est le cas pour les TICE), il risque d'y avoir confusion entre les savoirs professionnels qui sont l'enjeu de la formation et les savoirs d'enseignement. Le stagiaire, ayant à gérer en même temps les deux types d'apprentissages, n'arrive pas à prendre suffisamment de distance pour analyser le processus d'enseignement-apprentissage. Dans l'exemple que nous exposons, il ne s'agit pas d'une situation à destination des élèves, elle est transposée pour les enseignants, ce qui permet de mener une réflexion, a posteriori, sur les choix de variables pour les situations d'enseignement. La situation débouche d'ailleurs sur une production par les stagiaires d'un tableau de présentation des choix possibles dans les variables de situations de communication que nous avons intitulé mille milliards de situations en faisant référence au grand nombre de possibilités de situations différentes qu'il fait apparaître. Nous donnons deux exemples de productions des stagiaires en annexe 1 (pour des stagiaires de formation continue) et 2 (pour des PE2).

Une fois le tableau construit, les stagiaires analysent la situation tirée de ERMEL nommée « communiquer le solide ». Nous nous appuyons sur des travaux d'élèves que les stagiaires classent par type de stratégie de gestion de l'opposition VU – SU : les patrons, les vues (une ou plusieurs), les parties cachées assumées et les associations de plusieurs représentations incluant par exemple le détail du matériel

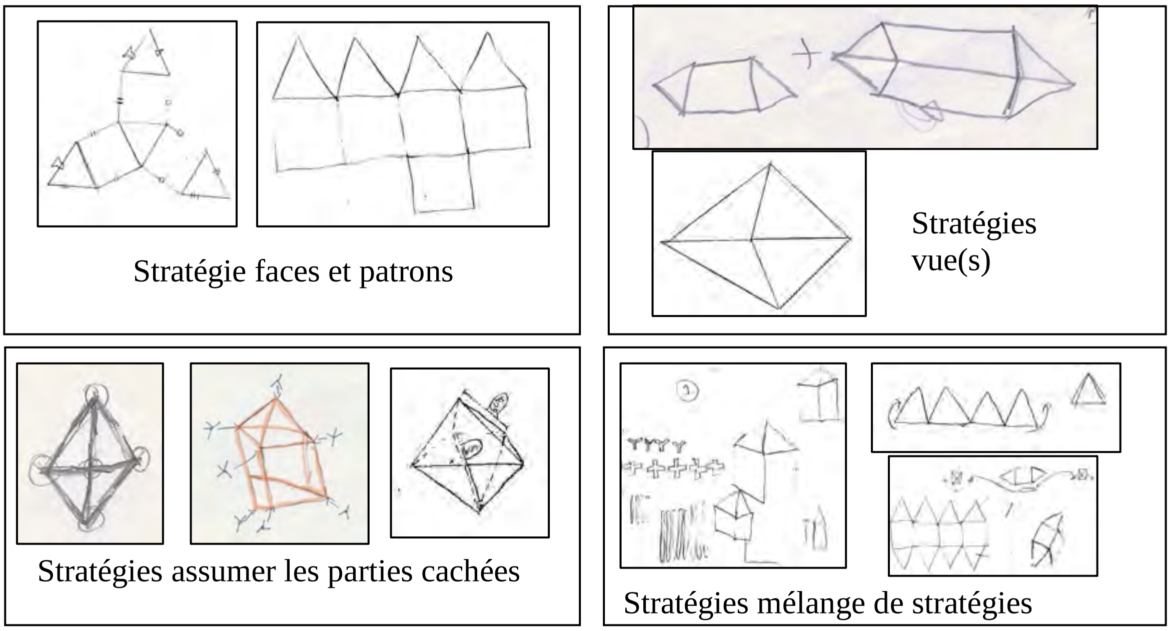


Schéma 1 : classification des stratégies de gestion de l'opposition VU – SU

Il s'agit à présent d'ébaucher une analyse de l'impact de cette formation sur les pratiques des stagiaires.

III – 3 Le travail sur le 3D dans les travaux des stagiaires

Il apparaît dans les discussions avec les stagiaires, en particulier dans le cadre des séances d'aide à la préparation des stages et dans celles d'analyse de pratique que ces derniers mettent en œuvre des situations de communication autour des solides. Les demandes de prêt de solides en témoignent également. Néanmoins, ces séances ont été assez peu utilisées comme support à la validation des compétences professionnelles et déposées dans le Carnet de Bord Informatisé (voir Communication de Lagrange et Emprin dans ces mêmes actes). Il y a 7 dépôts sur une cinquantaine environ qui concernent le 3D. Quatre travaux relèvent de l'utilisation de la grille des variables des situations de communication : deux sur le jeu du portrait en CE1 (poser des questions à un groupe d'élèves qui voient un solide de façon à le retrouver parmi un lot) et deux sur des activités de communication de solide en GS et en CP (communiquer un solide que l'on a touché dans un sac opaque de façon à ce que les autres élèves le reconnaissent parmi un lot). Deux autres travaux révèlent des difficultés à prendre du recul par rapport à l'ouvrage ERMEL. Le premier travail porte sur les patrons et le second sur une progression autour du 3D. Dans ces deux cas, les stagiaires exposent ce qui se trouve dans l'ouvrage ERMEL et éprouvent des difficultés à argumenter ces choix. Enfin un travail sur une évaluation sur les « solides » en cycle 3 est proposé. Le support, uniquement 2D, est relativement classique, les questions du formateur appelé à évaluer les compétences professionnelles montre que le stagiaire n'a pas proposé de lien entre le dispositif d'évaluation et les compétences qu'il pourrait évaluer.

PERSPECTIVES

La recherche actuelle conduite par l'équipe ERMEL porte sur deux objets en relation : les apprentissages géométriques au cycle 2, dans la continuité des problématiques et résultats de la recherche précédente menée au cycle 3 et l'analyse des apports de dispositifs s'appuyant sur des outils informatiques (logiciels de géométrie dynamique en particulier) dans les apprentissages géométriques au cycle 2 et au cycle 3.

En ce qui concerne la formation des enseignants, les travaux proposés à l'évaluation par les stagiaires sont en décalage avec notre ressenti d'une assez importante utilisation des situations de communication de solides en classe. Dans les validations, le domaine numérique est majoritairement traité. Il est difficile d'émettre des hypothèses basées sur un constat aussi limité, ainsi nous présentons quelques questions. La démarche d'homologie est-elle, comme certains le supposent, mal adaptée et induit-elle des craintes ? En particulier, le manque d'expertise souligné par la situation de formation les amène-t-ils à proposer des validations sur des domaines plus sécurisants ? L'appropriation des situations de communication est-elle malgré tout réelle pour les stagiaires ? Cela sous-entendrait que l'enjeu de la validation de l'année et la titularisation qui en découle conduisent à des stratégies de repli vers des domaines plus sécurisants mais que, toutefois, les situations de formation ont un réel impact sur les pratiques professionnelles des stagiaires. Enfin, quels dispositifs permettraient une meilleure prise de distance avec les dispositifs proposés par l'équipe ERMEL ? Nous n'avons que peu exploré le travail d'analyse de pratiques issu des travaux de Altet (2000) et Perrenoud (2002) (2003) ainsi que celui sur la formation de praticiens réflexifs en référence aux travaux de Schön (1994). Ces pistes restent donc à explorer.

ANNEXE 1 -

JEU SUR LES VARIABLES DIDACTIQUES DANS LES SITUATIONS DE COMMUNICATION DE GEOMETRIE

Stage FC

Variables de départ				type de communication		variables d'arrivée	validation
Objet choisi	Par qui est-il choisi?	Manière de prendre l'information	prise d'information	vecteur de communication	Retro control	Type de production	
Les solides sont sociaux CII	Maître	**TOUCHER**	Voir pendant la description	**MIMER**	oui	Réaliser un patron	Par reprise des critères.
des maquettes	élève	Voir Dessin	Ne pas voir pendant la description	Dessiner	non	Choisir parmi un lot de patrons plusieurs choix possibles	Comparaison avec le modèle.
3 vues (dessin industriel) + tard		Voir Solide	un référent qui va prendre des informations	Construire		Dessiner	
des représentations Schéma		mesurer	une personne qui décrit pour tous : l'enseignant	**MODELER**		Réaliser partir d'un patron (carton ou papier)	
des représentations Perspective			une personne qui décrit pour tous : un élève	Patrons		Réaliser : Fernand Nathan Travail la notion d'arête et de puissance de sommet	
Taille de l'objet, matière				Mécanos		Réaliser : Plot, Clixi et Polydron Travail sur la nature des faces et les relations entre les faces	
				Assembler des solides		**REALISER : MODELER**	
				Questions fermées			

EN MAJUSCULE : PLUTOT C2 MAIS RIEN N'EMPECHE DE LE FAIRE EN C3 SURTOUT AU CE2

En grisé : a priori non pris en charge par l'école élémentaire

ANNEXE 2

Tableau de synthèse : les variables didactiques des situations de communication

Groupe PE2 –B2 2006-2007

Objet	Emetteur			Vecteur	Rétroaction	Temps	Récepteur		Validation
	Nombre	Modalité	Prise d'informations				Nombre	action	par
3D • sociaux • complexes • maquettes • déformables *dessin* • perspectives • vues Description • Écrite • orale	• seul • à 2	• choix • ou non	• vue + toucher • vue • toucher	- Parler → - Mimer → Questions fermée - Chaîne ← - Dessin → → → - Mots limités ~~- Ecrire~~ → - Limiter questions (nb, points) → ← - Modelage ↔	• oui • non	• limité • non	• seul • plusieurs	• dessine • modèle • construit • (légo, clixi, plot…) • programme de construction • choisir dans un lot	• émetteur • enseignant • comparaison • prise d'informations

BIBLIOGRAPHIE

Altet M., 2000, L'analyse de pratiques : une démarche de formation professionnalisante ?, *Recherche et Formation*, n° 35, pp. 25-41

Agaud Henri-Claude.,1998, *Problèmes et milieux a-didactiques, pour un processus d'apprentissage en géométrie plane à l'école élémentaire, dans les environnements papier -crayon et Cabri-géomètre* Thèse, Université Joseph Fourier (Grenoble-I).

Brousseau G., 1987, « Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques », *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol 7 / 2, La Pensée Sauvage.

Colmez F. et Parzysz B., 1993, Le VU et le SU dans l'évolution de dessins de pyramides du CE2 à la seconde, in Espaces graphiques et graphismes d'espace, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, coordonné par Annie BESSOT et Pierre VERILLON, La Pensée Sauvage.

Equipe ERMEL, 2006, *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3* (609 p. Hatier).

Houdement C. et Kuzniak A., 1996, Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 16/3, La Pensée Sauvage.

Kuzniak A., 1994, Paradigmes et espaces de travail géométriques, Thèse de doctorat, Université Paris VII - Denis Diderot.

Parzysz B, 1989, Le vu et le su , *Bulletin APMEP*, n°364.

Perrenoud P., 2002, Adosser la pratique réflexive aux sciences sociales, condition de la professionnalisation, *Conférence d'ouverture École d'été des IUFM du Pôle Grand Est* Arras, 3-5 juillet 2002, Accessible en ligne : http://www.unige.ch/fapse/SSE/teachers/perrenoud/php_main/textes.html lien vérifié le 07/09/07

Perrenoud P., 2003, L'analyse de pratiques en questions, *In Cahiers Pédagogiques*, n° 416, Accessible en ligne : http://www.unige.ch/fapse/SSE/teachers/perrenoud/php_main/textes.html lien vérifié le 07/09/07

Porcheron J.-L., 2005, Comparaison d'objets géométriques au cycle 3 de l'école élémentaire, *Repères IREM* n°58.

Schön D.-A., 1994, *le praticien réflexif*, traduit par Heynemand J. et Gagnon D les éditions logique. traduit de «the reflexive practitionner », (1983), basic book inc. U.S.A.

PLIAGES ET CONSTRUCTIONS A LA REGLE ET AU COMPAS

Françoise JORE
Maître de conférences, UNIVERSITE CATHOLIQUE DE L'OUEST, ANGERS.
Didirem Paris 7 & Cream UCO
jore@uco.fr

Résumé
La proposition qui est faite ici consiste à exploiter un travail autour de deux types d'activités : d'une part des pliages, nécessitant la mise en œuvre consciente de propriétés géométriques, d'autre part des constructions à la règle et au compas avec la rédaction et la justification des scénarios de construction correspondants. Ces activités sont l'occasion avec les PE1 de revoir bon nombre de théorèmes de géométrie en acte, c'est-à-dire en les utilisant pour effectuer une construction. Ce type d'activité, non habituel, permet à tous les étudiants de s'investir dans la tâche proposée, quel que soit leur niveau de compétences, souvent très hétérogène.

Dans le cadre du concours de recrutement de professeurs des écoles, les étudiants doivent être capables d'effectuer des démonstrations simples, qui relèvent du collège. Cela nécessite entre autre de maîtriser un minimum de théorèmes de géométrie euclidienne de fait peu mobilisables, voire parfois non disponibles, souvent non opérationnels pour les PE1. Par ailleurs, de nombreux sujets de concours demandent aux candidats d'effectuer des constructions à la règle et au compas. Dans certains cas, la rédaction d'un scénario de construction est également demandée. Indépendamment du concours, « rédiger un scénario de construction » fait partie des compétences travaillées au cycle 3, et par conséquent doit être maîtrisé par les futurs enseignants. Or le temps de formation est toujours limité. Il s'agit donc de profiter au mieux du faible temps dont le formateur dispose pour mettre en place toutes ces compétences.

I – PLIAGES

Avant de travailler sur les scénarios de construction et donc en particulier sur le langage géométrique, un premier travail est proposé aux PE1 en début de formation en géométrie autour des pliages. Les objectifs de cette activité sont multiples :

- permettre aux PE1 de revoir définitions et propriétés de quelques objets du plan (triangles particuliers, quadrilatères, …) ;

- proposer une tâche qui n'est pas routinisée, et qui donc oblige les étudiants à réfléchir. La solution du problème ne consiste pas en l'application d'une technique rodée : ils n'ont en général jamais rencontré cette tâche ;

- faire en sorte que les propriétés des objets soient un outil incontournable pour accomplir la tâche proposée. Il ne s'agit pas seulement d'énoncer des propriétés, mais surtout de les utiliser comme outil pour effectuer la construction demandée ;

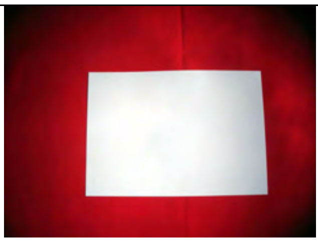
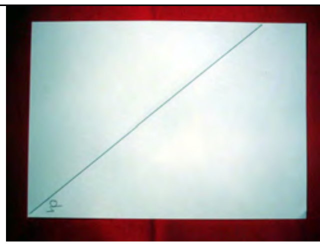
- donner l'occasion aux étudiants en difficulté en mathématiques de rentrer dans une activité de démonstration s'en vraiment s'en apercevoir ;

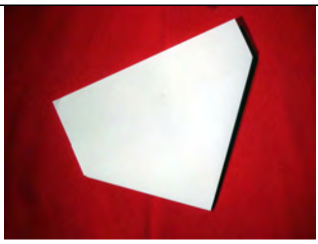
- mettre les étudiants scientifiques dans une situation qui les déstabilise un peu, qui les oblige à réfléchir, qui ne leur permette pas de reproduire trop rapidement un discours par ailleurs bien assimilé. Il faut qu'eux aussi aient quelque chose à apprendre, une compétence à développer.

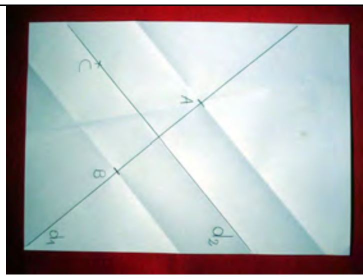
La consigne proposée est ainsi la suivante : « Prendre une feuille de papier. Par pliage, sans utiliser les habituels instruments de géométrie, obtenir un triangle rectangle, puis un triangle isocèle. »

Ces deux constructions n'ont pour but que de s'approprier la consigne et le fonctionnement de cette activité. Elle est réalisée sans difficulté par tous les étudiants. Il est ensuite demandé aux étudiants de construire de la même manière un triangle équilatéral. Un élément est alors ajouté : « Préciser les définitions ou propriétés utilisées qui permettent de justifier la construction ».

Une démarche possible est la suivante :

		
Prendre une feuille	Plier en deux	On obtient une droite d_1

		
Plier à nouveau en deux afin d'obtenir une perpendiculaire à d_1	La droite d_2 est perpendiculaire à d_1	Replier à nouveau pour déterminer deux points sur d_1 équidistants de d_2

		
A et B sont deux points de d_1 équidistants de d_2	Plier en A de sorte d'amener B sur d_2	On a ainsi déterminé sur d_2 un point C équidistant de A et B.

La définition seule du triangle équilatéral (triangle avec des côtés isométriques) ne suffit pas pour effectuer la construction par pliage. Dans la construction ci-dessus proposée, une propriété est utilisée : le troisième sommet du triangle équilatéral est sur la médiatrice du segment constitué par les deux premiers. Cette propriété est ainsi un outil pour accomplir la tâche.

Une autre procédure est souvent proposée par quelques étudiants : « Plier la feuille en deux. On obtient un angle plat. Partager cet angle plat en trois angles superposables. Ces angles de sommet O mesurent alors 60°. Plier à nouveau pour obtenir la bissectrice d'un des angles obtenu et placer deux points A et B équidistants de O sur les côtés de l'angle ». Le triangle AOB est isocèle avec un angle de 60° : il est donc équilatéral. Cette fois, une autre propriété est utilisée : un triangle isocèle avec un angle de 60° est un triangle équilatéral.

D'autres pliages peuvent être proposés : obtenir un triangle isocèle et rectangle, des angles de 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90 °, la médiatrice d'un segment, la bissectrice d'un angle, la hauteur d'un triangle, un carré, un losange, un parallélogramme, un cerf-volant, un hexagone, deux droites parallèles, une droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné, etc.

II – CONSTRUCTIONS A LA REGLE ET AU COMPAS

Après cette première activité, une autre consigne, plus habituelle, est proposée aux étudiants : il s'agit d'effectuer des constructions à la règle et au compas. Cette fois, non seulement les étudiants doivent faire, mais ils doivent également être capables de décrire ce qu'ils ont fait. Un scénario de leur construction leur est en effet demandé. Par ailleurs, comme dans l'activité précédente, après avoir effectué la construction, les étudiants doivent la justifier. Il s'agit donc de repérer les éléments construits, les hypothèses liées à la construction choisie, puis appliquer définitions, propriétés, théorèmes pour démontrer que l'objet construit a bien les propriétés annoncées.

II – 1.1 première étape : construction, rédaction du scénario puis justification

La première construction proposée aux étudiants est celle d'un triangle rectangle. La mise en commun des procédures utilisées est alors mise en place avec le dispositif suivant :

d1. Un étudiant dicte au formateur un scénario de construction.

d2. Le formateur effectue au fur et à mesure la construction avec Cabri-géomètre, en faisant dans certains cas reformuler la consigne.

d3. L'étudiant, éventuellement aidé du groupe, explicite les propriétés qui justifient la construction effectuée.

Les objectifs, explicites ou implicites, sont multiples.

Les éléments d1 et d2 permettent explicitement de travailler la rédaction d'un scénario de construction. Celui-ci doit avoir plusieurs caractéristiques :

- Il doit être donné dans l'ordre. Si cet aspect pose parfois problème aux enfants, il ne pose en général pas de difficultés aux étudiants.

- Il ne doit pas être trop synthétique. Des expressions comme « tracer la médiatrice du segment [AB] » sont dans un premier temps refusées, et remplacées par la liste des actions élémentaires qui doivent être exécutées. Lorsqu'une procédure pour tracer une médiatrice à la règle et au compas par exemple est bien détaillée et justifiée, elle peut dans un second temps être utilisée comme une macro-construction. Au fur et à mesure que de nouvelles constructions sont explicitées et justifiées, elles viennent allonger la liste des objets constructibles directement.

- Il faut surtout que ce scénario soit complet, sans ambiguïté et sans redondance, ce qui est beaucoup plus difficile pour les étudiants. Je mets alors en évidence que la plupart du temps, ils ne disent pas tout parce qu'ils anticipent implicitement sur le tracé qu'ils veulent obtenir. Par exemple, le plus souvent, des arcs de cercle sont effectués. Mais il est difficile de décrire correctement un arc de cercle si on veut que son intersection par exemple avec un autre arc de cercle soit non vide ! Si les arcs de cercles sont correctement tracés, ce n'est pas grâce à la précision du scénario de construction, mais parce que les étudiants savent ce qu'ils doivent obtenir et anticipent grâce à l'image mentale qu'ils ont de la construction avant même que celle-ci ne soit effectuée. Il est donc proposé de tracer systématiquement le cercle complet, même si concrètement seul un arc « bien placé » suffit.

- Par ailleurs, le langage utilisé dans le scénario doit être un langage qui décrit les objets géométriques créés, et non les actions et instruments utilisés pour les construire. On cherche par exemple à remplacer : « Je trace un segment [DC]. Avec mon compas, je pose ma pointe sur D et je fais un écartement plus grand que la moitié de mon segment. Je trace mon arc » par « Tracer un segment [DC]. Tracer un cercle de centre D et de rayon supérieur à la moitié de la longueur DC ».

Ce travail est explicitement mis en place pour faire évoluer la compétence de rédaction d'un scénario de construction. Les étudiants se rendent compte qu'ils sont capables d'effectuer une construction, mais qu'ils ont de réelles difficultés pour la décrire. L'accent est mis sur le fait qu'ils doivent maîtriser cette compétence dans le cadre de l'épreuve de mathématiques du concours de recrutement des professeurs des écoles, mais également que cette compétence peut (-doit-) être travaillée au cycle 3[1], et qu'ils doivent donc la développer pour eux-mêmes en formation pour aider les élèves à la développer lorsqu'ils seront en classe. Du point de vue des élèves de cycle 3, les étudiants qui ont effectué des suppléances ont l'impression que les élèves connaissent bien les objets du plan qui sont explicitement au programme : carré, rectangle, cercle par exemple. Ils considèrent que les élèves savent les nommer et les tracer, ce qui est pour eux l'essentiel. Ils prennent soudain conscience que si eux-mêmes n'utilisent pas spontanément les mots *cercle*, *centre*, *rayon*, dans une telle activité, il en va probablement de même pour les élèves. Ils constatent alors tout l'intérêt de l'activité de rédaction d'un scénario de construction, et s'aperçoivent que bien souvent ils n'en ont jamais fait faire à leurs élèves.

Implicitement, ce travail permet également de préparer les étudiants à se situer dans le cadre de la géométrie déductive. En effet, tant que le langage n'est pas géométrique, que les objets géométriques créés et utilisés ne sont pas clairement identifiés, il est difficile de s'intéresser à leurs propriétés.

Dans un second temps, en d3, les justifications sont détaillées, dans le but implicite de travailler la démonstration. Elles sont au départ souvent incomplètes : « on a tracé une médiatrice, donc le triangle est rectangle ». Mais si on leur demande pourquoi il s'agit bien d'une médiatrice, les habituels arguments sont : « parce qu'elle est perpendiculaire au segment et qu'elle passe par son milieu ». Petit à petit, il s'agit de mettre en place une méthodologie :

<table>
<tr><th>Méthodologie</th><th>Mise en œuvre dans la construction de la médiatrice à la règle non graduée et au compas</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Repérage des caractéristiques de la construction</td><td>le compas permet de tracer des points à une distance constante du centre du cercle</td></tr>
<tr><td>les intersections de deux cercles de même rayon donnent des points équidistants des centres de ces cercles</td></tr>
<tr><td>Repérage de l'objet géométrique construit, à partir de sa définition ou d'une propriété caractéristique</td><td>deux points équidistants des extrémités d'un segment définissent la médiatrice de ce segment</td></tr>
<tr><td>Repérage du théorème utilisé pour conclure</td><td>une propriété de la médiatrice est qu'elle est perpendiculaire au segment, ce qui permet de conclure que le triangle est rectangle</td></tr>
</table>

[1] On peut lire par exemple dans le programme de l'école primaire (BO n°5 du 12 avril 2007, page 129) : « décrire une figure en vue de l'identifier dans un lot de figures ou de la faire reproduire sans équivoque ».

Les propriétés des objets ne sont pas lues sur le dessin, mais obtenues par un raisonnement hypothético-déductif basé sur :

- la traduction de l'utilisation des instruments en propriétés des objets géométriques construits : le compas permet d'obtenir des points vérifiant une relation de distance avec le centre, la règle non graduée d'obtenir tous les points alignés avec deux points donnés ;

- les définitions et théorèmes de la géométrie euclidienne.

La seule différence avec le travail habituel de démonstration est la manière d'obtenir les hypothèses permettant d'initier le raisonnement : elles ne sont pas données dans un texte ou codées sur un dessin mais obtenues par cette traduction de l'utilisation des instruments. Il s'agit donc d'une première étape dans l'apprentissage de la démonstration. Dans le travail ultérieur sur la démonstration, les données initiales de l'énoncé remplaceront le repérage des caractéristiques de la construction.

Le repérage des caractéristiques de la construction, des définitions et théorèmes utilisés, est parfois difficile pour les étudiants, et souvent des informations sont seulement lues sur le dessin. Il s'agit alors à chaque fois d'expliciter que la caractéristique donnée n'est pas issue de la construction, mais de la lecture du dessin. Chaque prise d'information sur le dessin est ainsi repérée. Il s'agit notamment de montrer que, même dans une démarche a priori consciemment déductive, il est facile de se faire « piéger » par le dessin et d'y lire des informations. C'est ce que Parzysz nomme la « contamination du su par le perçu » [Parzysz. 2002]. Il est indispensable que le formateur soit très vigilant pour que le travail se situe bien toujours dans le cadre de la géométrie déductive, et non dans celui de la géométrie perceptive à un moment ou à un autre.

L'accent est mis auprès des étudiants sur le fait que :

- Les procédures qu'ils utilisent de manière plus ou moins automatisée pour effectuer des constructions doivent avoir une justification mathématique ;

- Les propriétés utilisées sont mobilisables pour tous mais le plus souvent non disponibles spontanément pour bon nombre d'étudiants ;

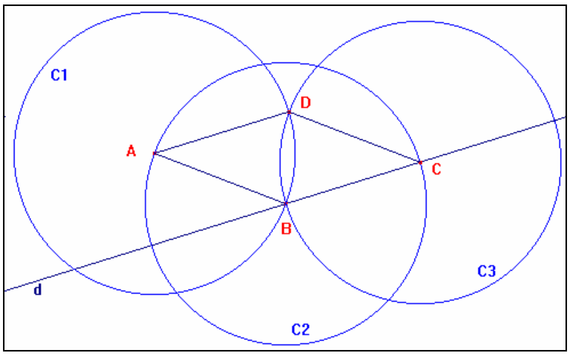
- Le travail essentiel à effectuer n'est pas d'emmagasiner des connaissances nouvelles (ils sont généralement capables de citer, voire même d'énoncer, pratiquement tous les théorèmes classiques de géométrie plane), mais de développer leur raisonnement géométrique en créant des liens entre les constructions qu'ils savent effectuer et les propriétés sous-jacentes.

La même démarche est reprise pour les autres procédures proposées par les étudiants, puis d'autres constructions sont traitées suivant le même dispositif : tracer une hauteur dans un triangle quelconque, tracer une bissectrice, tracer un carré, tracer un hexagone, un octogone, etc.

II – 1.2 deuxième étape : choix de la propriété avant d'effectuer la construction

Une nouvelle contrainte est alors apportée dans la consigne. Il ne s'agit plus d'effectuer une construction, mais autant de constructions différentes que possible pour un même objet. Considérons par exemple la consigne : « soit une droite d et un point A n'appartenant pas à d. Tracer la droite perpendiculaire à d passant par A. Trouver le plus de constructions différentes possibles »[2]. Cette fois, les constructions possibles sont très nombreuses[3]. Comme à la séance précédente, l'accent est mis sur la formulation des scénarios de construction, puis sur leur justification. Les hypothèses liées à la construction sont mises en évidence, puis les définitions et propriétés utilisées sont explicitées.

Considérons par exemple la construction suivante.



Scénario	Justification
Tracer un cercle C_1 de centre A, coupant la droite d. Soit B un des deux points d'intersection de C_1 et d.	
Tracer un cercle C_2 de centre B passant par A. Soit C un des deux points d'intersection de C_2 et de d.	On a donc : $BC = AB$
Tracer un cercle C_3 de centre C passant par B. Soit D le second point d'intersection de C_1 et C_3.	$CD = BC = AD$
	ABCD a quatre côtés de même longueur AB. C'est donc un losange. Ses côtés opposés sont donc parallèles. Or B et C sont sur d. Donc la

---

[2] Dans la cadre de l'atelier, la consigne est proposée sous forme de jeu : des groupes de 4 ou 5 sont formés et l'équipe qui gagne est celle qui a le plus de constructions différentes, avec les justifications correspondantes correctes.

[3] Le lecteur trouvera de nombreuses constructions détaillées dans [Jore, 2006, pages 389-397], disponible sur le net : http://www.ima.uco.fr/jore/

	droite (AD) est parallèle à d et passe par A.

Pour cette procédure, on met en évidence que :

- la construction est basée sur la définition du losange comme quadrilatère avec quatre côtés isométriques ;

- une propriété du losange permet ensuite de conclure que les côtés sont parallèles.

D'autres constructions sont proposées par les étudiants, et chaque fois le contrat pour le groupe est d'essayer d'établir leur justification.

En analysant les constructions proposées, on s'aperçoit que certaines ont été obtenues un peu par hasard, et le défi consiste alors à les justifier pour s'assurer que « ça marche toujours ». D'autres procédures au contraire ont manifestement été mises en place en cherchant à appliquer une propriété ou un théorème particuliers. La règle du jeu change alors pour devenir :

« Choisissez une situation dans laquelle vous savez qu'il y a des parallèles : une figure particulière ou un théorème de géométrie qui permet de conclure que sous telles hypothèses, deux droites sont parallèles, **puis** mettez en œuvre une construction dont vous avez ainsi à l'avance la justification ».

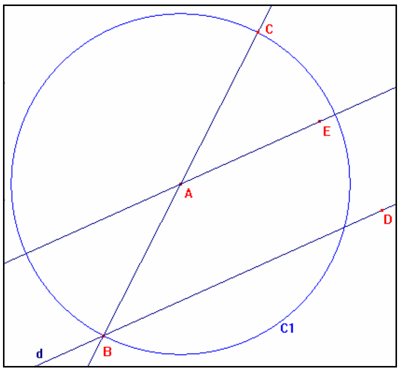
C'est le fait de demander des constructions différentes nombreuses qui amène à mettre en place cette nouvelle démarche.

A ce stade du dispositif, l'entrée par les figures, notamment les quadrilatères particuliers[4], a déjà été abondamment utilisée et c'est souvent plutôt l'entrée par les théorèmes qui est alors exploitée. Autrement dit, il s'agit de choisir un théorème qui permette une justification, puis de mettre en scène ce théorème pour élaborer une construction.

L'exemple est pris avec le théorème de la « droite des milieux ». Les étudiants sont invités à expliciter ce théorème - la « récitation » fonctionne en général très bien -, puis à l'**utiliser** pour construire deux droites parallèles, puis une droite parallèle à d passant par A. On obtient par exemple la procédure suivante :

---

[4] Si on trace un carré, un rectangle, un losange, un parallélogramme, on sait que l'on a des droites parallèles.



Scénario	Justification
Tracer un cercle de centre A qui coupe d en deux points. Soit B un de ces points.	$B \in d$
Tracer la droite (AB).	
Placer le point C à l'autre intersection de (AB) et du cercle.	A est donc le milieu de [BC]
Placer un point D sur d	$D \in d$
Placer le milieu E de [DC] (on peut utiliser une construction de la médiatrice à la règle et au compas).	E est le milieu de [DC]
Tracer la droite (AE).	(AE) est la droite qui joint les milieux des côtés [BC] et [CD] du triangle BCD. Elle est donc parallèle au côté [BD]. C'est donc une droite parallèle à d passant par A.

Cette mise en situation permet aux étudiants de s'approprier ainsi les propriétés et théorèmes énoncés. De nombreux théorèmes sont ainsi revus et utilisés pour inventer et justifier des constructions. Petit à petit, les étudiants effectuent des démonstrations. L'accent est mis sur le fait que pour être valable, la justification ne doit pas prendre des arguments sur le dessin, mais dans le scénario, qui est ici une manière de formuler les hypothèses.

Cette étape permet donc de développer plusieurs compétences :

- rédiger un scénario de construction ;
- repérer des hypothèses et établir une démonstration ;
- utiliser un théorème pour mettre en place une construction.

Ces activités sont ainsi l'occasion de raviver des connaissances et des compétences immédiatement utiles pour le concours. Les définitions et propriétés sont des outils pour résoudre le problème posé.

III – DEBAT DANS L'ATELIER

Plusieurs questions ont été soulevées par les participants lors de l'atelier et ont parfois entraîné un débat, en particulier autour du langage. La question fondamentale est celle de l'exigence que le formateur doit avoir sur les formulations des étudiants.

La première question concerne la verbalisation lors des pliages. Quelle place faut-il donner à cette verbalisation ? Quelles exigences faut-il avoir dans la rigueur de la description du pliage ? Deux points de vue se présentent :

- il faut profiter de toutes les occasions qui se présentent pour amener les étudiants à affiner leur langage, en particulier à utiliser le vocabulaire géométrique adapté à la situation ;

- les manipulations de pliage effectuées ne sont pas très habituelles et il ne suffit pas toujours de nommer l'objet construit ou ses propriétés pour savoir comment effectuer le pliage, il faut parfois décrire l'action qui est effectuée. Mais le langage spécifique des pliages n'est pas familier et l'énergie qu'il faudrait déployer pour le mettre en place ne se justifie peut-être pas dans le cadre de la préparation au CRPE.

Une seconde question concerne la rédaction des scénarios de construction pour les constructions à la règle et au compas. J'ai présenté lors de l'atelier quelques résultats de ma thèse, où je montre le langage utilisé par les PE1 dans ces activités. Le tableau ci-dessous montre le pourcentage d'étudiants qui utilisent tel mot dans tel scénario (l'analyse est faite sur 103 PE1) :

	Triangle rectangle	Droite parallèle
Cercle	35	46
Centre	22	47
Rayon	10	42
Intersection	23	37
Arc de cercle	27	20
Compas	66	50
Écartement, écart, ouverture	25	28
Pointe du compas, pointer	23	29
Reporter	13	28
Croisement, rencontre, se rejoindre	6	7
Joindre, rejoindre, relier, prolonger	10	15
En partant de, à partir de	10	25

Ce tableau montre que les étudiants utilisent beaucoup un vocabulaire qui décrit non pas l'objet géométrique tracé, mais le geste effectué et l'instrument utilisé pour obtenir ce tracé. Mon objectif est alors de remplacer un discours comme celui-ci :

Je trace une droite d. Je prends 2 points sur cette droite que j'appelle D et E. Je prends mon compas je choisi un écartement quelconque. Je pointe le compas en D et je trace un arc de cercle de part et d'autre de la droite d, je garde le même écartement, je pointe en E et je fais un arc de cercle de part et d'autre de d. De part et d'autre de d les arcs de cercle se recoupe en F et en G. Je trace la droite passant par G et F, je l'appelle d'. des droites d et d' se coupent en B. Je choisi un point C sur d, puis un point A sur d'. Je relie ABC.

par :

Soit une droite d. Soit D et E deux points de cette droite. Soient deux cercles de centres respectifs D et E et de même rayon, ayant deux points d'intersection F et G. Soit B l'intersection des droites d et (FG). Soit C un point de d et A un point de (FG), distincts de B. ABC est un triangle rectangle.

Il s'agit d'utiliser le vocabulaire mathématique pour être plus efficace, plus concis. Mais surtout, l'utilisation de ce langage est une première étape pour accéder aux concepts géométriques qui se cachent derrière les mots.

Une autre position est alors défendue : pourquoi une telle exigence dans la rédaction d'un scénario dès lors que celui-ci est compréhensible et fourni l'objet attendu ? Dans le cadre de la correction du CRPE, « si on aboutit à la bonne figure, on met les points ».

CONCLUSION

Cet atelier a été l'occasion de présenter des activités qui permettent simultanément de raviver des connaissances et des compétences géométriques variées immédiatement utiles pour le concours (définitions, propriétés, théorèmes, procédures de construction à la règle et au compas) mais aussi sur le terrain (rédaction de scénarios de construction). Ces définitions, propriétés, théorèmes sont des outils pour résoudre les problèmes posés, ce qui doit permettre une meilleure appropriation de la part des étudiants. D'autres pistes sont à explorer pour améliorer la rédaction des scénarios de construction, en particulier l'utilisation de logiciels de géométrie dynamique fournissant des scénarios de construction.

BIBLIOGRAPHIE

JORE F. (2006) *Paradigmes géométriques et formation initiale des professeurs des écoles, en environnements papier-crayon et informatique*. Thèse de doctorat de l'Université Paris 7.

PARZYSZ B. (2002) Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1, 99-110, in *Actes du XXVIII^e^ colloque COPIRELEM*, Ed Presses Universitaires d'Orléans.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (2007) *Programmes de l'école primaire*. BOEN hors série n°5. Paris : CNDP.

LE FICHIER « ÉVARISTE-ÉCOLE »

Nicole TOUSSAINT
nicoletoussaint@wanadoo.fr

Résumé
Le fichier « Evariste-Ecole » est un recueil de problèmes issus de différentes compétitions mathématiques et il constitue, à ce titre, une réserve de problèmes destinés à des élèves de cycle 2 et de cycle 3. Ces problèmes entrent tout à fait dans la rubrique des « Problèmes pour chercher » du document d'accompagnement des programmes de 2002 de l'école primaire.

Les documents d'application des programmes de mathématiques de l'École (cycle 2 et cycle 3) insistent sur l'importance et la nécessité de la résolution de problèmes à l'École.

1°) Problèmes pour apprendre :

- problèmes dont la résolution vise la construction d'une nouvelle connaissance,
- problèmes destinés à permettre le réinvestissement de connaissances déjà travaillées, à les exercer,
- problèmes plus complexes que les précédents dont la résolution nécessite la mobilisation de plusieurs catégories de connaissances.

2°) Problèmes centrés sur le développement des capacités à chercher ; en général, pour résoudre ces problèmes, les élèves ne connaissent pas encore de solution experte.

C'est sur ce dernier type de problèmes qu'a porté l'atelier avec le rappel des points essentiels du document d'accompagnement des programmes de l'École « *Les problèmes pour chercher* » et la présentation du fichier « *Évariste – École* »

Le document d'accompagnement de ces programmes, « *Les problèmes pour chercher* », explicite les objectifs et les modalités de mise en œuvre de ce type de problèmes et montre ce que pourrait être le déroulement d'une séance de résolution de tels problèmes à partir d'un exemple traité : « Un épisode de recherche, en actes ».

Rappelons ici :

1°) les objectifs visés :

- développer des capacités à faire face à des situations inédites ;
- prendre conscience de la puissance de ses connaissances ;
- valoriser des comportements et des méthodes essentiels (initiative, esprit critique, organisation, méthode, communication) ;

- argumenter pour convaincre, valider ou réfuter ; la raison l'emporte sur la passion ou sur la « loi du plus fort ou du plus grand nombre » ;

- développer la citoyenneté : travail de groupe, entraide, échange d'idées, écoute et respect de l'autre.

2°) les différentes tâches que les élèves sont amenés à assurer dans le cadre de la résolution de tels problèmes :

- faire des hypothèses, les tester ;
- élaborer une démarche pertinente afin de produire une solution personnelle ;
- vérifier par soi-même les résultats obtenus ;
- formuler une réponse dans les termes du problème ;
- expliquer ses méthodes, les mettre en débat, argumenter.

I – PRÉSENTATION DE LA STRUCTURE DU FICHIER

Le fichier « *Évariste – École* » que nous avons réalisé à partir de différentes compétitions mathématiques, comporte 60 problèmes pour le cycle 2 et 120 problèmes pour le cycle 3. Les fiches-problèmes peuvent être photocopiées sur des feuilles cartonnées et massicotées pour réaliser un fichier. Le recto des fiches comporte le texte du problème et les dessins éventuels liés au problème ; le verso, destiné aux enseignants, contient la solution, des coups de pouces à donner éventuellement aux élèves et des idées d'exploitation et de prolongements du problème.

Un livret de huit pages contient, outre des extraits des documents d'accompagnement précités et des explications sur une utilisation possible du fichier, deux index :

- un index par thèmes, les thèmes ayant été choisis au plus près de la typologie des rubriques des problèmes dans les programmes officiels : numérique, mesure, géométrie, espace, pavage, dénombrement, logique et recherche, ce dernier thème regroupant plutôt des problèmes inclassables dans les thèmes précédents. Ils sont repérés sur chaque fiche par un logo spécifique ; le thème « Numérique » se taille bien sûr la part du lion !
- un index par notions (notions abordées dans la résolution du problème).

Parmi tous les problèmes que les différentes compétitions mathématiques nous ont proposés, nous avons choisi ceux qui nous paraissaient les plus riches, en recouvrant au mieux l'ensemble des thèmes et en veillant à la variété des situations dans un même thème. Les apports mathématiques permis au niveau de l'exploitation du problème et les possibilités de prolongements intéressants ont prévalu aussi au choix des problèmes.

II – MISE EN SITUATION DE RECHERCHE DES PARTICIPANTS

Les participants ont ensuite été invités à rechercher eux-mêmes quelques problèmes afin de se mettre dans la situation d'élèves de l'école primaire. Il s'agit donc de trouver des procédures **non expertes** pour résoudre ces problèmes.

Le problème des « croquettes » est un des exemples cités dans le document d'accompagnement du ministère. La procédure experte serait la résolution d'un système de 5 équations à 5 inconnues, ce qui dépasse largement les compétences mêmes des élèves du collège. C'est parfois pour cette raison que des enseignants refusent de donner de tels problèmes à leurs élèves.

Croquettes

100 croquettes ont été réparties dans 5 assiettes.

Dans la 1re et la 2e assiettes, ensemble, il y a 52 croquettes.

Dans la 2e et la 3e assiettes, ensemble, il y a 43 croquettes.

Dans la 3e et la 4e assiettes, ensemble, il y a 34 croquettes.

Dans la 4e et la 5e assiettes, ensemble, il y a 30 croquettes.

Combien de croquettes y a-t-il dans chaque assiette ?

2ème rallye mathématique romand – 1994 (fin de cycle 2, cycle 3)

Ce problème est très riche : les procédures vont des essais et ajustements aux raisonnements. En voici quelques-unes.

Procédure par essais et ajustements :

L'élève décide par exemple que la première assiette contient 25 croquettes. Il en déduit que la deuxième assiette contient 52 – 25 = 27 croquettes, et de proche en proche, la troisième 16, la quatrième 18 et la dernière 12. En faisant le total, il trouve 98 croquettes. Voyant qu'il manque deux croquettes au total il peut, a priori, penser qu'en ajoutant deux croquettes à la première assiette, il obtiendra le nombre voulu. Il doit donc vérifier son hypothèse en recommençant le calcul avec 27 croquettes dans la première assiette. Les calculs successifs donnent 27, 25, 18, 16 et 14, ce qui donne bien un total de 100.

