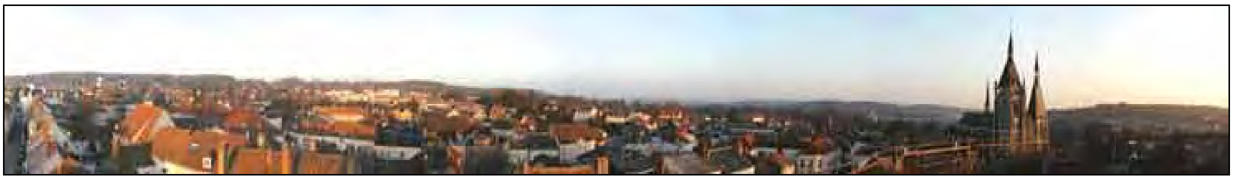
XXXIII^ème^ Colloque COPIRELEM

Des Professeurs et des Formateurs
de Mathématiques chargés
de la Formation des Maîtres

Expérimentation et modélisation dans l'enseignement scientifique : quelles mathématiques à l'école ?



Dourdan 8, 9 et 10 juin 2006

COPIRELEM

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques PARIS 7

iufm de l'académie de Versailles

SOMMAIRE

PRESENTATION

CONFERENCES – REGARDS CROISES

PRESENTATIONS DES ATELIERS

PRESENTATIONS DES COMMUNICATIONS

PRESENTATION DE LA COPIRELEM

C.O.P.I.R.E.L.E.M **Co**mmission **P**ermanente des **IREM** sur l'**E**nseignement **Elém**entaire	Responsables : Laurence Magendie et Pierre Eysseric Adresse postale : **IREM de Paris 7, Université Denis Diderot,** **CP 7018, 2, place Jussieu,** **75251 Paris Cedex 5** Tél : 01 44 27 53 83 Fax : 01 44 27 56 08

La COPIRELEM, Commission Permanente des IREM sur l'Enseignement Élémentaire est constituée d'une vingtaine de membres issus, en 2005-2006, de 16 académies différentes.
La plupart d'entre eux sont chargés de la formation mathématique des professeurs d'école en IUFM.

Ses missions

Depuis sa création (en 1975), la COPIRELEM a pour double mission :

- d'une part, de regrouper et centraliser les travaux des différents groupes élémentaires des IREM sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et sur la formation initiale et continue en mathématiques des enseignants du premier degré ;
- d'autre part, d'impulser des recherches sur les points sensibles ou contingents liés aux changements institutionnels (programmes, organisation de l'école, formation initiale, etc.…)

Ses actions

Répondant à ses missions, elle s'intéresse simultanément à l'**enseignement des mathématiques à l'école primaire** et à la **formation des professeurs d'école**. Elle se réunit cinq fois par an pour mettre en œuvre et coordonner ses différentes actions :

➢ **Un colloque annuel**

Regroupant de **120 à 180 participants** (professeurs d'école, formateurs et chercheurs), ces colloques permettent, depuis 1975, la diffusion des recherches en didactique des mathématiques, en France et à l'étranger.

Les derniers ont eu lieu à Dourdan (2006), Strasbourg (2005), Foix (2004), Avignon (2003). Le prochain se tiendra à Troyes en juin 2007.

Les actes en sont publiés chaque année.

➢ **Un séminaire de formation**

Il accueille chaque année entre 30 et 50 nouveaux **formateurs en mathématiques des professeurs d'école** en IUFM et les comptes-rendus de ses conférences, communications et ateliers sont **publiés dans « Les cahiers du formateur »**. Les derniers ont eu lieu à Blois (2005), Draguignan (2004), Avignon (2003).

➢ **Des publications**

La COPIRELEM publie, seule ou avec d'autres instances (Commission Premier Cycle des IREM, APMEP, …) des **documents destinés aux enseignants et/ou aux formateurs**.
En plus de la publication annuelle des Actes de son colloque et de son séminaire (voir ci-dessus), elle publie chaque année les **Annales du Concours Externe de Recrutement des**

Professeurs d'École, avec l'intégralité des sujets de l'année et des corrigés détaillés assortis de compléments utiles à la formation en mathématique et en didactique des futurs professeurs d'école.

En 2003, la COPIRELEM a publié **« Concertum », ouvrage de référence** pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques. Sa traduction en espagnol est parue en mars 2006 et la publication de sa version en anglais est imminente.