On le voit, dans cette procédure, l'élève doit prendre des initiatives, faire des hypothèses, respecter les consignes et vérifier les résultats obtenus.

L'exploitation de cette solution avec toute la classe est l'occasion de justifier que la règle: « *Il me manque deux croquettes au total, donc j'en ajoute deux dans la première assiette* » est tout à fait correcte. Pour cela, le maître peut proposer aux élèves un autre ajout, une croquette seulement, par exemple, et leur demander de voir si la règle édictée se vérifie encore. Un troisième essai peut conforter la règle ; mais est-on sûr qu'elle est toujours vraie ?

Il ne s'agit pas ici de faire un calcul algébrique pour la justifier ; mais une observation des calculs intermédiaires avec une présentation comme celle ci-contre permet d'en être convaincu. Quelle que soit la valeur attribuée à A, la situation fait que la somme A + B + C + D reste constante et égale à 86. **Si, donc, on ajoute une croquette au contenu de A**, B en a une de moins, C en a une de plus, D en a une de moins et **E en a donc une de plus** puisque D + E est constant et égal à 30.

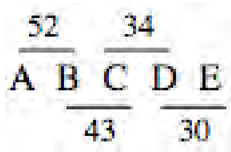
On suppose :	A = 26	52
donc	B = 26	
	C = 17	34
	D = 17	
	E = 13	
Total :	99	

Procédures par raisonnement

Pour des besoins de concision dans ce qui suit, nous désignerons, comme précédemment, par A, B, C, D et E les contenus des cinq assiettes de la première à la cinquième. Les élèves, bien sûr, n'ont pas à utiliser nécessairement de telles représentations, ni à formuler leur solution comme cela est fait ici.

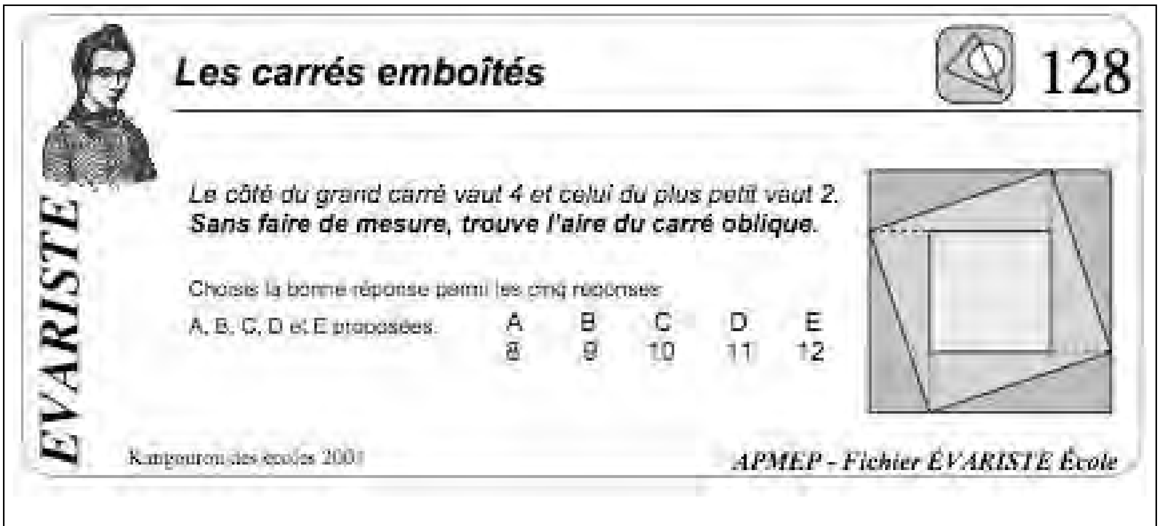
1°) En effectuant la somme des quantités données, 52 + 43 + 34 + 30 = 159, on compte deux fois les contenus des deuxième, troisième et quatrième assiettes. Ainsi, B + C + D = 159 – 100 = 59. Or on sait que B + C = 43. On en déduit que D = 16 et, de proche en proche les autres contenus.

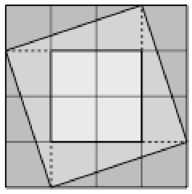
2°) Un petit schéma, comme celui ci-contre, représentant les assiettes et leurs contenus deux par deux, donne l'idée d'effecteur les sommes suivantes : (A + B) + (C + D) = 52 + 34 = 86. Donc E = 100 – 86 = 14. De proche en proche, on obtient alors les contenus des autres assiettes.



À la suite de cette recherche et de l'exploitation précédente, un prolongement possible pourrait être le problème suivant : « Et s'il y avait 6 assiettes ? ». Le maître propose alors, par exemple cette nouvelle situation : 100 croquettes réparties dans 6 assiettes, les contenus de deux en deux étant 32, 33, 32, 30 et 36. Les élèves sont alors confrontés au fait que, contrairement à la situation précédente, les essais qu'ils peuvent faire conviennent, ce qu'ils peuvent expliquer à la suite de l'exploitation du problème précédent. Les élèves ou le maître peuvent alors se poser la question : quels sont les nombres de croquettes possibles dans la première assiette ?

Les problèmes suivants proposés aussi dans cet atelier sont extraits de la partie cycle 3 de la brochure « *Évariste-École* » et pris dans différents thèmes.





Le logo (à gauche du numéro) indique qu'il s'agit d'un problème de géométrie. Là aussi, plusieurs stratégies de résolution sont apparues :

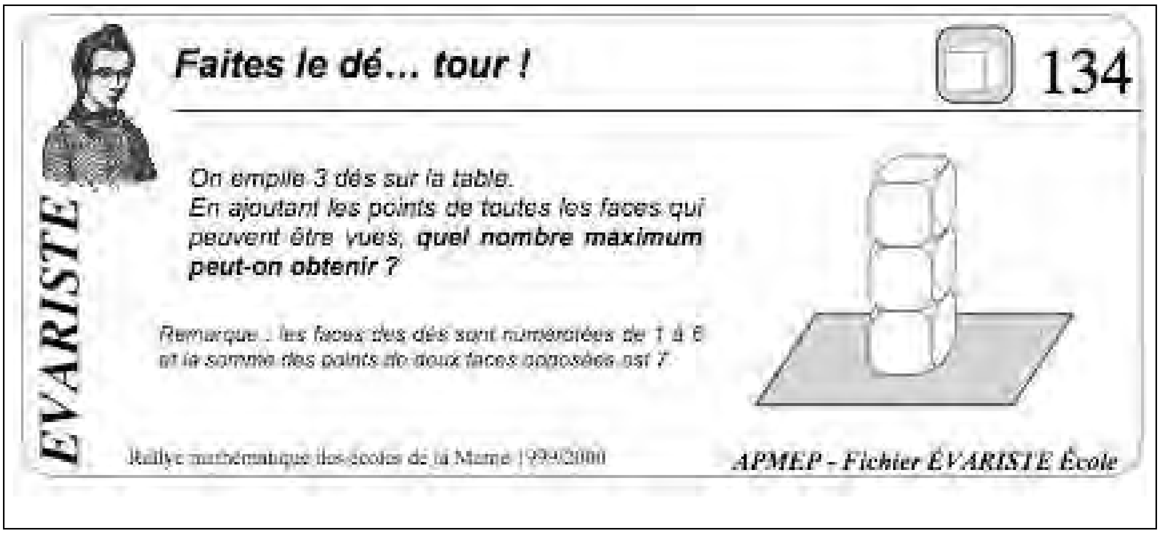
1°) Utilisation d'un quadrillage ; en regroupant les triangles rectangles gris moyen deux par deux, on observe que leur aire est celle de deux rectangles de trois carreaux chacun, soit 6 carreaux. L'aire du carré oblique est donc de 10 carreaux

2°) L'aire du grand carré étant de 16 carreaux et celle du petit de 4 carreaux, l'aire de la couronne est donc de 12 carreaux. Or les contours du carré oblique partagent cette couronne en deux zones d'aires égales, aire de 6 carreaux. L'aire du carré oblique est donc celle du carré central plus 6 ou celle du grand carré moins 6.

3°) Une autre stratégie consiste à déterminer les longueurs des côtés des triangles rectangles et, comme précédemment, à regrouper ces triangles rectangles par deux pour calculer l'aire des rectangles obtenus.

Le débat a aussi porté sur le fait que ce problème est présenté sous la forme d'un QCM. Il apparaît qu'il ne faut pas en abuser, mais pas non plus les proscrire. En effet, la nature du QCM permet de développer d'autres stratégies, en particulier celle par analyse des réponses proposées et élimination de celles qui ne conviennent pas. Par exemple, dans la situation proposée, les élèves pourraient peut-être faire appel à la parité pour éliminer les réponses B et D.

L'exploitation de ce problème avec toute la classe réside surtout dans l'explicitation par les élèves des démarches utilisées. La projection du dessin au tableau avec un rétroprojecteur facilite ici grandement les échanges.



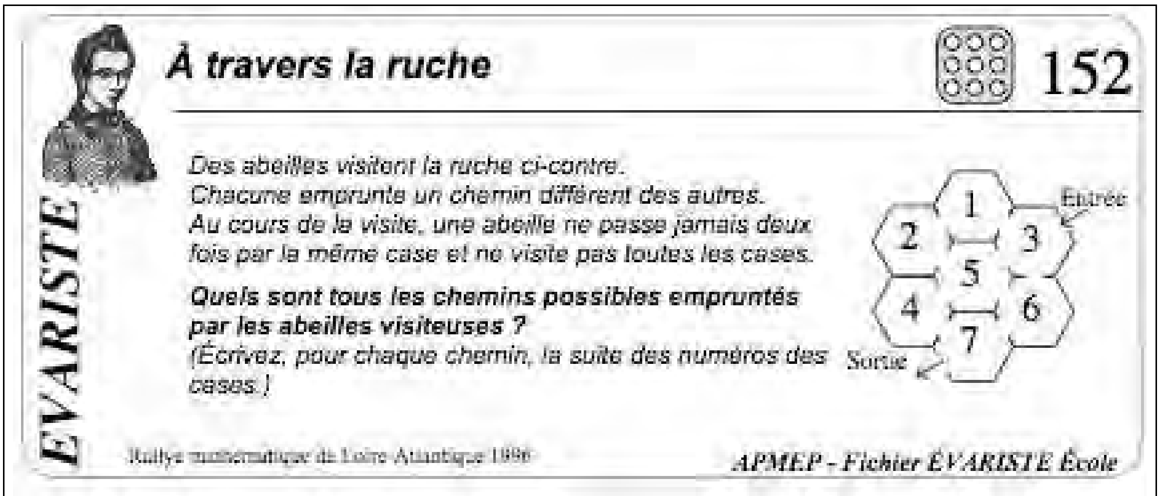
Problème de géométrie dans l'espace : certains participants ont discuté pour savoir s'il fallait prendre en compte toutes les faces du solide formé par les trois dés ou non. Après une lecture attentive de l'énoncé, il est apparu aux yeux de tous qu'il n'y avait aucune confusion possible et que, par conséquent, ces problèmes constituent aussi l'occasion de pratiquer une lecture beaucoup plus fine que celle d'un roman.

En ce qui concerne les procédures, il apparaît que l'information : « *La somme des points de deux faces opposées est égale à 7* » n'est pas complètement exploitée. Les élèves éprouvent en effet le besoin de choisir des points sur les faces visibles et de déterminer ceux des faces opposées.

La solution qu'on peut qualifier d'experte, mais accessible tout de même à des élèves de cycle 3, réside dans l'observation de six paires de faces opposées qui donnent donc 6 x 7 = 42 points quels que soient les points qui sont sur les faces et de choisir le maximum de points (6) sur la face du dessus, ce qui donne un total de 48 points.

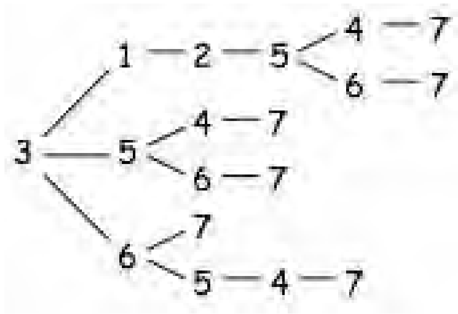
En exploitation de ce problème, on peut demander aux élèves le nombre minimum qu'on peut obtenir, nombre qui est donc 43.

Le prolongement donné dans le fichier « Évariste-École » propose le problème ci-contre. La recherche faite sur le problème précédent rend plus aisée la résolution de celui-ci. Les trois paires de faces opposées donnent obligatoirement 21, quelles qu'elles soient. Il faut donc mettre le maximum ou le minimum de points sur les faces du dessus et des extrémités : trois 6 et deux 5 pour le maximum et trois 1 et deux 2 pour le minimum.

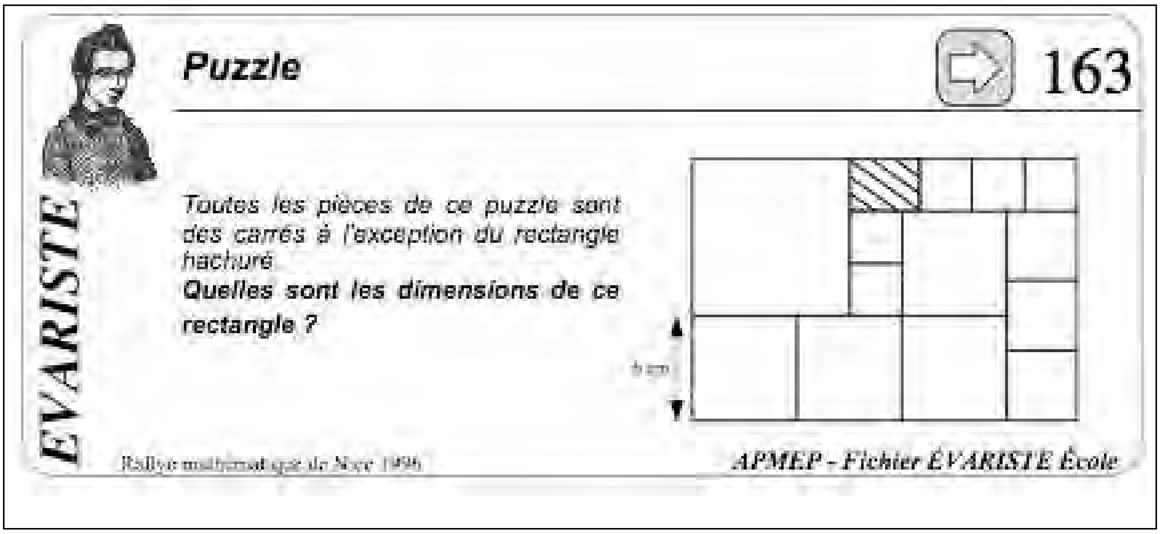


Ce logo est celui du thème « dénombrement ». Une fiche annexe à photocopier aux élèves et qui comporte plusieurs exemplaires de la ruche leur permet de dessiner les différents chemins qu'ils trouvent et de les comparer entre eux.

Le problème essentiel que les élèves doivent résoudre est de savoir s'ils ont obtenu tous les chemins. L'exploitation de ce problème peut alors consister à leur montrer comment on peut construire un « arbre » pour résoudre ce problème.



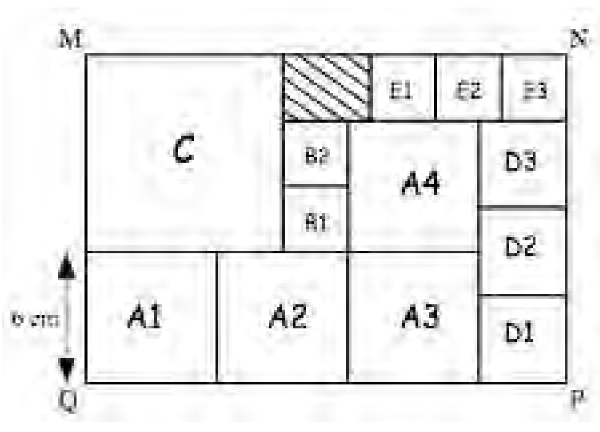
Quelles sont les possibilités au départ de la case 3 ? Puis à partir des cases 1, 5 et 6 ? La structure d'arbre est une aide à la recherche exhaustive de toutes les possibilités. L'arbre ci-contre donne les six chemins possibles.



Ce logo signale les problèmes classés dans le thème « Logique ». Même si tous les problèmes font appel au raisonnement, certains requièrent plus que d'autres une démarche déductive. Celui-ci en fait partie.

Le dessin est conforme aux dimensions réelles (à l'échelle), ce qui facilite la recherche des élèves. Mais il pourrait très bien être fait à main levée, les propriétés données suffisant à sa résolution. C'est donc bien un problème qui fait complètement appel au raisonnement.

1°) Le premier résultat obtenu est que les côtés des carrés A mesurent 6 cm. En comparant le côté du carré A4 avec ceux des carrés B, on en déduit que les côtés des carrés B mesurent 3 cm. Le côté du carré C mesure donc 12 cm – 3 cm = 9 cm. D'où MQ = 15 cm. On en déduit que le petit côté du rectangle hachuré mesure 15 cm – 12 cm = 3 cm, ce qui est aussi la mesure des côtés des carrés E.



2°) En comparant les côtés des carrés A3 et A4 avec les côtés des carrés D, on en déduit que les côtés des carrés D mesurent 4 cm et donc que QP = 3 x 6 cm + 4 cm = 22 cm. Le deuxième côté du rectangle hachuré mesure donc 22 cm – 9 cm – 3 x 3 cm = 4 cm. **Les dimensions du rectangle hachuré sont donc 3 cm et 4 cm**.

D’autres cheminements sont possibles. En présentant à toute la classe leurs solutions, les élèves sont amenés à argumenter, en particulier à la demande de leurs camarades. En effet, les différents résultats de la solution précédente ont été annoncés de façon succincte et nécessitent davantage d’explications de la part des élèves.

En prolongement de ce problème, le verso de la fiche propose le problème ci-dessous.

Puzzle 163

Fiche annexe

Réponse : Le rectangle mesure 3 cm sur 4 cm.

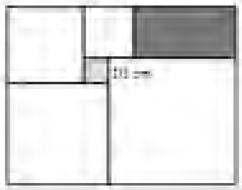
Coups de pouce :

Sur un schéma, marquer les longueurs des côtés des carrés à partir du renseignement donné.

Exploitations et prolongements possibles :

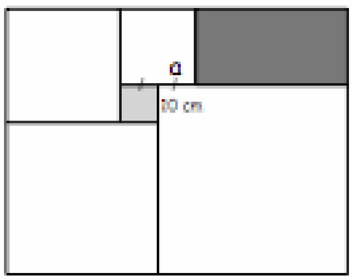
Fiche annexe

1°) Le puzzle étant affiché au tableau (avec un rétroprojecteur, par exemple), faire expliciter aux élèves les raisons qui leur ont permis de trouver successivement les longueurs des côtés des carrés puis du rectangle.
2°) Proposer cet autre problème : **"Le bureau de François"** (EnterM@th en Rabelaise - 2006)
François travaille sur un bureau rectangulaire composé de cinq carrés et d'un rectangle gris foncé. Le côté du petit carré gris clair mesure 10 cm. Quelles sont les dimensions de son bureau ? Réponse : 90 cm et 70 cm.



Les participants à l’atelier ont vite remarqué qu’il n’y a pas qu’une solution à ce problème, par suite d’un oubli de codage d’égalité de longueurs de deux segments ! Mais les élèves se poseraient sans doute moins de questions, ce qui n’excuse en rien notre oubli puisque nous leur expliquons qu’ils ne doivent pas prendre des données qui ne seraient pas écrites dans les énoncés !

Voici le dessin tel qu’il aurait dû être. Nous y faisons figurer cependant la lettre a qui désigne la mesure inconnue du dessin sans le codage. Avec cette inconnue, les dimensions du rectangle sont 50 + 2a et 70 + 2a. Si donc a = 10 cm, les dimensions du rectangle sont celles attendues : 70 cm et 90 cm.



Les problèmes du fichier « Évariste-École » tirés de différents rallyes et compétitions mathématiques font tout à fait partie de la catégorie des « Problèmes pour chercher ». Bien sûr, comme nous l’avons vu, le rôle du maître est primordial.

Il se situe au niveau du choix du problème dans la progression car, même si l’objectif est la recherche de la solution, ces problèmes font tout de même appel à des notions mathématiques.

Il se situe aussi au niveau de ses interventions dans la phase de recherche où, involontairement, il risque d’aiguiller les élèves vers une procédure connue alors que les élèves nous étonnent souvent avec des procédures inattendues correctes. Même si nous proposons pour chaque problème des coups de pouce, les meilleurs sont ceux que le maître apporte en fonction de la recherche des élèves, comme nous le rappelons dans le document d'accompagnement.

Il se situe enfin au niveau de l'exploitation du problème au cours de la mise en commun des solutions en gérant les échanges entre les élèves, en les amenant à analyser les difficulté rencontrées et à repérer les procédures intéressantes qui pourront être réinvesties au niveau des prolongements au problème traité.

Pour ce dernier point, nous ne pouvons que conseiller d'aller lire « **Les modalités de mise en œuvre du problème pour chercher** » de la partie « ***Les problèmes pour chercher*** » du document d'accompagnement des programmes du primaire.

BIBLIOGRAPHIE

DOCUMENTS D'APPLICATION DES PROGRAMMES DE MATHEMATIQUES DU CYCLE 2 ET DU CYCLE 3 — COLLECTION ECOLE, scérÉn

DOCUMENTS D'ACCOMPAGNEMENT DES PROGRAMMES DE MATHEMATIQUES DU PRIMAIRE : *Les problèmes pour chercher.*

BAREIL H. (2006) *Présentation du fichier « Evariste- Ecole »*, Bulletin Vert de l'APMEP, **467**, 876-879.

CHARNAY R. (2007) *Rubrique « A signaler »*, Grand N, IREM de Grenoble, **79**, 113-115.

UN RALLYE INTERNET SUR LE CALCUL MENTAL

Sébastien HACHE
Professeur de Mathématiques, fondateur de Sésamath
Collège Villars à Denain (59)
Sebastien.hache@sesamath.net

Katia HACHE
Professeur de Mathématiques, membre de Sésamath
Collège Voltaire à Lourches (59)
Katia.hache@sesamath.net

Résumé
L'Inspection Académique du Nord, en partenariat avec l'association Sésamath, a organisé un rallye sur le calcul mental (CM1, CM2, 6ème) entièrement réalisé sur Internet (les réponses des élèves étant directement saisies en ligne) du 10 au 19 mai 2007. L'intégralité de ce Rallye est sous licence libre et à ce titre réutilisable par quiconque.
L'article suit la chronologie du déroulement de l'atelier. Au cours de la première partie, nous revenons sur la genèse d'un tel rallye : équipes mises en jeu, scénarisation des exercices, choix didactiques, contraintes liées à l'informatique... mais aussi retombées attendues avant, pendant et après ce Rallye (concernant en particulier l'utilisation des outils autonomes dérivés des épreuves du Rallye). Dans la deuxième, nous présentons quelques exercices issus des épreuves du Rallye. Les troisième et quatrième paragraphes reprennent, en partie, les échanges avec les participants, visant en particulier à :
* éclairer les apports, limites... d'un tel outil (différents usages possibles en classe...) ;
* explorer les pistes liées à la paramétrisation des outils autonomes associés (en particulier le lien entre paramètre informatique et variable didactique) ;
* confronter les idées des uns et des autres pour la création d'outils complémentaires.

I – PRESENTATION DU RALLYE

I – 1 Mise en place du projet : objectifs et moyens

En juin 2006, les missions « mathématiques » et « TICE » de l'IA 59, respectivement menées par les IEN J-J. Calmelet et D. Meurot, décident la création d'un Rallye de calcul mental entièrement réalisé et passé sur Internet. Cette idée part d'un double constat :

- la pratique du calcul (et plus généralement des mathématiques) est problématique dans le département comme en témoignent les résultats des évaluations en mathématiques à l'entrée de 6ème.

- les mathématiques sont très peu utilisées dans les environnements TICE.

Le Rallye a donc pour vocation de créer une appétence pour l'utilisation de l'outil informatique pour le calcul mental, puis de fournir les outils logiciels pour que cette pratique puisse aisément se développer. En particulier, c'est cette orientation qui a déterminé le choix d'une licence libre pour de tels logiciels.

Pour réaliser ces développements, deux professeurs de collège (Laurent Hennequart et Sébastien Hache) sont déchargés 4 h par semaine. Par ailleurs, Bruno Meunier, conseiller TICE départemental (dont le rôle est d'aider à la coordination des conseillers TICE qui interviennent dans chaque circonscription du département), s'occupe de l'aspect réseau. De cette façon, l'équipe de développement est également un lieu de réflexion inter-cycles.

Le choix des exercices, leurs tests et évolutions successives, ont été menés de façon coopérative avec l'appui d'une plate-forme collaborative. Une quarantaine de personnes ont participé activement à ces réflexions : des conseillers pédagogiques, des conseillers TICE, ainsi que des formateurs en mathématiques de l'IUFM de Lille. Il y a d'abord eu une première phase de propositions et d'échanges, suite à une première réunion en présentiel. Chacun était invité à puiser dans son expérience, ses pratiques pour proposer des scenarii d'exercices. Ces scenarii étaient ensuite déposés sur un site Internet et discutés (certains demandant des précisions, d'autres proposant des améliorations…). Le développeur informatique intervenait également (par rapport à la faisabilité technique) et commençait aussi à développer les exercices qui semblaient faire l'unanimité. Dans une seconde phase, une journée entière, en présentiel, a été consacrée aux tests réels des exercices en salle informatique. Le matin, chacun testait les différents exercices proposés et était invité à remplir une feuille avec ses commentaires : intérêt pédagogique, ergonomie, choix des variables (taille des nombres…), intérêt par rapport à la problématique du calcul (et en particulier sur les formes de calculs attendues). Comme le Rallye s'adresse à des élèves depuis le CM1 jusqu'à la 6ème, la question des prérequis nécessaires était aussi abordée. Chacun pouvait choisir (parmi une vingtaine) les trois exercices qui lui semblaient être à garder absolument et les trois, au contraire, qu'il lui semblait pertinent d'écarter. L'après-midi, une synthèse collective a permis de proposer des améliorations et de confronter les impressions des uns et des autres. La troisième phase a été le test réel avec les élèves. Les conseillers pédagogiques volontaires ont chacun fait tester une situation particulière dans une classe de leur circonscription, en jouant les observateurs et en faisant remonter les impressions du professeur et des élèves. La dernière phase, en comité plus réduit (la petite équipe organisatrice), a permis de finaliser une sélection à la fois sur les exercices retenus mais aussi et surtout sur leur paramétrisation. Les critères retenus pour ce choix étaient liés à trois facteurs essentiels : les remarques des testeurs, la durée globale du Rallye, le bon équilibre entre les différentes formes de calculs. Autrement dit, cette étape consistait davantage à appréhender la cohérence complète du Rallye.

I – 2 Déroulement du Rallye : conditions d'inscription et de réalisation des épreuves

Le rallye s'est déroulé du 9 au 19 mai 2007.

La période d'inscription des classes en ligne s'est étalée de février à mai. Pouvaient s'inscrire des classes de CM1, de CM2 ou des classes de 6ème, à condition pour ces dernières d'être en binôme avec une classe de CM2. De cette façon, l'accent a été mis sur la liaison école/collège.

12 000 élèves se sont inscrits et 10 000 ont effectivement participé au Rallye, ce qui correspond à 394 classes.

Le Rallye tout entier s'est déroulé sur Internet, depuis la phase d'inscription jusqu'à la passation du Rallye. Les exercices, scores… ont été stockés sur un serveur départemental de l'IA 59. Autrement dit, une fois l'inscription effectuée, les enseignants n'avaient pas besoin d'installer quoi que ce soit sur les ordinateurs. Il suffisait de disposer d'un navigateur et d'une connexion Internet. Dans les faits, beaucoup de Rallyes se sont déroulés dans les salles informatiques des collèges (dans le cadre de liaisons CM2 / 6ème).

Au moment d'inscrire sa classe, chaque professeur a indiqué le nombre de binômes d'élèves qui allaient passer le Rallye. Pour chacun de ces binômes, un mot de passe était délivré à l'enseignant. Il lui revenait ensuite de constituer les binômes et d'affecter les mots de passe. Autrement dit, les scores n'étaient pas enregistrés nominativement sur le serveur départemental : seul le professeur responsable de la classe savait exactement les scores de ses élèves.

Le choix de faire travailler les élèves en binôme a été fait afin de favoriser les discussions entre eux sur les stratégies employées. Dans les faits, tous les observateurs ont noté que les binômes ont beaucoup échangé pendant le Rallye, créant une saine animation dans les salles informatiques.

Chaque exercice était doté de son propre « chronomètre ». Ainsi, passé une certaine durée, il n'était plus possible de poursuivre un exercice et il fallait passer au suivant. De cette façon, le temps de passage du Rallye ne pouvait pas excéder 45 minutes. Mais ce temps pouvait éventuellement être fractionné. Un Rallye débuté le lundi pouvait être repris et terminé le mardi (dans la période de 10 jours du Rallye) ; le serveur gardant la mémoire de l'avancement de chaque élève.

Les résultats par exercice et par niveau de classe (traduits par des notes sur 10) sont annexés à cet article. Chaque exercice a son propre mode d'évaluation. Il dépend de la forme de l'exercice. Tout ramener à une note sur 10 (par de savants calculs parfois) permet de fournir un bilan facile à appréhender à la fois pour le maître mais aussi pour chaque élève. En effet, à la fin du Rallye, les binômes d'élèves pouvaient regarder leurs résultats visualisés par des barres de couleurs pour chaque exercice. Quant au professeur, il avait un accès sur le serveur gardant en mémoire les résultats de sa classe, binôme par binôme, qu'il pouvait donc consulter tout à loisir (et même depuis chez lui avec un accès Internet).

II – PRESENTATION DE QUELQUES EXERCICES DU RALLYE

L'ensemble des épreuves du Rallye est accessible sur le site HYPERLINK http://www.calculatice.net. Il est fortement conseillé de lire ce qui suit en suivant en parallèle les exercices directement en ligne afin de mieux les visualiser :

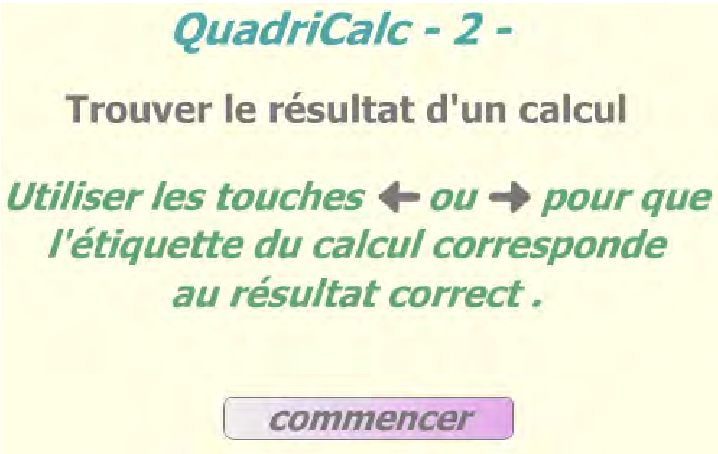
http://netia59a.ac-lille.fr/calculatice/spip.php?page=sommaireexercicesenligne

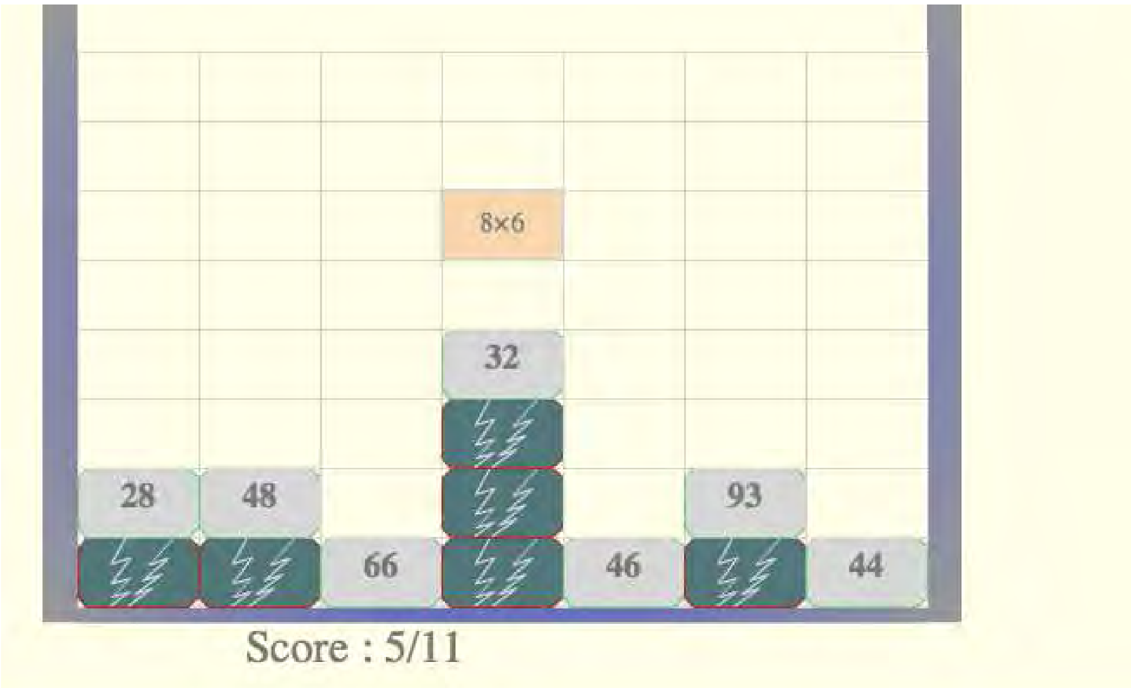
Dans cette version, chaque exercice est utilisable individuellement et indépendamment des autres. Pour ceux qui veulent se mettre dans les conditions du Rallye (avec ordre imposé et chronomètre), c'est à cette adresse : http://netia59a.ac-lille.fr/calculatice/spip.php?page=rejouerlerallye

Parmi les 17 exercices proposés dans le Rallye, certains n'ont été que les variantes d'une même matrice (avec des paramètres différents). Ainsi le quadricalc est présent dès l'exercice 1 sous une forme additive (favorisant l'appropriation de l'exercice spécifique du Rallye) puis au 4ème sous sa forme multiplicative (les tables de multiplication), au 12ème avec des soustractions et enfin, sous une autre forme, comme exercice final. De cette façon, l'élève peut mieux appréhender l'ergonomie (maniabilité, mode d'emploi…) dans un contexte mathématique plus facile, permettant ensuite de passer à des situations plus compliquées d'un point de vue mathématique.

Les exercices ci-dessous illustrent deux de ces matrices d'exercices (quadricalc et calculatrice cassée) ainsi que d'autres exercices (les rectangles, les cubes et la règle cassée) touchant des champs connexes au calcul : grandeurs et mesures / perception et visualisation dans l'espace.

Ex 1, 4, 12 et 17 : Quadricalc (Tetris)

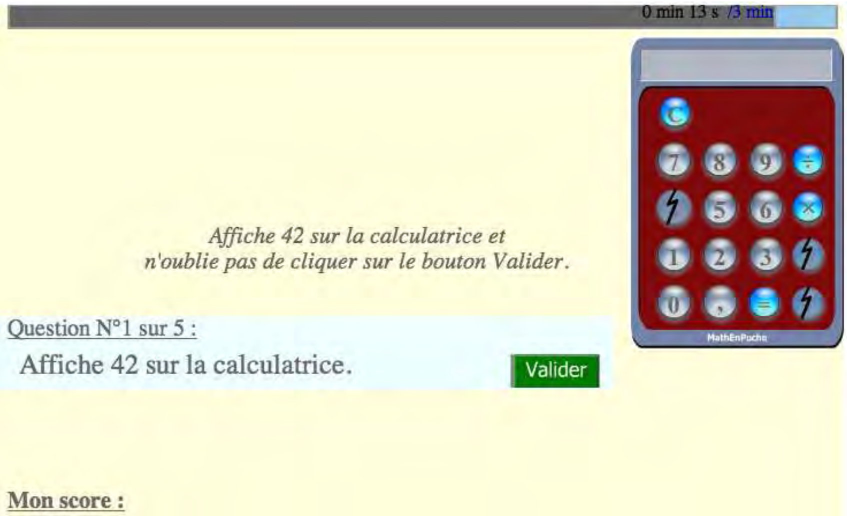




Dans cet exercice, le principe du jeu est celui, bien connu, du « Tetris ». A l'aide des flèches, l'élève doit guider la « caisse » qui tombe (et son calcul) vers le bon résultat à choisir parmi 7 nombres.

En cas d'erreur, le même calcul est proposé jusqu'à ce que l'élève arrive à la bonne solution. La réponse exacte est demandée. Le choix des six mauvaises réponses est aléatoire. Il y a 20 tentatives et chaque mauvaise réponse correspond à une case noircie (voir aussi la seconde partie de cet article). Pour l'exercice 17, le jeu s'accélère progressivement et il s'arrête quand l'élève n'arrive plus à manœuvrer entre toutes les cases noircies.

Ex 7, 8 et 14 : La calculatrice cassée

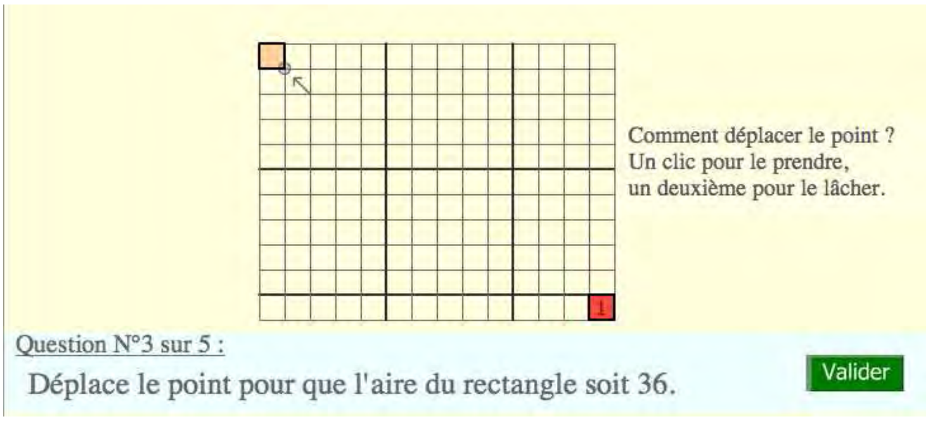


Il s'agit d'un exercice de calcul réfléchi proposé dans un cadre instrumenté, avec des contraintes inhabituelles. Les touches en panne de la calculatrice proposée impliquent des stratégies d'anticipation (détour par le calcul réfléchi) pour parvenir au nombre cible.

Suivant les exercices et les configurations, les stratégies de calcul attendues ne sont pas les mêmes. Par exemple, passage par une décomposition multiplicative du nombre en deux ou plusieurs facteurs compris entre 2 et 9 excepté le 4 comme dans l'exemple ci-dessus (21 x 2 ou 6 x 7 ou 2 x 3 x 7 …) ou bien, ce qui est possible mais moins probable, passage par la division (126 : 3 ou 210 : 5 …).

Dans d'autres cas, le fait de demander d'afficher un nombre décimal (non entier) alors que la touche « virgule » est supprimée, oblige à utiliser la division (traduisant l'écriture sous forme de fraction décimale). Par exemple, afficher 2,3 peut être obtenu en faisant 23 : 10.

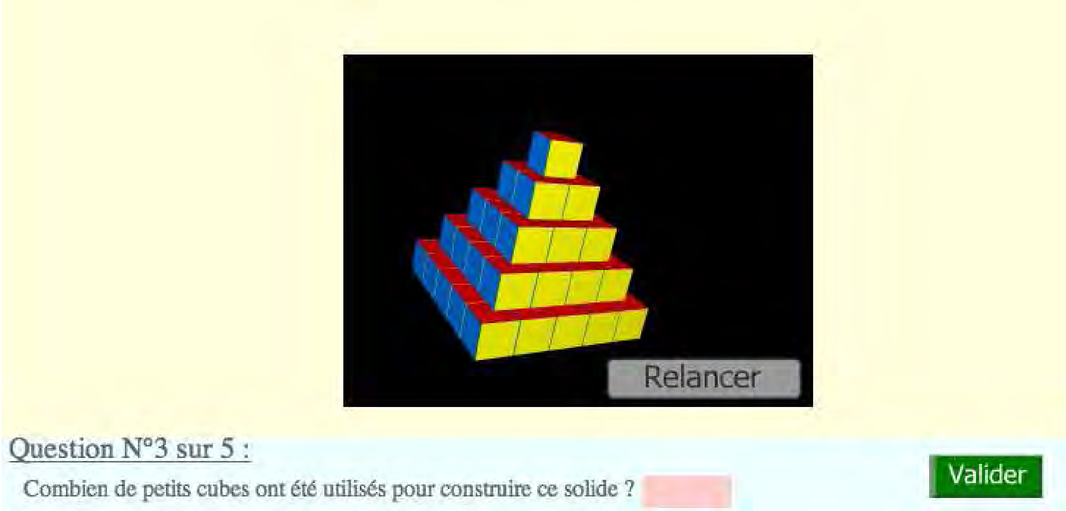
Ex 2 : Les rectangles



L'objectif de cet exercice est de travailler sur les tables de multiplication « à l'envers » ; en particulier pour faire apparaître une décomposition d'un nombre sous forme d'un produit de deux facteurs. Dans cet exercice contenant cinq questions, les quatre premières demandaient la décomposition d'un résultat de la table de Pythagore. A chaque fois, il y avait plusieurs solutions possibles (ne serait-ce que par symétrie du rectangle). La dernière question (avec 84 pour résultat) était volontairement d'une autre difficulté et cette fois-ci avec une seule possibilité en raison des contraintes liées aux dimensions du cadre.

Certains élèves, peu familiarisés avec ce support se rapportant à un sens à l'écriture multiplicative (utilisation de la multiplication pour dénombrer le nombre de cases d'une grille), n'ont pas fait le lien immédiatement avec les tables de multiplications et se sont contentés d'un dénombrement des carreaux (qui devient de plus en plus compliqué parce que les nombres sont de plus en plus grands au fur et à mesure que les questions avancent) ou ont fait le lien tardivement dans l'exercice (certains professeurs ont dit que beaucoup d'élèves l'ont manifesté avant la fin de l'exercice, se rendant compte de l'intérêt des tables). A noter que le trait plus fort tous les 5 carreaux (facilitant le dénombrement des carreaux dans une ligne ou dans une colonne) a été une des améliorations demandées lors des phases de tests et constitue une variable possible pour l'exercice.

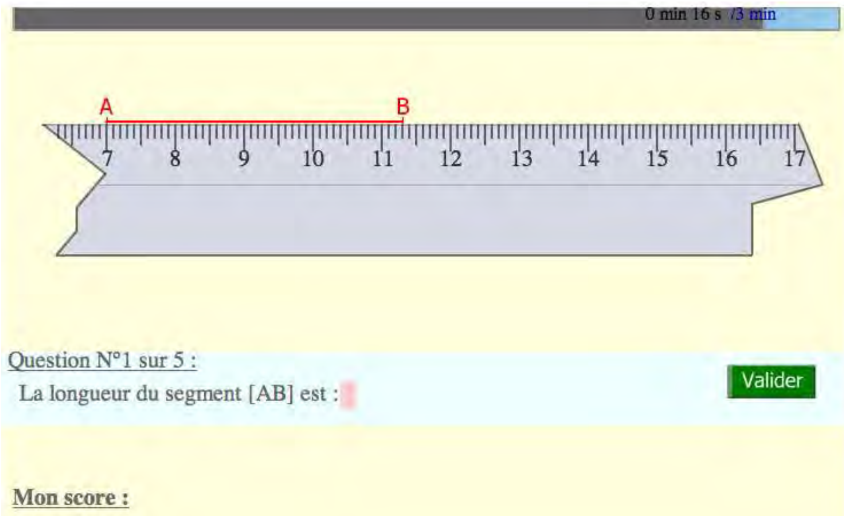
Ex 11 : Les cubes



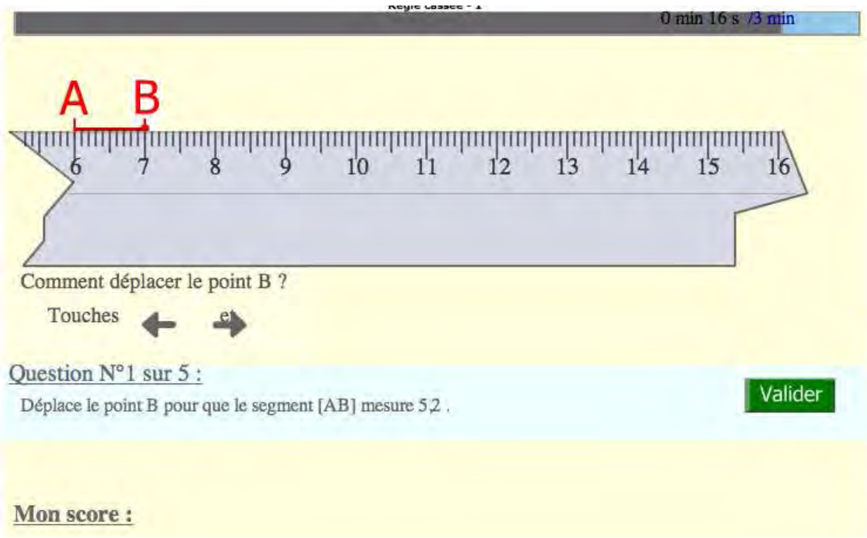
Dans cet exercice, chaque question présente un assemblage de cubes différent, de plus en plus compliqué. Ce solide est présenté en mouvement afin de le voir sous tous les angles. L'élève peut relancer l'animation et la figer quand il le souhaite.

Sur le cas précis de la pyramide ci-dessus, plusieurs procédures sont envisageables : la décomposition de la pyramide en cinq étages est fortement suggérée, on peut donc dénombrer le nombre de cubes de chaque étage en utilisant le comptage un à un ou une somme ou un produit, puis sommer les cinq nombres obtenus en regroupant 9 et 1, 16 et 4... Le fait de dénombrer des cubes invisibles *(ici ceux qui sont à « l'intérieur » de la pyramide)* est un élément non négligeable de cette démarche et on peut s'attendre à ce que certains élèves ne considèrent que les cubes visibles (9 + 7 + 5 + 3 + 1). Cet exercice a été très difficile à réaliser pour les élèves (voir les scores en annexe). Le Rallye n'a pas été conçu initialement pour retenir les réponses erronées des élèves afin de les analyser. Techniquement, ce traitement est pourtant tout à fait possible et pourrait être intégré dans les versions futures.

Ex 3 et 15 : Les règles cassées



Règle cassée - 1



Règle cassée - 2

Dans le contexte des mesures de longueur, c'est le calcul de l'écart entre deux nombres (un nombre entier et un nombre décimal ou deux nombres décimaux lus sur la droite graduée) qui est demandé dans le premier exemple. Dans le second cas, une des extrémités du segment (sur une graduation entière ou non) et sa longueur sont imposées, et l'élève doit déplacer l'autre extrémité pour que le segment réponde aux contraintes données (l'agrandissement ou la réduction de la longueur d'un segment intervient sur sa mesure). Il s'agit alors de calculer la somme de deux nombres (l'un étant lu sur la graduation) et de trouver le point de la graduation correspondant. A noter que ces deux exercices sont complémentaires l'un de l'autre et que les stratégies de calcul induites sont différentes…suivant la mesure demandée et le début de la graduation.

Par exemple, pour la règle cassée 1, les deux premières questions sont de la forme : 7 ; 9,6. Le calcul peut se faire par soustraction directe (9,6 – 7) ou par recherche du complément (de 7 à 9 puis de 9 à 9,6). Pour les deux questions suivantes, de la forme : 7,8 ; 10 ; la soustraction directe (10 – 7,8) peut sembler plus complexe que la procédure basée sur la recherche du complément : de 7,8 à 8 puis de 8 à 10 … La dernière question : 4,8 ; 7,3 peut amener à différentes stratégies suivant les nombres décimaux en jeu.

III – REMARQUES ET SUGGESTIONS DES PARTICIPANTS LORS DE L'ATELIER

III – 1 Test du Rallye lors de l'atelier

Pour des raisons de maintenance informatique du serveur de l'IA, les tests du Rallye ont été effectués en local dans la salle informatique du centre IUFM de Troyes permettant ainsi de montrer qu'une fois téléchargées, les épreuves du Rallye peuvent se passer d'Internet.

Les collègues ont découvert et testé chacun des exercices dans les conditions de passation du Rallye (à l'époque de l'atelier, il n'était pas encore possible de rejouer le Rallye intégralement avec ordre et chronomètre mais seulement de consulter les exercices un à un), en prenant des notes pour chacun d'entre eux. Beaucoup ont visiblement pris plaisir à tester ce rallye, en écho au plaisir des enfants tels que beaucoup de maîtres et professeurs l'ont rapporté.

III – 2 Suggestions des participants

Les participants ont proposé des modifications relatives à la forme des exercices, aux supports présentés aux élèves (présentation, couleurs, formulations utilisées…) et à l'utilisation des ressources proposées par le matériel informatique. Nous spécifions ici sur quelques uns des exercices la nature des remarques.

Pour l'exercice sur le calcul différé (qui n'est pas détaillé dans cet article) : l'idée est de proposer à l'élève un calcul additif et/ou soustractif de trois nombres entiers ou décimaux avec des associations évidentes, (par exemple 3 + 280 + 97) en l'affichant pendant quelques secondes puis en l'effaçant au moment où l'élève peut donner la réponse. Il est suggéré d'ajouter des couleurs pour marquer les associations ,au moins pour les premières questions, au moment de l'explicitation de la stratégie employée.

Pour la calculatrice cassée, la possibilité d'afficher les séquences de touches permettrait de mieux visualiser a posteriori (pour l'élève et l'enseignant) la stratégie de l'élève. Par ailleurs, le nombre de manipulations pourrait être limité pour forcer les élèves à avoir des stratégies amenant plus directement au résultat. Par exemple, en limitant à trois manipulations, on pourrait favoriser une stratégie multiplicative sur une stratégie d'addition itérée.

De plus, les participants suggèrent de modifier une formule du type « Regarde bien la correction. » par exemple par « Regarde bien la réponse ».

Pour l'exercice des rectangles, si le point mobile s'incrémentait sur un nombre entier de carreaux, cela pourrait éviter que certains élèves ne soient tentés d'ajouter des parties de carreaux (plutôt que de raisonner sur un nombre entier de carreaux). Par ailleurs, s'il était possible de « démarrer » son rectangle à partir de n'importe quel point (actuellement celui-ci est fixé en haut à gauche), cela donnerait plus de liberté à l'élève pour construire le rectangle de son choix.

Les échanges ont amené le groupe à se poser la question d'identifier ce qui, dans le Rallye, est réellement intrinsèque au calcul mental et ce qui relève plutôt d'autres champs des mathématiques. Par exemple, pour le dénombrement des cubes dans les pyramides, n'y a-t-il pas interférence avec la visualisation des objets dans l'espace ? Pour la règle graduée, ne s'agit-il pas plutôt de comptage (visuel) plutôt que de calcul ?

Des participants ont signalé des travaux existants. A Toulouse, un Rallye se fait en plusieurs moments distincts avec des séances de travail intermédiaires. Ne pourrait-on s'en inspirer pour le rallye calcul mental Internet ? Sur le serveur académique d'Orléans-Tours, se trouvent d'intéressantes progressions de calcul mental (concernant le collège et le lycée) qui pourraient peut-être servir de bases à des adaptations informatiques.

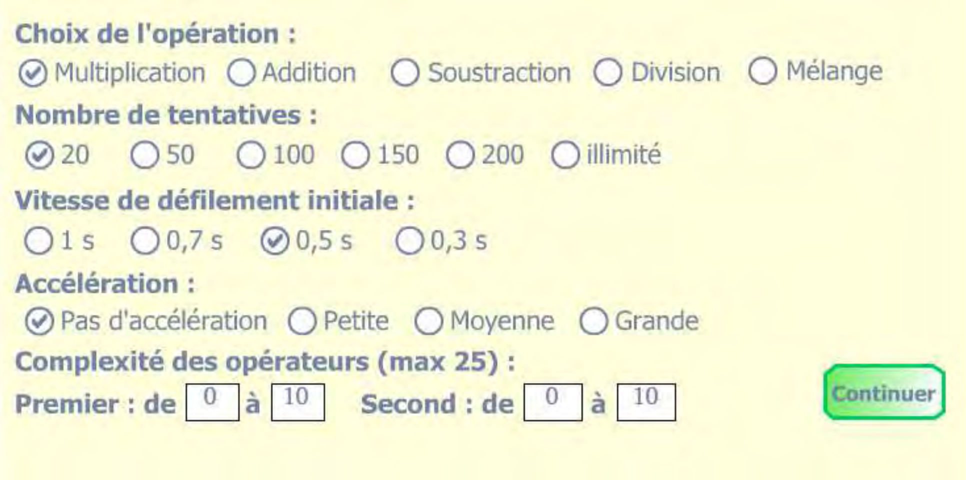
IV – PROLONGEMENTS

IV – 1 Vers l’utilisation en séance ordinaire

Les participants à l’atelier ont souligné quasi unanimement la qualité du Rallye, mais se posent des questions sur son prolongement dans la classe dans le cadre de séances ordinaires. En effet, les outils du Rallye ont besoin d’adaptation pour resservir dans des situations plus usuelles.

Trois outils ainsi adaptés et paramétrés ont été présentés : la calculatrice cassée paramétrable, le quadricalc paramétrable et la visionneuse de « volumes en cubes ». Il a été noté que souvent les paramètres informatiques correspondaient à des variables didactiques, comme les contraintes sur le choix des nombres, le temps de réponse accordé ou la durée de l’affichage…

Voici par exemple une copie d'écran montrant la paramétrisation du Quadricalc :



Dans cette version paramétrable du Quadricalc (Tetris), on peut visualiser le choix des paramètres.

A noter que le choix des sept nombres, affichés tout en bas et comprenant forcément la bonne réponse (la barre des solutions), pourrait aussi être paramétrable, par exemple en y mettant systématiquement des erreurs classiques. La paramétrisation pourrait aussi être étendue à d'autres opérations, en dehors des tables. En particulier, en dehors de toutes les variables liées au temps et à la présentation de l’exercice, le choix des opérations et surtout de la palette des réponses proposées constituent des variables didactiques importantes. Par exemple, on pourrait imaginer des opérations du type 4 x 30 (utilisation d’un résultat de la table de Pythagore et multiplication par 10) et des réponses de type 12, 120, 1200… Le moteur pour paramétrer de tels calculs reste à construire, y compris dans son ergonomie afin que le professeur qui choisit les paramètres puisse le faire facilement et en ayant conscience des variables didactiques sous-jacentes.

Le travail consistant à créer l’interface pour tous ces exercices paramétrables reste à faire. C’est un des projets de l’IA 59 pour l'année scolaire 2007-2008.

IV – 2 D’autres outils…

A la fin de l’atelier, à la demande des participants, deux autres outils mis au point par l’association Sésamath ont été visionnés :

* l’outil de géométrie « Instrumenpoche » (HYPERLINK "http://www.instrumenpoche.net" www.instrumenpoche.net)

* un outil en construction permettant de faire passer sur un ordinateur l’évaluation 6ème en mathématiques.

Des échanges ont eu lieu sur la pertinence de ces deux outils, mais le temps a manqué… Pour un autre colloque, peut-être…

ANNEXE : RESULTATS OBTENUS AU RALLYE CALCUL@TICE DANS LE DEPARTEMENT DU NORD

N° exercice	Titre de l'exercice	Toutes classes(394)	CM1(73)	CM1-CM2(73)	CM2(125)	CM2/6ème (123)
Ex1	Quadricalc additif	7,5	6,6	7,66	7,98	7,45
Ex2	Les rectangles	4,02	3,29	4,31	4,49	3,79
Ex3	La règle cassée 1	4,82	3,85	4,88	5,15	5,06
Ex4	Quadricalc multiplicatif	5,56	4,87	5,65	5,85	5,63
Ex5	Calcul approché 1 (addition)	6,06	5,7	6,06	6,29	6,04
Ex6	Calcul approché 2 (soustractions)	3,96	3,24	3,97	4,41	3,92
Ex7	Calculatrice cassée 1	5,72	4,82	5,74	6,32	5,64
Ex8	Calculatrice cassée 2	7,01	6,06	7,15	7,57	6,92
Ex9	Calcul différé 1 (additions)	4,77	3,82	4,79	5,49	4,58
Ex10	Calcul différé 2 (additions et soustractions)	2,39	1,97	2,74	2,7	2,09

Ex11	Les cubes	1,81	1,72	2,14	1,98	1,48
Ex12	Quadricalc soustractif	5,03	4,41	5,1	5,31	5,06
Ex13	Calcul approché (multiplications)	3,17	2,59	3,44	3,52	2,99
Ex14	Calculatrice cassée 3 (nombres décimaux)	2,77	1,96	3,05	3,17	2,65
Ex15	Règle cassée 2	4,74	3,87	4,83	5,06	4,89
Ex16	Calcul différé 3 (décimaux)	3,99	2,68	4,2	4,82	3,76
Ex17	Quadricalc « Diablo »	4,96	4,51	5,02	5,18	4,95

BIBLIOGRAPHIE

TEXTES ACCOMPAGNEMENT DES PROGRAMMES CYCLE 3 (« CALCUL MENTAL » http://www.eduscol.education.fr/D0048/calcul_mental.pdf ET « CALCULATRICE » http://www.eduscol.education.fr/D0048/calculatrice.pdf)

RAPPORT DE L'IG SUR LES MATHEMATIQUES EN PRIMAIRE : http://www.education.gouv.fr/cid4172/l-enseignement-des-mathematiques-au-cycle-3-de-l-ecole-primaire.html

SITE DU RALLYE : HYPERLINK http://www.calculatice.net

ARTICLE SUR LES CALCULATRICES VIRTUELLES :

HYPERLINK http://revue.sesamath.net/spip.php?article12

SITE MATHENPOCHE : www.mathenpoche.net

ARTICLE SUR CALCUL@TICE DANS LA REVUE MATHEMATICE : http://revue.sesamath.net/spip.php?article102

UTILISATION DE RESSOURCES NUMERIQUES CONCUES POUR LA FORMATION

Laurence MAGENDIE
Professeur de mathématiques, IUFM d'Aquitaine
laurence.magendie@aquitaine.iufm.fr

Claire WINDER
Professeur de mathématiques, IUFM de Nice
claire.winder@free.fr

Résumé
Cet article est le compte-rendu d'un atelier proposé lors du colloque COPIRELEM de Troyes en juin 2007. L'objectif de cet atelier était de présenter et de questionner quelques-uns des dispositifs de formation initiale et continue de Professeurs des Ecoles que les deux formatrices mettent en œuvre autour de ressources numériques.
Les supports à la réflexion sont trois DVD récemment sortis :
- « Chacun son chemin. Un problème de partage. Apprentissages numériques au cycle 2 », J. Bolon (coord), 2004.
- « Apprentissages mathématiques en maternelle », J. Briand, M. Loubet, M.H. Salin, 2004.
- « Enseigner les mathématiques au cycle 2. Deux situations d'apprentissage en images. Combien de bûchettes ? Le petit moulin », M. Fenichel, C. Taveau, 2005.

L'utilisation de vidéos pour la formation des enseignants n'est pas nouvelle ; son intérêt, ses modalités, ses limites, … ont déjà été souvent travaillées, notamment lors des précédents colloques de la Copirelem. La demande d'images est telle que, dans la plupart des IUFM, des séances de classe sont filmées et exploitées par les formateurs, mais ces ressources sont généralement réservées à un usage local.

On trouve cependant de plus en plus d'outils numériques largement diffusés (dans le commerce ou sur Internet), dont certains sont explicitement conçus pour la formation des professeurs des écoles en mathématiques : à des extraits vidéos de séances de classe, ils ajoutent des entretiens avec les enseignants, des fiches de préparation, des outils d'analyse didactique, etc. Il serait dommage de ne pas les exploiter, mais la multiplicité d'utilisations que leur richesse permet d'envisager doit néanmoins être interrogée : quels contenus de formation permettent-ils d'aborder ? avec quels dispositifs ? pour quels objectifs ? et quelle pertinence ?

L'objectif de cet atelier était de présenter et de questionner quelques-uns des dispositifs de formation initiale et continue que nous mettons en œuvre autour de ces ressources numériques.

Dans un premier temps, les participants ont été placés dans une situation de formation initialement conçue pour la formation continue des PE, puis, après l'analyse collective de cette situation, d'autres supports numériques ainsi que des dispositifs de formation qui les intègrent, ont été présentés.

Le plan de cet article reprend cette chronologie qui correspond en outre à la présentation successive des trois outils numériques :

- le DVD de C. Taveau et M. Fénichel « *Enseigner les mathématiques au cycle 2 - Deux situations d'apprentissage en images* »[1] ;
- le DVD coordonné par J. Bolon *« Chacun son chemin. Un problème de partage. Apprentissages numériques au cycle 2 »*[2] ;
- le cédérom conçu par J. Briand, M. Loubet et M.H. Salin *« Apprentissages mathématiques en maternelle »*[3].

I - « COMBIEN DE BUCHETTES… ? »

I - 1 Une séance de formation continue

Pendant la première partie de l'atelier, nous avons fait vivre aux participants une partie d'une séance de formation initialement conçue pour des enseignants de cycle 2 et mise en œuvre lors d'un stage de formation continue. La séance de référence avait duré trois heures : nous l'avons réduite de moitié en diminuant la durée des travaux de groupe et en supprimant la dernière partie. Mais nous en avons conservé le dispositif principal dont, notamment, les consignes et le mode d'animation.

Cette situation de formation s'appuie sur l'activité « Combien de bûchettes ? » issue du DVD « *Enseigner les mathématiques au cycle 2 - Deux situations d'apprentissage en images* »[4].

Les extraits vidéos contenus dans le DVD montrent des moments de trois séances incluses dans une séquence mise en place en CP-CE1 au mois de mars à partir de l'activité des « Fourmillions »[5], ainsi que les entretiens avec l'enseignante de la classe à l'issue de ces séances. L'atelier n'a porté que sur les deux premières séances (menées uniquement avec les élèves du CP).

---

[1] « *Enseigner les mathématiques au cycle 2 - Deux situations d'apprentissage en images* » de Muriel Fénichel et Catherine Taveau, SCEREN – CRDP Créteil, 2006.

[2] *« Chacun son chemin. Un problème de partage. Apprentissages numériques au cycle 2 »* coordonné par Jeanne Bolon, SCEREN – CRDP Académie de Versailles, 2004.

[3] « Apprentissages mathématiques en maternelle » de Joël Briand, Martine Loubet et Marie-Hélène Salin, Hatier, 2004.

[4] « *Enseigner les mathématiques au cycle 2 - Deux situations d'apprentissage en images* » de Muriel Fénichel et Catherine Taveau, SCEREN – CRDP Créteil, 2006.

[5] « Les fourmillions » in « *Apprentissages numériques – CP* » ; équipe ERMEL chez Hatier Pédagogie ; 1991 ; pp 319 – 324.

I – 1.1 La présentation de la situation et la séance 1

Avant le visionnement d'extraits de la vidéo, les participants ont été invités à prendre connaissance de la fiche de préparation de la séance 1 (voir annexe 1) qui suit un travail sur le « Jeu du château »[6]. Après quelques précisions sur les connaissances antérieures des élèves, nous leur avons demandé de repérer les différences entre le déroulement prévu (d'après la fiche de préparation) et le déroulement effectif présenté dans la vidéo.

À ce moment de l'année, les élèves de CP sont capables de lire et écrire les nombres jusqu'à 100, ils connaissent l'existence des nombres au-delà de 100 (c'est une classe à double niveau CP – CE1) mais c'est l'enseignante qui prendra en charge leur écriture. Le problème posé lors de cette activité est de dénombrer une collection importante de bûchettes (entre 500 et 600 dans la situation présentée).

Le DVD propose un montage en trois parties d'extraits de la séance (qui avait initialement duré 1h15). Chacune de ces parties correspond à une « phase » de la fiche de préparation (voir annexe 1). Nous avons choisi de réduire encore les extraits présentés :

- Partie 1 - « Combien de bûchettes » : en entier (*5min32*)
- Partie 2 - « Grouper les bûchettes » : explicitation de la tâche (*jusqu'à 1'13*) puis mise en commun et synthèse (*de 3'40 jusqu'à la fin).*
- Partie 3 - « Grouper les paquets » : retour sur l'enjeu *(jusqu'à 1' puis de 2' à 2'13)*

En effet, pour permettre une attention soutenue lors du visionnage et parce que nous sommes contraints par la durée des séances de formation, il nous paraît important de limiter la durée des vidéos projetées. Nous essayons alors d'en choisir des extraits adaptés à nos objectifs d'analyse et aux connaissances (connues ou supposées) des observateurs.

Il s'agissait ici d'analyser la séance selon trois axes principaux :

- la pertinence de l'activité en fonction des objectifs d'apprentissage annoncés ;
- la dévolution du problème ;
- la progression du savoir institutionnalisé dans la classe.

Nous avons donc éliminé les extraits qui montrent les procédures, difficultés et erreurs des élèves lors des travaux de groupe, pour privilégier les moments collectifs de consigne et de bilan.

À la suite du visionnement des extraits choisis, une discussion s'est engagée entre les participants à l'atelier. Initiée par la consigne donnée auparavant : « quelles différences voyez-vous entre le déroulement prévu et le déroulement effectif ? », elle a très vite dévié et s'est portée essentiellement sur trois points :

- l'intérêt de l'estimation du nombre de bûchettes en lancement de l'activité ;
- la façon dont l'enseignante impose les groupements par 10 ;
- l'objectif réel de la situation (numération ou dénombrement ?).

---

[6] « Le jeu du château » in « *Apprentissages numériques – CP* » ; équipe ERMEL chez Hatier Pédagogie ; 1991 ; pp 281 – 296.

Le débat a ainsi permis de travailler à la fois sur la situation en elle-même[7] et sur sa gestion par l'enseignante. Il a mis en évidence :

- la distinction entre le but pour les élèves et l'objectif de l'enseignante ;
- la distinction entre l'objectif d'une séance et celui d'une séquence ;
- les choix faits par l'enseignante pour laisser de la place aux propositions des élèves tout en contrôlant l'avancée de l'activité ;
- la nature approximative des arguments donnés aux élèves pour justifier des situations de classe souvent artificielles[8].

I – 1.2 La séance 1bis et la séance 2

Dans les documents fournis avec le DVD « *Enseigner les mathématiques au cycle 2 - Deux situations d'apprentissage en images* », on nous indique que, lors d'une séance 1bis non filmée, l'enseignante a demandé à ses élèves de CP de raconter par écrit ce qu'ils avaient fait pendant la séance précédente[9]. Elle a ensuite utilisé leurs productions pour débuter la séance 2[10].

Les participants à l'atelier, répartis par groupes de 3, ont reçu les productions des élèves et la consigne : « L'enseignante fait le choix de commencer la deuxième séance en affichant et en commentant successivement ces productions. Dans quel ordre les présenteriez-vous ? Pourquoi ? ».

En formation continue, un tel travail permet d'évoquer les différentes représentations qu'ont les élèves de l'objectif d'une activité de classe, et de parler des spécificités des mathématiques.

Lors de l'atelier, tous les groupes ont choisi d'ordonner les productions des élèves pour illustrer le récit chronologique du déroulement de la séance 1. L'un d'eux a de plus proposé de limiter la présentation à quatre productions :

- « *Jeudi, on a compté les allumettes parce qu'on n'arrivait pas à savoir combien il y en avait.* » Garlonn.
- « *Il y avait plein d'allumettes et on a compté de plusieurs façons. On a compté de 10 en 10.* » Flavien
- « *On a compté 10 allumettes mais c'était un peu dur pour savoir le nombre. Et on a mis un élastique.* » Warren.
- « *On a compté de 10 en 10 avec des allumettes et après on les a mises dans des sachets. Combien il y avait d'allumettes ?* » Alboury.

Pour ce groupe, il serait intéressant de demander aux élèves d'expliciter les différences entre ces productions, et de mettre en évidence la nature du travail mathématique.

---

[7] Une telle situation qui relie les groupements par 10 et l'écriture d'un nombre, est généralement considérée comme fondamentale pour l'apprentissage de la numération.

[8] Ici, le groupement par 10 est justifié par « pour aller plus vite … comme au jeu du château... ».

[9] Les objectifs de cette séance 1bis étaient :
« Faire émerger chez les élèves les connaissances mathématiques qu'ils sont en train de construire ; Amener les élèves à améliorer la syntaxe et le lexique. »

[10] Ces productions sont en annexe 2.

L’examen des productions d’élèves a provoqué d’autres remarques :

- L’importance du nombre 10, cité par une majorité d’élèves, est en cohérence avec l’objectif de la séquence qui est d’introduire le système de numération décimale.
- Les élèves disent « compter de 10 en 10 » alors qu’il ne s’agissait que de « paquets de 10 ». On peut penser que le travail fait précédemment sur les nombres les a influencés.
- L’étape suivante de la séquence pourrait consister à remplacer les mots « élastiques » et « sachets » par « dizaines » et « centaines ».

Nous avons ensuite visionné, sans consigne particulière, des extraits de la séance 2 :

- Partie 1 - « Retour sur la séance précédente » : *jusqu’à 4’07*
- Partie 2 - « Traduire le contenu d’un sachet » : consigne (*jusqu’à 0’19*), puis mise en commun (*de 1’ à 2’50).*
- Partie 3 – « Nombre total de bûchettes » : *arrêt à 4’48*.

Le premier extrait montre le début de la séance où l’enseignante revient sur ce qui a été travaillé lors de la séance 1. Le regarder lors de l’atelier (ou d’une formation) permet :

- de comparer la présentation effective des écrits des élèves (séance 1 bis) avec les propositions des participants ;
- de voir comment l’enseignante justifie le choix des groupements par 10 (convention culturelle) tout en reconnaissant la pertinence de la proposition « On pourrait les mettre par 20 ».

Il donne ainsi des réponses à la plupart des questions concernant la prise en compte des paroles d’élèves soulevées auparavant par les participants.

Les deux extraits suivants présentent les consignes relatives aux nouvelles tâches des élèves et les bilans collectifs des recherches[11]. Ils permettent de voir rapidement les étapes suivantes de la situation avant de revenir sur ses objectifs et sa pertinence pour la découverte du système de numération décimale.

À l’issue de ce visionnement, la discussion a effectivement porté sur l’analyse de la situation, l’intérêt de travailler avec de si grands nombres avec les CP, la prise en charge de leur écriture par l’enseignante, etc.[12]

I – 1.3 La séance 3

Cette troisième séance, où les élèves réinvestissent ce qui vient d’être vu, concerne simultanément les élèves de CP et de CE1 mais dans des tâches différenciées. Utilisée en formation continue, elle permet de voir un exemple de traitement et d’exploitation de l’hétérogénéité d’une classe à double niveau.

Par manque de temps, nous ne l’avons pas montrée pendant l’atelier.

---

[11] « Combien de bûchettes dans un sachet ? » et « Combien de bûchettes au total ? »

[12] Les entretiens post-séance avec l’enseignante enrichissent les réponses à l’ensemble de ces questions.

Nous avons présenté une utilisation différente de ce support numérique dans un autre contexte : la formation des PE2.

I – 2 Une utilisation en PE2

Les textes et vidéos issus du support « *Enseigner les mathématiques au cycle 2 - Deux situations d'apprentissage en images* » ont été utilisés pour la formation des PE2. Ils sont intégrés au déroulement d'une séance de travaux dirigés de trois heures intitulée : « Du nombre à la numération ».

I – 2.1 Plan de la séance

1. Mise en situation : « Les fourmillions » d'après ERMEL CP[13].
2. Le statut du nombre dans les programmes.
3. Comprendre la numération à partir du CP.
   - ➢ Compétences de l'entrée au CP à la fin du cycle 2.
   - ➢ Compréhension de l'aspect algorithmique de la suite des nombres.
   - ➢ De l'aspect groupement - échange vers l'aspect positionnel.
   - ➢ Progression au cycle 2 .

4. La numération au cycle 3 (progression) .

La vidéo « Combien de bûchettes ? » est utilisée dans la troisième partie de ce TD au moment de l'étude du lien entre les groupements - échanges et l'écriture des nombres. Elle est directement reliée à la situation « Les fourmillions » qui, au début de la séance, est présentée « en homologie » par 3 stagiaires à l'ensemble du groupe puis analysée « à chaud » .

I – 2.2 Utilisation de la vidéo des bûchettes

Les PE2 sont tout d'abord invités à visionner une grande partie de la séance 1 avec la consigne : *« Repérer comment se déroule l'appropriation du problème. »*.[14]

En ce qui concerne la séance 2, les PE2 doivent « *repérer le rôle de l'enseignante au cours des différentes phases.* ». Les extraits vidéos présentés sont alors :
- Partie 1 - « Retour sur la séance précédente» : en entier (*5 min 36*) ;
- « Eclairages sur…la mise en commun »[15] en entier (*4 min 55*);
- Partie 3 - « Nombre total de bûchettes» : en entier (*5 min 57*).

Ces vidéos permettent d'illustrer différents points d'ordre pédagogique et didactique sur lesquels les PE2 se posent des questions (apparues généralement lors de la mise en œuvre de la séance des « fourmillions ») :

- ➢ Concernant la gestion de la classe :
  - comment aborder une activité ou la relancer ?

---

[13] « *Apprentissages numériques – CP* », ERMEL, Hatier Pédagogie, 1991, pp 319 – 324.

[14] Les extraits visionnés sont les mêmes que pour la formation continue, voir paragraphe I – 1.1

[15] On évoque auparavant la tâche de la partie 2 « Traduire le contenu d'un sachet ».

- comment se déroule l'appropriation de ce problème ?
- quelles activités annexes et de réinvestissement ?

- Concernant la partie didactique de la situation :
  - comment le savoir en jeu est-il construit[16] ?
  - quelles sont les différentes procédures qui apparaissent dans la construction de ce savoir ?
  - quel est le rôle de l'écrit ?

- Concernant le champ des nombres et de la numération :
  - quelle(s) progression(s) prévoir sur l'ensemble du cycle ?
  - quelles autres activités peut-on proposer et présenter ?

Pour illustrer ces propos, on visionne également l'entretien « Pour aller plus loin » de la séance 2, ainsi que la partie 1 de la séance 3- « Désignation d'une quantité » *(5 min 39).*

II - « CHACUN SON CHEMIN »

Le document numérique coordonné par J. Bolon *« Chacun son chemin. Un problème de partage. Apprentissages numériques au cycle 2 »* est paru il y a déjà plusieurs années. Nous l'avons utilisé plusieurs fois, de façons diverses, tant en formation initiale que continue.

Ce DVD présente la mise en œuvre de « problèmes de partage » dans trois classes de cycle 2, de niveaux différents (GS, CP et CE1). Les problèmes proposés sont issus des manuels ERMEL[17]. Dans les trois classes filmées, des dispositifs de différentiation permettent la prise en compte de l'hétérogénéité des élèves. Les extraits vidéos des séances montrent la gestion de ces dispositifs par les enseignants, les procédures utilisées par les élèves pour résoudre les problèmes et leurs difficultés. Des entretiens filmés avec les enseignants complètent le document.

En formation continue, selon les stages, ces vidéos peuvent être un point de départ pour une réflexion concernant, par exemple :

- les problèmes de partage, leur progression sur le cycle 2 ;
- la place de la manipulation dans les activités mathématiques ;
- la gestion de la différenciation.

On peut aussi travailler de façon plus générale sur la résolution de problèmes au cycle 2 (quels problèmes ? quelle mise en œuvre ?) ainsi que sur les écarts entre le CP et le CE1.

---

[16] Rappel : le savoir travaillé ici est le lien entre les groupements par 10 et la numération décimale. Ce ne sera qu'avec l'activité « Carrelages » (in « *Apprentissages numériques – CP* » ; équipe ERMEL chez Hatier Pédagogie ; 1991 ; pp 325 – 329) que les enfants réaliseront vraiment que l'écriture chiffrée d'un nombre à deux chiffres donne des informations sur le nombre de paquets de 10 qu'il contient.

[17] « Les caisses » in « Apprentissages numériques - GS » pp 129 - 131; « Partages inéquitables : les enveloppes » in « Apprentissages numériques – CP » pp 101 – 105 ; « Partages» in « Apprentissages numériques – CE1 » pp 86 – 88 ; équipe ERMEL ; Hatier Pédagogie.

En formation initiale (PE2), ces vidéos sont aussi pour nous un support pour l'observation d'un enseignant en classe au cours d'une activité de résolution de problème. Notre objectif est alors de faire apparaître les différents points d'ordre pédagogique et didactique à prendre en compte lors d'une observation de classe :

- les postures de l'enseignant (prise de parole, gestuelle, voix, …) ;
- les supports du travail des élèves (fiches, matériel,…) ;
- les techniques de travail (individuel, par deux, par groupe,…) ;
- la gestion des moments de mise en commun ;
- l'utilisation des écrits des élèves (en ce qui concerne les séances de CP et CE1) ;
- la gestion de la différenciation ;
- la passation de la consigne et le temps d'appropriation du problème ;
- le découpage de la séance (démarrage, enchaînements, interactions, fin de la séance…).

Ces observations peuvent alors déboucher sur la mise en évidence des éléments incontournables de la préparation d'une séance en mathématique. La vidéo « Partages » filmée en CE1 nous permet d'illustrer la préparation d'une séance à l'école élémentaire. Pour le travail en maternelle, nous utilisons la vidéo « Les caisses », filmée en GS.

III. « APPRENTISSAGES MATHEMATIQUES EN MATERNELLE »

Ce cédérom a été conçu dans le cadre d'une recherche soutenue par l'IUFM d'Aquitaine par J. Briand, M. Loubet et M.H. Salin. C'est l'un des premiers supports numériques commercialisés. Il rassemble un ensemble de documents (textes, photographies et vidéos) présentant des situations d'apprentissage par adaptation en maternelle sur :

- le concept de collection et la classification ;
- la désignation ;
- l'énumération ;
- le rangement et la notion d'ordre ;
- le dénombrement ;
- la comparaison de grandeurs.

Les situations d'apprentissage présentées sont issues de travaux de recherche en didactique des mathématiques. Leur description détaillée (matériel, déroulement, organisation, consignes,…) est illustrée par des photographies et de petites séquences vidéo. Une analyse didactique est proposée pour chaque situation et mise en relation avec les programmes.

Les séquences vidéos sont extraites de séances ayant fait l'objet d'un enregistrement sur supports magnétiques (cassettes) mises en vente dans les années 1980 au CRDP.

En formation continue, nous utilisons le cédérom comme une ressource de situations par adaptation, tel un « livre interactif ». Précèdent la navigation libre des stagiaires dans le cédérom :

- le visionnement puis l'analyse de séances entièrement filmées (sur cassettes),
- le travail sur les caractéristiques des situations par adaptation,
- la réflexion concernant les différents domaines abordés (notamment la désignation, le « pré-numérique » et la construction du nombre).

En début d'année de formation initiale, les PE2 élaborent puis mettent en œuvre lors du stage de pratique accompagnée, des séances de résolution de problèmes en s'aidant des descriptions des situations ainsi que de leurs analyses didactiques. Les petits extraits vidéos du cédérom sont utilisés pour illustrer certaines parties délicates (consigne, organisation, matériel,…) des situations proposées.

RESSOURCES NUMERIQUES PRESENTEES

BOLON J. (2004), *Chacun son chemin. Un problème de partage. Apprentissages numériques au cycle 2*, SCEREN-CRDP Versailles.

BRIAND J., LOUBET M., SALIN M.H., (2004), *Apprentissages mathématiques en maternelle*, Hatier Pédagogie.

FENICHEL M., TAVEAU C. (2005), *Enseigner les mathématiques au cycle 2. Deux situations d'apprentissages en images : Combien de bûchettes ? Le petit moulin*, SCEREN-CRDP Créteil.

BIBLIOGRAPHIE

ERMEL (1990), *Apprentissages numériques et résolution de problèmes, GS*, Hatier Pédagogie.

ERMEL (1991), *Apprentissages numériques et résolution de problèmes, CP*, Hatier Pédagogie.

ERMEL (1995), *Apprentissages numériques et résolution de problèmes, CE1*, Hatier Pédagogie.

FENICHEL M., TAVEAU C. (2005), Construire des outils en didactique des mathématiques pour le formateur de des professeurs d'école, *Actes du 31ème colloque Copirelem, , Foix 2004,* IREM de Toulouse

FENICHEL M., TAVEAU C. (2006), Utilisation en formation des PE du DVD « Enseigner les mathématiques au cycle 2. Deux situations d'apprentissage en images. » , *Actes du 32ème colloque Copirelem, Strasbourg 2005,* IREM d'Alsace.

GIRMENS Y. (2003), Usage de la vidéo en formation, *Actes du 29ème colloque Copirelem, la Roche sur Yon 2002,* IREM des pays de la Loire, pp 265-269

RODITI E. (2006) Les analyses de vidéos : outils de recherche et moyens de formation, *Actes du 32ème colloque Copirelem, Strasbourg 2005,* IREM de Strasbourg

TOURNIER G (2005), Activités de formation à partir d'un support vidéo, *Actes du 31ème colloque Copirelem, Foix 2004,* IREM de Toulouse

ANNEXE 1 (FICHE DE PREPARATION DE LA SEANCE 1)[18]

Objectifs de l'enseignant :
• Faire prendre conscience aux élèves que pour dénombrer une grande collection d'objets, il est nécessaire d'abandonner les procédures de comptage de un en un ou de deux en deux au profit de procédures de groupement.
• Faire prendre conscience aux élèves que pour que l'on puisse se mettre d'accord sur la désignation du nombre d'éléments d'une collection, il est nécessaire de choisir la même règle de groupement.
• Introduire le groupement par dix.

Tâches des élèves
• Prévoir le nombre n d'éléments d'une grande collection d'objets ($500 < n < 1000$).
• Dénombrer une grande collection d'objets.

Matériel
• Une collection de bûchettes dont le nombre est compris entre 500 et 600 éléments.
• Des élastiques.
• Des sacs en plastique transparent.
• Des boîtes.

Organisation
• Alternance entre travail collectif et travail par groupe de trois élèves.

Déroulement

Phase 1 (collective) : présentation de la situation
La situation est présentée comme un défi : la collection de bûchettes est étalée sur une table devant l'ensemble des élèves.

<u>Consigne 1</u> *: « J'ai un certain nombre de bûchettes. Mon problème est de savoir combien il y en a exactement. À votre avis combien y a-t-il de bûchettes sur la table ? »*
Chaque élève propose une réponse qui est notée sur une partie du tableau. Les réponses seront certainement différentes.

<u>Consigne 2</u> *: « Pas un d'entre vous ne m'a proposé la même réponse et je voudrais savoir combien il y a exactement de bûchettes. Que proposez-vous ? Comment peut-on faire pour savoir combien il y a exactement de bûchettes ? »*
On s'attend à ce que les élèves proposent diverses procédures de comptage de la collection de bûchettes :
• comptage de un en un ;
• comptage de deux en deux ;
• comptage de cinq en cinq ;
• éventuellement comptage de dix en dix ;
• autres procédures de comptages (de n en n avec $n \neq 1, 2, 5, 10$) ;
• réalisation de tas réguliers.

Chacune des procédures proposées par les élèves est mise à l'épreuve. Si les élèves proposent de faire des tas de dix bûchettes ou de compter les bûchettes de dix en dix, on leur demande de justifier ces propositions.

---

[18] Extrait du cédérom fourni avec le DVD « *Enseigner les mathématiques au cycle 2 - Deux situations d'apprentissage en images* » de Muriel Fénichel et Catherine Taveau, paru au Scéren – CRDP de Créteil en 2006.

Conclusion :
Si les élèves proposent de compter les bûchettes de n en n (n ≠ 10) ou de faire des tas de n bûchettes, on propose de choisir n = 10 (en référence à une procédure de comptage que les élèves ont déjà utilisée avec pour support le tableau des nombres) pour que l'on puisse tous se mettre d'accord.
Si le comptage de dix en dix est proposé, on entérine la procédure en s'appuyant sur la justification de ce choix par les élèves.

Phase 2 (par groupe de trois) : structuration d'une collection de bûchettes en utilisant le groupement par dix.

Organisation :
Les élèves sont groupés par trois : un capitaine et deux aides. La répartition des groupes a été prévue et écrite au tableau et le nom de chaque capitaine a été souligné. Le capitaine est plutôt un élève en difficulté. La collection initiale de bûchettes est répartie entre chaque groupe : le capitaine de chaque équipe reçoit une boîte comportant un certain nombre de bûchettes et des élastiques.

Tâche de chacun des élèves du groupe :
Le capitaine doit extraire dix bûchettes de la collection contenue dans la boîte. Lorsqu'il a compté dix bûchettes, il donne le tas à un des aides qui vérifie. Après vérification, ce dernier donne le tas à un autre aide qui doit entourer le paquet de dix bûchettes avec un élastique.

Difficultés prévues : la gestion des élastiques.

Aides : utiliser les habiletés des élèves en changeant le rôle de chacun dans les groupes. Diminuer le nombre de bûchettes des groupes les plus lents pour réguler la durée de la phase.

Conclusion :
L'enseignante réunit tous les paquets de dix bûchettes réalisés par les groupes ainsi que les bûchettes qui n'ont pu être regroupées.