➢ **Des collaborations avec le Ministère de l'Éducation Nationale**

Par la présence d'un de ses membres à la commission mathématique du CNP, la Copirelem a apporté sa **contribution à l'élaboration des nouveaux programmes** de mathématiques pour l'école primaire ainsi qu'à la rédaction de leurs documents d'accompagnement.

Dès 2002, elle a été une force de proposition auprès du ministère pour la définition du contenu du **programme national pour le concours de recrutement des professeurs d'école** qui a été publié en mai 2005. La Copirelem a diffusé dès juillet 2005 des **propositions d'exercices** correspondant à ce nouveau programme et trois de ses membres participent à la commission chargée d'élaborer les **sujets nationaux du CRPE**.

Ses autres travaux et projets

- La COPIRELEM poursuit sa réflexion générale sur la nature des **mathématiques que l'on doit enseigner à l'école primaire** et les moyens dont on dispose pour le faire.
- Elle a entrepris des travaux sur l'**utilisation des TICE** à l'école et le développement des **ressources internet**, avec, notamment, la mise en place d'une collaboration avec la CII **Mathenpoche** et un rapprochement avec le dispositif « **La main à la pâte** ».
- La COPIRELEM collabore avec la **revue « Grand N »** publiée par l'IREM de Grenoble et destinée aux enseignants du primaire.

Publications

✓ *Les Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*
Cahors 91 / Pau 92 / Colmar 93 / Angers 95 / Rennes 96 / Besançon97

✓ *Les Cahiers du formateur (de professeurs d'école en didactique des mathématiques)*
Perpignan 97 / Tarbes 98 / Aix 99 / Agen 2000 / Nancy 2001 / Pau 2002 / Avignon 2003 / Draguignan 2004 / Blois 2005 .

✓ *Les Actes des colloques annuels de la COPIRELEM* (depuis 1990).
Paris 90 / Nice-Besançon 91/92 / Aussois 93 / Chantilly 94 / Douai 95 / Montpellier 96 / Saint Etienne 97 / Loctudy 98 / Limoges 99 / Chamonix 2000 / Tours 2001 / La Roche sur Yon 2002 / Avignon 2003 / Foix 2004 / Strasbourg 2005

✓ *CONCERTUM : Carnet de route de la COPIRELEM* (édité par l'ARPEME).
Sélection de travaux qui résume l'activité de la COPIRELEM depuis 10 années :
1.Apprentissage et diversité (371 pages).
2. Démarches et savoirs à enseigner (415 pages).
3. Outils de formation (219 pages).

PRESENTATION DU COLLOQUE

Le 33ème colloque, organisé par la COPIRELEM et l'IUFM de Versailles, a eu lieu les 8, 9 et 10 juin à Dourdan dans l'Essonne, avec le soutien de l'IREM de Paris 7.

Ce colloque vise plus particulièrement à travailler sur la place des mathématiques dans l'enseignement des sciences à l'école, à travers le thème : Expérimentation et modélisation dans l'enseignement scientifique. Ce thème sera également celui du prochain colloque à Troyes, en juin 2007.

Durant ce colloque, ont eu lieu quatre types d'interventions :

☞ **conférences** suivies de débats :
- « Expérimentation en mathématiques : une question neuve ? Retour sur l'enseignement des mathématiques sur deux siècles. » par Hélène GISPERT
- « L'expérimentation en mathématiques : quelques exemples. » par Daniel PERRIN

☞ **regards croisés** entre un chercheur en physique et un chercheur en mathématiques
- « Regards croisés sur la modélisation : physique et statistique. »
  Élisabeth PLE et Claudine SCHWARTZ

☞ **ateliers** concernant une réflexion commune que l'animateur initialise à partir, par exemple, d'un exposé de travaux ou d'un questionnement sur un thème prévu.

☞ **communications**. Elles sont de deux types :
- présentations de pratiques de formation des professeurs des écoles, suivies d'un échange.
- recherches universitaires, achevées ou en cours, sur un thème lié à la formation des enseignants ou à l'enseignement des mathématiques dans la scolarité obligatoire.

Environ 150 professeurs de mathématiques et enseignants-chercheurs, inspecteurs de l'éducation nationale, conseillers pédagogiques, professeurs des écoles ont participé aux travaux du colloque, contribuant à enrichir la réflexion sur l'enseignement des mathématiques et les pratiques des maîtres et des formateurs.

Comité d'organisation :

Michel CLEMENT, Rémy COSTE, Valérie LAROSE, Pascale MASSELOT, Isabelle ZIN.