Consigne : « Que peut-on faire avec ces bûchettes ? »

Réponse attendue : s'il y en a dix ou plus, on peut encore faire un paquet de dix bûchettes. La collection de bûchettes ainsi organisée est à nouveau placée sur une table devant l'ensemble des élèves. Introduction des mots « dizaine » et « unité ».

Phase 3 (collective) : retour sur les prévisions du nombre de bûchettes de la collection

Les prévisions faites par les élèves concernant le nombre de bûchettes lors de la phase 1 sont reprises.

Consigne 1 : « Gardez-vous la même idée ? Changez-vous d'idée ? Pourquoi ? » Chaque élève est amené à proposer une réponse qui, si elle change, est inscrite à côté de la première.

Modification possible : certains élèves peuvent proposer un nombre de bûchettes dont le chiffre des unités traduit le nombre de bûchettes isolées.
Les réponses sont à nouveau analysées.
On attend à nouveau des réponses différentes.

Consigne 2 : « À nouveau, pas un d'entre vous ne m'a proposé la même réponse. Comment faire pour savoir combien il y a exactement de bûchettes ? Comment faire pour continuer à compter les bûchettes ? »

On écoute les différentes propositions. En particulier, on attend des élèves qu'ils proposent de grouper par dix les tas de dix bûchettes. Si cette proposition n'apparaît pas, on la propose aux élèves.
Les élèves sont alors répartis par trois comme lors de la phase précédente. La collection de bûchettes est à nouveau répartie entre les groupes qui disposent de sacs transparents dans lesquels ils doivent mettre dix tas de dix bûchettes.
Introduction du mot « centaine ».
À l'issue de ce travail, toutes les bûchettes ainsi organisées sont réunies.
On propose aux élèves de réfléchir à la manière dont on va écrire le nombre de bûchettes de la collection pour la séance suivante.

ANNEXE 2 (LES PRODUCTIONS DES ELEVES DE CP A L'ISSUE DE LA SEANCE 1BIS)[19]

Réponses à la question : « Qu'avons-nous fait lors de la dernière séance ? »

« *On a compté de 10 en 10 avec des allumettes et après on les a mises dans des sachets. Combien il y avait d'allumettes ?* » Alboury.

« *Il y avait plein d'allumettes et on a compté de plusieurs façons. On a compté de 10 en 10.* » Flavien

« *Catherine a dit qu'il y a beaucoup d'allumettes. Alors, que peut-on faire ? Oui, Julien, on peut compter de 10 en 10.* » Ophélie

« *Jeudi, Catherine nous a fait voir des allumettes. Il fallait les compter. On les a comptées de 10 en 10 et on les a attachées.* » Chloé.

« *On a compté 10 allumettes mais c'était un peu dur pour savoir le nombre. Et on a mis un élastique.* » Warren.

« *On a fait les mathématiques avec des allumettes. On a compté de dix en dix.* » Gaëlle

« *On a fait des mathématiques avec des allumettes. Catherine nous a demandé de compter les allumettes. On a compté de dix en dix.* » Marine.

« *Jeudi, on a compté les allumettes parce qu'on n'arrivait pas à savoir combien il y en avait.* » Garlonn.

[19] Extrait du cédérom fourni avec le DVD « *Enseigner les mathématiques au cycle 2 - Deux situations d'apprentissage en images* » de Muriel Fénichel et Catherine Taveau, paru au Scéren – CRDP de Créteil en 2006.

LA MODELISATION DANS UNE PERSPECTIVE DE FORMATION ET D'ENSEIGNEMENT

Robert ADJIAGE
MCF, IUFM d'Alsace
LISEC EA 2310
robert.adjiage@alsace.iufm.fr

Richard CABASSUT
PIUFM, IUFM d'Alsace
Didirem Paris 7
richard.cabassut@alsace.iufm.fr

Résumé
Le thème traité portera sur des tâches de modélisation et sur leur scénarisation dans un cursus d'enseignement à l'école primaire et de formation des professeurs des écoles.
Dans un premier temps, on introduira les principaux concepts et enjeux des tâches de modélisation dans une perspective d'enseignement, de formation et d'apprentissage (Blum, 2004). On rappellera le contexte institutionnel (PISA, recommandations du parlement européen, socle commun...) qui a contribué à mettre au premier plan les tâches de modélisation. On apportera enfin quelques commentaires personnels. Dans un deuxième temps, les participants seront invités à analyser, en groupes, différentes tâches de modélisation. Enfin, dans un troisième temps, les différentes productions seront discutées collectivement. Pour conclure, on invitera les participants à préciser les incontournables d'un scénario de formation continue à la modélisation.

Après un exposé théorique sur le sujet, les participants à cet atelier sont invités à résoudre des problèmes de modélisation puis à s'interroger sur leur pertinence à figurer dans un cursus d'enseignement à l'école primaire et de formation, initiale et continuée, des professeurs des écoles. Au-delà de l'analyse de ces tâches et de leur scénarisation, les participants sont amenés à préciser leur conception de la modélisation et sa place dans l'enseignement à l'école et en formation.

I – CONCEPTS ET ENJEUX DES TACHES DE MODELISATION

Cette première partie est menée sous forme d'exposé interactif. Un cadre conceptuel, essentiellement issu des travaux d'ICMI 2004, est présenté aux participants. Ce cadre constitue une base de discussion avec l'ensemble du groupe. Les travaux personnels des animateurs, engagés dans un projet européen sur le sujet (COMENIUS LEMA), ainsi que les remarques et analyses des participants, relativisent les conceptions issues d'ICMI. La chaîne de valorisation de la modélisation comme moyen privilégié de « faire » des mathématiques et d'évaluer les acquisitions est précisé à travers les recommandations européennes et PISA.

I – 1 Les sources

Les documents auxquels se réfèrent les animateurs sont brièvement présentés et commentés. Quatre sources sont examinées.

- Discussion Document ICMI (International Commission on Mathematical Instruction).
- Ressources COMENIUS LEMA (Learning and Education in and through Modelling and Applications), projet européen visant à développer un cours de formation des maîtres à la modélisation.
- Sites officiels (OCDE-PISA, Parlement Européen, MEN…).
- Publications et travaux personnels des animateurs.

I – 2 Premières définitions (ICMI 2004)

- La modélisation s'appuie plutôt sur un processus menant de la réalité aux mathématiques.
- L'application s'appuie plutôt sur un processus menant des mathématiques à la réalité.

I – 3 Chaîne de valorisation

La modélisation est un sujet d'importance, pris en compte et étudié par de nombreux didacticiens, et présent dans diverses conférences internationales depuis plusieurs décennies. Citons par exemple : Freudenthal (années 70) ; Niss, 1987 ; Blum et al.1989 ; Galbraith et al., 1990 ; Lesh et al., 2002 ; Comité scientifique des IREM, 2003. On assiste néanmoins à sa promotion accélérée au cours des dernières années. Que s'est-il passé ? On trouve au départ de ce processus une demande du ministère de l'Education danois (projet KOM, 2002) de réorganisation des curricula scolaires. Le projet KOM a été piloté par M. Niss. Il s'appuie sur deux idées directrices :

- Dans une société de plus en plus dépendante de modèles mathématiques, donner aux élèves les moyens mathématiques de comprendre le monde pour développer leur esprit citoyen. D'où le centrage sur l'acquisition de compétences plus que sur la transmission de connaissances
- Pédagogie du projet : enseigner les mathématiques comme réponse à un besoin issu des exigences du monde.

Suite à une demande de l'OCDE, M. Niss pilotera la partie mathématique du projet PISA d'évaluations internationales. Sa conception de l'enseignement des mathématiques a été déterminante dans les choix qui ont présidé à la sélection des items de cette évaluation. Ainsi, la compétence mathématique de base mise au premier plan par PISA (OCDE, 2006, p. 73) est « la capacité d'un individu à identifier, comprendre, le rôle que les mathématiques jouent dans le monde… d'utiliser les mathématiques… en tant que citoyen constructif, concerné et réflexif. ». Le parlement européen (2006, Annexe p.7) a repris cette option à son compte en émettant des recommandations parmi lesquelles on trouve en bonne place : « La compétence mathématique est l'aptitude à développer et appliquer un raisonnement mathématique en vue de résoudre divers problèmes de la vie quotidienne ». Les résultats obtenus par leurs élèves à PISA, jugés insatisfaisants par certaines nations européennes majeures, pourraient avoir eu un effet non négligeable sur la teneur de ces recommandations. Enfin, en France, le socle commun dont le préambule mentionne qu'il « se réfère… aux évaluations internationales, notamment… PISA. », précise (2006, pp. 9-10) : « La maîtrise des principaux éléments de mathématiques s'acquiert et s'exerce essentiellement par la résolution de problèmes, notamment à partir de situations proches de la réalité. ». La modélisation apparaît donc comme un sujet d'étude didactique sérieuse, que la conjoncture a néanmoins propulsé sur le devant de la scène. L'impact de PISA, qui n'est qu'une mesure parmi d'autres de la performance des élèves, semble avoir été déterminant dans cette promotion.

I – 4 Processus de modélisation

Le « *discussion document* » d'ICMI 2004 précise les différentes phases du processus de modélisation que nous déclinons ci-dessous :

- Point de départ, une situation du monde réel ;
- On l'épure, on la structure, on la précise ;
- Formulation d'un modèle qui est toujours ancré dans le monde réel ;
- Mathématisation :
    - Soit saisie d'un modèle mathématique disponible ;
    - Soir élaboration d'un modèle mathématique adéquat ;
- Traitement mathématique avec production de résultats ;
- Interprétation des résultats en fonction de la situation réelle d'origine ;
- Validation du modèle par la pertinence des résultats ;
- Le cas échéant, reprise de tout le processus avec un modèle rectifié ou tout à fait différent ;
- Le problème d'origine est reformulé et communiqué.

Nous y retrouvons le solide ancrage dans le monde réel préconisé par la chaîne de valorisation. Ce qui est un choix, et non une nécessité de la définition d'un processus de modélisation. Rappelons que des acceptions plus larges ont été proposées, notamment au colloque de la COPIRELEM 2007 (voir par exemple Duperret ou Orange), que nous pourrions synthétiser par : modéliser, c'est substituer des choses (objets ou relations) à d'autres choses dans un but explicatif et/ou prédictif. « Les mathématiques ont-elles pour objet de « décrire » la réalité, ou ne se contentent-elles pas d'une action intellectuelle sur une réalité déjà abstraite ? » (Duperret, COPIRELEM, 2007).

I – 5 Thèmes d'étude

Le « discussion document » d'ICMI 2004 propose ensuite de délimiter le champ de recherche sur la modélisation. Il propose pour cela la définition générale d'un thème d'étude (« *issue* ») comme surface d'un espace à deux dimensions : niveau scolaire x domaine (Figure 1), puis quatre perspectives (Figure 2) d'où il est possible d'examiner un thème d'étude, et enfin un cadre pour la formulation d'un thème d'étude décliné en un défi et un questionnement.

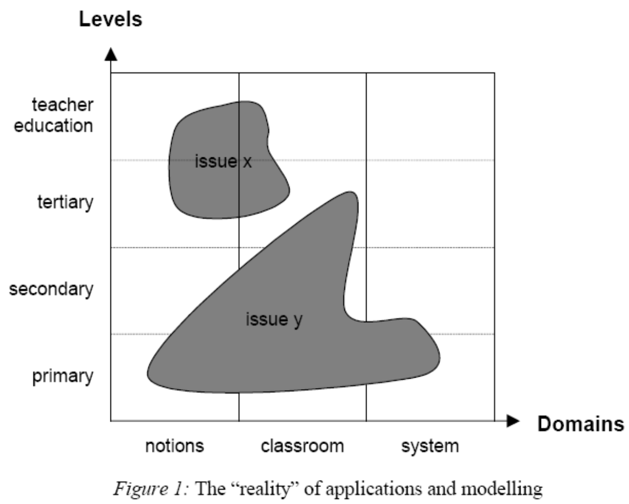


Figure 1 (extraite de Blum, 2004)

Figure 2 (extraite de Blum, 2004)

Par exemple, le thème 1, épistémologie, se décline comme suit :

- **Défi** : caractériser l'activité d'applications/modélisation en termes de fondements, de ruptures, de continuités, d'obstacles...

- **Questionnement (extraits)**

  - Quelles sont les composantes du processus de modélisation ?
  - Quelles parties des mathématiques sont les moins susceptibles d'être représentées dans le champ de la modélisation et inversement ?

- Y a-t-il des caractéristiques communes aux champs de la modélisation et de la preuve ?
- Qu'est-ce que la généralisation et le transfert dans un travail inter-contextes ?

D'autres thèmes d'étude sont proposés parmi lesquels on trouve : Authenticité et familiarité, Redresser l'image des mathématiques, Curricula existants et à venir, Evaluations spécifiques des compétences et des programmes du champ de la modélisation.

Dans la partie II de l'atelier, les participants seront invités à rattacher les tâches de modélisation qui leur seront soumises à un des thèmes d'étude ci-dessus, à situer ces tâches dans l'espace de la Figure 1, et enfin à adopter successivement, dans leur analyse de tâche, le point de vue d'un enseignant du primaire puis d'un formateur de professeurs d'école.

I – 6 Quelques commentaires

La modélisation a été mise sur le devant de la scène au terme d'un processus de valorisation que nous avons rappelé en I-3. Une conséquence fâcheuse de ce processus est la tentation de définir des programmes d'enseignement à partir des standards de réussite à PISA. Dans ce schéma, l'enseignement ne vise plus l'acquisition de savoirs et savoir-faire structurés par l'épistémologie d'une discipline. Il vise l'acquisition de compétences destinées à rendre les élèves performants à PISA. Quant aux savoirs, ils risquent de se réduire à des moyens occasionnels d'acquérir de la compétence ! L'évaluation est alors au centre du processus d'enseignement au lieu d'en être à la sortie. La modélisation quant à elle, vue comme processus de mathématisation du réel, risque d'apparaître comme un simple maillon de ce dispositif.

Pour nous, un curriculum doit s'appuyer sur la cohérence et la cohésion mathématique de paliers qui structurent l'apprentissage en termes d'obstacles, de continuités et de ruptures. Dans le domaine numérique, on distingue ainsi quatre champs de connaissances/compétences qui ont été étudiés et continuent à l'être par les didacticiens.

- Etude des entiers : substitution des nombres aux quantités et opérations sur les nombres, formation de mots et de phrases mathématiques le long d'une ligne d'écriture.

- Etude des nombres rationnels comme rapports de **deux** entiers : nécessité de briser en **deux** la ligne d'écriture pour la formation des mots et des phrases mathématiques.

- Etude de l'algèbre : redésignation par des variables de quantités exprimées dans des registres numériques, verbaux, schématiques, autres… ; réduction du lexique par élimination de variables « redondantes » (expression de variables en fonction d'autres variables) ; formation et traitement d'expressions différentes mais référentiellement équivalentes (si $4x - 1 = 3 + x$, alors $3x = 4$).

- Etude des fonctions : introduction des objets-fonctions, apparition de nouvelles opérations (composition des fonctions) et de nouveaux traitements (limite, dérivation…) des phrases mathématiques.

Notre projet de formateurs est de regarder la modélisation comme un moyen parmi d'autres d'acquérir des connaissances/compétences dans un de ces quatre champs. Notre projet de chercheur est d'étudier les effets de l'introduction substantielle de tâches de modélisation dans l'enseignement.

Nous avons étudié toutes sortes de tâches de modélisation, pour la plupart élaborées et expérimentées par des chercheurs et formateurs européens. Ces tâches ont pour caractéristique principale d'être très ouvertes (pas ou très peu de données numériques) et toutes ancrées dans le monde réel. Elles débouchent donc sur un recueil de données qu'il s'agit de traiter en mobilisant un modèle mathématique éprouvé, le plus fréquent étant celui de la proportionnalité. Très peu de tâches nécessitent l'élaboration d'un modèle mathématique pas encore abordé.

Nous avons proposé à des élèves de différents niveaux de l'école élémentaire ces tâches de modélisation. Nos premières conclusions sont que :

- elles dynamisent les classes ;

- elles fonctionnent à tout le moins comme d'excellents révélateurs de déficit d'apprentissage et facilitent les remédiations en offrant des références contextuelles ;

- elles déstabilisent l'enseignant et tendent à augmenter son interventionnisme, parfois de façon intempestive, ce qui est le contraire du but recherché ! D'où la nécessité d'une formation à la modélisation ;

- pour fonctionner comme moyen d'acquérir des connaissances / compétences, ces tâches devraient déboucher sur l'élaboration d'un modèle mathématique et pas seulement sur l'application d'un modèle déjà disponible. D'où la nécessité de concevoir de nouvelles tâches de modélisation intégrant cette contrainte.

La partie II « travaux pratiques » de l'atelier sollicite la contribution du groupe pour prolonger l'analyse de tâches de modélisation expérimentées et évaluer leur pertinence à être intégrées à un enseignement ou une formation.

II – ANALYSE PAR GROUPES DE TACHES DE MODELISATION ET DISCUSSION

II – 1 Tâches de modélisation à analyser

Différentes tâches sont proposées à l'analyse que l'on pourra relier aux thèmes d'étude abordés dans la partie précédente, et notamment l'authenticité, la faisabilité à un niveau donné, la validation des résultats des élèves, les compétences sollicitées et de leur évaluation, la nécessité pour les élèves d'élaborer un modèle mathématique ou de saisir un modèle disponible, l'épistémologie, l'intention de « redresser » l'image des maths, les principes pédagogiques adéquats à un enseignement des applications ou de la modélisation. On pourra adopter successivement le point de vue d'un enseignant du primaire puis d'un formateur de professeurs d'école.

II – 1.1 Le géant

Quelle est la taille approchée de la silhouette, dont on peut voir seulement un pied?

Cette photo a été prise dans un parc de loisirs.

II – 1.2 Le bouchon

Sur l'autoroute, à l'entrée de Strasbourg, il y a un accident juste avant la sortie Baggersee. La circulation est bloquée entre La Vigie et Baggersee. Combien de véhicules sont bloqués?

II – 1.3 La course

Dans la cour de récréation il y a deux arbres, un petit et un grand, et un mur. On organise une course : chaque élève part du petit arbre; il va toucher le mur; puis il doit toucher le grand arbre ; enfin il retourne toucher le petit arbre. Où toucher le mur pour être le plus rapide?

II – 1.4 Les Berliner

Anne est en vacances dans la Forêt Noire. Elle trouve une offre spéciale pour un type de pâtisserie appelée « Berliner » comme vous pouvez le voir sur la photo. Le boulanger propose le gâteau à 0,80€ l'unité. Si vous étiez le boulanger, auriez-vous proposé les mêmes prix sur l'affiche?

II – 1.4 Le rebond

A quelle hauteur rebondit une balle de tennis, si on la lâche d'une hauteur de 10 mètres?

II – 2 Analyse des tâches et discussion

Voici un rapide résumé des échanges qui ont eu lieu dans l'atelier, concernant l'analyse des tâches de modélisation des exemples précédents.

Pour la tâche du géant, le support semble authentique. En revanche, la question posée représente-t-elle un « vrai » problème, en comparaison par exemple avec la situation du puzzle de Brousseau ? Différentes compétences semblent sollicitées relatives à la proportionnalité ou aux approximations. La mise en œuvre paraît possible au CM1. Mais cette situation est-elle un bon outil pour l'apprentissage de la proportionnalité ? N'est-elle pas trop riche ? Le risque n'est-il pas de la prendre comme situation d'apprentissage ?

Pour cette tâche, le but principal n'est pas la résolution de problème ou l'apprentissage d'une notion, mais prioritairement apprendre à modéliser le réel. Mais peut-on enseigner la modélisation ? La modélisation est-elle un but en soi ou n'est-elle qu'un moyen de savoir ?

Pour la tâche des Berliner, l'authenticité dépend du niveau des élèves, du contexte social, de la mise en situation pour l'enseignement, de la formulation de l'énoncé. Ici selon qu'on se place du point de vue du boulanger ou de celui du client, l'approche est différente. Pour réaliser cette tâche, il faut combiner un savoir mathématique (par exemple sur la proportionnalité) et un savoir de la vie quotidienne (le prix payé est en général proportionnel à la quantité achetée). Cependant le modèle de la proportionnalité n'est pas toujours le modèle dominant dans la vie quotidienne. Ici le boulanger a peut-être appliqué des lois du commerce qui indiquent qu'il y a des seuils psychologiques de prix qui attirent plus le client que les règles de proportionnalité sur le prix payé.

L'enseignant doit scénariser l'articulation des savoirs mathématiques et de la vie quotidienne. Mais il peut y avoir différentes conceptualisations de la réalité et les mathématiques ne se construisent pas uniquement en confrontant les élèves à des situations « authentiques ».

Dans la tâche du rebond, la validation du modèle de la proportionnalité rappelle celle des sciences expérimentales. On observe deux sortes de modèles : un modèle mathématique à chercher dans le répertoire des modèles mathématiques, et un modèle explicatif de cette situation, construit pour résoudre le problème. On observe que la vérification, possible dans la tâche du rebond, n'est pas possible dans la tâche du géant. Cependant former à la modélisation, ce n'est pas enseigner le syncrétisme physique-réalité.

Pour la tâche de la course, on remarque qu'elle est dangereuse à faire réaliser par des élèves qui doivent courir en direction d'un mur. La vitesse est un élément perturbateur. Les connaissances mathématiques en jeu sont relatives à la symétrie axiale et à l'inégalité triangulaire. Au niveau du cycle 3, est-il souhaitable de poser ce problème qui paraît difficile à comprendre? La situation apparaît bien lourde au niveau heuristique. Quel modèle mathématique permet de comprendre la notion de plus courte distance à l'école primaire? N'est-ce pas une situation pseudo-réelle, bien dans la tradition française ? Un des intérêts est de pouvoir invalider des faux modèles.

III – CONCLUSION

Le temps manquant, il n'a pas été possible de développer le projet Lema et l'atelier s'est conclu sur le questionnement suivant : Quels sont les incontournables d'un scénario de formation continue à la modélisation ?

Différentes propositions ont été discutées. Nous en donnons un bref aperçu ci-dessous.

- Pour proposer un scénario de formation, il convient que le formateur ait choisi sa définition de la modélisation et qu'il s'y tienne.

- Pour un problème donné, il convient que formateur et formé aient conscience que plusieurs modélisations sont possibles et que tout processus de traitement du problème passe par un choix entre ces possibles.

- Les formés doivent traiter eux-mêmes les problèmes de modélisation qu'ils proposeront à leurs élèves.

- Un formé doit percevoir qu'un objet mathématique peut être considéré tantôt comme indépendant de la réalité, tantôt comme susceptible d'interpréter la réalité.

- Il convient que l'élève dispose d'une base de modèles mathématiques pouvant avoir été acquis à travers des activités de modélisation fonctionnant comme situation-problème.

- Un modèle peut être vu comme la forme opérationnelle d'objets mathématiques et des traitements associés. Cette définition ne préjuge en rien de l'ancrage de ces derniers : réel tangible, domaine mathématique …

Bibliographie

BLUM W. (2004) ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education – Discussion document. Educational Studies in Mathematics. Volume 51, N° 1-2. http://www.springerlink.com/content/p1l244802942w921/

BOEN (2006) Socle commun de connaissances et de compétences, *bulletin officiel de l'éducation nationale* n° 29 du 20 juillet 2006.

CABASSUT R. (2006) Exemples de modélisation à l'école primaire allemande : quels enjeux pour la formation des maîtres? in *Actes su 24e colloque Copirelem*, Dourdan, 119-120

KUZNIAK A. (2006) Diversité des mathématiques enseignées « ici et ailleurs » , in *Actes du 23e colloque Copirelem*, Strasbourg, 47-66.

LEMA **L**earning and **E**ducation in and through **M**odelling and **A**pplication http://www.lema-project.org

MAASS K. (2005) "Barriers and Opportunities for the Integration of modelling in Mathematics Classes- Results of an Empirical Study".*Teaching Mathematics and its Applications* Vol 24 61-74.

OCDE (2006), *Assessing scientific, reading, and mathematical literacy*, http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/63/35/37464175.pdf

PARLEMENT EUROPÉEN (2006) *Compétences clés pour l'éducation et la formation tout au long de la vie*, http://www.europarl.europa.eu/sides/getDoc.do?pubRef=-//EP//NONSGML+TA+P6-TA-2006-0365+0+DOC+PDF+V0//FR

PETER-KOOP A. (2002). Real-world problem solving in small Groups : Interaction patterns of third and fourth graders. In B.Barton, C. Irwin, M. Pfannkuch, & M. O. J. Thomas (Eds.), *Mathematics education in the South Pacific* (Proceedings of the 25th annual conference of the Mathematics Research Group of Australasia, Auckland, pp. 559- 566). Sydney: MERGA.

MINISTERE de l'EDUCATION (2006) *Le socle commun des connaissances et des compétences*, Direction Générale de l'enseignement scolaire, http://media.education.gouv.fr/file/51/3/3513.pdf

SITUATIONS DE FORMATION EN PE1 POUR ABORDER LA MODÉLISATION DE NOTIONS MATHÉMATIQUES

Michel Jaffrot
Formateur à l'IUFM des Pays de la Loire
Catherine Taveau
Formatrice à l'IUFM de Paris

Résumé :

A partir d'une situation proposée en PE1, la modélisation de savoirs mathématiques en formation a été questionnée. Après avoir analysé la situation des poignées de mains, les participants de l'atelier ont échangé autour des différents modèles proposés par les étudiants et, de fait, se sont interrogés sur la notion de modélisation.

Nous avons aussi recherché des situations potentielles de formation qui amèneraient, elles aussi, à une démarche de modélisation de savoirs mathématiques.

NOS OBJECTIFS DE TRAVAIL DANS L'ATELIER

Lors de cet atelier, notre intention a été de questionner la notion de modélisation dans le cadre de la formation en mathématiques des étudiants PE1. Nous nous sommes demandés si nous proposions des situations didactiques qui nécessitaient une modélisation ? Si oui, lesquelles ? Est-ce qu'elles étaient réellement des situations de modélisation ? Puis de quelle modélisation parlions nous ?

Ces questions nous ont donné l'occasion de débattre, entre nous formateurs, sur nos propres représentations de la « modélisation » et par conséquent de notre façon de la faire vivre en formation avec les étudiants PE1.

En d'autres termes, nous avons été amenés à nous interroger sur des questions fondamentales comme « c'est quoi les mathématiques pour moi ?» ou « c'est quoi enseigner les mathématiques ? » ou encore « c'est quoi former à l'enseignement des mathématiques ? ».

Cet atelier a été essentiellement un lieu de réflexion et d'échanges dans lequel quelques pistes de mise en œuvre ont été proposées mais où tout est encore à débattre, et ceci dans le cadre de la plus grande place donnée aux mathématiques dans le concours de recrutement des professeurs des écoles.

Ce compte rendu ne peut pas refléter la richesse des débats mais nous présentons les phases essentielles du travail mené.

MISE EN SITUATION

Pour illustrer notre réflexion, nous avons présenté une situation que nous avons fait vivre déjà plusieurs fois dans nos groupes PE1, la situation des poignées de mains, et que nous pensons être une situation de modélisation. Chaque fois, cette situation est proposée lors de la première séance de l'année avec nos étudiants.

Au sein de l'atelier, nous souhaitons aborder les questions suivantes : en quoi cette situation permet-elle de mobiliser un modèle déjà disponible pour résoudre le problème ou en quoi permet-elle de se placer dans un processus de modélisation ? Que signifie pour nous le terme de modélisation ? Quel est l'intérêt de faire vivre cette situation à des PE1 ? Quelle démarche de formation mettre en œuvre pour aborder ces notions ?

Présentation de la situation de formation

Cette situation intitulée *les poignées de mains* a été initiée par Michel Jaffrot.

> Lors de la première séance de formation avec son groupe de PE1, le formateur, sans rien dire de plus, propose à chacun de se lever (le formateur y compris). Les " 35 " PE1 sont répartis en deux groupes bien séparés dans la salle et le formateur propose que dans chaque groupe "*on se dise bonjour*" de telle sorte que chacun échange une poignée de mains avec chacun (suivant les moments, le formateur donne aussi des poignées de mains, il montre ou il ne montre pas).
> Ensuite chacun retourne à sa place et le formateur annonce qu'il va poser plusieurs questions qu'il notera au tableau, qu'il y aura d'abord un moment de travail individuel (5 à 10 minutes), puis un travail par petits groupes de quatre PE1 (environ de 30 minutes) qui devra aboutir à l'élaboration d'une affiche permettant de comprendre les réponses et les démarches. Ces affiches seront analysées avec l'ensemble des PE1 après la pause.
> Voici les questions :
> - *Combien de poignées de mains ont été échangées dans votre groupe ?*
> - *Combien de poignées de mains auraient été échangées pour la salle entière (les 35 PE1) ?*
> - *Combien de poignées de mains auraient été échangées si nous avions été le double de personnes ?*
> - *Combien de poignées de mains auraient été échangées si nous avions été tous les PE1 du site (400 PE1 pour IUFM de Paris) ?*
> - *Et peut-on aussi le savoir quelque soit le nombre de personnes dans le groupe ?*
>
> Suite à l'exposition des affiches de chaque groupe, une présentation en est faite par les auteurs et des questions ou demandes d'explications sont exprimées. Le formateur organise le débat, facilite le questionnement, fait formuler les accords ou désaccords ainsi que les validations.
>
> Puis le formateur valide et institutionnalise le savoir mathématique en jeu. Pour la séance suivante, il propose une série d'exercices (Annexe 3), posés dans un contexte différent, faisant appel, pour les résoudre, à cette nouvelle connaissance.

Dans un premier temps, nous avons proposé aux participants de l'atelier de faire une analyse a priori de la situation des poignées de mains en explorant différentes dimensions :

- du côté du vécu des PE1 ;
- du côté des mathématiques en jeu ;
- du côté des productions possibles ;
- et bien sûr, du côté de la modélisation.

Ces analyses ont été retranscrites sur des affiches (Annexe 1) et ont donné lieu à des échanges. Puis dans un second temps, nous avons présenté un choix d'affiches réalisées par nos PE1 (Annexe 2) et y avons apporté quelques éléments du vécu des mises en œuvre de cette situation dans nos groupes.

Voici une synthèse de ces deux moments de travail.

Analyse a priori

Concernant l'analyse a priori, plusieurs questions concernant la situation elle-même, proposée en première séance de formation PE1 ont alimenté le débat :

- Quels sont les objectifs visés, en termes de démarches et de contenus mathématiques, mais aussi pour la formation didactique (l'établissement du contrat avec le formateur) ?

- Quelle gestion des affiches produites par les groupes de PE1, et des nécessaires liens entre les différentes affiches ?

- Comment travailler le réinvestissement et le transfert ?

- La présentation de la situation peut-elle influencer les procédures ?

- Est-ce une situation d'homologie ?

- Peut-on transposer cette situation dans une classe de primaire (partie didactique du concours) ?

- Comment « gérer » les PE1 « faibles » en mathématiques, voire en souffrance ?

Il ressort des échanges, la certitude que cette situation permet d'aborder à la fois des contenus mathématiques et des notions de didactique. D'autre part, c'est une situation où les étudiants ne disposent pas généralement de technique connue et mettent en œuvre seulement des procédures personnelles très variées utilisant des registres de représentation différents.

Analyse des productions de PE1

Concernant la présentation des affiches produites par les PE1, voici quelques questions :

- Quelle exploitation en faire ? Faut-il les organiser en les classant ?

- Quelle est la réponse attendue ? La démarche ? Les résultats ? La formule ou les formules plus ou moins réduites ?

- Qui valide les productions ?

- Comment montrer le lien entre les différentes procédures, sachant qu'elles sont exprimées dans des registres de représentations différentes :

  • registre utilisant la langue naturelle (souvent utilisé par des PE1 ayant des difficultés en mathématiques mais étant à l'aise avec les mots pour « dire des choses »);

  • registre schématique (en diagramme cartésien ou graphe, en arbre) ;

  • registre symbolique (utilisation des expressions mathématiques, des formules…).

Donc comment aider les PE1 à passer d'un registre à l'autre ?

D'autres questions ont porté sur la gestion des affiches comportant des erreurs, sachant que certaines peuvent permettre de réfléchir sur le statut de la démonstration.

Enfin, comment éviter la déperdition des procédures entre la production de chaque individu et l'affiche du groupe ?

Nous rappelons que cette situation est proposée lors de notre première séance avec les PE1, car elle nous semble pouvoir illustrer deux idées :

C'est quoi faire des mathématiques ? Nous pensons que la richesse des procédures utilisées par les PE1 permet de modifier leurs représentations de la discipline et ainsi de se lancer plus confiants dans la formation que nous leur proposerons pour la préparation du concours.

Notre positionnement de formateur à l'IUFM. Nous sommes dans la pré-professionnalisation c'est-à-dire dans une démarche de revisite des savoirs mathématiques pour en donner du sens dans un objectif d'enseignement.

LA PLACE DE LA MODÉLISATION

Face à la situation des *poignées de mains*, nous avons recueilli des résolutions très différentes les unes des autres (Annexe 2) mais les formateurs, que nous sommes, souhaitent institutionnaliser aussi un savoir : un savoir mathématique et/ou un savoir méthodologique.

Finalement cette situation est-elle une situation adaptée à nos objectifs de formation ? Est-ce une occasion pour l'étudiant de remobiliser des connaissances en appliquant un modèle déjà disponible, ou est-ce une occasion de mettre en œuvre une démarche créant un nouveau modèle qui sera ensuite éprouvé et qui s'avérera pertinent ?

Que souhaitons-nous institutionnaliser à travers cette situation ? Une démarche de construction de modèles ou des savoirs mathématiques ?

Différentes démarches

Regardons ce que font les étudiants PE1. Nous avons recensé deux démarches différentes, en excluant les rares d'entre eux qui reconnaissent d'emblée un problème de dénombrement.

La première démarche consiste à dénombrer les poignées de mains. Ce peut être en augmentant un à un le nombre d'individus dans le groupe : 1 poignée de mains pour 2 individus, (1+2) poignées de mains si une 3ème personne entre dans le groupe, (1+2+3) pour une 4ème personne, etc. Cette démarche aboutit, pour *n* personnes, à la réponse suivante : *1 + 2 + 3 + 4 +………+ (n-1).* Ce peut être en ordonnant les individus du groupe de *n* personnes : le 1er échange (*n-1*) poignées de mains, (*n-2*) pour le 2ème, etc jusqu'à 1 pour l'avant-dernier et 0 pour le dernier. Cette démarche aboutit à la réponse suivante : *(n-1) + (n-2) + … + 3 + 2 + 1.*

La deuxième démarche consiste à dénombrer les gestes effectués par chaque individu du groupe de *n* personnes. Chaque individu va tendre le bras à (*n-1)* autres personnes, soit pour *n* personnes, on obtient *n x (n-1)* bras tendus. Comme une poignée de mains correspond à deux bras tendus, le résultat s'obtient en prenant la moitié du résultat précédent $\frac{n(n-1)}{2}$.

Nous avons ici la mise en œuvre de la construction de deux modèles différents.

Par la combinatoire, il s'agit de trouver le nombre de combinaisons possibles de *deux* mains (une poignée) parmi *n* mains : $C_2^n = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$.

On peut donc penser que chaque méthode de résolution est en elle-même l'aboutissement d'une modélisation de la situation ou l'application d'un modèle pour les étudiants « matheux ». En ce sens nous avons, par les procédures développées par les PE1 (Annexe 2), une illustration des propos tenus par Guy Brousseau dans la brochure de l'ADIREM concernant le thème de la modélisation[1].

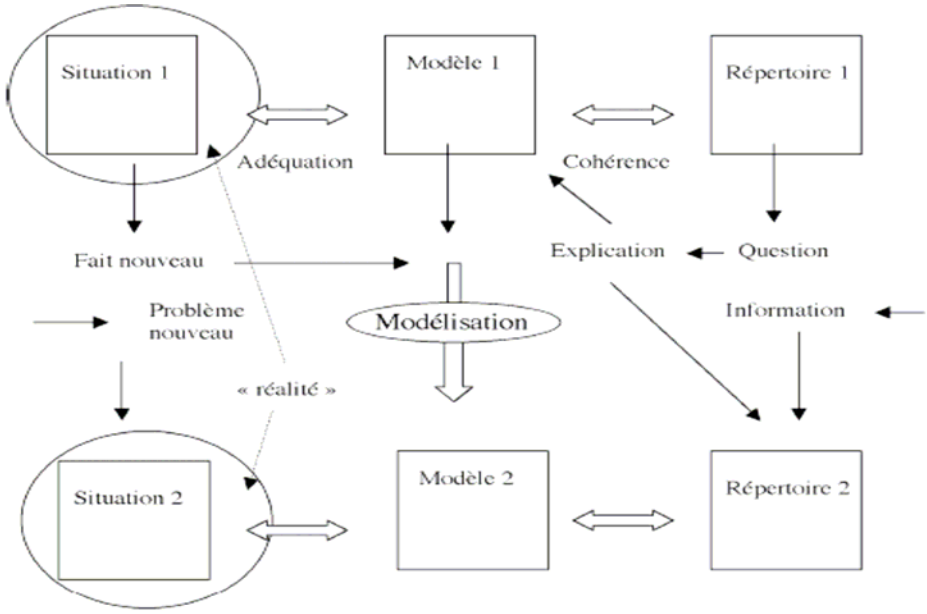
[1] Guy Brousseau, (2003), *Quel type de savoirs mathématiques utilise-t-on dans la modélisation ?* dans la brochure éditée par le Comité Scientifique des IREM *La modélisation*, p.19.

Dynamique des modèles, modélisation (Guy Brousseau)

En élargissant l'étude des modèles aux situations en justifient l'usage, nous facilitons l'étude des processus qui en amènent l'apparition ou l'évolution.

Un modèle est avancé par un actant pour répondre à une question ou à un problème, à l'aide de son répertoire de connaissances. Conformément à notre approche, la question et la réponse sont conditionnées par ce répertoire. Le meilleur modèle dans un répertoire peut ne pas l'être dans un autre ou même s'y avérer faux. Le fait pour un modèle d'être incorrect dans un répertoire et une situation donnée n'est pas contradictoire avec le fait qu'il soit « correct » dans une situation très voisine avec un répertoire différent.

Nous avons ainsi le schéma de la modélisation suivant :



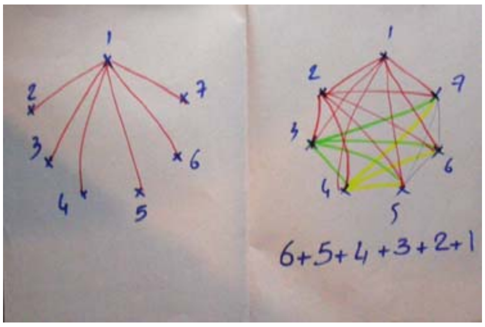
La résolution d'une situation S1 a appelé la construction d'un modèle M1 grâce à un répertoire R1. M1 est cohérent avec R1 et adéquat à S1. Survient alors une perturbation qui remet en cause le système S1, M1, R1 : l'agrégation d'un fait nouveau à S1 (passage de S1 à S'), l'adjonction d'une connaissance ou d'une question nouvelle (passage d'un répertoire R1 à un répertoire R'). Alors se repose l'examen de l'adéquation et de la consistance de M1. La confrontation aboutit parfois à la création d'un nouveau modèle M2 et parfois aussi à la création de R2, et parfois à une extension ou une réduction de S1 à S2. Nous appelons création aussi bien la modification que le remplacement.

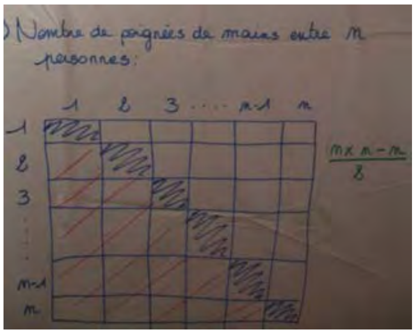
Ainsi la modélisation, en tant que fait " historique " est, pour un actant, le passage de la conception ou de l'usage d'un système S1, M1, R1 à un système S2, M2, R2, d'un candidat-modèle ou d'un modèle à un modèle différent.

Ainsi pour une situation S_1, l'étudiant va élaborer une représentation R_1 qui sera considérée comme un « petit » modèle. Pour cette même situation, un autre étudiant élaborera une représentation R_2 qui sera aussi considérée comme un « petit » modèle, différent du précédent. Mais chacun de ces « petits » modèles se réfère à un modèle générique $\mathfrak{M}$.

Modélisation dans la situation des poignées de mains

Concernant la situation des *poignées de mains* si nous prenons la représentation sous la forme du tableau cartésien, la modélisation de la situation n'est pas du tout semblable à celle utilisant, par exemple, un graphe.





Le savoir mathématique construit n'est, de fait, pas de même nature dans chacune de ces modélisations même si cette situation se réfère à un modèle mathématique générateur.

Comme les affiches l'attestent, la spécificité de cette situation est qu'elle va générer globalement deux types de modélisations : celle qui amène à la solution de $\frac{n(n-1)}{2}$ en lien avec les productions n°1, 2, 4, 6, 7, 8 et 9 (Annexe 2), et celle qui amène à la solution *1 + 2 + 3 + 4 +………+ (n-1)* en lien avec les productions n°3, 5 et 10 (Annexe 2). Le lien d'une modélisation à l'autre n'est qu'une affaire d'astuce de calculs.

Institutionnalisation et transfert

Notre souci est donc de déterminer ce que nous souhaitons institutionnaliser : un savoir ou des savoirs mathématiques, une démarche d'investigation, différentes représentations ? Le débat au sein de l'atelier a montré que nous n'avions pas de réponse unique et collective à ces réponses.

D'autre part, l'analyse décrite ci-dessus, nous permet de comprendre pourquoi, contrairement à ce que nous pourrions penser, les PE1 n'effectuent pas de transfert immédiat pour résoudre les problèmes posés en Annexe 3.

Même s'ils ont pour objectif de réinvestir les savoirs institutionnalisés dans la situation des *poignées de mains,* et même s'ils se résolvent finalement tous par le calcul d'une formule proche de celle élaborée $\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$, ces problèmes ne sont pas tous congruents et ne se réfèrent pas au même modèle mathématique.

Ainsi certains étudiants repèreront le même modèle pour ce qui est du *nombre de diagonales dans un polygone* ou *le nombre de droites passant par deux points*, comme étant le nombre de combinaisons possibles de deux points parmi *n* points, s'ils ont utilisé ce modèle pour résoudre la situation des *poignées de mains*. En revanche, le nombre de marches de l'escalier sera pour eux un nouveau problème, dont la conjecture amènera la résolution par la somme des *n* premiers nombres entiers.

De même, les étudiants ayant abouti à la solution arithmétique (*1 + 2 + 3 +……+ n*) n'appliqueront pas la formule pour résoudre les problèmes de l'Annexe 3.

Il est intéressant de constater que le recours à la connaissance mathématique construite dans la situation des *poignées de mains* est souvent proposée dans les sujets de mathématiques du CERPE alors qu'elle ne fait pas partie des savoirs enseignés au collège. Les auteurs pensent l'éprouver à partir d'une démarche de conjecture et la connaissance arithmétique de l'égalité suivante :

$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots\ldots + (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ qui ne favorisera que les « matheux ».

D’AUTRES SITUATIONS…

Après l’étude de la situation des *poignées de mains,* le groupe a essayé de chercher d’autres situations de formation qui favoriseraient des conditions de modélisation mathématique.

Voici une liste non exhaustive proposée par les participants, soit de savoirs à construire, soit de situations existantes qui peuvent permettre à chacun d’entre nous d’aller explorer la pertinence du terme « modélisation » et de vérifier la transférabilité des savoirs construits dans d’autres problèmes posés.

- *Si les shadoks m’étaient comptés…*Mathilde Lahaye-Hitier, plot n°11, ed APMEP, 2005

- *Le pays de quatre,* O. Bassis, in Concepts clés et situations problèmes, Hachette éducation, 2003

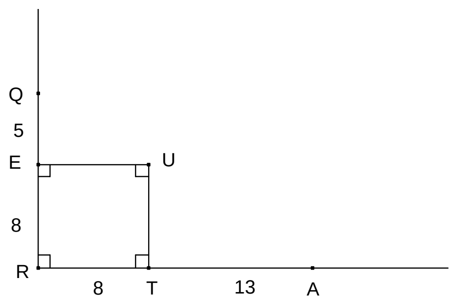
Deux situations autour de la numération de position

- *Concertum, la division en formation initiale*, H.Péault, in *Concertum, dix ans de formation des professeurs d’école en mathématiques,* Tome 2, Ed Arpeme,

- *La course à 20,* G. Brousseau in La théorie des situations didactiques, La pensée sauvage, Grenoble, 1998 ;

- Problème de l'alignement des points issus d’un sujet du CERPE de Bordeaux 94 ;

Les points Q, U et A sont-ils alignés ?



- Recherche du nombre de diviseurs d’un nombre ;

- Mise en équations et système d'équations avec sa résolution ;

- Finir les cercles à partir seulement d’arcs de cercle.

CONCLUSION

En guise de conclusion, nous voulions apporter notre témoignage sur l’impact du vécu de cette première séance avec nos PE1.

Nous pensons que la situation des *poignées de mains* reste, pour un très grand nombre des étudiants, une situation de référence de formation. Mais pour quelles raisons ? Pour la démarche de formation proposée ? Pour la surprise occasionnée chez ces étudiants ayant une autre représentation de l’enseignement des mathématiques ? Pour les savoirs abordés dans cette situation ? Pour le premier contact avec leur formateur de mathématiques (poids important dans l’admissibilité au CERPE) ?

En tout cas cette situation les marque tellement, qu’ils nous demandent les années suivantes si nous avons fait les *poignées de mains* avec nos PE1 de l’année.

Annexe 1 : les 4 affiches produites par les groupes

affiche 1

I – **Situation**

- énoncé simple, facilement compréhensible ;
- mise en situation réelle : expérimentation facile ;
- validation possible sur des petits nombres.

II – **Variables didactiques**

- taille des groupes ;
- expérimentation avant résolution ? oui /non
- outils à disposition : calculatrice – tableur.

III – **Techniques**

- dénombrement par expérience ;
- essais de formules de combinatoire (pour les matheux) ;
- utilisation de tableaux (genre Pythagore) ;
- représentations dessinées.

IV – **Objectifs**

- faire vivre une situation de recherche sans procédure experte .

V – **Modélisation**

- situation modélisable ;
- différence entre modélisation et représentation.

***affiche 2* – analyse a priori**

I – L**e savoir savant** :

- dénombrement (suite, combinaison, formule directe) ;
- représentation de données.

II **– Procédures**

- de la plus personnelle aux expertes (graphiques, dessins, manipulations…)

III – **Objectifs visés**

- créer une dynamique de groupe (1ère séance) ;
- présenter la modalité de formation par homologie (ici, la résolution de problème) ;
- mettre en évidence que les notions mathématiques sont des outils de résolution de problèmes concrets ;
- acquérir des compétences mathématiques et professionnelles.

affiche 3 – intentions du formateur

I – présenter l'année de préparation tout en bousculant leurs représentations sur l'enseignement des mathématiques.

II – **Objectifs**

- mettre en place le contrat didactique ;
- présenter une « nouvelle » notion mathématique.

III – **Analyse a priori**

- différentes procédures possibles (mimer, dessiner, calculer…) ;
- difficultés prévisibles (recherche individuelle difficile, travail de groupe, difficultés à modéliser…).

IV – P**erspectives**

- retour et analyse sur la situation vécue ;
- transposition dans une classe ;
- présentation du concours (volet didactique et volet mathématique).

affiche 4 – ce qu'on peut en « tirer » (PE1 / PE2 / FC) → institutionnalisation

I – M**athématiques** (en PE1)

- intérêt de l'inconnue ;
- modèle mathématique ;
- contre-exemple pour invalider une formule.

II – **Didactique**

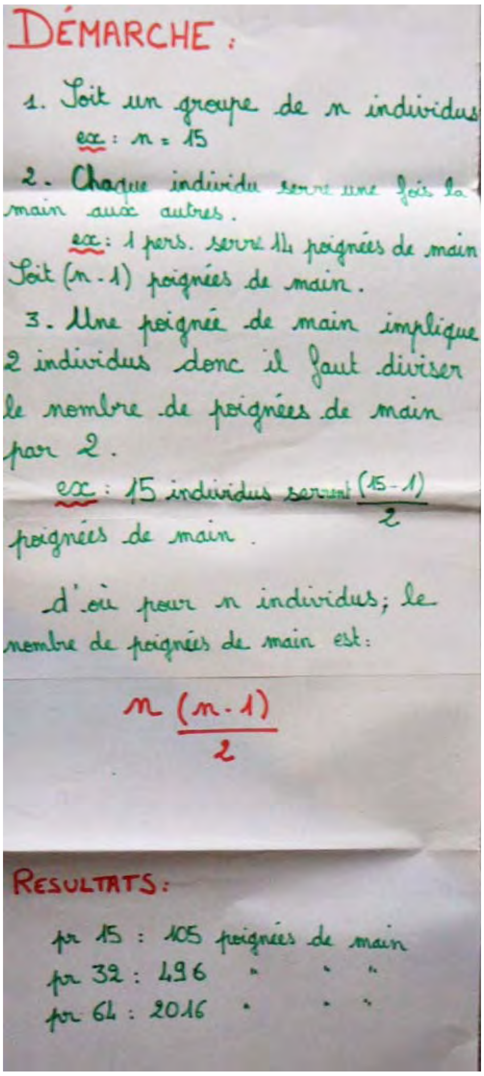
- « casser » les conceptions initiales sur les mathématiques :

→ place de la résolution de problèmes dans les programmes ;

- diversité des procédures (menant à la réussite ou non) (en PE2 ou FC) :
  → classer les procédures selon différents niveaux de procédures ;
  → hiérarchisation par rapport à la mise en œuvre ;
- rôle des schémas (en PE2 ou FC) ;
- situation de référence pour les problèmes de dénombrement ;
- changement de cadre (en PE2 ou FC)
  → physique / arithmétique
- intérêt du travail individuel suivi d'un travail de groupes (en PE2 ou FC) ;
- situation de réinvestissement (en PE1)
  → nombre de matchs disputés entre n équipes (formule championnat) ;
  → nombre de cordes à partir du nombre de points sur un cercle ;
  → nombre de diagonales d'un polygone à n côtés ;

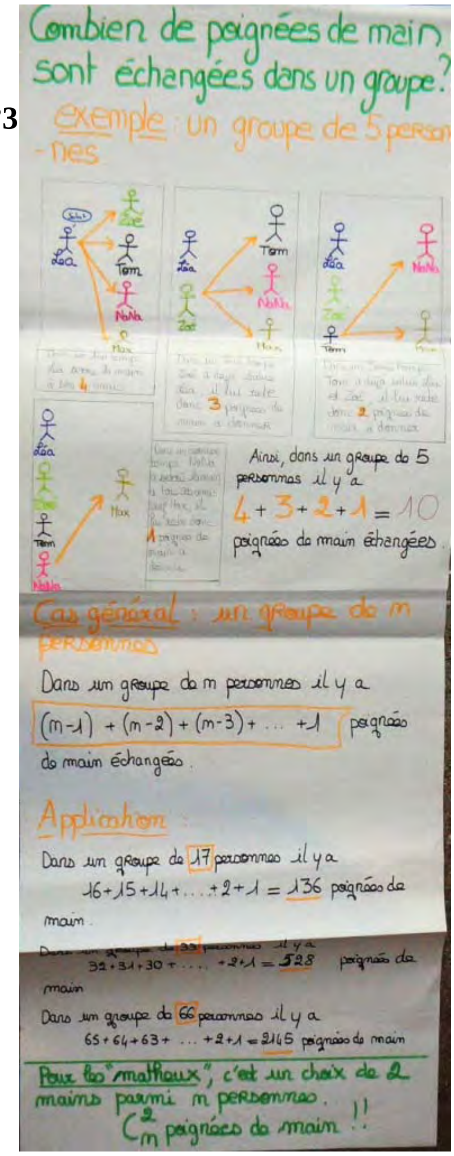
Annexe 2
Choix de quelques affiches produites par des PE1

N°1

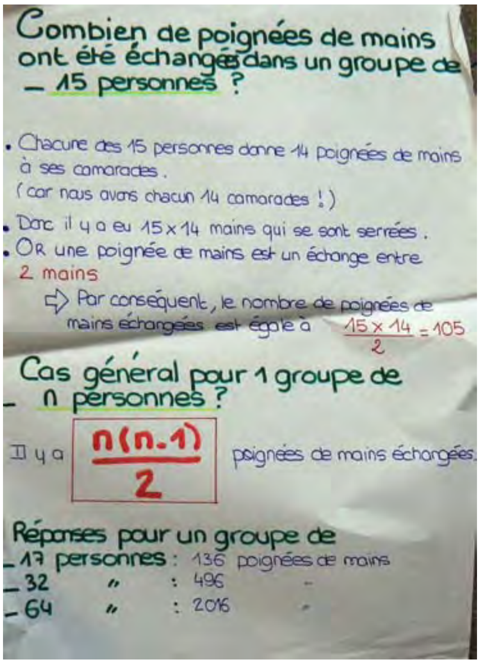


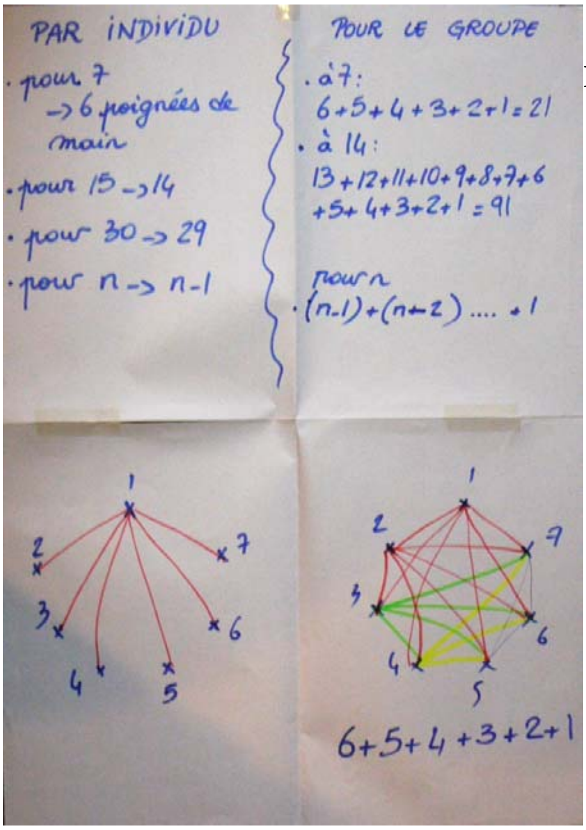
N°2

N°3

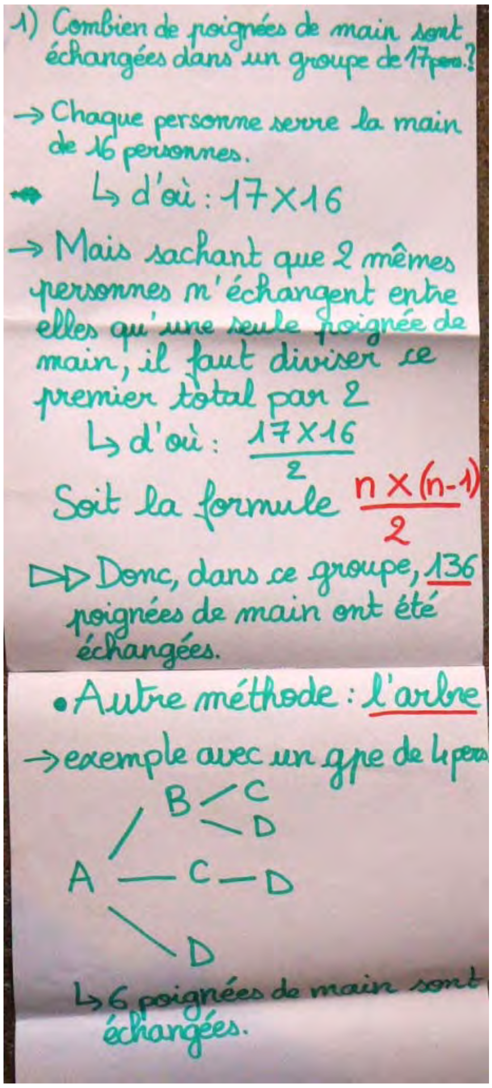


N°4

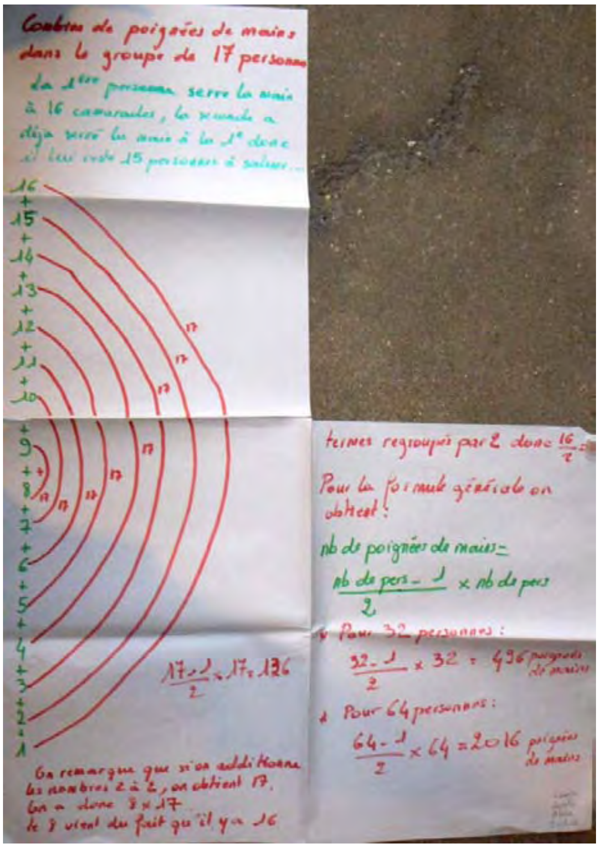



PAR INDIVIDU
. pour 7
-> 6 poignées de main
. pour 15 -> 14
. pour 30 -> 29
. pour n -> n-1
POUR LE GROUPE
. à 7 :
6+5+4+3+2+1 = 21
. à 14 :
13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 91
pour n
. (n-1)+(n-2) .... +1
6+5+4+3+2+1

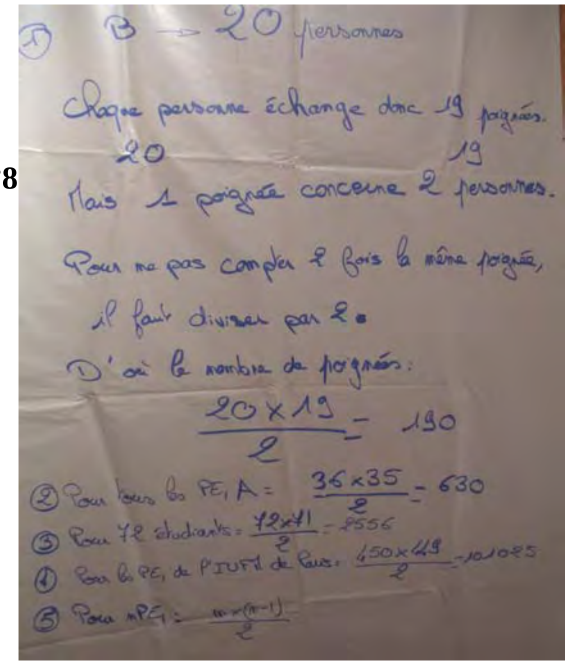
N°5


1) Combien de poignées de main sont échangées dans un groupe de 17 pers. ?
-> Chaque personne serre la main de 16 personnes.
↳ d'où : 17×16
-> Mais sachant que 2 mêmes personnes n'échangent entre elles qu'une seule poignée de main, il faut diviser ce premier total par 2
↳ d'où : 17×16 / 2
Soit la formule n×(n-1) / 2
Donc, dans ce groupe, 136 poignées de main ont été échangées.
• Autre méthode : l'arbre
-> exemple avec un gpe de 4 pers
B C D
A C D
D
↳ 6 poignées de main sont échangées.

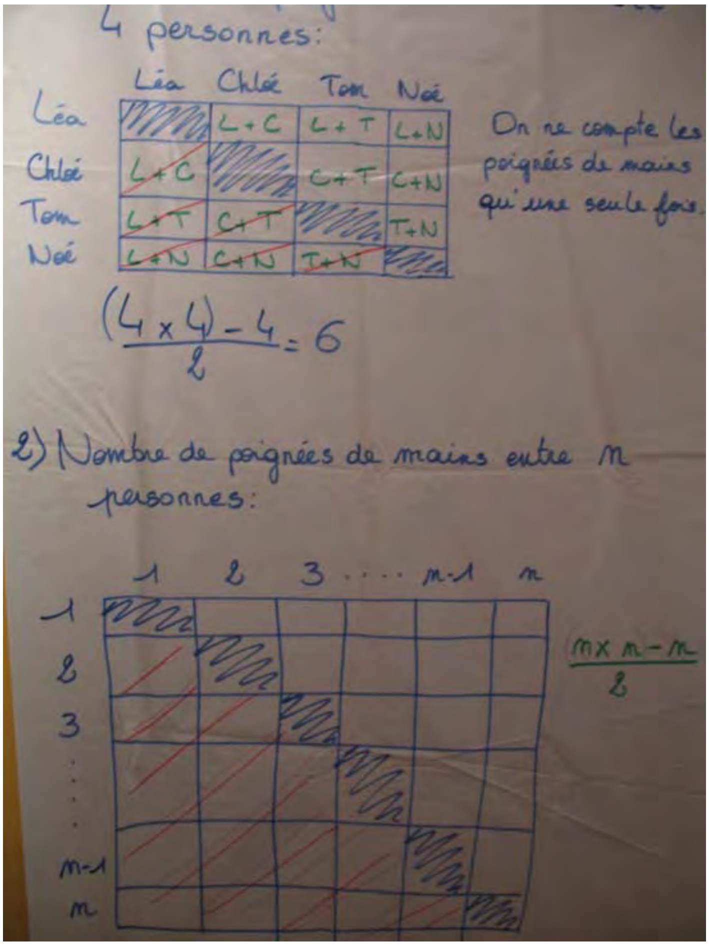
N°6


Combien de poignées de mains dans le groupe de 17 personnes
La 1ère personne serre la main à 16 camarades, la seconde a déjà serré la main à la 1e donc il lui reste 15 personnes à saluer...
17-1 / 2 × 17 = 136
On remarque que si on additionne les nombres 2 à 2, on obtient 17.
On a donc 8 × 17
le 8 vient du fait qu'il y a 16
termes regroupés par 2 donc 16/2
Pour la formule générale on obtient :
nb de poignées de mains = nb de pers - 1 / 2 × nb de pers
Pour 32 personnes :
32-1 / 2 × 32 = 496 poignées de mains
Pour 64 personnes :
64-1 / 2 × 64 = 2016 poignées de mains

N°7

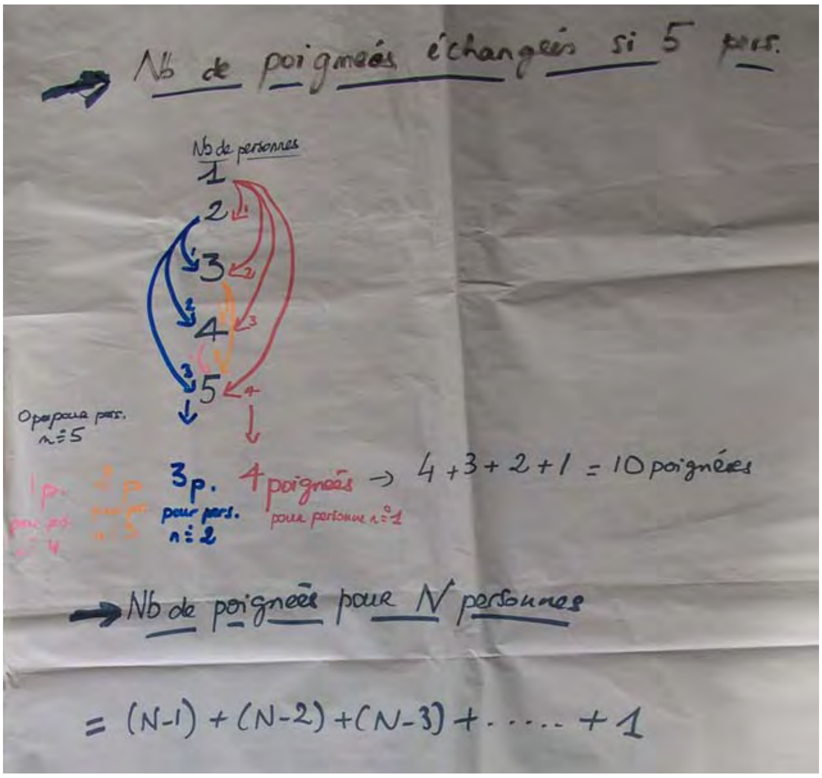

1 B -> 20 personnes
Chaque personne échange donc 19 poignées.
Mais 1 poignée concerne 2 personnes.
Pour ne pas compter 2 fois la même poignée, il faut diviser par 2.
D'où le nombre de poignées :
20 × 19 / 2 = 190
2 Pour tous les PE, A = 36×35 / 2 = 630
3 Pour 72 étudiants : 72×71 / 2 = 2556
5 Pour n PE : n×(n-1) / 2

N°8


4 personnes:
Léa Chloé Tom Noé
L+C L+T L+N
C+T C+N
T+N
On ne compte les poignées de mains qu'une seule fois.
(4×4)-4 / 2 = 6
2) Nombre de poignées de mains entre n personnes:
1 2 3 ..... n-1 n
n×n-n / 2

N°9

N°10

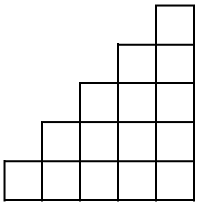

Nb de poignées échangées si 5 pers.
Nb de personnes
1
2
3
4
5
3p. pour pers. n°2
4 poignées pour personne n°1
4+3+2+1 = 10 poignées
Nb de poignées pour N personnes
= (N-1) + (N-2) + (N-3) + ... + 1

Annexe 3
Exercices donnés aux PE1 à la suite de la situation des *poignées de mains*.
Réinvestissement ou situations nouvelles?

1) L'escalier

Cet escalier est formé de cubes et il a 5 marches.

Combien de cubes faudra-t-il pour construire un escalier de 10 marches ? Un escalier de 27 marches ? Un escalier de ***p*** marches ?



2) Les diagonales

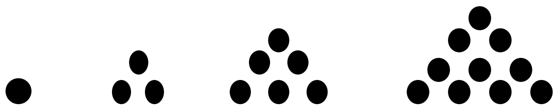
Quel est le nombre de diagonales d'un hexagone ? d'un décagone ? d'un polygone à ***n*** côtés ?

3)Points et lignes

Quel est le nombre de segments qui relient **N** points, sachant que 3 de ces points ne sont jamais alignés ?

4)Les nombres triangulaires

Un nombre est appelé « triangulaire » s'il peut représenter une quantité disposée sous la forme d'un triangle équilatéral. Par exemple :



1 **3** **6** **10** sont les premiers nombres triangulaires.

Donnez les six nombres triangulaires qui suivent le nombre triangulaire **10**. Quel est le 55$^{\text{ème}}$ nombre triangulaire ?

5) Le renard et les raisins

Un renard aimait manger les grains de raisins. Le premier jour il en mange 6, puis le 2$^{\text{ème}}$ jour il en mange 6 de plus que ce qu'il avait mangé le premier jour.

Ainsi de suite, tous les jours il mangeait 6 grains de plus que chaque jour précédent. Combien de jours lui faudra-t-il pour avoir mangé au total 1800 grains ?

Annexe 4

Modèle

selon le dictionnaire d'histoire et de philosophie des sciences
Dominique Lecourt, PUF, 1999

Le terme « modèle » présente une grande variété d'usages dans les sciences, de la logique aux sciences de la nature et sciences de l'homme. De plus, à travers la diversité des usages et des domaines, le sens oscille entre concret et abstrait, figuration et formalisme, image et équation, échantillon et étalon, réalisation matérielle et norme abstraite. Paradoxalement, cette équivocité essentielle est le trait permanent à travers tout le large spectre des différents usages.

1) Le sens originaire est celui de « maquette », le latin *modulus* étant un terme d'architecture désignant la mesure arbitraire servant à établir des rapports de proportion entre les parties d'un ouvrage. Par généralisation, « maquette » s'applique à toute matérialisation, en dimensions réduites ou grandeur nature, d'un dispositif architectural (édifice), mécanique (navire, avion) ou d'une autre nature (appareils électriques ou autres) dont ne sont reproduites, schématiquement, que les formes et propriétés reconnues essentielles au détriment des détails tenus pour accessoires. Une maquette est plus commodément soumise aux calculs, mesures et tests qui permettent d'améliorer la construction effective de l'objet ou du prototype correspondant. On trouve là, déjà, des caractéristiques générales des modèles, qui sont donc des réalisations ou des figurations utiles à l'avancement des connaissances et des technologies. Tout matériel qu'il puisse être, un modèle n'est pas un objet réel, mais un objet artificiel, qui appartient au registre de (invention. C'est un intermédiaire entre une situation qui nous paraît énigmatique et les questions que nous posons pour tâcher de réduire (énigme et comprendre la situation. Les modèles assument donc une fonction heuristique dans le processus de connaissance théorique ou technique. Dans cette fonction, René Thom observe que le modèle a un champ d'application qui dépasse largement la science et englobe des pratiques d'ajustement de nos moyens à nos buts et à nos désirs.

2) Un usage assez proche du précédent est celui qui a cours dans les amphithéâtres de physique et de biologie, où des processus naturels sont imités dans des conditions qui facilitent l'observation et l'étude. Ainsi les planétariums reproduisent la cinématique du système solaire en négligeant partiellement les proportions géométriques et en changeant sa dynamique : pour des raisons pratiques, on exagère les dimensions du soleil et des autres planètes par rapport à leurs distances et on remplace la gravitation comme moteur du système par un mécanisme artificiel comparable à celui d'une horloge. Autres exemples : la machine d'Atwood imitant la chute libre des graves sur une échelle de temps ralentie grâce à une forte réduction de la constante de gravitation ou un modèle de la circulation du sang où la force motrice du coeur est remplacée par une pompe.

3) La prédominance des modèles issus de la mécanique a pu inciter à associer à tout modèle une construction dans (espace respectant la loi d'inertie, les lois du choc, les principes de conservation, etc. Mais l'expérience physique peut être structurée selon d'autres lois que mécaniques. « Modèle » reçoit alors un tout autre sens, celui de schéma théorique, non matérialisé en général, qui n'est pas censé reproduire fidèlement un phénomène. Mais au contraire le simplifie suffisamment pour pouvoir l'analyser, l'expliquer (partiellement au moins) et en prédire (dans certaines marges) la répétition. Le modèle est un simple instrument d'intelligibilité sans prétention ontologique : il est aussitôt remplacé si l'on trouve un modèle meilleur. Ainsi les modèles d'un éther élastique, milieu de propagation des vibrations optiques, qui ont été rendus caduques par la théorie électromagnétique de la lumière, le modèle de Bohr pour expliquer le comportement de l'atome, qui ne marche bien que pour l'atome d'hydrogène, etc. Plus généralement, toute expérience de pensée constitue un modèle en ce sens. Et même toute théorie constituée peut servir de modèle à la constitution d'une théorie nouvelle.

4) C'est en ce sens qu'il a été fait systématiquement usage de la notion de modèle au XIX$^{\text{è}}$ s., du moins en physique. Comme le note S. Bachelard cet usage conscient n'est pas contingent. La mécanique, bien établie, a servi de réservoir de modèles, mécaniques ou théoriques, aux nouvelles sciences : électrostatique, électrodynamique, thermodynamique, électromagnétisme, etc. A côté de sa fonction heuristique, le modèle assume une fonction de garantie, de justification et de norme d'intelligibilité des faits et idées nouveaux. En même temps apparaît très clairement ce qui est au fondement de l'activité de modélisation : l'analogie. Par « analogie physique, écrit Maxwell, j'entends cette ressemblance partielle entre les lois d'une science et les lois d'une autre science qui fait que l'une des deux peut servir à illustrer l'autre ». Qu'une théorie puisse en illustrer une autre, en vertu d'identités formelles (les mêmes formes d'équations différentielles ou aux dérivées partielles) suggère une notion de modèle assez large pour englober physique et mathématiques à la fois. D'ailleurs, la reconnaissance systématique de la polysémie d'une théorie advient d'abord en mathématiques, comme conséquence du développement de l'axiomatique, et elle n'a lieu ensuite en physique que grâce, précisément, à l'utilisation des concepts algébriques de groupe et d'invariance par tel ou tel groupe.

5) En mathématiques modèle s'emploie en deux sens nettement distincts et cependant corrélés, comme nous pouvons le pressentir déjà avec le texte de Maxwell et comme nous allons le montrer précisément. Le premier sens est caractérisé aujourd'hui de « logique

», bien qu'il soit apparu de façon informelle en mathématiques, et d'abord en géométrie. On a construit en effet, à la fin du XIXè° s., des modèles euclidiens des géométries non euclidiennes (Beltrami en 1868, Klein en 1871-1873 et Poincaré en 1891), c'est-à-dire des espaces euclidiens vérifiant les axiomes des géométries lobatchevskienne et riemannienne respectivement. Ces modèles ont assumé la double fonction justificative et heuristique : ils ont servi à fournir un contenu intuitif aux nouvelles géométries et une preuve (relative) de leur cohérence tout en permettant des applications mathématiques nouvelles. Poincaré (1854-1912) notamment atteste de la fécondité de la géométrie de Lobatchevski pour l'intégration des équations linéaires. Ainsi, un modèle est une représentation concrète dans une théorie familière d'énoncés et de relations, qui sont d'abord perçus comme purement formels. Plus généralement, un modèle d'un ou plusieurs énoncés est un ensemble d'éléments quelconques vérifiant ou, comme on dit encore, satisfaisant ces énoncés et illustrant de ce fait la structure déterminée par eux. C'est l'attribution d'un sens déterminé à des entités a priori sans signification tel que les énoncés formels soient vérifiés. Si l'on rappelle qu' « attribuer un sens » c'est « interpréter », on voit qu'un modèle est une interprétation de ces énoncés dans laquelle ceux-ci sont vrais. La question du contenu mathématiquement viable et non vide d'un formalisme (entité, équation théorie) cesse de se poser dès qu'on a un modèle de celui-ci. On a cessé de discuter du bien-fondé des nombres imaginaires et de se demander s'ils étaient bien des nombres au même titre que les nombres entiers ou les nombres réels une fois trouvée pour ces entités (au début du XIXè s.) une représentation par un couple de points du plan euclidien.

David Hilbert (1862-1943) généralisa l'usage de cette notion sémantique de modèle. En 1899, il systématise dans les, fondements de la géométrie la technique de constructions de modèles pour prouver la compatibilité ou l'indépendance mutuelle de certains axiomes. Ce faisant, il opère un décrochement important dans la compréhension de la notion de modèle. En effet, les modèles qu'il fabrique sont non pas des visualisations dans l'espace euclidien de théories plus abstraites ou moins familières mais des modes formels; construits à partir de résultats algébriques ou arithmétiques ou assez abstraits. La structure de géométrie non archimédienne, par exemple, est réalisée (vérifiée) dans un modèle inimaginable sans tout un savoir sur les formes algébriques et sur les sommes de carrés.

L'algèbre et l'arithmétique permettent ici de valider une construction géométrique alors que traditionnellement c'était plutôt l'inverse, la géométrie euclidienne: ayant toujours servi de cadre de représentation intuitive. Il en résulte. L'idée moderne qu'une géométrie est un modèle d'un certain langage formel, plutôt que la formalisation de propriétés idéalisées à partir de l'observation de l'espace sensible. C'était bien, du reste, l'idée mise en œuvre par Félix Klein (1849-1925), dès 1872, dans la formulation du problème qui commande « le programme d'Erlangen » et aboutit à la classification des différentes géométries en fonction des groupes de transformations : « Étant donnés une multiplicité et un groupe de transformations, quelles sont « les figures » (en un sens analogique) de la multiplicité, qui demeurent invariantes par les transformations du groupe ? » Une géométrie est donc un ensemble de sous-ensembles d'éléments (de « figures ») demeurant invariants par certaines transformations.

C'est là la racine de la définition logique du terme modèle fournie par la théorie des modèles, qui est l'étude systématique des relations réciproques entre ensembles E d'énoncés et ensembles M de modèles de ces énoncés. On appelle langage formel L du calcul des prédicats du premier ordre la donnée de trois collections disjointes de symboles : symboles de relations, de fonctions et de constantes. Une réalisation R de L est constituée par la donnée d'un ensemble non vide d'individus et d'une fonction d'interprétation qui associe un sens déterminé respectivement aux symboles de constantes, de relations et de fonctions. Un modèle M d'un énoncé E de L est une réalisation R (on dit aussi une interprétation) où E est vrai. Une théorie mathématique spécifique (la théorie des groupes, la théorie des corps, la théorie des espaces vectoriels, etc.) est un langage formel interprété, et elle a généralement plusieurs modèles non forcément isomorphes, ainsi qu'on s'y est maintenant tout à fait habitué par familiarité avec les méthodes de l'analyse classique d'un côté, de l'analyse non standard de l'autre.

Le concept de modèle mathématique est souvent aussi utilisé en un deuxième sens, qui est le plus courant aujourd'hui et à donner lieu aux termes modernes de « modéliser » et de « modélisation ». Il désigne alors le processus inverse de celui que nous venons de décrire. Au lieu associer un sens déterminé et une illustration concrète à symboles et énoncés formels, il consiste à associer à un phénomène empirique un schéma symbolique, figurant de manière partielle et simplifiée les propriétés reconnues principales du phénomène et facilitant aussi bien l'expérimentation que la construction d'une théorie le concernant. A son tour,la théorie construite à partir du modèle peut être appréciée comme un «modèle théorique » , ainsi que le souligne M. Bunge. Modéliser c'est donc trouver les expressions mathématiques les équations qui « simulent », c'est-à-dire représentent schématiquement et analogiquement un processus physique, biologique, psychologique, économique, social, etc. Un grand nombre d'observations peuvent être synthétisées par un nombre relativement petit de paramètres : un modèle est forcément réducteur. La modélisation est, depuis toujours, au coeur de la physique mathématique : une série de Fourier avec un nombre fini de termes non nuls, par exemple, est une modélisation des fonctions périodiques, qui sont des modélisations des phénomènes de vibration, de diffusion, etc. Elle s'est étendue aux autres sciences après la Seconde Guerre mondiale, avec le développement de la recherche opérationnelle et de la théorie des jeux, appliquées pour représenter et faciliter l'organisation d'opérations militaires, d'échanges économiques, d'activités administratives, de flux de circulation dans une ville, etc. Les modèles sont des instruments, imparfaits et réducteurs, mais efficaces d'analyse de la réalité.

Dans certains cas, ils suppléent l'observation impossible : le retour au big-bang, par exemple, ne peut emprunter la voie expérimentale, mais seulement celle de la modélisation.

La modélisation, dont certains pensent qu'elle constitue une véritable révolution scientifique, a été rendue possible par le rapprochement physique et la collaboration des mathématiciens avec les physiciens, les ingénieurs, les biologistes, les psychologues, les sociologues, etc. La modélisation au confluent de plusieurs sciences et nécessite une approche pluridisciplinaire des problèmes. Aujourd'hui elle complétée par la simulation numérique et l'utilisation systématique d'images de synthèse. L'explosion informatique ainsi que les nouveaux paradigmes scientifiques apportés par la théorie des systèmes, la théorie des catastrophes, la théorie des fractals, la théorie du chaos, etc., ont favorisé la prolifération des modèles pour l'analyse de systèmes d'organisation complexe, physiques (systèmes dynamiques) ou humains (mécanismes de développement économique et culturel).

Il est certain que la pluralité des modèles - la polysémie- d'une théorie est une chose et la pluralité des énoncés non équivalents pour modéliser un processus empirique une autre. Il n'empêche que les deux sens du concept de modèle ne sont que les deux faces complémentaires d'une même activité : interpréter. C'est pourquoi les glissements qui sont fréquents mais rarement et pour ainsi dire jamais explicitement assumés, d'un sens à l'autre sont parfaitement légitimes. D'autant plus qu'il est fréquent que des modèles sémantiques d'un formalisme soient des modèles théoriques d'un processus empirique. Interpréter est inéluctable, qu'il s'agisse d'interpréter un formalisme, ou inversement d'interpréter mathématiquement un ensemble de données. D'une part, parce qu'un langage qui n'aurait pas de modèle n'a aucun intérêt, d'autre part et réciproquement, parce que l'expression n'est pas le miroir de l'expérience : « Nous ne pouvons prononcer une seule phrase qui traduise un pur fait d'expérience... toute traduction de l'expérience par des mots nous oblige à aller au-delà de l'expérience», comme le soulignait judicieusement Boltzmann. Aussi existe-t-il plusieurs manières défendables de concevoir ou d'expliquer le monde, plusieurs modèles du monde. On parle alors de « sous-détermination empirique » des théories, phénomène réciproque de leur polysémie. L'une et l'autre caractéristique impliquent une philosophie non réaliste de la science. Comme y insiste B. van Fraassen, notre discours, en particulier lorsqu'il traite de causalité et de nécessité, porte sur nos modèles du monde, plutôt que directement sur le monde.

En résumé, sous quelque aspect qu'on le prenne, un modèle fait toujours fonction de médiateur entre un champ théorique dont il est une interprétation et un champ empirique dont il est une formalisation. Sa double face abstraite-concrète le rend apte à remplir le double rôle d'illustration et de support de preuve d'une part, de paradigme et de support d'analogies d'autre part. Un modèle est à la fois la concrétisation opérationnelle d'analogies constatées ou supposées entre des domaines distincts et le terreau expérimental sur lequel peuvent naître de nouvelles analogies. L'efficacité cognitive, heuristique, prédictive et décisionnelle, ou comme on dit d'un terme générique la « pertinence » d'un modèle, ne peut être évaluée indépendamment des objectifs qui lui sont assignés, des stratégies de recherche, de décision et de planification dont il est l'instrument et qui dépendent elles-mêmes des lignes de force du champ socio-politique où elles sont définies.

- BACHELARD S. « Quelques aspects historiques des notions de modèle et de justification des modèles », Élaboration et justification des modèles, éd. P. Delattre & M. Thellier, Paris, Maloine, 1979, p. 3-19.

- BRISSAUD M., FORSÉ M. & ZIGHED A. éd., La Modélisation, confluent des sciences, Paris, Éd. du CNRS, 1990.

- BUNGE M., « Les Concepts de modèle», L'âge de la science, n' 3, juil.-sept. 1968, p. 165-180.

- DELATTRE P. & THELLIER M. éd., «Modélisation et scientificité », Élaboration et justification des modèles, Paris, Maloine, 1979, p. 21-29. FREUDENTHAL H., The concept and the role of the models in mathmatics and natural sciences, Dordrecht, Reidel, 1961.

- KLEIN F., Le programme d Erlangen texte all. dans les Mathematische Annalen, 43, 1893, p. 63-100 (trac. fr., réimpr., Paris, Gauthier Villars, 1974). - POINCARÉ H., La Science et l'hypothèse (1902), rééd. Paris, Flammarion, 1968, chap. III et IV. - SINACEUR H., Corps et modèles, Paris, Vrin, 1991, 4` partie. –

- TARSKI A., « Contributions to the theory of models » , Collected papers, III, Birkhàuser, 1986. - TARSKi A., MOSTOWSKi A. & RoQINSON R.M., Undecidable theories, Amsterdam, North-Holland Publ. Co., 1953 (« A general method in proofs of undecidability », chap. I). - Thom R., Modèles mathématiques de la morphogenèse, Pais, UGE, 1974. - VAN FRAASSLN B., Laws and symmetrie, Oxford Univ. Press, 1989 (trad. fr. C. Chevalley, Paris, Vrin, 1995). - WALLISER B., Systèmes et modèles. Introduction critique à fanalvse des systèmes; Paris, Le Seuil, 1977.

- Coll. : Article « Modèle » de l'Encyclopédia Universalis. --- « La Sémantique du terme modèle », La Sémantique dans les sciences, colloque de l'Académie internationale de philosophie des sciences, Paris. Beauchesne, 1978, p. 158-172.

Hourya SINACOEUR

Eléments de bibliographie

Conseil scientifique de l'ADIREM, *Modélisation,* IREM Paris 7, 2003.

APMEP, Bulletins verts n° 440 (mai juin 2002), n° 441 (sept-octobre 2002), n° 456 (janv-février 2005) et n° 458 (mai-juin 2005).

Péault H., *La division en formation initiale* in CONCERTUM : Dix ans de formation en mathématiques des professeurs des écoles, ARPEME, 2003.
Voir spécifiquement la situation didactique appelée *Concertum*.

Lecourt D., *Dictionnaire d'histoire et de philosophie des sciences, PUF, 1999.*

Modelling and Application in Mathematics Education, the 14th ICMI Study, Springer 2007.

DES ALBUMS NUMERIQUES : POUR QUELS APPRENTISSAGES EN FRANÇAIS ET EN MATHEMATIQUES ?

Annie CAMENISCH
Maître de Conférences Lettres, IUFM d'Alsace
EA 1339, Université Marc Bloch, Strasbourg
annie.camenisch@alsace.iufm.fr

Serge PETIT
Formateur en mathématiques, IUFM d'Alsace
EA 1339, Université Marc Bloch, Strasbourg
serge.petit@alsace.iufm.fr

Résumé
Les albums numériques, souvent appelés « albums à compter », se caractérisent par la présence explicite de nombres qui en constituent la thématique principale. Ils font partie d'une production abondante qui dépasse souvent le simple cadre documentaire par ses qualités littéraires ou plastiques. Leur utilisation en classe demeure parfois anecdotique et les apprentissages qui y sont liés semblent aller de soi.
Pourtant leur simplicité même recouvre une complexité tant au niveau du fonctionnement linguistique que des contenus mathématiques. En effet, il n'existe pas de modèle unique d'albums numériques mais des formes multiples intégrant des suites numériques croissantes ou décroissantes, des représentations des nombres ou même des calculs, accompagnés ou non d'un écrit. Cet écrit, parfois réduit à la seule mention du nombre, est constitué de groupes de mots, d'une phrase voire d'un court texte, dont la lecture peut contribuer à la compréhension des mathématiques sous-tendues par l'album.