REMERCIEMENTS

Le bon déroulement de ce colloque a été rendu possible par le soutien de nombreux partenaires que nous tenons particulièrement à remercier :

- IUFM de Paris
- IUFM de Créteil
- ADIREM
- IREM de Paris-Nord
- INRP
- APMEP Régionale Ile de France
- Texas Instruments
- ACL Editions – Kangourou
- Crédit Mutuel Enseignant
- MAIF
- MGEN
- GMF
- CASDEN

Un grand merci à Pierre DANOS, pour ses compétences et la disponibilité dont il a fait preuve pour la gestion du site, ainsi qu'à Nicolas PLAGNE, pour son grand dévouement et sa présence indispensable pour assurer l'installation et la maintenance de la salle informatique ainsi que ce qui concerne la vidéo.

Un remerciement spécial à Monsieur le Maire de Dourdan, Yves TAVERNIER, pour son accueil chaleureux et convivial.

Merci à tout le personnel du VVF de Dourdan qui a toujours répondu avec professionnalisme à nos diverses demandes, favorisant, dans ce cadre très agréable, les échanges entre les participants.

De vifs remerciements à la société Luciole qui a pris en charge la réalisation et la duplication des affiches et des badges.

PRESENTATION DES ACTES

Les actes se présentent sous la forme d'une brochure accompagnée d'un CDROM.

La brochure contient :

- le texte des conférences et regards croisés
- un résumé présentant les ateliers et des communications.

Les comptes-rendus complets des ateliers et communications sont disponibles dans le CDROM.

La conférence de Daniel Perrin est retranscrite sur la brochure sous une forme légèrement raccourcie. On trouvera la version intégrale dans le CDROM.

CONTENU DU CDROM

- Texte intégral des conférences
- Texte intégral des regards croisés
- Comptes-rendus détaillés des ateliers A et B
- Comptes-rendus détaillés des communications C et D
- Intervention de Monsieur Durpaire, Inspecteur Général de l'Education Nationale

BONUS :

- Liste des participants avec leur adresse courriel
- Quelques éléments du rallye
- Le pliage (fiche technique)
- Des photos

CONFERENCES
et
REGARDS CROISES

L'EXPERIMENTATION EN MATHEMATIQUES : UNE QUESTION NEUVE ?

UN RETOUR SUR L'HISTOIRE DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Hélène GISPERT

Groupe d'histoire et de diffusion des sciences d'Orsay (GHDSO)

Quelles mathématiques à l'école ? En liaison avec quel enseignement des sciences, avec quel enseignement scientifique ? Voici donc deux questions majeures auxquelles ce colloque se propose de réfléchir en prenant l'angle d'attaque particulier de l'expérimentation et de la modélisation. Qu'est ce qu'un point de vue historique peut apporter de pertinent à une telle réflexion menée ici pour comprendre et agir sur l'école aujourd'hui ?

Un passage du document d'accompagnement des programmes actuels de mathématiques de l'école primaire à propos des « problèmes pour chercher » me donnera un premier élément de réponse. Ce texte, qui précise qu'il s'agit de « développer chez les élèves un comportement de recherche et des compétences d'ordre méthodologique : émettre des hypothèses et les tester, élaborer une solution originale et en éprouver la validité, argumenter », m'apparaît en effet terriblement contemporain, c'est-à-dire tout simplement « inconcevable » dans des moments antérieurs de l'histoire de l'école. Les compétences qu'il cherche officiellement à développer s'inscrivent en effet dans une conception de l'école élémentaire et de ses missions, de ses programmes, de ses méthodes qui suppose légitime, par exemple, de développer chez l'élève ce comportement de recherche. Et l'histoire de l'école montre que cela est loin d'avoir été toujours le cas ; la légitimité des questions sur des contenus, des méthodes, la légitimité des réponses qu'on y apporte, dépendent en fait des finalités qu'une société assigne à l'école à un moment donné. C'est ce que je vais essayer de montrer en m'attachant aux réponses, apportées dans l'histoire de l'école, à la question : « Quelles mathématiques à l'école ? », en tentant, dans la mesure où cela est pertinent, de réfléchir, d'une part en lien avec l'enseignement scientifique et, d'autre part, à partir de la notion d'expérimentation.