L'atelier a mis en œuvre différents dispositifs didactiques permettant d'utiliser les albums numériques pour réaliser des apprentissages tant en français qu'en mathématiques. Il s'agit notamment de s'interroger sur la place des pratiques littéraires et sur les formes linguistiques récurrentes favorisant des apprentissages sur la langue écrite. On peut aussi se demander comment ces aspects littéraires et linguistiques, étroitement imbriqués aux notions mathématiques convoquées, peuvent constituer des obstacles ou des soutiens aux apprentissages mathématiques. Mais ce qui reste central à l'album numérique, à savoir ses aspects mathématiques, mis en scène par des auteurs de littérature de jeunesse non spécialistes de mathématiques, ne risque-t-il pas de poser des obstacles didactiques ? Cette dernière interrogation soulève la question des apprentissages mathématiques qui peuvent être abordés par l'intermédiaire de ces ouvrages.

I – DECOUVERTE DES ALBUMS

L'atelier commence par une lecture de l'album *Comptes tout ronds* d'Olivier Douzou. Cet album s'ouvre par un mystère lié à l'identification d'un rond accompagné par le nombre « un » écrit en chiffre et en lettres. Des hypothèses sont soulevées quant à l'identification de ce rond : certains y voient un œil, d'autres un œuf, d'autres encore ne peuvent nommer autre chose qu'un rond. Ce n'est qu'en poursuivant la lecture que l'on découvre que ces ronds figurent les narines et l'œil d'un crocodile puis les têtes d'oiseaux. Comme ils ne représentent pas les mêmes objets, ils nécessitent un recours à l'abstraction car on peut compter les « ronds » sans qu'ils renvoient à une même réalité. La chute « il ne faut jamais compter sur les crocodiles » éclaire de manière humoristique le sous-titre de l'album « Petit boulier à plumes ». L'histoire se perpétue sur la page de garde en fin d'album par l'arrivée d'un nouvel oiseau accompagné du nombre « onze », indiquant ainsi que la suite numérique se poursuit elle aussi.

Cette entrée en matière permet de découvrir un album de manière dynamique et de s'interroger à la fois sur les modalités de lecture de ces albums et sur les problématiques mathématiques qu'ils abordent.

I – 1 Des appréciations personnelles

Les stagiaires sont installés par ateliers de quatre autour d'une table où sont disposés quatre albums. Chaque stagiaire choisit un album et dispose d'une dizaine de minutes pour lire l'album, répondre à un questionnaire puis consulter les autres albums de sa table. Le questionnaire sur transparent interroge le stagiaire sur son appréciation argumentée de l'album. Les réponses sont déposées successivement sur le rétroprojecteur et la couverture de chaque album est montrée associée à son appréciation.

Les stagiaires ont ainsi été sensibles à l'histoire racontée, les albums étant appréciés selon leur originalité, leur simplicité ou leur clarté alors que l'absence ou la pauvreté de l'intrigue, voire l'absence de chute, ont généralement déplu. L'aspect comptine de certains albums a été plutôt perçu favorablement même si le manque de logique dans l'enchaînement des pages n'est pas toujours apprécié. Les stagiaires ont aussi évalué les albums en fonction de critères esthétiques : illustrations, couleurs ou graphisme. Enfin la justesse ou la pertinence du contenu mathématique a été estimé par certains alors que d'autres ont été gênés par des signes ambigus ou des confusions concernant les nombres ou les chiffres.

Chacun des stagiaires a donc été invité à exprimer sa réception personnelle et donc très subjective d'un album. Pour certains participants une orientation professionnelle a cependant déjà complété cette réception personnelle.

I – 2 Une première approche fondée sur la réception

Cette activité visait à faire percevoir la nécessité d'une première approche personnelle des albums, où la réception du lecteur, quelle qu'elle soit, est essentielle. L'album numérique n'est pas réduit alors à sa seule fonction mathématique mais se découvre comme toute œuvre littéraire, soit par une lecture magistrale mise en scène de manière appropriée, soit par une découverte individuelle silencieuse. Chacun doit pouvoir ensuite exprimer sa réception de l'album, manifestant ainsi son ressenti.

Il en découle que, dans les classes, l'album à compter sera présenté comme un livre parmi d'autres, lu d'abord dans l'intention de susciter le plaisir, celui de lire, d'écouter, de voir et de découvrir. Mettre ainsi les élèves en situation d'attente favorise une bonne régulation de la classe. Les élèves mis en appétit se révèlent plus motivés pour une exploitation mathématique si celle-ci n'est pas présentée d'emblée comme une tâche à réaliser. Il faut donc veiller à laisser des espaces de découverte et de lecture dans la classe, pour que les élèves puissent s'approprier le livre individuellement et surtout s'imprégner des illustrations dont la place est prépondérante dans ce type d'albums.

Il est également important de susciter les réactions libres des élèves, sans consigne fermée, leur permettant de confronter leurs réceptions et de réaliser des mises en réseaux avec d'autres ouvrages, soit du même auteur, soit avec les mêmes types de personnages, soit encore avec un même fonctionnement mathématique. En effet, cette réaction spontanée est souvent révélatrice de la compréhension des uns et des autres, et de leur sensibilité éventuelle à la structure mathématique.

Toute exploitation d'un album numérique gagne à être précédée par une phase de découverte subjective et personnelle qui doit susciter l'envie de lire afin que l'analyse soit une relecture qui puisse conduire vers de nouveaux apprentissages.

II – ANALYSE LITTERAIRE ET LINGUISTIQUE D'ALBUMS

Six albums (voir ci-dessous et en annexe) ont été redistribués aux groupes de stagiaires, de telle sorte que chacun découvre un nouvel album. L'analyse vise à confronter les intérêts tant littéraires que linguistiques de ces albums. Chaque groupe produit une affiche commentée par un rapporteur qui présente aussi l'album ainsi analysé.

Avant la mise en commun, l'album *Dix petites graines* de Ruth BROWN est lu aux stagiaires tant pour le plaisir que pour servir ultérieurement de support pour la structuration.

II – 1 Analyse des albums par les stagiaires

Ma Mamie, les nombres de Mimi

Ma Mamie est globalement rejeté par le groupe qui estime que « rien ne soutient l'intérêt » dans cette histoire où tout est prétexte à compter les objets de la vie courante.

Aspects littéraires	Aspects linguistiques
- histoire banale de la vie quotidienne - structures peu évolutives, statiques - pas de récit - seulement des questions / réponses - pas de chute	- questions posées de façons différentes - verbes introducteurs différents dans les incises - diversité de présentation des phrases - jeux de sons (Mamie/Mimi ; mon chou/choux)

Les bons comptes font les bons amis

Cet album qui présente une situation de partage entre des enfants revenant du marché avec fruits et confiseries n'est pas davantage apprécié, d'autant plus qu'il est, selon le groupe, truffé de stéréotypes sur le Maghreb.

Aspects littéraires	Aspects linguistiques
- aucun - pas d'intrigue - pas de personnage fort - pas de structure type - pas d'enjeu	- double langue : arabe, français

D'autres stagiaires connaissant cet album réagissent à cette présentation essentiellement négative. Un débat s'ouvre quant à l'intérêt de l'histoire (le partage) et la représentation du monde (un marché et des paysages du Maghreb illustré par des aquarelles). Certains stagiaires montrent qu'ils apprécient cet album et lui découvrent des intérêts culturels (ouverture sur le monde, lecture inversée de l'album, texte bilingue). Pour certains l'enjeu semble fort puisque les fruits et confiseries en nombre inégal doivent être partagés d'une manière équitable.

Petit 1

Les avis sont partagés pour *Petit 1* dont la structure est plus complexe que les précédents. Le groupe manifeste un désaccord concernant les valeurs véhiculées par l'album.

Aspects littéraires	Aspects linguistiques
- complémentarité texte/images - désuet (police et images) - valeurs véhiculées : exclusion, rejet - structure narrative variée : dialogues… - faux semblant d'une structure en randonnée - histoire construite avec une chute	- richesse du vocabulaire - rythmé - jeu sur les sons - décalage entre le niveau de langue et le thème

Dix petits doigts

Cet album est présenté avec un enthousiasme proportionnel à l'engouement qu'il a suscité dans le groupe.

Aspects littéraires	Aspects linguistiques
- mélange conte / comptine - utilisation d'expression à « double sens » (propre et figuré) - typographie	- utilisation du passé simple et de l'imparfait (rupture du récit) - vocabulaire élaboré

Grigri compte

Les aventures du petit chat Grigri ont été considérées comme plutôt riches par le groupe malgré une simplicité apparente de l'album.

Aspects littéraires	Aspects linguistiques
- implication du lecteur par un jeu de questions - arts visuels - champ lexical de la mer - promenade au bord de la mer (représentation)	- forme interrogative avec absence de verbe (au début) - complexification des phrases au fil de l'histoire

Stromboli

Cet album de Christian Voltz a plu par l'originalité de ses illustrations, caractéristiques de cet auteur, et son humour.

Aspects littéraires	Aspects linguistiques
- plusieurs points de vue dans la même histoire - plusieurs niveaux de lecture - éveille la curiosité (variété des caractères, humour, illustrations) - jeux avec les mots - différents registres (poétique, familier, slogans)	- verbes à l'impératif - phrases sans verbe - invention de nouveaux mots - vocabulaire varié et riche

Le groupe a estimé que dans cet album l'histoire primait sur l'aspect numérique qui semblait tout à fait mineur.

Dix petites graines

Une relecture analytique collective des *Dix petites graines* termine cette phase.

Les dix petites graines constituent les personnages de cette petite histoire qui suit implicitement le motif des *Dix petits nègres*. Un autre personnage reste hors champ, visible seulement par sa main qui plante la dernière graine. On peut supposer qu'il s'agit du jardinier.

La structure narrative est implicite, ponctuée par un texte laconique à chaque double page « Dix graines, une fourmi », « Neuf graines, un pigeon » et soulignée par des indices qui montrent que le temps s'écoule. En effet, les graines se transforment, elles germent, des racines poussent, ainsi que des feuilles… Leur nombre diminue en fonction des prédateurs ou d'accidents involontaires causés par des animaux ou des humains. L'album semble se terminer en boucle puisque le jardinier, en qui l'on reconnaît un enfant, récolte dix graines qu'il peut à nouveau planter.

L'histoire se double d'un intérêt scientifique indéniable qui nécessite une relecture orientée, intégrant notamment des apprentissages lexicaux. En effet, les graines changent non seulement de forme, mais aussi de nom. La graine devient pousse, plant, plante, bouton puis fleur.

Il est aussi nécessaire d'interpréter la relation entre les mots du texte. Si l'on comprend que chaque personnage nouveau réduit la quantité de « graines » plantées, la cause demande à être explicitée : pourquoi « Six pousses, une limace » ? pourquoi la limace n'est pas intéressée par une graine mais par une pousse ? Pourquoi « Une fleur, une abeille » ? Une observation plus fine de l'image « deux boutons, beaucoup trop de pucerons » permet aussi de s'interroger sur le rôle de la coccinelle qui protège le bouton épargné. Il est alors possible de faire produire oralement ou par écrit des phrases verbales justifiant le rapport entre les deux. Au niveau linguistique, outre l'apport de vocabulaire, on peut remarquer que les groupes nominaux présentent une alternance de pluriel et de singulier. La structure mathématique se justifie pleinement dans la mesure où elle participe à la compréhension du cycle de la vie : les graines diminuent parce qu'elles sont exposées à des prédateurs, la fleur en produit beaucoup pour qu'au moins une puisse à nouveau fleurir et perpétuer l'espèce.

Ainsi la compréhension de l'album, de son intérêt documentaire et mathématique se réalise par une analyse plus fine de son fonctionnement.

II – 2 Aspects littéraires

S'intéresser aux aspects littéraires d'un album consiste à y voir d'abord un univers fictionnel auquel on accède par l'intermédiaire d'une mise en mots et en images.

Des personnages

Mimi, Grigri, Petit 1 ou même les doigts de *Dix petits doigts* sont des personnages. Qu'ils soient des humains ou des animaux comme Mimi (singe) ou Grigri (chat), ils sont anthropomorphisés, portent des vêtements et se comportent comme des enfants. Les « petits doigts » sont de véritables petits personnages dessinés sur les doigts, avec un costume qui permet de les reconnaître et de les différencier. Ce costume préfigure d'ailleurs leur destin : le pirate s'embarque sur un atlas, le chef d'orchestre fait une fugue et le dernier à se retrouver « bien seul sur terre » est en costume d'Adam ! Petit 1 est un personnage plus abstrait par la forme, puisqu'il conserve la forme du chiffre 1, mais il possède un visage et surtout des sentiments exprimés tant par le dessin que par le texte.

La qualité littéraire d'un album numérique peut donc se mesurer à la manière dont les personnages sont représentés, avec leur personnalité, l'expression de leurs sentiments, leurs actions… Plus cette représentation sera fouillée, plus elle s'éloignera d'un stéréotype, par le dessin ou par le texte, plus ils seront attachants et plus les élèves pourront s'intéresser à leur existence.

Une trame narrative

Plutôt que d'énumérer des suites numériques de manière arbitraire, certain albums numériques mettent en place une véritable trame narrative, même de manière implicite comme dans *Dix petites graines.* En effet, il s'agit d'abord de raconter une histoire souvent marquée par une structure temporelle rendue visible par les illustrations ou le texte.

Des situations de la vie quotidienne peuvent être mises en scène, comme le retour du marché des enfants dans *Les bons comptes font les bons amis* ou la journée de Mimi chez sa Mamie. Dans ce dernier album, le déroulement de la journée est scandé par des événements familiers aux petits enfants représentés par les illustrations : courses, repas, bain, lecture, coucher.

Il peut aussi s'agir d'événements plus exceptionnels, qu'ils se déroulent dans un temps court comme la représentation au cirque de *Stromboli* ou sur une durée plus longue comme les vacances de Grigri au bord de la mer.

Les personnages peuvent aussi partir en quête de quelque chose. Petit 1 cherche un ami et va rencontrer différents personnages. Les petits doigts partent en voyage et vivent des aventures périlleuses. La structure temporelle y est rendue visible par la suite numérique, puisqu'elle permet aussi de repérer le temps qui s'écoule au nombre de personnages qui subsistent.

Tous les albums à compter ne comprennent pas de trame narrative, mais certains articulent entre eux une succession d'événements qui racontent une histoire mettant en scène les personnages. Cette histoire est souvent implicite et demande à être reconstituée grâce à une observation minutieuse des illustrations et du texte. Il est même possible de s'en inspirer pour inventer des histoires à partir de suites numériques sans liens apparents entre les différentes pages.

Une représentation du monde

Les albums numériques offrent tous une certaine représentation du monde, qu'il soit fictionnel ou ultra réaliste comme dans les ouvrages exclusivement documentaires. Plus cet univers sera éloigné du monde des enfants, plus il leur sera difficile de se le représenter et plus l'accompagnement de l'adulte sera nécessaire. La journée de Mimi sera plus accessible que le retour de marché des enfants dans *Les bons comptes font les bons amis*. Ainsi, cet album permet aussi de se familiariser avec un autre environnement, le Maghreb, représenté par les aquarelles.

Des valeurs éthiques et esthétiques

Dans une perspective citoyenne, on peut aussi voir dans *Les bons comptes font les bons amis* une certaine universalité dans la manière dont les enfants partagent les victuailles, en tenant compte des goûts de chacun. Tout album à prétention littéraire peut ainsi se lire à un niveau plus « symbolique » et entre dans un système de valeurs qui peuvent être « morales » ou éthiques. Ainsi les personnages enfants sont souvent représentés en situation d'apprentissage, comme Mimi ou Grigri qui apprennent à compter grâce à l'intercession d'un adulte. Petit 1 est en quête de l'amitié et se trouve rejeté des autres parce qu'il est différent.

Dans l'album de Douzou, la valeur morale de l'album « il ne faut jamais compter sur les crocodiles » est tournée en dérision et utilisée à des fins esthétiques, à la fois par le graphisme et par le jeu de mots auquel se livre l'auteur. Dans les *Dix petits doigts*, l'on tient moins à mettre en garde contre les dangers des voyages que de développer des jeux sur la langue à partir des doigts et des situations vécues par les personnages, ainsi qu'à les illustrer par le procédé du collage.

Des procédés littéraires en fonction d'effets visés

Les effets visés par le fonctionnement littéraire et l'illustration de l'album peuvent être variés : effet de suspense avec les *Dix petits doigts* qui disparaissent, effet de peur avec la menace du crocodile qui referme progressivement sa gueule sur les oiseaux dans *Comptes tout ronds* doublé d'un effet d'humour noir, effet d'humour aussi dans *Stromboli* avec les différents niveaux de lecture et les jeux de mots.

Parce qu'écrits par des auteurs de littérature de jeunesse, certains albums numériques possèdent donc de véritables qualités littéraires. Or ces caractéristiques des albums numériques restent souvent implicites et nécessitent une explicitation du texte et de l'image. Il importe donc de mettre en place des dispositifs qui permettent aux élèves, après une première lecture et réception personnelle, d'entrer dans cet univers fictionnel voire poétique et de se l'approprier afin d'être plus réceptifs aux apprentissages linguistiques ou mathématiques possibles.

II – 3 Aspects linguistiques

Sauf quelques albums sans texte, les albums numériques contiennent des aspects linguistiques puisqu'ils sont formés de mots, de groupes de mots, de phrases, voire de textes. Certains aspects linguistiques y sont particulièrement prégnants et répétitifs. Ces albums peuvent donc devenir, dès le cycle 1, des supports annexes pour une imprégnation de certains fonctionnements de la langue, voire, par l'intermédiaire de projets d'écriture adaptés, de véritables modules d'apprentissages.

Lexique

Certains albums utilisent, en situation, le lexique spécifique à un thème : la mer dans *Grigri compte*, les fruits dans *Les bons comptes font les bons amis*. L'album à compter peut donc s'intégrer dès le cycle 1 dans un projet nécessitant l'acquisition ou la consolidation d'un tel vocabulaire.

Les jeux de mots nombreux dans certains albums sont l'occasion de s'intéresser au sens propre et figuré d'expressions ou de mots : « compter sur quelqu'un » dans *Comptes tout ronds*, les « numéros » de *Stromboli* ou les divers « jeux de mains » dans *Dix petits doigts*.

Cela peut aussi être l'occasion d'une première rencontre avec certains termes mathématiques comme « la moitié de » dans *Les bons comptes font les bons amis*.

Autour du groupe nominal

Ce que l'on trouve de manière redondante dans la quasi-totalité des albums numériques ce sont des groupes nominaux composés d'un déterminant numéral et d'un nom. Ce type d'album permet donc de s'intéresser à la classe grammaticale du nom, qui correspond à ce qui est compté. Il s'agit dans le cas le plus fréquent de noms dits « concrets », puisque les objets ou personnages sont représentés dans les illustrations. Mais dans certains albums, comme dans *Comptes tout ronds* d'Olivier Douzou, les objets comptés ne sont pas homogènes, ce qui entraîne des difficultés à nommer ce que l'on compte, sauf à trouver un terme générique (« rond » dans le cas de cet album). Mais il s'agit aussi d'un premier pas vers l'abstraction, puisque le point commun concernant ce que l'on compte, c'est le nombre (1e abstraction) et le nom (2e abstraction).

On peut aussi s'intéresser au sens des déterminants numéraux, notamment « un » qui est homonyme de l'article indéfini. Ce double sens de « un », à la fois nombre en mathématiques et article en grammaire, qui n'existe pas dans d'autres langues comme l'anglais (« one » opposé à « a, an »), peut prêter à confusion, comme c'est le cas de Mimi, dans *Ma Mamie* :

> « Allons chercher un livre à lire », dit Mamie
> Mimi en choisir neuf.
> « Un seul », dit Mamie.

Un sens mathématique de « un » est ici mis en scène et renforcé par la locution « un seul ».

La notion de « nombre » renvoie elle aussi à deux sens spécifiques, l'un en orthographe grammaticale, l'autre en mathématiques. En grammaire, elle renvoie au concept de singulier et de pluriel. Or ces concepts utilisent des nombres en mathématiques, puisque le singulier renvoie, dans l'ensemble des entiers naturels, à 0 et 1 objet comptable, alors que le pluriel renvoie à tous les objets comptables à partir de 2 inclus. L'album numérique sensibilise donc au sens même du pluriel directement lié au déterminant numéral qui le précise en explicitant la quantité. Il devient aussi possible de sensibiliser aux marques écrites du pluriel du nom, en remarquant l'adjonction régulière de la lettre « s », et plus exceptionnellement du « x ». Ces marques peuvent être observées sans être formalisées dès le cycle 1, et elles conduiront tout naturellement à s'intéresser aux phénomènes d'accord dans le groupe nominal simple à partir du cycle 2.

Des phrases

Ces phénomènes d'accord peuvent aussi porter sur le verbe lorsque les nombres apparaissent dans des phrases au présent, comme dans *Grigri compte* :

> Au fond d'une flaque, cinq étoiles de mer s'ennuient.

Parfois, comme dans *Dix petits doigts*, les temps du passé sont employés :

> Le temps passait, et les dix petits doigts s'impatientaient : ils voulaient se prendre en main et accomplir leur destin…
> Dix petits doigts pour se dégourdir entreprirent un voyage.

Les phrases interrogatives se retrouvent aussi fréquemment dans des albums numériques par l'association d'une question, généralement introduite par « Combien », et de sa réponse comprenant un nombre. Ainsi dans *Grigri compte* :

> Combien de bateaux sur l'eau ?
> Deux !
> 2
> Combien de glaces ?
> Trois glaces !
> 3

Dans *Ma Mamie*, les formulations sont variées, plus ou moins soutenues, selon que ce soit Mimi ou Mamie qui parle :

> « Tu as combien de petits choux ? » demande Mimi.
> […]
> « Et combien ai-je de pots de miel ? »
> […]
> « Combien d'oranges ? »
> […]
> « Combien y a-t-il de fleurs dans le pot ? »

L'insistance portée, dès le cycle 1, sur ces questions et les réponses numériques qu'elles appellent constitue une première imprégnation au genre formel de l'énoncé de problème.

La structure souvent répétitive des albums numériques en fait un bon support pour une imprégnation, voire des apprentissages plus explicites, sur diverses notions linguistiques : lexique, accords, structures de phrases…

III – COMPARAISON MATHEMATIQUE D'ALBUMS

Les différents groupes ont été organisés autour d'un album *vedette*, différent de celui observé précédemment, album choisi non pour les aspects littéraires ou linguistiques qu'il peut présenter, mais pour une interrogation d'ordre mathématique qu'il peut susciter. Les autres albums de chaque groupe partageaient peu ou prou le même questionnement mathématique et devaient permettre de le mettre en relief. On peut ainsi dire que les albums ont été *mis en réseau* du point de vue de cette interrogation relevant soit des mathématiques, soit de son enseignement. La liste des albums de chaque groupe figure en annexe. Chaque groupe sera donc repéré dans ce qui suit par sa vedette.

Il a été demandé à chaque groupe de :

- comparer ces albums du point de vue mathématique et d'en extraire une et une seule interrogation relative à l'enseignement des mathématiques,

- compléter l'affiche précédente[1] en notant cette interrogation.

III – 1 Activité d'analyse des ouvrages par groupes

Groupe « Ma mamie »

Ce groupe a mis en évidence un problème relevant de l'apprentissage du comptage. *« Combien d'oranges ? » demande Mamie. « Une, deux, trois, quatre ! » compte Mimi* dans *Ma mamie*. Mais à d'autres pages, la situation est différente : *« Et combien ai-je de pots de miel ? » « Deux ! » s'écrie Mimi.* S'agit-il ici de mettre en relief le phénomène dit de *subitizing* (on ne compte pas pour dénombrer de petites quantités) ? Peut-être, peut-être pas puisque, plus avant dans l'album, on peut lire *Combien y a-t-il de*

[1] Qui portait sur les aspects littéraires et linguistiques.

fleurs dans le pot ? et que la réponse est immédiate *« Six fleurs, répond Mimi. Et une abeille ».* Le dénombrement mélange comptine inachevée (c'est-à-dire sans qu'il soit conclu au cardinal) et réponses globales sans procédure de dénombrement. Il rejoint de ce point de vue l'album *Une deux trois* qui produit les mêmes réponses *Ici il y a 3 mouches* ou *Miam ! Miam ! Miam ! 1, 2, 3 noisettes pour Papa.* On retrouve les mêmes expressions dès le titre dans *1, 2, 3 petits chats qui savaient compter jusqu'à 3* ou plus loin *Avant d'aller dormir, ils prenaient leur bain dans 1, 2, 3 petites bassines.* Dans tout cet ouvrage on ne rencontre jamais l'énoncé du cardinal de la collection dénombrée, mais simplement, en guise de dénombrement, le début de la comptine numérique. L'album *Maman !* fonctionne d'une tout autre manière. Dans chaque pièce d'une maison se cache l'écriture chiffrée d'un nombre. Ce nombre désigne la quantité de personnages se trouvant dans la pièce. Il n'y a pas ici de procédure de comptage. Cet ouvrage, qui tranche nettement avec les autres, était placé là pour mieux interroger les trois autres livres.

L'utilisation en classe de ce type d'album ne peut se faire qu'avec la conscience de cette particularité afin de ne pas contribuer à consolider les pratiques de certains élèves pour lesquels compter ne consiste qu'à égrainer la suite des noms de nombres sans conclure que le cardinal de la collection dénombrée est désigné par le dernier nom de nombre prononcé.

Groupe « Les bons comptes font les bons amis »

Une des particularités des albums de ce groupe est l'introduction du calcul par la structuration des collections à dénombrer. L'album *Un pour l'escargot, dix pour le crabe,* outre l'intérêt scientifique qu'il peut par ailleurs présenter, offre une occasion très riche de calcul. Le fil rouge de cet ouvrage est le dénombrement de pieds. Ce mot étant considéré ici comme un hyperonyme désignant tout à la fois le pied d'un enfant, la patte d'un chien, la pince d'un crabe, permet d'effectuer des calculs relativement complexes (niveau CP, CE1) toujours illustrés par des ensembles d'animaux (*70 pour sept crabes ou dix insectes et un crabe* etc.).

Ces albums numériques sont davantage des albums à calculer qu'à compter. Ils présentent un intérêt bien au-delà de l'école maternelle, notamment au CP et au CE1, lieux où les albums sont bien moins utilisés qu'en maternelle.

Groupe « Petit 1 »

L'approche du comptage dans les différents ouvrages de ce groupe semble relever de l'axiomatique de Peano. Chaque nombre est présenté comme le suivant d'un autre auquel on ajoute 1. L'ajout de ce 1 correspond à l'ajout d'un élément à une collection. Zéro n'est cependant pas toujours le nombre de départ.

Dans l'album *Petit 1*, l'introduction du processus de Peano commence au nombre 2 : « *A 2 on est bien, mais 2 plus 1 font 3, et à 3 on est trop.* ». Bien évidemment, on pourrait considérer que cet album n'introduit pas les nombres, qu'il ne fait qu'utiliser les nombres déjà connus des élèves et l'introduction de ceux-ci ne relèverait pas de l'axiomatique de Peano, on peut aussi le considérer comme un album donnant une autre vision des nombres, mettant alors en relief l'axiomatique de Peano : notamment la propriété que tout nombre est le suivant d'un autre (n), noté alors n + 1. Cet album tente une introduction du 10 : *« Tu ne sais donc pas que toi tout long et moi tout rond, côte à côte, on fait 10 »*. Écriture ? Nombre ? Dix ou deux ?

Alors est un album numérique original puisque le nombre d'objets à compter sur chaque double page n'est pas écrit, ni en lettres, ni en chiffres. Un personnage est dans une pièce, puis un deuxième s'ajoute,… puis un huitième… enfin, la pièce est vide… introduction du zéro ? Cet album, très particulier, permet de construire les nombres en suivant l'axiomatique de Peano et de donner sens au zéro.

Au fil des nombres commence par présenter le 0, sans que l'on puisse dire ce qu'il représente. Page suivante est présenté 0 + 1, sous la forme 0 + 1 = 1, puis le 2 par la formule 1 + 1 = 2 et ainsi de suite jusqu'à 9 + 1 = 10. La construction des nombres suit clairement l'approche de Peano. L'écriture du 10 n'est pas explicitée, pourquoi 1, pourquoi 0 ? Une deuxième partie de cet album *Compter au musée* met en œuvre l'écriture de certains nombres, et, quand cela est suggéré par des tableaux, sous forme d'écriture additive : *3 poissons dans l'eau : 1 + 2.*

La chevrette qui savait compter jusqu'à 10 commence à dénombrer à 1, puis, au fur et à mesure que l'histoire se déroule s'ajoutent des animaux tous différents. Il s'ajoutent un par un, et la chevrette compte « *…plus le cheval cinq, plus monsieur le cochon six…* » en langue naturelle, mobilisant le *plus* pour bien marquer l'ajout d'un animal à chaque fois et permettre de faire le lien avec le +. Ainsi, la construction de la suite des nombres suit ici aussi l'axiomatique de Peano. Le comptage s'arrête à dix. Il faut noter que dans cet album, aucun nombre n'est écrit en chiffres. Ce travail de traduction reste à faire en classe, sous la gouverne du maître.

Groupe « Grigri compte »

Le problème essentiel abordé dans ce groupe concerne l'introduction du 0 dans les phases de comptage et/ou d'écriture des nombres. Faut-il commencer à dénombrer à partir de zéro (comme dans l'album vedette), ce qui peut sembler peu naturel ? Faut-il aborder le zéro par des comptines descendantes ou par des résolutions de problèmes ? Faut-il au contraire, éviter de mentionner le zéro dans les premiers apprentissages et ne compter que de 1 à 9, au risque de le voir apparaître dans l'écriture 10, faisant apparaître cette écriture composée comme un seul signe, une entité, comme un nouveau chiffre, la traduction chiffrée du dix ? Au risque alors de ne pas donner de sens aux premiers apprentissages des groupements par dix et de leurs désignations, en distinguant clairement le 1 et le 0 ?

L'ouvrage *Un, deux, trois… dans l'arbre !* commence le dénombrement à 1. Il s'arrête à 10, sans construire ce nombre, sans présenter le 0. Il offre la particularité de bien distinguer deux domaines différents d'écriture des nombres. Les nombres sont écrits en chiffres quand ils sont déterminants numériques dans des groupes nominaux non insérés dans une phrase. Ils sont écrits en toutes lettres dans ces mêmes groupes nominaux faisant partie d'une phrase. Exemple : *9 vaches ensommeillées* et, pages suivantes *Neuf vaches ensommeillées s'endorment sur les branches.* On retrouve ce souci d'écrire les nombres en lettres dans les phrases dans le petit ouvrage *1, 2, 3, cachez tout la voilà.* Ouvrage qui présente le 0 en dernière page dans un *Petit historique* dont on pourrait mettre en doute la valeur scientifique. On retrouvera ce souci de précision dans la différence d'utilisation des écritures en lettres ou en chiffres des nombres dans l'album *Compter* qui, lui, commence par présenter le zéro : ***Zéro**, ce n'est pas rien, c'est un* *chiffre.* Un nombre ? Zéro n'est pas présenté comme permettant de désigner le cardinal de l'ensemble vide, simplement comme un *chiffre*, au contraire des autres nombres présentés dans l'ouvrage qui termine la présentation systématique des nombres au nombre 9, mais qui poursuit par une sorte de tableau synoptique dans lequel sont présentés les nombres de 10 à 21, sans structuration par dizaines, sans montrer ce que le 1 ou le 7 représentent dans une écriture comme 17 ou le 2 et le 1 dans 21.

L'ouvrage *Grigri compte* présente le zéro comme nombre permettant de désigner le cardinal d'une collection (*Combien de nuages dans le ciel ? Zéro !* puis, en dessous est écrit *0* en chiffre). Cet album se termine sur le 9. *En l'air, neuf mouettes crient : « Grigi sait compter ! Grigri sait compter ! ».* Est-ce à dire que compter jusqu'à 9 suffit pour savoir compter ?

Groupe « Dix petits doigts »

Ces albums se retrouvent autour du thème des suites décroissantes. On y décompte, dans certains cas jusqu'au zéro, mais sans que cette quantité soit exprimée mathématiquement par zéro, mais plutôt par des expressions du type *« il n'en resta plus aucun ».* Dans certains albums le décompte cesse à 1. L'activité de décomptage pourrait permettre d'accéder assez naturellement à 0, qui exprimerait mathématiquement ce qui reste, comme 1, 2 ou 3 l'expriment aux étapes précédentes. Dans ces albums, se pose souvent la question de la représentation des transformations. Cette question est délicate, comment en effet indiquer par un dessin que l'objet est encore là, mais qu'il va disparaître, pour ne plus être là dans le dessin suivant (double page suivante). Une représentation astucieuse est mise en oeuvre dans *Dix petites graines* (album numérique présentant un grand intérêt scientifique par ailleurs) : à la double page du huit, on découvre par exemple huit graines, dont une est accaparée par une souris. Les huit graines sont cependant présentes. Page suivante, celle du sept, sept pousses sont dessinées, une limace est en train de manger une d'elle, mais cette pousse est présente. La transformation n'est de cette manière pas représentée par un dessin, mais suggérée. Elle se déroule entre les deux pages, n'est pas présente explicitement dans le livre. Ceci donnera au maître une occasion de verbaliser cette transformation qui, à ce niveau, ne peut être convenablement explicitée que par les mots. Cet ouvrage montre la cyclicité de la vie… *une fleur, une abeille* puis *Dix graines*, suggérant alors un retour à la première page… Un tel ouvrage pourrait être un point de départ intéressant pour représenter les transformations dans les problèmes additifs que l'élève devra maîtriser en fin de cycle 2. Tous les albums n'ont pas cette capacité à représenter les transformations, à vouloir les dessiner, certains albums ne mettent pas en cohérence le nombre d'objets de la page et le nombre indiqué (un même objet étant représenté deux fois -une fois avant la transformation, une fois pendant la transformation-) comme dans *Les dix petits harengs.*

Groupe « Stromboli »

L'interrogation qui apparaît dans ces albums est le problème du 10, ou plutôt de sa construction. En fait, très rarement cette association de deux chiffres pour désigner un nouveau nombre n'est réellement construite. Dans certains cas, on peut noter des amorces de constructions relativement maladroites, dans d'autres, une absence totale de construction, 10, 11 pouvant apparaître alors comme de nouveaux symboles… avec tous les dangers inhérents à une telle approche.

Par exemple : dans l'album *Un et ses amis*, l'écriture 10 est présentée comme têtes de deux personnages dessinés en mettant en reliefs les dix doigts de leurs mains et de leurs pieds. En fait, si l'on compte les doigts des personnages, on en trouve vingt, de même pour les orteils… Cet album ne présente aucune construction du 10. A quoi renvoie le 1 ? A quoi renvoie le 0 ? La page suivante présente le 11. Les deux 1 sont toujours les têtes de deux personnages, mais cette fois-ci, ce sont onze médailles qui sont dessinées, sans possibilité d'en dénombrer d'autres. Mais toujours aucun sens donné à chacun de ces deux 1 qui écrivent le 11. L'ouvrage se termine par le 12, présenté comme le sont le 10 et le 11, douze représentant douze mois de l'année (on peut compter douze pages d'un éphéméride), mais aussi douze heures sur une horloge… quoi compter alors ?, ou douze œufs, effectivement comptables. On approche ici une autre dimension de l'utilisation des nombres : nombre pour repérer, pas pour compter (pour repérer le temps qui passe…). Album à repérer ? Album à compter ?

III – 2 Intérêts mathématiques

L'ensemble des groupes a, comme on pu le lire ci-dessus, relevé de nombreuses pistes à partir desquelles il est possible d'analyser les albums numériques du point de vue des mathématiques ou du point de vue de leur enseignement.

Une première classification pourrait être prise en compte : albums à compter et albums à calculer. Laissons de côté cette classification pour nous centrer davantage sur les contenus ou les pratiques d'enseignement. Seront abordés un ensemble de points qui peuvent sembler importants et qui pourraient interroger celui qui utilise les albums sur la ou les manière(s) de s'en servir en classes. L'atelier n'a pas pu aborder la manière d'utiliser les albums en classe, il n'en sera donc pas question dans ce compte-rendu.

La liste ci-dessous reprend de manière plus organisée et plus synthétique différents points d'ordre mathématique qui peuvent être observés dans les albums numériques. Le lecteur pourra formuler des interrogations d'ordre didactique correspondantes.

Représentations des nombres

- écriture en lettres
- écriture en chiffres
- représentations figurales
- natures des collections représentées
  - éléments identiques
  - éléments différents

Liste des noms de nombres et cardinal d'une collection

- afficher ou ne pas afficher clairement le cardinal d'une collection à la fin de la récitation de la comptine

Construction des nombres

- désignation des quantités par la comptine

- construction des nombres sur le mode « a un suivant » (Peano)

Comptines

- ascendantes (à partir de_ , jusqu'à _)
- descendantes (à partir de_ , jusqu'à _)

Utilité des nombres

- mesure d'ensembles (cardinaux)
- repérage (temps)

Le zéro

- présence, absence
- son sens (cardinal de l'ensemble vide, chiffre)
- en début de comptine
- apparition seulement à partir du 10
- approche comme solution de problèmes

Le 10

- construit
- apparaît comme un nouveau signe, comme un nouveau chiffre
- sens du 1, sens du 0 dans l'écriture du 10

Nombres supérieurs strictement à 10 (forme ab)

- sens du a, sens du b

Signes opératoires dans la construction des nombres

- présence ou absence du signe +

Calculs

- présence, absence
- nature

De nombreux albums numériques, par la richesse des interrogations qu'ils permettent de susciter du point de vue des mathématiques, du point de vue littéraire, du point de vue linguistique, constituent un excellent support au niveau de la formation des enseignants dans le domaine des premiers apprentissages numériques, linguistiques et littéraires.

Ils nécessitent la mise en place de dispositifs propres à mettre en valeurs ces différents aspects, l'exploitation plus mathématique de chacun étant fonction de son contenu et de l'objectif d'apprentissage visé, afin que celui-ci ne reste pas implicite.

ANNEXE : ALBUMS A COMPTER UTILISES

Groupe *« Ma Mamie »,* 1, 2, 3 ou comment approcher le cardinal

Ma Mamie (Les nombres de Mimi) d'Emma CHICHESTER CLARK, Kaléidoscope, 2002.

Une deux trois d'Ophélie TEXIER, L'école des loisirs (loulou et compagnie), 1998.

Maman ! de Mario RAMOS, L'école des loisirs (Pastel), 1999.

1, 2, 3 petits chats qui savaient compter jusqu'à 3 de Michel Van Zeveren, Pastel, 2004.

Groupe *« Grigri compte »,* éviter ou rencontrer le zéro

Grigri compte de Lionel KOECHLIN, Hatier, 1991.

Compter de Claude DELAFOSSE et Donald GRANT, Gallimard (Mes premières découvertes), 1993.

1, 2, 3 cachez tout, la voilà ! de Rascal, Pastel, 1991.

Un, deux, trois… dans l'arbre ! d'Anushka RAVISHANKAR, Sirish RAO, Durga BAI, Actes Sud Junior, 2006.

Groupe *« Stromboli »,* le problème du 10

Stromboli de Christian VOLTZ, Éditions du Rouergue, 1999.

Un et ses amis de Lionel KOECHLIN, Mango, 1995.

Comptes tout ronds d'Olivier DOUZOU, Éditions du Rouergue, 1997.

J'apprends à compter d'Elisabeth BALLART, Roser CAPDEVILA, Casterman, 1992.

Groupe *« Petit 1 »,* approche des nombres du type axiomatique de Peano

Petit 1 de Ann et Paul RAND, Circonflexe, 1992.

La Chevrette qui savait compter jusqu'à 10 d'Alf PROYSEN, L'école des loisirs, 1991.

Alors ? de Kitty Crowther, Pastel, 2005.

Au Fil des nombres de Laura ROSANO, Bilboquet (l'art en page), 2002.

Groupe *« Les bons comptes font les bons amis »,* compter et calculer

Les bons comptes font les bons amis de Suzanne BUKIET et May ANGELI, Éditions de l'observatoire, 1987.

Un pour l'escargot, dix pour le crabe d'April Pulley SAYRE et Jeff SAYRE, Kaléidoscope, 2003.

Et si on comptait… Photographies de l'agence Magnum choisies par Marie HOUBLON, Tourbillon, 2003.

Le cahier des plus d'Agnès Rosse, Rue du monde, 2000.

Groupe *« Dix petits doigts »*, **suite décroissante : comment montrer la transformation ?**

Dix petits doigts de Didier MOUNIE et Anne LETUFFE, Le Rouergue, 2002.

Dix petites graines de Ruth BROWN, Gallimard jeunesse, 2001.

Dix petits amis déménagent de Mitsumasa ANNO, L'école des loisirs, 1982.

Les dix petits harengs de Wolf ERLBRUCH, La joie de Lire, 1997.

BIBLIOGRAPHIE

VALENTIN D. (1992-1993) Livres à compter, *Grand N*, **52**.

EYSSERIC P. (2001) Albums, contes et mathématiques, in *Actes du XXVII^{e} colloque COPIRELEM, Chamonix.*

CAMENISCH A. & PETIT S. (2007) Des albums à compter pour apprendre à compter et à développer la maîtrise de la langue, *Bulletin APMEP*, **471**, 574-580.

CAMENISCH A. (2007) Les livres à compter au cœur du langage, *Éducation Enfantine*, **6**, 15.

CAMENISCH A. & PETIT S. (2007) Produire un album à compter, *Éducation Enfantine*, **6**, 62-64.

ÉLEMENTS POUR LA FORMATION INITIALE DES PROFESSEURS D'ECOLE À PARTIR DE L'ALGORITHME DE KAPREKAR

Jean-Claude Rauscher
Maître de conférences, IUFM d'Alsace
DIDIREM Paris 7
Jc.Rauscher@wanadoo.fr

Résumé
L'algorithme de D.R. Kaprekar, mathématicien indien de Devlali, publié en 1949 peut être le support d'une aventure, riche d'étonnements et de réflexions mathématiques. Dans le cadre de cet atelier, les participants ont vécu cette aventure qui donne lieu à des démarches d'observations, d'expérimentations, de communications et de validations tant au niveau de formateurs que d'étudiants et d'élèves de cycle trois, de collège et de lycée. Parallèlement, les apports de ce support dans le cadre de la formation initiale de futurs professeurs ont été discutés et mis en lumière : présentation et mise en œuvre de démarches d'enseignement des mathématiques (Brousseau 1972), repérage des finalités de l'enseignement des mathématiques (G. Vergnaud, 1987), réactualisation des connaissances de la numération, repérage de l'importance de la prise en compte de différents registres d'écriture en mathématique (R. Duval, 1995), prise de conscience de modalités de pensée chez les élèves (C. De Block-Docq, 1994).