Aujourd'hui, le primaire est, théoriquement au moins, le premier degré d'une scolarité prolongée pour tous dans le cadre du collège unique, le secondaire étant un degré successif de la scolarisation comportant un premier cycle, le collège – « unique » depuis la réforme Haby de 1975 – et un second cycle, le lycée. Cette compréhension du sens des termes « primaire » et « secondaire », la structure du système scolaire qu'ils traduisent, est quelque chose de récent. Ce n'est que depuis la cinquième république que le primaire a pour vocation d'être, pour toute une classe d'âge, la première étape d'une scolarité prolongée, et depuis moins longtemps encore, que cette prolongation s'inscrit dans le cadre d'un collège unique. Qu'en était-il avant ?
Cela a un sens ici de remonter jusqu'au début du dix-neuvième siècle quand, après la révolution française, l'état considère de son devoir de gérer et de contrôler l'éducation et la certification de la population et qu'il va établir des lois définissant les différentes missions de l'école. Le paysage éducatif est alors structuré, pour plus d'un siècle et demi, en gros jusqu'aux années 1960, d'une façon radicalement différente de celle que nous connaissons aujourd'hui. Deux ordres parallèles co-existent, et non deux degrés successifs, d'une part, l'ordre primaire, qui correspond à toute la scolarité, y compris l'âge moyen, pour les enfants du peuple et, d'autre part, l'ordre secondaire, destiné aux élites sociales et intellectuelles, qui a ses propres petites classes – distinctes du primaire élémentaire que ces élites ne fréquentent pas - et conduit au baccalauréat. Sur toute la période, ou presque, ces deux ordres sont disjoints, avec des finalités disjointes et des réponses distinctes à la question qui nous occupe de la nature des mathématiques à enseigner.

Au début du dix-neuvième siècle, des premières lois édictées sous l'Empire établissent et réglementent l'Université impériale et ses différentes composantes. L'Empire commence par organiser et réglementer le plus urgent, la formation de son élite administrative et politique et crée à cet effet les lycées de garçons. L'enseignement primaire est, quant à lui, délégué aux communes. Le lycée scolarise dès avant la classe de sixième, avec ses petites classes, et jusqu'au baccalauréat 3 % d'une classe d'âge et uniquement les garçons jusqu'aux années 1880[1]. Le taux de scolarisation n'a pas sensiblement augmenté à la veille de la première guerre mondiale et atteint à peine 10 % dans les années 1950. La vocation de cette formation est, pendant tout le dix-neuvième siècle, avant tout humaniste ; marque de distinction sociale des élites administratives et intellectuelles, celle-ci délivre un enseignement théorique et désintéressé, ce qui, *a priori*, pourrait ne pas invalider les mathématiques. Mais elle est de fait construite sur les humanités classiques (le grec et le latin), hors de son temps et sans référence d'ordre contemporain. Ainsi, par exemple, les petites classes élémentaires sont avant tout le lieu d'apprentissage du latin.

Dans cette perspective classique et désintéressée, les mathématiques sont disqualifiées. Marquées par ce qu'elles ont représenté au dix-huitième siècle, une matière de spécialité à destination des armes savantes, elles ne sont pas considérées comme relevant de la formation générale intellectuelle. Si les mathématiques, essentiellement le calcul, sont quelque peu enseignées dans les premières classes du lycée – les classes de la sixième à la quatrième dites « classes de grammaire » - leur enseignement est surtout repoussé aux classes supérieures. Ceci est encore plus marquant pour les sciences qui ne figurent pas aux programmes avant la classe terminale, dite « classe de philosophie ». Les sciences sont alors porteuses d'un double héritage, philosophique et métaphysique, tout d'abord, leur enseignement ayant pour fonction, selon les propos de Victor Cousin, de « montrer la main divine de la providence » et étant apparenté à l'histoire. Le second héritage, expérimental, issu des Lumières, vivifié par la Révolution, est en particulier notable pour la chimie, mais il faut préciser que ce caractère expérimental est avant tout « livresque » et renvoie à des expériences, des appareils qui ne sont décrits que dans des traités ou manuels. Encore moins, s'agit-il d'activité des élèves. La polysémie des

[1] L'enseignement secondaire des filles n'est créé qu'en 1880 avec la loi Camille Sée. Il n'est pas alors l'égal de celui des garçons : il ne se conclut pas par un baccalauréat et, la suite de l'exposé montrera toute l'importance de cette restriction, ne comporte pas d'enseignement de langues anciennes. Ce n'est qu'en 1924 qu'il y aura identification de l'enseignement secondaire féminin à l'enseignement secondaire masculin. Voir, N. Hulin, *Les femmes et l'enseignement scientifique*, Paris, PUF, 2002.

termes expérience, expérimental, expérimentation est importante, ceux-ci pouvant renvoyer à la fois, nous le verrons, à du théorique, du concret, du manipulatoire.