I – L'ALGORITHME DE KAPREKAR ET LA QUESTION DE SON UTILISATION

Les travaux du mathématicien autodidacte D.R. Kaprekar sur les nombres entiers, relayés par Martin Gardner, continuent d'une part à questionner mathématiciens et informaticiens et d'autre part donnent des supports d'activités pour les enseignants en mathématique. Il en est ainsi de l'algorithme dit de Kaprekar publié en 1949 qui consiste à choisir un nombre entier *n* écrit généralement en base 10 et de former le plus grand et le plus petit nombre à l'aide des chiffres de *n*. Au nombre *n* on associe ensuite la différence *K(n)* de ces deux nombres et on recommence le processus avec les chiffres de *K(n)*. Cet algorithme génère des phénomènes remarquables. Ils sont parfois présentés dans le cadre de mathématiques dites récréatives. Les questions qu'ils suscitent servent aussi de supports pour des activités d'apprentissages en classe. Comme exemple, citons la proposition de Gérard Chauvat (1980), qui s'appuie sur l'algorithme pour développer des activités en « Arithmétique élémentaire en classe de 5ème » utilisant la notion de classes d'équivalence. L'arithmétique ayant retrouvé une place explicite dans les classes de lycée, on les trouve aussi évoqué dans des manuels scolaires de terminale S. Pour ma part j'ai rencontré cet algorithme à partir d'une idée « d'activité » du manuel de 6ème de l'IREM de Strasbourg (1986). C'est à partir de là que j'ai élaboré et mis à l'épreuve des séquences d'enseignement comportant pour les élèves de collège des phases d'observations, de conjectures d'expérimentations et de preuves. Par la suite, j'ai utilisé ce travail comme support de formation en PE et PLC.

La motivation des participants à cet atelier était double. Pour certains, qui avaient déjà entendu parlé de cet algorithme sans le connaître précisément, il s'agissait de l'appliquer effectivement. Pour tous ensuite, il s'agissait de savoir ce qui est possible de faire avec cet algorithme dans le cadre de classes de cycle 3 ou de collège et dans le cadre de la formation PE ou PLC. Bien entendu, l'intérêt est de dépasser le côté simplement spectaculaire ou récréatif des phénomènes qu'il génère. C'est dans cette perspective que j'ai conçu un déroulement pour l'atelier qui permettait dans un premier temps de découvrir ce support puis de l'interroger comme support de formation, avec l'éclairage aussi de mes expériences dans ce domaine. Le déroulement de l'atelier sera décrit dans la partie II.

Voici les dimensions qui seront abordés ensuite dans le compte rendu.

À un premier degré, les activités qui s'appuient sur l'algorithme de Kaprekar provoquent chez les élèves et les étudiants des démarches d'observations, d'expérimentations, de communications et de validations (G. Brousseau, 1972) dans les domaines de la numération. J'ai eu maintes fois l'occasion de le vivre avec des élèves de début de collège et par la suite avec des étudiants se destinant à l'enseignement (professorat d'école ou de lycée collège). Cette fois ci j'ai partagé cette aventure avec les formateurs de mathématiques en IUFM qui ont participé à cet atelier. Il sera rendu compte de leurs observations, de leurs surprises, de leurs questions.

A un deuxième degré, ces activités peuvent être analysées en termes d'apports dans les apprentissages pour les élèves de fin de cycle 3 et en collège. Habituellement, je mène cette analyse avec les futurs professeurs en formation initiale. Ici, nous l'avons menée entre collègues formateurs : que peuvent apprendre les élèves à partir de cette activité et quels scénarios d'enseignement en classe sont les plus susceptibles de favoriser ces apprentissages ? L'analyse se base sur ma propre expérience et a été enrichie par les apports des uns et des autres.

Enfin on peut analyser ces activités en termes d'apports pour la formation des futurs professeurs tant au point de vue des contenus mathématiques sous-jacents, question importante pour les étudiants préparant le concours qu'au point de vue, tout aussi important pour eux, de questions d'enseignement des mathématiques à l'école et au collège.

II – LE DEROULEMENT DE L'ATELIER

Pour commencer, les participants à l'atelier ont découvert et exploré le fonctionnement de l'algorithme de Kaprekar pour trois chiffres à partir du programme de calcul suivant :

1) *Choisir un nombre entier de trois chiffres.*
2) *A l'aide de ces trois chiffres, fabriquer le nombre entier le plus grand possible.*
3) *A l'aide de ces trois chiffres, fabriquer le nombre entier le plus petit possible.*
4) *Calculer la différence des nombres obtenus en 2) et 3)*

5) *Recommencer (à partir de l'instruction 2) avec le résultat obtenu. etc.*

Après cette exploration, l'analyse du support et de sa richesse a été amorcée individuellement par écrit autour des points suivants :

- *Réactions et questions par rapport au support et par rapport au comportement du groupe de participants*
- *Connaissances et compétences qu'il peut développer chez les élèves*
- *Connaissances et compétences qu'il peut développer chez les étudiants et PE*
- *Modalités de formation envisageables pour exploiter cette situation.*

Au cours de cet atelier, j'ai eu l'occasion de rapporter et de soumettre à analyse la façon dont pour ma part j'exploitais cette situation avec des élèves de collège puis ensuite avec des étudiants se destinant à l'enseignement. L'écrit individuel initial a permis à tout un chacun de se faire une idée a priori et de nourrir les présentations et discussions qui ont suivi.

III – QUE FAIRE AVEC CET ALGORITHME DANS LE CADRE DE L'ENSEIGNEMENT EN CYCLE 3 ET AU COLLEGE ?

III – 1 La découverte de l'algorithme et de ses effets par les participants

Au cours de l'atelier, dans cette phase de découverte de l'algorithme, la surprise a joué à plein, tout comme elle joue habituellement dans un groupe de cycle 3 ou de collège : l'étonnement se lit sur les visages lorsque l'on s'aperçoit que les suites se stabilisent sur 495, on consulte ses voisins pour confirmer cette observation, etc... Quelques réactions écrites à ce sujet :

- *« C'est étonnant ! Peut on généraliser à 2, 4, …, n chiffres ? Démonstration ? »*
- *« Etonnant ! Le résultat se stabilise. Pourquoi ? Est-ce qu'on peut généraliser ? »*
- *« C'est magique ! Ca marche toujours ? Comment ça marche ? »*

Mais on remarque dans ces réactions écrites, une attitude qui est spécifique de personnes qui ont pratiqué des mathématiques : il y a d'emblée un soucis de savoir si cette observation peut se généraliser et de chercher des explications ou de démontrer. On rencontre évidemment souvent ces réactions chez les étudiants ou en lycée. Les forums sur internet, les activités présentées dans des manuels de lycée, ou même de collège (Chauvat; 1980) à ce sujet, se focalisent exclusivement sur la résolution de ces questions mathématiques.

III – 2 Une piste sans issue ?

À partir de la constatation initiale, il s'agit pour un professeur de décider comment il va poursuivre l'activité. En l'occurrence, la question est de savoir si cette préoccupation de prouver cette stabilisation peut être partagée d'emblée avec les élèves. C'est ce que semblent penser a priori plusieurs participants de l'atelier qui trouvent globalement ce support « *très motivant pour les élèves* et *intéressant pour les inciter à poursuivre une recherche* ». Un autre participant précise : « *Il s'agit de trouver des règles, les vérifier, puis les prouver ; s'interroger sur le pourquoi ? comment ? toujours ?* ». Néanmoins cette perspective est relativisée par certains qui évoquent bien « *l'apparition d'un fait expérimental pour les élèves* » mais qui soulignent que *« le désir de preuve peut être suscité mais que tout dépend du rapport des élèves à l'expérience »*. Pour ma part, mes observations en classe me font adhérer complètement à cette prudence au niveau d'un cycle 3 ou du collège. En effet l'étonnement des élèves ne se transforme pas immédiatement en désir manifeste de comprendre le pourquoi de ce phénomène. Il y a un étonnement, certes, mais qui se rapporte plutôt à une certaine vision des mathématiques à cet âge : *« c'est magique ! »* ; une magie très vite intégrée : *« C'est comme çà ! »*. Van Hiele à propos d'expériences en géométrie relève que *« les enfants s'étonnent plus de ce qui ne va pas que de ce qui va »* (rapporté par DE BLOCK-DOCK C. ; 1994). En l'occurrence beaucoup d'élèves sont plus sensibles aux ruptures et contres exemples de la règle observée qu'à son accomplissement. Ces ruptures et contres exemples suscitent en effet des questionnements spontanés : *« Pourquoi ça ne marche pas dans ce cas là ? »*. Il s'agit là d'une attitude qui, prise en compte par l'enseignant, permet de faire avancer les élèves dans leurs pensées plus sûrement qu'une injonction à « démonter » la propriété. De plus, la situation proposée comporte un potentiel d'apprentissage concernant le calcul et la numération décimale qui risque d'être négligé si on focalise immédiatement et uniquement l'attention des élèves sur la démonstration. Ce potentiel fut d'emblée repéré par les participants à l'atelier : « *Cette situation est intéressante pour les élèves au niveau de la numération et du calcul (soustractions avec retenues) et pour comprendre ce qu'est un algorithme »;* ou encore : « *Elle met en jeu la comparaison de nombres entiers, la connaissance du système décimal de position, la désignation écrites d'entiers* ».

Mais comment alors, à la fois faire progresser les élèves dans le domaine mathématiques pour les faire sortir de la pensée magique du *« c'est comme çà ! »*, et, parallèlement réactiver leurs connaissances dans le domaine du calcul et de la numération décimale ? Au cours de l'atelier, cette question étant installée, j'ai eu l'occasion de présenter ma façon de faire dans les classes de sixième, où je commençais pratiquement l'année avec cette activité en poursuivant ces deux objectifs.

Le fait de faire vivre cette activité aux participants de l'atelier comme je la faisais vivre avec des élèves et comme je la fais vivre avec des étudiants, nous a permis par la suite de continuer l'analyse des apports de l'activité pour les élèves et pour les futurs professeurs.

III – 3 Une façon d'exploiter la richesse potentielle de la situation avec des élèves

III – 3.1 Le travail sur les nombres à trois chiffres

Dans une première phase de travail qui peut s'étaler sur plusieurs séances, je demande aux élèves de m'annoncer les suites obtenues et les copie telles quelles au tableau. De cette façon, on obtient un corpus que l'on peut soumettre à l'observation de tous les élèves de la classe. En effet, outre la surprise initiale, il y a bien d'autres régularités à remarquer.

Remarque : la particularité des cas où on prend des nombres à trois chiffres identiques avait été évoquée préalablement par les élèves (444-444 =0) et ces cas, en connaissance de cause, étaient écartés des corpus à explorer.

Voici un exemple de corpus (le nombre choisi au départ est encadré) :

$\boxed{547}$ *; 297 ; 693 ; 594 ;495*
$\boxed{962}$ *; 693 ; 594 ; 495*
$\boxed{393}$ *; 614 ; 515 ; 396 ;594 ; 495*
$\boxed{666}$ *; 0*
$\boxed{765}$ *; 198 ; 792 ; 693 ; 594 ; 495*
$\boxed{409}$ *; 891 ; 693 ; 594 ; 495*
$\boxed{836}$ *; 495*
$\boxed{432}$ *; 198 ; 782 ; 594 ; 495*

Afin que chaque élève puisse avoir l'occasion et le temps de faire cette exploration, cette observation est sollicitée par écrit individuel : « Ecrivez toutes les remarques que vous faites en observant les suites obtenues ? ». Quelques remarques sont ensuite transcrites au tableau. Le travail de la classe porte ensuite sur l'analyse de ces remarques.

L'attention est en particulier portée sur leurs formulations. Les nuances à propos de remarques a priori identiques permettent en effet d'expliciter quelques savoirs en jeu. Par exemple, la comparaison des trois remarques suivantes permettent de revenir sur le vocabulaire utilisé pour signaler la position des chiffres dans l'écriture d'un nombre et aussi sur la différence entre chiffre et nombre :

- *« Au milieu, il y a toujours un 9 »*
- *« Le chiffre du milieu est toujours un 9 »*
- *« Le chiffre des dizaines est 9 »*
- *« Le nombre des dizaines est 9 »*
- *« Dans la suite des nombres, le chiffre des centaines baisse d'une unité chaque fois »*

De même :

- *« Quand on additionne le premier et le dernier chiffre on obtient toujours 9 »*
- *« Quand on additionne le chiffre des centaines et le chiffre des unités on obtient 9 »*

Le mot *« toujours »* qui apparaît fréquemment dans les observations est intéressant, tout comme son absence. Des élèves mettront ce mot ou la généralité des affirmations en

question en relevant des contres exemples. Ces contres exemples peuvent être de différentes natures :
- Certains de ces contres exemples, inciteront les élèves à vérifier spontanément les résultats des calculs. Par exemple dans les lignes 3 et 8 de l'exemple de corpus, on trouve des contres exemples qui correspondent à des erreurs de calculs (pour la ligne 3 : erreur dans la soustraction pour le rang des dizaines dans les deux premières étapes ; pour la ligne 8 : erreur dans l'élaboration du plus petit nombre possible à partir des chiffres utilisés).
- D'autres contres exemples donneront l'occasion aux élèves de prendre conscience que les propriétés qu'ils ont remarquées ne sont pas vraies sur tout le corpus (ligne 4) ou ne sont même pas vraies sur l'ensemble des nombres d'une suite.

Dans un cas comme dans l'autre, ces contres exemples font passer les observations exprimées par les élèves du statut d'observation locale au statut d'observation dont il faut étudier le domaine de validité. Le pas qui consiste ensuite à donner le statut de conjecture à vérifier aux observations émises est alors possible et est franchi par bon nombre d'élèves. En particulier, la remarque qui consiste à dire que *« le dernier nombre de la suite est toujours 495, sauf pour les nombres de trois chiffres identiques »* est alors mise en question, laissant la place à une étude exhaustive des cas, soit systématique (le travail est partagé dans la classe), soit par classe d'équivalence de nombres (nombres ayant les mêmes chiffres en considérant le plus grand et le plus petit).

Un tel travail peut clore la première phase de travail avec les élèves. Mais en fonction de l'avancement de la réflexion de la classe, on peut demander aux élèves de chercher une explication au fait que le chiffre des dizaines des différences calculées est 9 par examen attentif des soustractions posées, explication que certains formulent plus ou moins complètement. C'est une occasion de revisiter l'algorithme de la soustraction posée : quand on fabrique le plus grand nombre et le plus petit, on a toujours le même chiffre pour la colonne des dizaines, pour la colonne des unités il y a toujours une retenue à reporter sur la colonne des dizaines puisqu'on enlève un nombre à un nombre plus petit. Il s'agit là d'une première preuve qui ne consiste pas à faire une étude exhaustive des cas. Un coin du voile de la magie de l'algorithme commence à se lever…

III – 3.2 « Un drôle de truc » et le travail avec les nombres à deux chiffres

La deuxième phase de travail qui pourra occuper plusieurs séances aussi, est amorcée à la fin de la première phase par l'installation d'une question que s'approprie avec curiosité les élèves. En effet lorsque je demande à un élève de m'annoncer le chiffre choisi, je lui annonce quasi immédiatement la suite des nombres qu'il a obtenu par application de l'algorithme de Kaprekar. Les élèves sont étonnés : *« Mais comment vous faites si vite, Monsieur ? Vous devez avoir un truc ! »* Je leur dis qu'à la place du programme de calcul initial, j'utilise un autre programme, plus facile que je leur demande de trouver. Ils entament alors une recherche et les idées, souvent astucieuses, ne manquent pas. Mais en général leurs propositions ne marchent que sur une suite ou parfois même sur une partie seulement de la suite. Par exemple ils proposent de mettre 9 au milieu et d'ajouter 1 au chiffre des centaines et de retrancher 1 au chiffre des unités. Ces échecs leur permettent de prendre conscience qu'il s'agit de trouver « *un programme qui marche à tous les coups !* » Mais ce n'est pas chose aisée ! C'est pourquoi la suite du travail consistera à reprendre cette question pour l'algorithme de

Kaprekar avec des nombres à deux chiffres. Le travail à ce sujet passe d'abord par les mêmes étapes que pour l'algorithme appliqué aux nombres à trois chiffres.

1ère étape : programme de calcul appliqué à plusieurs exemples.

Il s'agit d'une phase de travail individuel. Très vite les élèves remarquent que le nombre clé qui apparaît ici est le nombre 9 auquel on aboutit si l'on ne choisit pas un nombre de deux chiffres identiques. Mais ce résultat pose problème et laisse les élèves perplexes : la question est de savoir que faire lorsqu'un résultat de soustraction ne comporte qu'un seul chiffre, en l'occurrence 9. Certains élèves demandent ce qu'il faut faire dans ce cas. Il y a une décision à prendre ! Je ne réponds pas mais renvoie à différentes décisions possibles adoptées implicitement par d'autres élèves. Certains considèrent en fait que c'est fini puisqu'on n'est pas dans les conditions de réaliser l'étape suivante. D'autres calculent 9-9 et leur suite finit par 0. Certains considèrent qu'ils ont deux chiffres 0 et 9 et continuent l'algorithme en calculant 90-9=81. Ce sont les plus nombreux car ils sont focalisés sur le résultat de la soustraction posée qui leur donne comme résultat 09. Ils sont attentifs aux chiffres obtenus et non pas à l'aspect « nombre » du résultat. A la fin ils retombent sur 09 et comprennent qu'ils sont sur une boucle. Mais en fait, au-delà de ces différentes positions possibles, aucun élève n'adopte spontanément l'attitude d'explorer ce qui se passe suite à chacune des décisions possibles. En fait une telle attitude qui serait celle d'un chercheur en mathématique qui explore les limites de la formulation initiale de l'algorithme n'apparaît pas spontanément chez les élèves. C'est une synthèse collective explicitant toutes ces possibilités qui permet en fait de leur montrer qu'une telle liberté d'exploration est possible en mathématiques. Cette synthèse permet aussi de clore le débat et de prendre une décision collective qui est de considérer qu'on notera les suites jusqu'à ce qu'on obtienne 9.

2ème étape : récolte d'un corpus et analyse.

Ici aussi ne figurent pas de cas où on prend des nombres constitués de deux chiffres identiques.

Voici un exemple de corpus et les remarques qu'il suscite chez les élèves :

49 ; 45 ; 9
67 ; 9
90 ; 81 ; 63 ; 27 ; 45 ; 9
28 ; 54 ; 9
62 ; 36 ; 27 ; 45 ; 9
86 ; 18 ; 63 ; 27 ; 45 ; 9
19 ; 72 ; 45 ; 9
73 ; 36 ; 27 ; 45 ; 9

Remarques à propos de ces suites :

- *« Elles finissent toutes par 9 »*
- *« Ce sont des nombres de la table de 9 »*
- *« La somme des chiffres des nombres est 9 »*
- *« Ce sont des multiples de 9 »*

On peut remarquer des enjeux d'apprentissages semblables à ceux qui apparaissent lorsqu'on applique l'algorithme aux nombres à trois chiffres. En particulier la sensibilisation au problème de la formulation des remarques et à la généralisation des observations réalisées est à nouveau envisageable et une étude exhaustive des cas peut confirmer les observations. Néanmoins les élèves ont ici l'occasion de travailler et d'approfondir plus particulièrement leurs connaissances sur des nombres plus familiers, nombres à deux chiffres, multiples de 9 etc.

3ème étape : recherche d'un programme plus facile pour calculer la suite des nombres.

La situation avec les nombres à deux chiffres est encore mise à profit pour instiller à nouveau l'idée qu'un programme plus facile que le programme initial existe. Pour cela je montre à nouveau que je peux réciter la suite des nombres obtenus à partir du nombre initial choisi par les élèves et ceci quasi instantanément. Dans cette phase, j'invite les élèves à chercher le procédé qui permet de trouver la suite très rapidement sans recourir au programme initial. Les élèves tâtonnent et proposent des procédés qui sont discutés par la classe. Très souvent, ils donnent à nouveau des procédés qui ne sont valables que sur une partie d'une suite ou seulement sur certaines suites. Ils trouvent plus difficilement un procédé qui s'applique de façon générale. En fait, ils cherchent surtout des procédés basés sur l'obtention séparée de chaque chiffre des nombres de la suite. Certains de ces procédés sont valables. Comme par exemple :

- *pour trouver le premier chiffre (celui des dizaines), je calcule la différence des deux chiffres du nombre initial et je diminue le résultat de 1 ;*
- *pour trouver le deuxième chiffre (celui des unités), je calcule la différence de 9 et du premier chiffre.*

Plus rarement, ils cherchent des procédés qui permettent de trouver globalement le nombre de la suite. En fait, il arrive souvent que la recherche piétine. Pour débloquer la situation, on peut, sans donner la solution, rappeler que les nombres obtenus dans les suites sont des multiples de 9 et demander de repérer quels sont les multiples de 9 correspondants aux différents éléments d'une suite. Par exemple pour la suite issue de 53, à savoir 18, 63, 27, 45 et 9, on repère : 18=**2**x9, 63=**7**x9, 27=**3**x9, 45=**5**x9 et 9=**1**x9. Une fois que ce repérage figure au tableau, les élèves trouvent assez aisément le procédé. On leur demande de le rédiger sous forme de programme de calcul. En voici un exemple :

- *calculer la différence des deux chiffres du nombre initial ;*
- *multiplier cette différence par 9.*

Se pose alors la question de la validation de ces procédés. Les élèves auraient tendance à continuer à les entériner sans discussion. On peut alors leur rappeler que certains des procédés proposés précédemment ne se sont révélés que partiellement valables. Pour continuer le travail avec les élèves, la nécessité d'une validation étant partagée, le professeur peut alors envisager trois possibilités.

La première, non satisfaisante, est de dire qu'ils sont validés par des outils mathématiques qui ne sont pas encore à leur portée.

La deuxième, en revanche est à la portée de tous les élèves. Comme il y a un nombre raisonnable de cas à envisager (il y en a 82), une vérification exhaustive est à nouveau possible. La détermination des cas à envisager est déjà une tâche intéressante pour les élèves. Le travail peut ensuite être partagé dans la classe.

La troisième possibilité est de faire chercher aux élèves des preuves autres que des vérifications exhaustives. Nous entrons ici dans des démarches explicatives qui continuent à dévoiler les mystères de l'algorithme de Kaprekar. Mais ces démarches ne sont pas à la portée de l'ensemble des élèves et demande prudence de la part du professeur. Mais très tôt néanmoins, on peut observer quelques propositions pertinentes, comme celle que nous allons maintenant évoquer à propos d'un algorithme qu'on trouve et qu'on justifie en se centrant sur l'algorithme de la soustraction posée à partir d'un exemple numérique précis comme ici à propos de 72-27 :

$$\begin{array}{rcc} & 7 & {}^{1}2 \\ - & {}_{1}2 & 7 \\ \hline & 7-1-2 & 2+10-7 \end{array}$$

Tout comme on a pu montrer que dans le cas de l'algorithme appliqué aux nombres à trois chiffres, le chiffre des dizaines est toujours 9, on peut accéder ici à une explication en prenant conscience d'invariants en jeu dans la soustraction posée. En effet, quels que soient les exemples envisagés, la nécessité d'augmenter le chiffre des unités du nombre le plus grand d'une dizaine et de répercuter ce fait sur le chiffre des dizaines du nombre le plus petit en l'augmentant de 1 (qui représente une dizaine) se retrouve dans tous les cas à cause des contraintes fixées par l'algorithme de Kaprekar initial. Chaque fois en effet, puisque pour obtenir le nombre le plus grand, on relègue nécessairement le chiffre le plus petit au rang des unités et pour avoir le nombre le plus petit on relègue nécessairement le chiffre le plus grand au rang des unités. Il s'agit alors de traduire les effets de ces constatations sur l'algorithme de la soustraction posée en un programme de calcul qui est ici :

- *pour trouver le chiffre des unités, j'ajoute 10 au plus petit des chiffres du nombre initial et je calcule la différence du résultat obtenu avec le plus grand des deux chiffres du nombre initial ;*
- *pour trouver le chiffre des dizaines, je calcule la différence des deux chiffres du nombre initial et je diminue le résultat de 1.*

L'aventure avec des élèves de cycle 3 ou de début de collège peut s'arrêter ici, après être néanmoins revenu au cas de l'application de l'algorithme de Kaprekar aux nombres à trois chiffres et trouver alors de nouvelles remarques à faire ou de nouveaux programmes remplaçant l'algorithme initial (laissons au soin du lecteur cette petite recherche).

III – 3.3 Prolongements dans les classes ultérieures.

Le lecteur aura constaté que nous avons en fin de compte basculé dans une démarche de généralisation qui est au seuil de l'entrée dans le monde algébrique. De quoi reprendre et prolonger l'aventure avec des élèves plus avancés dans leur scolarité ! En effet, on peut aussi avoir l'idée de formaliser la situation en remplaçant les variables de la situation, à savoir les chiffres des nombres par des lettres, a et b par exemple. Cette formalisation permet de trouver la valeur de chacun des chiffres du nombre obtenu comme l'indique le schéma suivant :

$$\begin{array}{rcc} & a & {}^{1}b \\ - & {}_{1}b & a \\ \hline & a-1-b & b+10-a \end{array}$$

Remarque : dans cette formalisation nous supposons évidemment que $a>b$ et donc que ab est le nombre le plus grand possible obtenu à partir des chiffres *a et b*. Ceci ne se fait pas d'emblée par les élèves, et même beaucoup d'étudiants se demandent s'il ne faut pas considérer les deux cas *a>b et b>a* à partir du nombre initial *ab* choisi avant de comprendre qu'on aura considéré l'ensemble des cas en supposant a priori dans la formalisation algébrique de l'algorithme que *a>b*.

Malgré cette difficulté au départ, l'entrée dans ce monde algébrique fournit évidemment des outils puissants pour valider les programmes remplaçant l'algorithme initial ou pour trouver de nouveaux programmes. On se focalise ici sur l'algorithme de l'obtention séparée de chaque chiffre du nombre obtenu. Mais l'hétérogénéité des écritures utilisées pour formaliser la situation et la tentative de l'homogénéiser permettent d'envisager des issues intéressantes. En effet lorsqu'on écrit les nombres sous la forme *ab* et *ba* et le résultat obtenu sous la forme $\boxed{a-1-b}$ $\boxed{b+10-a}$, les lettres *a* et *b* ont des statuts différents. Dans le premier cas (*ab* et *ba*), elles désignent les chiffres des dizaines et des unités : il ne s'agit pas à proprement parler d'une écriture algébrique classique qui désignerait le produit des nombres *a* et *b*. Dans *(a-1-b)* et *(b+10-a)*, en revanche, elles désignent les nombres *a* et *b*. Lorsqu'on essaye de donner la valeur du nombre dont le chiffre des dizaines est $\boxed{a-1-b}$ et le chiffre des dizaines est $\boxed{b+10-a}$ en fonction des nombres *a* et *b*, on est amené à écrire qu'il s'agit de *10(a-1-b)+(b+10-a)*. Une réduction, puis une factorisation de cette expression algébrique aboutit alors à *9(a-b)* qui est une confirmation du programme qui se focalise non pas sur l'obtention de chaque chiffre du résultat de la soustraction mais sur le résultat comme nombre considéré globalement et non comme un assemblage de deux chiffres :

- *calculer la différence des deux chiffres du nombre initial ;*
- *multiplier cette différence par 9.*

De façon encore plus directe on a également une validation du procédé en transformant l'écriture *ab* désignant le nombre dont le chiffre des dizaines est *a* et le chiffre des unités *b*, en *10a + b* et de *ba* en *10b + a*. En effet, la différence s'écrit alors *(10a + b) – (10b + a)* qui donne *9(a-b)*.

Mais rappelons que nous sommes ici entrés dans un domaine où les démarches ne sont pas en général à la portée de jeunes élèves. L'expérience montre que dans les années ultérieures du collège et du lycée, de plus en plus d'élèves peuvent s'y engager. Il reste aux professeurs de déterminer les moments dans la scolarité de leurs élèves où cette aventure peut être tentée, aventure qui favorise et justifie l'entrée dans le monde algébrique.

Je finirai cette présentation des prolongements possibles en évoquant une autre dimension qui a été pensée par certains participants à l'atelier. Il s'agit d'une prise en compte des outils de calculs (calculettes) ou de programmations qui pourrait accompagner, étayer, développer, enrichir les activités présentées. Ce point bien prometteur n'a pas été développé davantage dans l'atelier mais pourrait faire l'objet d'une nouvelle réflexion à propos de tâches à proposer aux élèves.

IV APPORTS DANS LE CADRE DE LA FORMATION DE FUTURS PROFESSEURS

IV – 1 Une situation d'homologie

Les participants de l'atelier et moi-même ayant eu l'occasion de vivre les développements que nous venons de décrire, en se projetant à la fois comme élèves, comme futurs professeurs et étant formateurs, nous avons pu élaborer ensemble progressivement un bilan des apports de cette situation dans le cadre de la formation des futurs professeurs. En fait il s'agit d'une situation d'homologie (au sens d'Houdement-Kuzniak, 1993) qui permet d'initier les futurs professeurs :

- à certains enjeux d'apprentissages pour les élèves de cycle 3 ou de collège ou chez eux-mêmes (en particulier pour les étudiants n'ayant pas un cursus d'études scientifiques)
- aux finalités de l'enseignement des mathématiques dans le cadre de la scolarité obligatoire
- à la théorie des situations et à certains phénomènes didactiques qu'elle décrit.

Passons en revue ces différentes dimensions.

IV – 2 Prise de conscience d'enjeux et d'obstacles dans les apprentissages

Nous soulignons ici principalement ce qui surprend en général les étudiants se destinant au professorat.

Il s'agit d'abord de savoirs concernant le domaine numérique et aussi le domaine algébrique :

- les principes et les sens des algorithmes utilisés pour poser une soustraction. C'est l'occasion de rappeler et distinguer les différentes techniques opératoires : la technique par emprunt, la technique des écarts constants, l'addition à trou.
- le fait que le même chiffre peut revêtir des significations différentes. Ainsi dans la technique de l'écart constant le *1* et le *3* figurants dans la colonne des unités forment treize alors que la même combinaison de signes dans la colonne des dizaines signifie *1+3* (que les maîtres demandent d'ailleurs parfois d'écrire non pas $_{1}3$ mais 3_{1}). Les étudiants mesurent ainsi la complexité des algorithmes des calculs posés :

$$\begin{array}{rrr} & 7 & {}^{1}3 \\ - & {}_{1}3 & 7 \\ \hline & 3 & 6 \end{array}$$

- les appréhensions différentes possibles par les élèves (et par eux-mêmes) des nombres écrits, soit comme des assemblages de chiffres (*36* = un *3* et un *6*), soit comme des nombres *(trente-six)*
- la différence entre nombre et écriture des nombres à l'aide de chiffres
- les principes de la numération décimale : *36 = trente-six = 3 dizaines et 6 unités =* $3\times10 + 6$. Il s'agit souvent là d'une redécouverte
- de façon plus générale la coexistence en mathématiques de différents cadres (numériques, algébriques) et de différents registres d'écriture et de traitements et leurs puissances. C'est particulièrement à l'occasion des prolongements de l'activité vers des horizons algébriques que s'opèrent ces prises de conscience : par exemple lorsqu'on se permet d'écrire un nombre à deux chiffres sous la forme générale *ab* puis $10a+b$. Une question qui trouvera difficilement réponse dans un des registres d'écriture se traitera plus facilement lorsqu'on aura traduit le problème dans un

autre. Les étudiants sont ainsi initiés au geste qui consiste à choisir le registre pertinent ou aisé pour résoudre une question (Duval, 1995).

Il s'agit d'autre part d'une activité qui permet d'installer chez les étudiants des questions et aussi, comme on a pu le constater, des éléments de réponses, à propos du raisonnement en mathématique :

- qu'est ce qu'une preuve ? Y a-t-il différents niveaux acceptables de preuves ?
- par quoi peut-on être convaincu ? Différence entre conviction d'ordre probabiliste et certitude ?
- est-ce que « convaincre » est différent de « prouver » ?
- quel est le statut d'un exemple ? Peut-il être « générique » ? (repérage d'invariants dans les exemples numériques)
- y a-t-il différentes façons de prouver en mathématiques ? Y a-t-il des manières de prouver qui ne nécessitent pas forcément l'application de théorèmes établis (preuve par l'étude exhaustive des cas)
- quelle est la place des contres exemples dans les processus de raisonnement et dans le chemin vers la prise de conscience de la nécessité de dépasser une constatation pour lui donner un statut de conjecture ?

Cette activité permet d'autre part, de développer des compétences dépassant le cadre des mathématiques. Les étudiants peuvent prendre conscience que les disciplines ne sont pas isolées mais sont en relation. Dans les activités décrites, les élèves sont en effet très vite amenés à développer leur sens de l'observation par l'organisation des résultats, le repérage et le tri des informations en vue d'émettre des remarques. Nous sommes là dans le domaine du développement de compétences générales bien utiles au-delà du domaine mathématique. La mise au point de la formulation des remarques, la lecture et la compréhension du programme de calcul initial et par la suite la rédaction d'un nouveau programme remplaçant le précédant confortent la maîtrise de la langue et de ses différentes fonctions : description, programmation....

IV – 3 Prise de conscience des finalités de l'enseignement des mathématiques

La prise de conscience par les étudiants des enjeux et des obstacles dans les apprentissages est pour moi l'occasion de faire avec eux un point sur la question essentielle des finalités de l'enseignement des mathématiques dans le cadre de la scolarité obligatoire. Préalablement à toutes les activités autour de l'algorithme de Kaprekar, je demande aux étudiants d'écrire pourquoi enseigner les mathématiques. Dans une synthèse menée collectivement les propositions sont classées et je propose alors aussi comme outil de classement la proposition de G. Vergnaud (1987). Il distingue :

- la transmission d'un patrimoine scientifique (les connaissances en mathématiques en l'occurrence)
- le développement de compétences au service de la vie quotidienne, d'autres disciplines et de professions
- le développement de la conceptualisation du réel (pour ma part je parle de la pensée des individus).

On a là un repérage possible des missions de l'école : mission de transmission de l'héritage de l'humanité, mission d'insertion sociale, mission de développement des individus. Le fait que les étudiants aient pratiqué les activités liées à l'algorithme de Kaprekar me permet de leur demander de renseigner cette classification en se rapportant à ces activités. Ils ont ainsi l'occasion de formuler plus précisément des compétences et des savoirs en jeu dans cette situation et de les relier aux principales finalités. Voici quelques exemples : la notion d'écriture décimale des nombres apparaît comme un lègue des humains à transmettre ; l'accès à la notion de conjecture à prouver fait partie du développement de la pensée ; la capacité de concevoir et de formuler des programmes se rapporte aussi au développement de la maîtrise de la langue.

Avec ce travail sur les finalités, c'est aussi l'occasion de prendre conscience de la difficulté d'enseigner les mathématiques qui est analysée par Vergnaud, à savoir, comment relier les trois pôles ? Par exemple, à quel moment du développement de la pensée des élèves peut-on les initier à la numération, aux outils algébriques, à la géométrie déductive ?

IV – 4 Initiation à la théorie des situations didactiques.

Que ce soit pour des élèves ou des étudiants, l'algorithme de Kaprekar crée très rapidement un corpus très riche de résultats qui permet d'émettre des observations qui sont formulées, discutées et améliorées au sein de la classe ou du groupe. Ces observations peuvent se transformer en conjectures. Ces conjectures donnent lieu à des activités de validation. Les étudiants ont ainsi l'occasion de vivre et de pointer des situations d'actions, de formulations et de validations proposées par Guy Brousseau (1972) pour décrire les processus d'acquisition de connaissance en mathématique.

Dans ce cadre, une première sensibilisation à la notion de contrat didactique peut être réalisée à partir de l'analyse de certains évènements vécus dans le groupe ou rapportés par le formateur. Ainsi à partir de la tâche initiale qui est d'effectuer le programme de calcul proposé les attitudes des étudiants sont très différentes. Certains arrêtent leur activité dès le premier exemple lorsqu'ils tombent sur 495. D'autres continuent à prospecter et essayent pour d'autres nombres. Il en est de même pour les élèves dont certains s'arrêtent immédiatement, très satisfaits, parce qu'ils ont choisi au départ un nombre à trois chiffres identiques et s'écrient *: « j'ai fini le travail ! ».* L'algorithme de Kaprekar est effectivement un support intéressant pour inciter à poursuivre une recherche. Mais cela ne va pas de soi pour tous les individus. On peut aussi attirer l'attention sur des attitudes très différentes lorsque les élèves ou les étudiants tombent sur la question qui se pose à propos de l'algorithme appliqué aux nombres à deux chiffres : *« Que faire lorsqu'on tombe sur 9 ? ».* Certains en font uniquement une question de règle à préciser et d'autres un champ de prospection. A travers ces différents exemples vécus ou rapportés, il est ainsi possible de sensibiliser les étudiants à la différence entre les enjeux qu'attribuent les apprenants aux tâches qui leur sont proposées.

Il est aussi possible d'orienter à partir de là les étudiants qui en auraient le goût et qui plus tard pourraient rejoindre la cohorte des chercheurs en didactique des mathématiques, vers un approfondissement de leurs connaissances des travaux de G. Brousseau et en particulier vers son introduction à la théorie des situations didactiques où il s'appuie sur la situation dite de la *« Course à 20 »* pour analyser et modéliser les situations d'enseignement à partir des échanges entre les élèves, le professeur et le milieu (Brousseau, 1998, pp25-43).

V – CONCLUSION

Entre les extrêmes d'une utilisation assez réduite qui consisterait uniquement à en exhiber la curiosité et qui ne serait que l'occasion de s'exercer à la technique de la soustraction posée d'une part et la question non triviale du pourquoi de la stabilisation des suites d'autre part, l'algorithme de Kaprekar se révèle bien riche de potentialités d'apprentissages et de formation pour les futurs professeurs d'école. L'analyse de ces potentialités dans le cadre de l'atelier a permis d'en tracer les grandes lignes de force et aussi d'entrevoir quelques prolongements ou variantes qui nécessiteraient des réflexions et expérimentations supplémentaires : utilisation des outils de programmations ou de calculs et extension des observations aux bases autres que la base 10 par exemple.

De façon plus distanciée et pour se situer dans le thème du colloque, on peut constater qu'on a là un matériau qui permet de développer des démarches d'observations, d'expérimentations puis de validations mathématiques tant pour des élèves pour développer leurs apprentissages que pour la formation des professeurs. On peut remarquer qu'il ne s'agit pas ici d'une situation qui s'appuie sur « le réel » ou qui part d'un environnement quotidien extra scolaire des élèves : on est d'emblée sur le terrain mathématique, tout comme par exemple pour la « Course à 20 » (Brousseau, 1998). Mais on peut aussi remarquer que ce support permet de développer des compétences utiles en dehors de la discipline mathématique. Ces remarques sont donc une invitation à poursuivre et à compléter la réflexion initiée par le colloque : « Quelles mathématiques à l'Ecole ? ».

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BROUSSEAU G. (1972) Processus de mathématisation, *Bulletin APMEP* , **282**, 418-429.

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage, éditions, Grenoble.

CHAUVAT G. (1980) Arithmétique élémentaire en classe de cinquième, *Plot*, **12**, 10-13.

DE BLOCK-DOCK C. (1994) Modalités de la pensée mathématique d'élèves de douze ans devant des problèmes de pavage, *Educational Studies in Mathematics*, **27**, 165-189.

DUVAL R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Bern.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (1996) Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **16/3**, 289-322.

IREM DE STRASBOURG (1986) *Mathématiques 6ème*, Collection collèges dirigée par F.Mollet-Petit, Istra, Strasbourg.

VERGNAUD G. (1987) Réflexions sur les finalités de l'Enseignement des Mathématiques, *Gazette des mathématiciens* , **32**, 54-61.

LES ENJEUX D'UN ENSEIGNEMENT DU CALCUL MENTAL A L'ECOLE.

Nicolas DE KOCKER
PIUFM, IUFM de Lorraine
nicolas.dekocker@lorraine.iufm.fr

Annie GREWIS
PIUFM, IUFM d'Alsace
annie.grewis@wanadoo.fr

Claude MAURIN
PIUFM, IUFM d'Aix-Marseille
maurindesmaures@wanadoo.fr

Floriane Wozniak
Maître de conférences, IUFM de Lyon
LEPS-LIRDHIST Lyon 1[1]
floriane.wozniak@lyon.iufm.fr

Résumé
La nécessité – et l'obligation - d'enseigner le calcul mental à l'école a été réaffirmée dans les programmes scolaires mis en application à la rentrée 2002. Un document d'accompagnement lui est spécifiquement consacré. Plus récemment, la publication d'un rapport de l'Académie des Sciences, la parution d'une circulaire (n°2007-051 du 2-3-2007) et, plus généralement, de nombreux débats portant sur le calcul à l'école ont agité la communauté éducative. Le nouveau programme d'enseignement des mathématiques, qui doit entrer en application à la rentrée 2007, prévoit que « *le calcul mental doit faire l'objet d'une pratique quotidienne d'au moins 15 minutes* » aux cycles 2 et 3. Dans un tel contexte, la COPIRELEM s'est proposée de réfléchir aux enjeux de l'enseignement du calcul mental et à sa place dans la formation des professeurs des écoles. Afin d'alimenter la réflexion sur ce sujet d'actualité, deux questions ont été abordées dans l'atelier :

- Quelle formation en PE2 (ou en FC) sur l'enseignement du calcul mental ?

- Quels savoirs enseigner dans le domaine du calcul mental ?

[1] Laboratoire d'études du phénomène scientifique (LEPS)

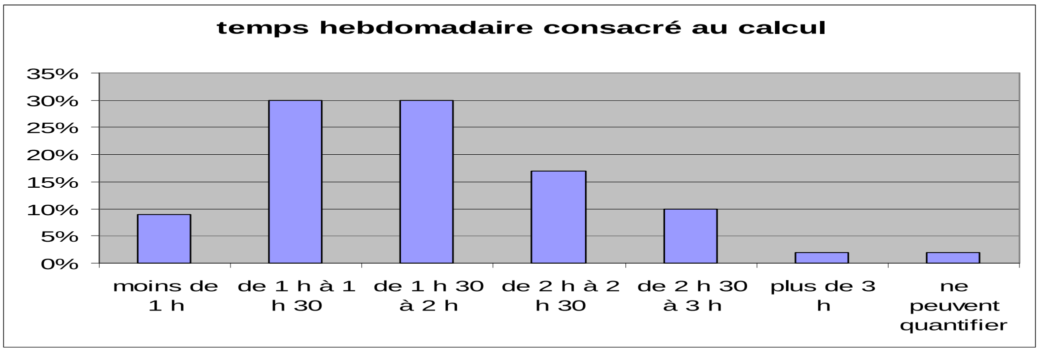
Lyon 1 : Institut de Recherche en Didactique et en Histoire des Sciences et des Techniques (LIRDHIST)

I – LE GROUPE DE TRAVAIL *CALCUL MENTAL* DE LA COPIRELEM

I – 1 Des constats partagés

Une récente étude de l'inspection générale avait pour objectif de « cerner la réalité de l'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire et d'apprécier la mise en place des programmes dans ce domaine ». Dans ce cadre, 120 classes du cycle des approfondissements ont été observées, des entretiens avec les professeurs des écoles menés et des cahiers d'élèves analysés. Le rapport qui a été rédigé, coordonné par Jean-Louis Durpaire, *L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire*[2], rend compte de cette étude.

Sans distinction des types de calcul figurant dans le programme de mathématiques, « *calcul mental*, *calcul instrumenté* et *calcul posé* », il est d'abord fait état du temps hebdomadaire que les professeurs déclarent consacrer au calcul en général. Nous reproduisons ci-dessous les résultats de cette enquête :



Prés de 85 % des professeurs déclarent donc consacrer entre 18 et 36 minutes par jour [3] aux activités de calcul en général. En mathématiques, les observations réalisées par l'inspection générale indiquent qu'« une séance sur trois a commencé par un temps de calcul mental alors que cet entraînement devrait être quotidien ». Ainsi, « l'absence de pratique régulière du calcul mental dans un trop grand nombre de classes » est jugée « préoccupante ».

L'inquiétude des auteurs de ce rapport semble par ailleurs confirmée par les résultats en calcul mental des élèves aux évaluations nationales. En effet, aux évaluations[4] de septembre 2006, par exemple, 48 % des élèves de CE2 interrogés effectuent correctement la soustraction « 40 moins 8 », ce score déjà faible tombe à moins de 38 % lorsqu'il s'agit de calculer « 45 moins 9 ». En 6e, si la situation s'améliore concernant le

[2] Rapport 2006-034 disponible sur l'Internet : http://media.education.gouv.fr/file/46/0/3460.pdf

[3] Sur la base de 4 jours et demi de classe.

[4] Le contenu de ces évaluations et leurs résultats sont disponibles sur l'Internet :http://evace26.education.gouv.fr/

calcul d'une différence (les trois quarts des élèves interrogés ont correctement calculé 53 – 8), le calcul de produits tels que 18×20 et 25×40 mettent les élèves en difficulté puisqu'ils sont respectivement 37 % et 36 % à réussir. On notera enfin aussi seulement 41 % de réussite au calcul « 60 divisé par 4 ».

I – 2 Le groupe de travail Calcul mental de la COPIRELEM[5]

Un document d'accompagnement des programmes en calcul mental[6] est disponible, il reste relativement méconnu des enseignants, et leur semble, en l'état, difficilement exploitable (malgré une bibliographie conséquente).. De fait, les pratiques de classe se limitent souvent à des séances stéréotypées du type *procédé la Martinière* et constituent des activités d'entraînement ou d'évaluation et non des séances de construction des connaissances.

C'est dans ce contexte que la COPIRELEM prépare actuellement une brochure sur l'enseignement du calcul mental à l'école élémentaire. Cette brochure a pour but d'accompagner les professeurs des écoles dans la prise en charge d'un enseignement du calcul mental. Plusieurs questions se posent alors sur les conditions facilitatrices de l'intégration de telles séances dans les pratiques des professeurs. Une réflexion, toujours en cours, sur son contenu précis nous a conduits à penser qu'il serait nécessaire de clarifier pour chaque niveau d'enseignement :

- les contenus mathématiques à élaborer, en explicitant les compétences à acquérir et les techniques (ou « règles ») que les élèves devraient connaître ;

- les organisations didactiques à mettre en place, en inventoriant les types de séances et les supports envisageables.

Des questions subsistent néanmoins, que nous avons souhaité partager avec les participants de l'atelier, notamment celles concernant l'institutionnalisation des « connaissances » ou « capacités ». Quelle place pour une trace écrite ? Comment pourrait-elle être recueillie, sur quel support, sous quelle forme ? Un « cahier de règles » pourrait-il être construit, avec quelle modalité, pour quel usage ?

Enfin, comment tisser des liens, qui nous paraissent essentiels, avec le calcul posé, le calcul sur les mesures de grandeurs, la résolution de problèmes, etc. ?

On trouve quelques éléments de réponse à ces questions dans le texte du programme d'enseignement des mathématiques paru en avril 2007. Ainsi, au cycle 2, est-il conseillé que « les maîtres alternent les moments d'entraînement et ceux qui permettent de concevoir des méthodes et de comparer leur efficacité » de sorte que « La mise en place de « points d'appui » constitue un objectif important ». Cette idée d'explorer le champ des possibles et d'en dégager la technique jugée la plus performante est d'ailleurs reprise pour le cycle 3 : « le maître prend le temps de comparer avec les élèves diverses

---

[5] Les membres de ce groupe, outre les auteurs de cet article, sont : Magali Hersant, Catherine Houdement, Michel Jaffrot, Gaby Le Poche, Pascale Masselot, Louis Roye, Patrick Wieruszewski, Claire Winder, .

6 Disponible sur l'Internet : http://www.cndp.fr/archivage/valid/68718/68718-10580-14939.pdf

méthodes, de voir lesquelles sont les plus efficaces et de les analyser en vue de leur **systématisation »**.

II – CONTENU DE L'ATELIER

II – 1 Une première approche du calcul mental : types de calcul et supports

François Boule définit le calcul mental comme « un calcul sur les nombres plutôt que sur les chiffres »[7] Plutôt que d'en donner une définition en compréhension, nous allons nous risquer à en proposer une en extension, en revisitant quelques idées communes. Il ne peut être réduit à « un calcul de tête » au regard des programmes (on peut utiliser l'écrit). Nous ne pouvons pas non plus parler de « calcul optimisé » puisque les procédures mises en œuvre pour obtenir un résultat dépendent des connaissances de chacun (il est donc optimisé pour soi). Dans ce contexte, où la part des savoirs personnels mobilisables est importante, il est difficile de parler de « procédures expertes ». Tout au plus, on peut viser à faire évoluer les stratégies utilisées vers plus de rapidité et de fiabilité. Il n'est pas, par ailleurs, uniquement question de calcul sur les nombres, hors de tout contexte de situation, puisqu'il peut concerner la résolution de problèmes.

Finalement nous définirons le calcul mental comme une expression qui permet d'obtenir un résultat par un calcul effectué de tête ou à l'aide de l'écrit, mais qui n'utilise pas systématiquement les algorithmes posés.

Dans le cadre limité de cet atelier, nous avons choisi, comme support de discussion, d'expliciter par des exemples deux types de calcul – le calcul réfléchi et le calcul automatisé – en fonction des moyens mis en œuvre pour les réaliser.

Nous reprenons ici les terminologies, parfois mal définies, utilisées dans les textes institutionnels. (Le calcul mental étant déterminé par les parties grisées)

[7] BOULE, F. *Performances et démarches de calcul mental au cycle 3*, Thèse, Presses Universitaires du Septentrion, 59654 Villeneuve d'Ascq, 1997

MOYEN	TYPE DE CALCUL Calcul réfléchi	TYPE DE CALCUL Calcul automatisé
Papier/ crayon	***Détailler par écrit les différentes étapes d'un calcul réfléchi ou d'un arbre à calcul*** ***ex : 35+17 = 30+5+10+7***	Effectuer un calcul posé en appliquant une technique opératoire connue.
« De tête »	***Effectuer un calcul de tête ex : 11 fois 15***	***Réciter les tables, avoir recours à des résultats mémorisés***
Calculatrice	Utiliser le calcul comme auxiliaire dans la conduite d'une procédure ex : trouver trois entiers consécutifs dont la somme est 72	Utiliser la calculette dans sa fonction classique d'outil de calcul.

Quelques remarques doivent cependant être faites. D'une part, nous avons fait le choix de ne pas aborder dans l'atelier la difficile question du calcul approché qui pourrait faire l'objet, à lui seul, d'un atelier complet. D'autre part, il ne s'agit pas, au travers de ce tableau, de proposer une typologie des types de calcul qui soit exhaustive masquant ainsi la complexité de la tâche « calculer ». En effet, il y a bien recours à une multiplicité de types de calcul pour effectuer un calcul donné. Ainsi, par exemple, le calcul réfléchi s'appuie nécessairement sur le calcul mémorisé : il ne peut y avoir de calcul réfléchi sans mise en œuvre de résultats mémorisés. Pour calculer 12×15, on pourra utiliser une technique de calcul réfléchi qui est le recours à la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition 10×15 + 2×15, puis utiliser les résultats mémorisés de chacun des produits 10×15 et 2×15 avant de les ajouter pour trouver le résultat 150 + 30 = 180. De la même façon, la mise en œuvre des techniques opératoires des opérations posées requiert à la fois du calcul réfléchi et du calcul automatisé. Enfin, le calcul réfléchi repose toujours sur des choix, il est donc nécessaire de développer des savoirs qui permettent de faire ces choix. Aussi, nous reprendrons à notre compte l'amusante formule d'Alain Descaves qui participait à cet atelier : le calcul mental doit être, dans le cadre du calcul réfléchi celui qui « *ne prend pas la tête* ».

II – 2 La question de la formation en PE2

Comme support à la réflexion sur la formation des professeurs des écoles à l'enseignement du calcul mental, nous avons proposé aux participants une organisation mathématique de la table de Pythagore en conformité avec les programmes d'enseignement des cycles 2 et 3.

Elle repose d'abord sur les faits numériques connus à l'issue du cycle 2, d'autre part sur les propriétés de la multiplication.

À l'issue du cycle 2, le résultat des multiplications par 2, 5 et 10 est connu. Ils sont représentés dans le tableau par « C2 » sur fond gris. Il reste donc 36 cases à remplir dans ce tableau lorsqu'on entre au cycle 3. La commutativité de la multiplication nous conduit à remarquer qu'il ne reste alors qu'à déterminer les 6 résultats sur la diagonale (cases notées D) et les 15 autres résultats notés *A* :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2		C2	C2	C2	C2	C2	C2	C2	C2	C2
3		C2	D	*A*	C2	*A*	*A*	*A*	*A*	C2
4		C2		D	C2	*A*	*A*	*A*	*A*	C2
5		C2	C2	C2	C2	C2	C2	C2	C2	C2
6		C2			C2	D	*A*	*A*	*A*	C2
7		C2			C2		D	*A*	*A*	C2
8		C2			C2			D	*A*	C2
9		C2			C2				D	C2
10		C2			C2					C2

Pour compléter la table, nous pouvons utiliser les quadruples ou les « double du double ». On peut ainsi remplir 12 cases supplémentaires représentées dans le tableau par « Q ». En utilisant alors des faits numériques connus et par « proximité » additive, on peut utiliser le fait que « multiplier par 3, c'est multiplier par 2 et ajouter une fois le terme ». Voilà 10 cases supplémentaires remplies, représentées par « T ». En utilisant le fait que « 6 est le double de 3 » ou que « multiplier par 6, c'est multiplier par 5 et ajouter une fois le terme », on peut remplir 8 nouvelles cases, représentées par « S ». Il reste alors 3 cases sur la diagonale et 6 cases pour lesquelles on peut utiliser la commutativité de la multiplication pour 3 d'entre elles.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2		C2	C2	C2	C2	C2	C2	C2	C2	C2
3		C2	T	Q	C2	T	T	T	T	C2
4		C2	Q	Q	C2	Q	Q	Q	Q	C2
5		C2	C2	C2	C2	C2	C2	C2	C2	C2
6		C2	T	Q	C2	S	S	S	S	C2
7		C2	T	Q	C2	S				C2
8		C2	T	Q	C2	S				C2
9		C2	T	Q	C2	S				C2
10		C2	T	Q	C2	S				C2

Une fois présentée cette organisation mathématique de la table de Pythagore nous avons demandé aux participants de concevoir une (ou plusieurs) séance(s) de formation initiale ou continue qui prendrait appui sur une telle organisation pour travailler sur l'enseignement du calcul mental à l'école. On trouvera en annexe les 7 affiches qui ont ainsi été produites.

III – DEBAT

Dans la deuxième partie de l'atelier, les débats entre les participants ont été riches, constructifs et respectueux des points de vue de chacun. Il est impossible de les retranscrire dans leur intégralité, mais quelques idées peuvent en être extraites.

III – 1 A propos de la table de Pythagore :

Elle ne se construit pas en une seule séance, la progression n'est pas linéaire, on n'écrit pas forcément les produits par 3 après la ligne des produits par 2. Il faut installer tout un environnement de faits numériques avant d'arriver à la table de Pythagore qui apparaît alors comme une organisation et une présentation de résultats préétablis.

La table est une structuration en dimension 2 de certains faits numériques et donc un outil utile, elle a aussi un statut social : elle dit qu'à un moment donné, dans la classe, un travail a été fait et des savoirs ont été construits.

Une fois construite la table pourrait presque être abandonnée, elle n'est pas un but en soi. Il faut la regarder comme un milieu au sens de Brousseau, se poser de nombreuses questions à son propos, chercher à la prolonger, la lire dans tous les sens…

Les organisateurs de l'atelier partagent la plupart de ces propositions, la table de Pythagore et l'organisation mathématique qui lui est associée dans la présentation de l'atelier n'avaient été choisies que comme point d'entrée d'une séance de formation en PE2 et non comme objet d'étude.

III – 2 A propos des points d'appui souhaitables :

Une grande prudence s'est fait jour autour de l'idée de règles. Le danger de scléroser le calcul réfléchi par une liste trop importante de règles à apprendre a été soulevé.

Il ne faut pas vouloir toujours tout reconstruire, il faut aussi mémoriser. La reconstruction de certains résultats ne doit être perçue que comme un moyen de secours en cas de défaillance de la mémoire.

Si on met trop de choses dans un cahier de règles on ne s'en sert plus. Si on note toutes les façons de faire on risque de noyer les élèves. C'est la quantité de calculs que les élèves font en 15 minutes qui importe davantage.

Il convient de déclencher des procédures de calcul sur de petits nombres pour ensuite, s'attarder davantage lorsque les calculs deviennent plus difficiles.

Faire du calcul réfléchi nécessite de faire des choix, si on veut permettre à l'élève de choisir il faut lui enseigner plusieurs procédures pour un même calcul.

La trace écrite à un moment donné est importante parce qu'elle donne du sens et peut rassurer certains élèves, mais il faut penser un cadre d'écrits évolutifs. Il y a des écrits transitoires et des écrits qui doivent rester. Tout le problème est de faire vivre ces écrits dans la classe.

BIBLIOGRAPHIE

BONNET, N. (2003). Multiplication en ZEP, in *Concertum tome 1*. ARPEME, 227-245.

BOULE, F. (1997). *Le calcul mental à l'école*. IREM de Bourgogne.

BOULE, F. (1998). Etapes du calcul mental. *Grand N*, 62,15-34, IREM de Grenoble. .

BOULE, F. (2002). Le calcul mental, constructeur et révélateur des représentations numériques à l'école, in *Nombres et calculs à l'école primaire*. IREM de Lille.

BUTLEN, D., PEZARD, M. (1992). Calcul mental et résolution de problèmes multiplicatifs : une expérimentation du CP au CM2. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 12(2/3), 319-368.

BUTLEN, D., PEZARD, M. (1999). Pratiques de calcul mental, production collective d'écrits mathématiques et résolution de problèmes numériques à l'EE et au collège, 97-123, in *Actes 26e colloque COPIRELEM Limoges*.

BUTLEN, D., PEZARD, M. (2000). Calcul mental et résolution de problèmes au début du collège. *Repères IREM* 41, 5-24

BUTLEN, D., PEZARD, M. (2003). Étapes intermédiaires dans le processus de conceptualisation en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 23(1), 41-79.

Clavié, C., Peltier, M.-L, Auber, P. (2005). Calcul mental au cycle 2 : Des activités pour un entraînement quotidien. Paris : Hatier

CLAVIE, C., PELTIER, M.-L. (2005). Calcul mental au cycle 3 : fiches photocopiables. Paris : Hatier.

LETHIELLEUX, C. (1992). *Le calcul mental au cycle des apprentissages fondamentaux (CP/CE1)*. Paris : Armand Colin, Pratiques Pédagogiques.

LETHIELLEUX, C. (1993). *Le calcul mental au cycle des approfondissements (CE2,CM1,CM2).* Paris : Armand Colin, Pratiques Pédagogiques.

MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE. (2005). Le calcul mental à l'école primaire. In *Document d'accompagnement des programmes de Mathématiques*. Editions SCEREN-CNDP, 32-43. Disponible sur l'Internet :
http://www.eduscol.education.fr/D0048/calcul_mental.pdf

ANNEXES

Voici les sept affiches – dont la forme a été conservée – produites par les participants à l'atelier.

Affiche 1

1) Appropriation des propriétés de la table de Pythagore par les PE2

- jeu de Pythagore

- jeu de coloriage (résultats apparus 1 fois, 2 fois, 3 fois, etc.)

Synthèse

- symétrie → commutativité
- passage d'une colonne à l'autre
  d'une ligne à l'autre
- différentes décompositions multiplicatives d'un nombre

2) Aides à la construction de la table pour les élèves (travail de recherche par groupes)

- connaissances au cycle 2 ? (le point à partir des programmes)
    - multiplication par 2, par 5, par 10
    - commutativité
- utilisation de ces connaissances pour compléter la table ?
    - multiples de 4
    - multiplication par 3
    - multiplication par 6 …
- quelles activités avec les élèves pour retrouver certains résultats ?

3) Construction par les PE2 d'une séquence (progression, activités, objectifs)

Affiche 2

Consigne

1. Vous ne connaissez que les tables de 2 et de 5. Quelles cases de la table de Pythagore pouvez-vous remplir ?

Quelles propriétés utilisez-vous pour compléter la table ?

2. En faisant les calculs les plus simples possibles et en utilisant les faits numériques précédemment construits, quelles cases pouvez-vous encore remplir ?

Explicitez vos calculs.

3. Est-ce que la démarche que vous avez utilisée est transposable avec les élèves ?

Sous quelles conditions ?

Comment la transformer pour y parvenir ?

Affiche 3

1) Remplir toutes les cases qu'un élève de fin de cycle 2 est sensé connaître.

(Objectif : vérifier la connaissance des programmes par les PE2).

2) Chercher à remplir le maximum de cases restantes à partir des cases déjà remplies et en explicitant la démarche suivie.

modalité : recherche individuelle puis mutualisation par groupes de 3 ou 4 en vue de la fabrication d'une affiche qui répertorie les stratégies suivies.

3) Mise en commun : élaboration d'une liste de propriétés mises en évidence.

4) Demander de concevoir par groupes des exercices de calcul réfléchi destinés à des élèves de cycle 3 mettant en œuvre ces propriétés.

5) Réflexion autour de la conception d'une séance avec leurs élèves ayant pour objectif de faire construire la table à partir des résultats du cycle 2 mémorisés et sans utiliser l'addition itérée.

Affiche 4

Objectifs :

1) Prendre conscience que l'apprentissage au cycle 3 des tables obéit à des règles algébriques (commutativité, associativité, distributivité) et à des connaissances antérieures (cycle 2).

2) Donner des outils aux PE pour élaborer des situations d'apprentissage (en cas d'échec à l'automatisation) relatives au calcul automatisé.

Mise en œuvre :

(A) poser deux questions :

1) Quels sont les 3 « calculs » parmi la table de Pythagore que vous connaissez le moins ?

2) Quels sont les plus simples pour vous et pourquoi ?

Mise en commun

- Bilan des réponses : premières visualisations sur la table avec couleurs

- Pourquoi ces résultats ?

1) appui sur des connaissances antérieures (cycle 2) : tables 2, 5 et 10.

2) procédures mettant en œuvre certaines structures algébriques.

[objectif 1 mis en évidence par la grille proposée dans cet atelier B5]

(B) Comment utiliser ces remarques pour une situation en classe ?

- travail en groupes avec production d'affiches

- mise en commun et bilan (pour objectif 2)

Remarque : utilisation du vidéoprojecteur ou rétroprojecteur pour les phases d'institutionnalisation faîtes au fur et à mesure.

Affiche 5

Pour NOUS : la table de Pythagore est un OUTIL pour RÉFLÉCHIR pas un OUTIL pour MÉMORISER.

Questions préalables pour NOUS :

1) À quel « moment » l'introduire ? (exigible du cycle 2)

2) Quelle est la « fonction » de cette table ?

Quelle(s) ÉVOLUTION(S) ?

3) Qu'est-ce qu'on peut tirer (de la table) pour QUESTIONNER les NOMBRES et les propriétés de structure ?

4) …

Quelques pistes (en vrac) :

* dans la table, combien de produits distincts pour obtenir *n* (dans la table) et *m* (non dans la table)

* « dépasser » la table, notion de multiples et diviseurs

* jouer : trouver des activités …

* « s'interroger » sur la place de la table dans la problématique de la PROGRESSION (dans tous les domaines).

Affiche 6

Objectifs

* utilisation des programmes

* émergence des propriétés arithmétiques

* construction d'une programmation pour le cycle 3

Support : grille vierge, à compléter

Déroulement

1) Individuellement, construire la table de Pythagore en indiquant :

- l'ordre de remplissage
- les cases obtenues par mémorisation
- les procédures employées pour les autres (dans chaque case)

2) Confrontation de quelques productions. Débat.

Place de la mémorisation et de la construction d'un résultat.

3) Construire une programmation de l'apprentissage des résultats de la table au cycle 3.

4) synthèse

Affiche 7

Le patchwork

Objectif : Construire des faits multiplicatifs à partir de faits supposés connus en fin de cycle 2.

Tâches :

• Trouver le nombre de carreaux de grilles rectangulaires

• Expliciter les procédures qui peuvent être mises en œuvre par des élèves de CE2.

(Bonus) • Analyser le choix des grilles proposées

Organisation :

* classe de 24 – 8 groupes de 3

* 2 groupes ont le même lot de grilles

* 3 grilles par groupe

Choix de grilles :

Groupe 1

Calculer : $\boxed{5 \times 7}$ « connu »

7×6

7×7

→Distribution des grilles associées

Groupe 2

Calculer : $\boxed{2 \times 7}$ « connu »

7×4

8×7

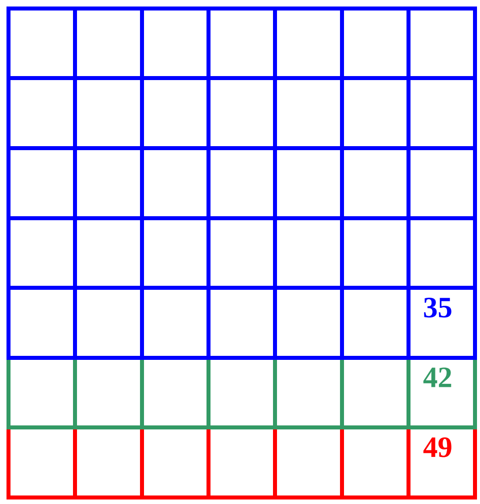
→Distribution des grilles associées

5×7 est supposé connu (7 fois 5)

7×6 c'est 6 fois 7 donc 5 fois 7 plus 1 fois 7

5 fois 7 c'est 5×7

Écrire le résultat dans la case en bas à droite



Commentaires des animateurs de l'atelier : la séance présentée sur cette affiche 7 s'inspire d'une séance d'enseignement décrite dans la brochure de la COPIRELEM *Élém Math 2*

LA PLACE ET LA FORME DES APPRENTISSAGES MATHEMATIQUES AU COURS D'UNE PREMIERE ANNEE DE SCOLARISATION A L'ECOLE MATERNELLE

Pierre Eysseric
IUFM de l'académie d'Aix-Marseile
IREM de Marseille
p.eysseric@aix-mrs.iufm.fr

Résumé
Le support de cet atelier était une production multimédia de l'IUFM d'Aix - Marseille sur les apprentissages mathématiques dans une classe de TPS/PS. Celle-ci est réalisée à partir de vidéos et de photos qui ne représentent qu'une petite part du travail réalisé au cours d'une année scolaire (deux matinées filmées et des images de quelques séquences) ; ce ne sont pas des modèles de situations à reproduire mais un échantillon représentatif de l'ordinaire du travail au cours d'une première année de scolarisation à l'école maternelle. À partir de l'analyse de pratiques professionnelles existantes, les documents présentés doivent permettre, dans le cadre d'une formation, un retour réflexif sur les pratiques de chaque enseignant et un travail approfondi sur la place et la forme des apprentissages mathématiques en TPS/PS[1].
Les principaux points abordés dans le DVD sont : l'importance des espaces et de leur structuration, le repérage dans le temps, les mathématiques comme outil de modélisation pour permettre aux élèves de découvrir le monde, le caractère culturel des mathématiques et la dimension transversale de celles-ci dans les apprentissages à l'école maternelle.
L'atelier s'est déroulé en trois temps : présentation de la structure du DVD et de quelques extraits ; travail en petits groupes : utilisations possibles de ces documents dans la formation initiale et continue des professeurs d'école ; synthèse des remarques des participants.

Au cours des l'année 2004-05, le travail des élèves d'une classe de TPS/PS a été filmé durant deux matinées au début de novembre, puis au mois d'avril. Des photos des travaux des élèves de la classe et des affichages ont été prises. À la rentrée 2005, nous avons filmé la première journée de classe des TPS chez la même enseignante.
À partir de l'ensemble de ces documents, un document multimédia, intégrant des extraits des vidéos réalisées, des photos et des documents écrits de l'enseignante de la classe, va être produit par l'IUFM d'Aix-Marseille. Celui-ci pourra être utilisé dans le cadre de la formation en mathématiques des Professeurs des Ecoles[2] pour des analyses de pratiques professionnelles et comme illustration de la place et de la forme des apprentissages mathématiques au cours de cette première année de scolarisation.

---

[1] Toute Petite Section et Petite Section : enfants âgés de 2 ou 3 ans

[2] Désignés par P.E. dans la suite du texte

L'accent sera mis sur les points suivants : l'importance des espaces et de leur structuration, le repérage dans le temps, les mathématiques comme outil de modélisation pour permettre aux élèves de découvrir le monde, le caractère culturel des mathématiques et la dimension transversale de celles-ci dans les apprentissages à l'école maternelle.
Après une présentation de la structure du DVD suivie d'une description rapide des extraits visionnés au cours de l'atelier, ce compte-rendu tente une synthèse des nombreuses remarques exprimées par les participants, en particulier toutes les pistes suggérées pour l'utilisation de ce support dans le cadre de la formation initiale et continue des P.E.

I – PRESENTATION DU DVD

Les documents du DVD (vidéos, photos ou textes) ne se veulent en aucun cas des modèles de séances à mettre en œuvre dans les classes de TPS et PS. Il s'agit, à partir d'images issues d'une dizaine de demi-journées de travail dans une classe de TPS/PS d'observer des pratiques, de les analyser, de les commenter, de les mettre en relation avec les textes officiels, … pour d'une part, repérer la place des apprentissages mathématiques dans cette classe de maternelle et d'autre part, permettre aux P.E., utilisateurs de ce média, d'analyser leurs propres pratiques professionnelles dans ce domaine et peut-être de repenser l'enseignement des mathématiques lors d'une première année de scolarisation à l'école maternelle, dans le cadre de la polyvalence.
Les trois entrées proposées (les espaces en TPS et PS ; le repérage dans le temps en TPS et PS ; les mathématiques dans la polyvalence en TPS et PS) permettent d'analyser certains des documents en variant l'angle d'approche.
Une quatrième partie du DVD devrait permettre un accès à une partie des documents bruts (sans analyses et commentaires) pour une utilisation en travaux dirigés par les formateurs de P.E.

I – 1 Les espaces en TP et PS

Cette rubrique présente, au travers de plusieurs films et diaporamas, les différents espaces fréquentés par les élèves à l'école maternelle. Deux approches sont développées : l'emboîtement d'espaces (macro, méso et micro - espaces) dont l'exploration nécessite des moyens différents ; le passage des espaces vécus aux espaces évoqués et aux espaces représentés. Une troisième entrée permet d'accéder aux écrits de l'enseignante qui explicite la part liée à ses choix dans la structuration des espaces proposés aux élèves.

Voici la liste des documents de cette partie « espace » :

- Vidéos de déplacements dans l'école ;
- Diaporama d'une matinée à l'école (les différents espaces fréquentés) ;
- Diaporama d'une sortie scolaire (espace évoqué, puis vécu, déplacement dans un macro-espace, …) ;
- Diaporama d'un projet sur « l'Afrique » (espace évoqué, espace représenté) ;
- Diaporama « les feuilles mortes dans la cour » ;
- Vidéos de deux séances d'EPS : « les feuilles mortes » et « les rubans » (espace vécu dans le cadre de l'activité physique) ;

- Diaporamas de deux séances d'EPS : « les cartons » et « les couvertures » (espace vécu, structuration de l'espace par l'introduction d'un matériel) ;
- Plusieurs vidéos de rondes ;
- L'espace des ateliers et des coins jeux (vidéos et diaporamas) ;
- Vidéo sur l'espace corporel ;
- Vidéos d'explorations de micro-espaces en ateliers : « la feuille de l'arbre », découpage en deux parties ;
- Vidéos et diaporamas d'explorations graphiques de micro-espaces : « sable », « vagues », « coquillages ».

I – 2 Le repérage dans le temps en TPS et PS

Ce chapitre, en cours d'élaboration, pointera les différents outils utilisés par l'enseignante pour permettre à ses élèves de construire des repères temporels ; les images de quelques situations d'apprentissage illustreront cette construction :

- Les anniversaires : le temps affectif et le temps qui passe ;
- L'élaboration d'une frise des activités de la matinée à partir de photos (emploi du temps de la classe) : le temps de l'école et des apprentissages ;
- L'horloge ; la date ; des activités saisonnières ou liées au calendrier (la galette, le carnaval, …) : le temps social.

I – 3 Les mathématiques dans la polyvalence en TPS et PS

Trois points seront développés dans le DVD :

- La place de la modélisation dans la découverte du monde : dans le travail proposé autour des feuilles mortes, les élèves découvrent les différentes caractéristiques de celles-ci ; mais très vite, le réel va s'avérer trop complexe pour être appréhendé par les jeunes enfants ; le travail en atelier va permettre en travaillant non plus sur de véritables feuilles d'arbres mais sur des modèles en papier d'approfondir certaines caractéristiques :
    - par exemple, le repérage des différentes formes des feuilles au cours d'une activité de tri/collage à partir de 3 ou 5 types de feuilles découpées dans du papier est facilité par les formes stylisées, mais aussi par le fait que la taille ou la couleur des feuilles n'interviennent plus comme autres critères de classement ;
    - ou encore le repérage du bord de la feuille et de son orientation dans un atelier d'exploration graphique à partir là encore de feuilles découpées dans du papier.
- Les outils mathématiques dans la culture : pour permettre à ses élèves un premier apprentissage de la chanson « Dans mon auto rouge », l'enseignante s'appuie sur une triple énumération des animaux, de leurs cris respectifs et de leurs désignations verbales et imagées ; la mémorisation du texte passe par la construction de la collection des animaux de l'auto rouge, et la mise en liste de leurs représentations : liste verbale du texte mise en correspondance avec la liste des images spatialement organisées sur le tableau de la classe. Ainsi dans cette séance de musique, les concepts mathématiques de collection, de désignation et d'énumération sont utilisés par l'enseignante comme des outils implicites pour l'apprentissage visé. Par la suite, cette liste, fréquentée par les élèves en liaison avec le texte de la chanson, pourra lui servir de référence pour l'introduction d'une séance spécifique de mathématiques axée sur la lecture ou la construction de listes ; de même, la collection des animaux de l'auto rouge et celle de leurs

représentations pourront être réinvesties dans des situations mathématiques liées aux concepts de collection, de désignation, d'énumération, d'ordre, de nombre. On retrouve ce même type de lien entre mathématiques et culture lorsqu'on travaille autour des albums de littérature jeunesse[3].

- Les activités physiques comme support pour la structuration spatiale : des espaces vécus qui pourront être évoqués et plus tard représentés, une structuration de l'espace médiatisée par le langage.

II – LES PRINCIPAUX DOCUMENTS VISIONNES AU COURS DE L'ATELIER

Vidéo EPS : « les feuilles mortes »

Il s'agit d'une lecture, du point de vue des mathématiques, d'une séance d'activité physique à dominante expressive. Il ne s'agit pas de transformer cette séance d'EPS en une séance de mathématiques mais d'y repérer les points d'appui possibles pour des apprentissages mathématiques spécifiques.
La séance permet l'exploration d'un méso-espace : celui de la salle de motricité. Les mots utilisés par l'enseignante contribuent à donner des repères aux élèves pour structurer l'espace exploré : marques de l'énonciation structurant l'espace à partir de celui qui parle (haut et bas), éléments lexicaux exprimant des déplacements ou des situations orientés (faire tomber les feuilles, déplacer les feuilles en soufflant). Ils lui permettent aussi d'évoquer d'autres espaces : celui de l'arbre qui est mimé ou celui de la cour où ont été ramassées les feuilles (cf. le diaporama « les feuilles mortes dans la cour » sur le DVD).
Cette structuration spatiale est indissociable d'une structuration temporelle : temps de l'élève, avant les feuilles étaient dans la cour, maintenant elles sont ici dans la salle, puis dans le sac ; temps de la nature avec les feuilles qui « vivent, meurent et tombent ».
Enfin la conclusion de la séance est l'occasion de vivre le passage d'un méso-espace à un micro-espace au travers du rangement dans le sac des feuilles précédemment dispersées sur le sol de la salle.
D'autre part, la situation vécue peut aussi servir d'illustration pour travailler sur « un peu/beaucoup » : on peut repérer dans la vidéo les mots utilisés par l'enseignante relativement à ces notions.

Diaporama des cartons

Il s'agit d'une séance de découverte et exploration des espaces « carton » au cours de laquelle l'enseignante intervient le moins possible pour laisser les élèves imaginer, créer. Elle observe les actions entreprises, aide à leur verbalisation (dedans/dehors, dessous/dedans, en petit train, …) ; toutes ces observations serviront à construire des séances plus dirigées qui viendront plus tard.

---

[3] Voir compte-rendu de l'atelier Albums et mathématiques au congrès 2004 de l'AGIEM dans le Cdrom des Ateliers du congrès de Martigues 2004 ou sur internet http://peysseri.club.fr/DOCUMENTS/Albums/Martigues2004.pdf.

Diaporama des espaces de l'école et de la classe

Il permet de présenter la structuration pensée des espaces d'une école et d'une classe ; une classification en termes de macro-espace, méso-espace et micro-espace ; l'évocation de divers documents vidéos ou photos permettant d'approfondir cette lecture des espaces vécus à l'école. Divers exemples d'emboîtements d'espaces sont signalés : la feuille morte sur la feuille elle-même sur la table ; le livre sur la table et l'espace représenté sur la page du livre ; les sous-espaces de l'espace corporel de l'élève[4] ; …

Vidéos du travail préparatoire aux ateliers sur les feuilles mortes

Dans ce moment de langage, le passage d'un travail sur les objets (les feuilles mortes) à un travail sur un modèle (représentations dessinées des feuilles mortes utilisées dans les ateliers) est illustré. Le modèle permet de simplifier la réalité pour mieux en étudier certaines caractéristiques. Par exemple, les tentatives de classement des feuilles effectuées lors du travail collectif mettent en évidence la multiplicité des critères de classement envisageables qui rend la tâche trop difficile pour ces jeunes élèves. Le passage au modèle permettra, dans les ateliers, de recentrer le travail sur le critère de « forme » des feuilles, en mettant de côté pour aujourd'hui la taille, la couleur, …

Vidéo « Dans mon auto rouge »

La séance filmée est une séance de musique portant sur les premières écoutes d'une chanson et le début de son apprentissage par les élèves. Celle-ci met en scène dix animaux et leurs cris respectifs répartis dans les deux couplets. C'est la mise en liste, par l'enseignante, des animaux en présence qui va être le moteur de la mémorisation des paroles par les enfants. Pour faire au tableau la liste des animaux, l'enseignante utilise le dessin, désignation des animaux mise en correspondance avec d'autres désignations symboliques de chaque animal : son nom et son cri. Ainsi, au cours de l'apprentissage de ce chant, se construit dans la classe une collection : celle des dix animaux de « l'auto rouge ». Cette collection est ordonnée et chacun de ces éléments est désigné de diverses façons. Les élèves fréquentent l'utilisation d'une liste comme mémoire d'une collection. Par la suite, l'apprentissage du chant se poursuivra, l'automobile rouge sera construite par les élèves à l'aide de cartons et les animaux modélisés sous forme de masques. Lorsque l'enseignante, au cours d'une séance de mathématiques cette fois, travaillera par exemple avec les jeux de liste du CDrom « Apprentissages mathématiques en maternelle » de BRIAND J. et al (Hatier 2004), elle pourra, au moment de la fabrication des listes par les élèves, se référer à la liste des animaux de l'automobile rouge. Lorsqu'elle aura besoin d'une collection comme support d'une activité mathématique, elle pourra utiliser celle des animaux de l'automobile rouge, collection dont elle peut être certaine de l'existence en temps que collection pour tous ses élèves. Personnellement, j'ai déjà utilisé plusieurs fois cette vidéo en formation, en parallèle avec le CDrom cité plus haut ; cela me permet entre autres d'illustrer la différence entre apprentissage par adaptation et apprentissage par fréquentation tout en montrant la complémentarité des deux approches.

---

[4] Voir texte comptine et photos en annexe.

III – LES ECHANGES AUTOUR DU DOCUMENT PRESENTE

Après avoir regardé quelques uns des documents présents sur le DVD, des échanges au sein de quatre sous-groupes ont permis à chacun de réagir, de critiquer et d'imaginer des formes d'utilisation de ce support dans le cadre de la formation des P.E.

III – 1 Remarques diverses

Le lien avec les I.O. et les références bibliographiques ont été appréciés, ainsi que les trois entrées possibles à partir des trois types d'espace (macro, méso et micro) et la présentation d'espaces emboîtés.

Un écueil est pointé : celui de prendre ce document comme un livre de recettes et les gestes de l'enseignante comme un modèle à reproduire, d'où la nécessité d'un affichage clair des intentions.

Il est suggéré de l'accompagner d'une grille d'observation pour mettre en relation les objectifs de l'enseignante, les consignes et les mots prononcés qui aideront les élèves à prendre conscience des passages d'un espace à l'autre.

Le document est contextualisé : on est dans <u>une</u> école et concernant les thèmes spécifiques abordés, il faut prévoir d'adapter ce que l'on voit à d'autres contextes, en particulier liés à l'architecture de l'école ou de la classe.

Il est certainement possible d'améliorer la lisibilité du document en particulier, les couleurs qui passent mal à la vidéo-projection ou les diapositives surchargées au niveau de la quantité d'informations à prélever.

Une suggestion est faite pour les vidéos : proposer deux versions, l'une avec les commentaires en surimpression et l'autre sans. En effet, leur présence peut empêcher les P.E. de chercher et d'analyser par eux-mêmes les pratiques présentées, mais leur absence peut conduire aussi à passer à côté de certaines intentions didactiques.

III – 2 Suggestions d'utilisation

Analyser des pratiques professionnelles

L'utilisation avec les PE2 d'un point de vue « analyse de pratiques » peut amener à travailler autour :

- des consignes ;
- du vocabulaire mathématique à employer avec des élèves de TPS/PS ;
- de la gestion de classe : phase collective / ateliers ; verbalisation des élèves ; …
- de l'analyse de l'activité : le choix des variables didactiques et leur influence, par exemple dans le travail en classe autour des feuilles mortes.

Et à faire prendre conscience de la structuration pensée de l'espace-classe.

Il permet de faire réfléchir les stagiaires sur des activités qui existent, leur donner du sens, leur faire repérer les apprentissages en jeu.

Notons que ce document est utilisable par tous les formateurs et pas seulement par ceux de mathématiques, à condition de choisir une entrée précise : par exemple, en formation générale, les choix langagiers effectués par l'enseignante.

Repérer et utiliser les « traces de maths »

Apprendre aux P.E. à repérer les « traces de maths », c'est-à-dire les outils ou les concepts mathématiques intégrés dans notre culture et utilisés en particulier à l'école dans des séquences de différentes disciplines : il ne s'agit surtout pas de transformer celles-ci en séances de mathématiques, mais d'identifier ces utilisations implicites des mathématiques pour pouvoir éventuellement s'y référer à l'occasion de situations d'apprentissage mathématique.
La vidéo « Dans mon auto rouge » est une bonne illustration de ce propos.

Choisir des documents du DVD comme « points de départ » pour faire construire aux P.E. des situations d'apprentissage mathématique prenant appui sur les « traces de maths » repérées dans ceux-ci (par exemple le diaporama des cartons ou la vidéo d'EPS autour des feuilles mortes).

Diverses modalités d'utilisation envisagées

- Temps court de visionnement ; commande d'un travail de préparation de séance et exploitation en différé un mois après pour permettre par exemple le réinvestissement de certaines idées en stage filé.

- Regarder certains documents vidéos sans le son (par exemple le travail préparatoire aux ateliers sur les feuilles mortes) pour faire réfléchir les formés sur l'importance des mots utilisés par un enseignant dans le cadre d'un apprentissage : à partir des seules images, on peut se questionner sur le contenu, la façon de l'aborder, les mots à utiliser, …

- À partir d'une des séquences du DVD, repérer les objectifs de l'enseignante, les autres objectifs possibles, puis faire construire d'autres scénarios avec ces mêmes objectifs.

- Utiliser certains documents pour construire une grille d'analyse de séances observées dans une classe de TPS/PS.

- Faire écho aux documents d'accompagnement (2002) en présentant des situations utilisables pour introduire les indicateurs spatiaux.

POUR CONCLURE…

Si l'intérêt pour les documents présentés a été unanime au sein de l'atelier, la question du type de diffusion a été longuement débattue sans qu'il y ait consensus.
Quel type d'utilisation du DVD ? En autonomie ou avec un formateur ?
Le document doit-il être mis à la disposition des P.E. en formation (médiathèque, centre de documentation, …) ou n'être diffusé qu'auprès des formateurs ? Mais dans ce dernier cas, est-il vraiment possible d'empêcher que des copies circulent ?

Derrière ces questions, transparaît la crainte d'une « mauvaise » utilisation des documents par les P.E. Mais n'est-ce pas le risque à courir pour toute publication ?
À nous formateurs de proposer les outils pour une « bonne » utilisation et ensuite, faisons confiance aux P.E. que nous formons : ils n'en feront peut-être pas l'usage que nous souhaiterions, et alors ? … Chacun prend, remodèle, transforme, trahit parfois mais n'est-ce pas ainsi que la pensée progresse ?

ANNEXE L'ESPACE CORPOREL DE L'ELEVE

Texte d'une comptine utilisée avec les TPS

« La tapette »

Sur qui, sur quoi,
Veux-tu ?
Faire la tapette ?
Sur qui, sur quoi,
Veux-tu ?
Lanturlu !

Comptine mimée sur frappés corporels à la sollicitation de quelques enfants « actifs » quant à la réponse attendue ; introduction progressive de différentes parties du corps.

Quelques photos des élèves reprenant cette comptine

Sur les pieds

Sur la tête

Sur les joues

Sur le ventre