L'enseignement primaire commence réellement à être organisé avec la loi Guizot de 1833. Il s'agit là d'un moment politique particulier à la suite de la révolution de 1830 et de l'instauration de la Monarchie de Juillet qui succède à la Restauration. L'histoire de l'enseignement en France au dix-neuvième siècle, de l'enseignement des mathématiques, de l'enseignement des sciences, est étroitement liée à l'histoire politique d'un siècle caractérisé comme un siècle de révolutions. La volonté de l'état de prendre alors en charge l'organisation de l'enseignement primaire, l'enseignement pour le peuple, de réfléchir à ses contenus, est ainsi une conséquence politique de la révolution de 1830. Qu'en est-il de l'enseignement des mathématiques pour le primaire dans cette perspective ?

> « Loi sur l'instruction primaire, 28 juin 1833 - Titre premier « De l'instruction primaire et de son objet »
>
> Article 1 — […] L'instruction primaire élémentaire comprend nécessairement l'instruction morale et religieuse, la lecture, l'écriture, les éléments de la langue française et du calcul, le système légal des poids et mesures. »[2]

Cette loi a tout à la fois pour objet de répandre des connaissances réelles - alphabétiser et numériser toute une population - et une fonction politique manifeste, la propagation et le renforcement du sentiment national à l'aide de la diffusion de la langue française et du système métrique tout juste créé. Les mathématiques, avec les items « éléments de calcul » et « système légal des poids et mesures », concourent à ces deux fins.

Mais dans quelle perspective ? Reprenons un instant les termes du texte d'accompagnement des programmes actuels qui souhaite que l'élève puisse « émettre des hypothèses et les tester », puisse « élaborer une solution originale », ainsi qu'en « éprouver la validité », puisse, en dernier lieu « argumenter ». Il n'est pas difficile de trouver ici un écho citoyen, une marque du rôle des mathématiques dans une formation citoyenne que les professeurs ou formateurs de mathématiques revendiquent et dont ils tirent souvent argument. Qu'en est-il en 1833 ? Quelle est la fonction de l'école ?

[2] Cette loi ne concerne que les garçons, elle sera étendue à l'enseignement féminin en 1836.

Qu'attend-on de l'élève ? Le rapport à la Chambre des Pairs du 21 mai 1833 sur le projet de loi de l'instruction primaire apporte des éléments de réponse sans ambiguïté :

> « C'est surtout depuis la révolution de juillet que l'instruction primaire est le premier besoin du pays et du gouvernement. […] La raison publique paie avec usure tout ce qu'on fait pour elle. Elle punit par ses égarements les gouvernements qui la négligent ; mais elle récompense ceux qui la cultivent par ses progrès mêmes, en répandant chaque jour davantage, dans tous les rangs de la population, le respect des lois, les sentiments honnêtes qui accompagnent toujours les idées justes, le goût du travail et l'intelligence des biens qu'il procure, la modération des désirs, et cet amour éclairé de l'ordre, qui est aujourd'hui le seul dévouement des peuples. »[3]

Avec une telle fonction assignée à l'école, à l'instruction primaire, les réponses aux questions qui font l'objet de ce colloque sont bien différentes de celles que l'on peut envisager aujourd'hui, le type même des questions en étant d'ailleurs différent. L'écart est certes caricatural entre 1833 et nos jours, mais il révèle que, quand des enseignants pensent des questions de contenus, de méthodes – nous allons le voir – la fonction assignée à l'école doit être dans l'horizon de la réflexion. Elément rarement présent dans la formation en IUFM, ce qui est à mon avis une réelle faiblesse dans la formation des maîtres, du premier comme du second degré, en formation initiale comme en formation continue.

La loi de 1833 ne s'occupe pas que du primaire élémentaire, elle met en place un ordre primaire doté d'un degré supérieur pour l'instruction du peuple en créant « l'instruction primaire supérieure » destinée à la formation des nouvelles élites populaires ou des classes moyennes, qui se développent dans le deuxième tiers du siècle dans les usines, le commerce ou comme petits fonctionnaires. L'instruction primaire supérieure, qui prolonge l'instruction élémentaire, comprend nécessairement, outre les matières du primaire élémentaire,

---

[3] Voir A. Chervel, L'enseignement du français à l'école primaire – Textes officiels. Tome 1. Paris, INRP-Economica, 1992, 102-106 ou R. d'Enfert, *L'enseignement mathématique à l'école primaire de la Révolution à nos jours. Textes officiels. Tome 1*, Paris, INRP, 2003, p. 66-71.

> « les éléments de la géométrie et ses applications usuelles, spécialement le dessin linéaire et l'arpentage, des notions des sciences physiques et de l'histoire naturelle applicables aux usages de la vie, le chant, les éléments de l'histoire et de la géographie de la France. » (loi du 28 juin 1833, titre premier, suite de l'article 1)[4]

Ainsi, à ce niveau d'instruction, deux matières font leur apparition, la géométrie et les sciences. Elles le font, assorties de tout un cortège d'applications, indiquant à l'évidence une distinction radicale entre les formations des deux ordres primaire et secondaire : si la seconde a une finalité théorique et désintéressée, la première (tant pour l'élémentaire que pour le supérieur) a une finalité explicitement pratique et utilitaire. Ainsi, pour des âges équivalents - premières années de lycée ou primaire supérieur - les contenus et les méthodes enseignés aux enfants sont réellement différents.

Je voudrais insister sur le fait que le recours à la pratique que suggère la loi de 1833 n'a ici rien de pédagogique. La référence aux usages de la vie, aux applications n'a rien d'un choix de méthode, c'est une finalité de l'enseignement en soi. Il n'est question ni d'expérimentation, ni d'expérimental, mais d'une limitation aux seuls horizons de l'expérience vécue, quotidienne des élèves. Cette limitation, qui constitue une des lignes de force du système dual d'instruction alors mis en place, est valable pour tous les niveaux de l'ordre primaire, de l'élémentaire à la formation de ses maîtres dans les écoles normales. Elle est clairement explicitée par le pouvoir, non seulement explicitée mais fortement surveillée comme le montre cet extrait d'une lettre du ministre Guizot aux directeurs d'écoles normales un an après sa loi.

> « L'enseignement, dans les écoles normales primaires, a été réglé par des programmes qui en déterminent les objets et les formes. Vous veillerez à ce que ces programmes soient scrupuleusement observés. Dans plusieurs écoles, on s'est montré enclin à les dépasser pour étendre sans mesure et un peu au hasard, les objets de l'enseignement. […] Cependant n'oublions jamais que le but des écoles normales est de former des maîtres d'école, et surtout des maîtres d'école de village : toutes leurs connaissances doivent être solides, pratiques, susceptibles de se transmettre sous la forme d'un enseignement immédiatement

[4] Voir A. Chervel, opus cité, p. 106 ou R. d'Enfert, opus cité, p. 71-72.

> utile aux hommes que leur laborieuse condition prive du loisir nécessaire pour la réflexion et l'étude. » (lettre aux directeurs d'écoles normales - 10 octobre 1834)[5]

Et la fin de la lettre est claire, les directeurs ont mission de veiller à ce qu'on ne dépasse pas cette limite, véritable ligne de démarcation entre les deux ordres. Ils sont « aidés » dans cette tâche par l'inspection dont une bataille, au dix-neuvième siècle, est de contrôler que l'ordre primaire reste bien à sa place et n'empiète pas sur les prérogatives de l'ordre secondaire. Dans ce partage des rôles, rappelons-le, la distinction du secondaire est attachée au latin, aux études théoriques et désintéressées, les mathématiques relevant du registre pratique du primaire.

Autre moment historique, les années 1850, avec le second empire, marqué à son tour par une révolution, la révolution de 1848 qui a vu l'entrée en scène du prolétariat et a traumatisé la bourgeoisie. Ces années sont celles de réajustements importants et contradictoires de la place des sciences et des mathématiques, de leurs contenus comme de leurs méthodes, à la fois pour chaque ordre et entre les deux ordres.

Dans le primaire, tout d'abord, on assiste à la fois à une réduction, un resserrement des contenus, en même temps qu'à un approfondissement de la réflexion pédagogique. En 1850, une nouvelle loi, la loi Falloux, instaure de nouvelles limites à l'enseignement primaire :

> « Art. 23. — L'enseignement primaire comprend : l'instruction morale et religieuse, la lecture, l'écriture, les éléments de la langue française, le calcul et le système légal des poids et mesures. Il peut comprendre en outre : l'arithmétique appliquée aux opérations pratiques ; des notions de sciences physiques et de l'histoire naturelle applicables aux usages de la vie, des instructions élémentaires sur l'agriculture, l'industrie et l'hygiène ; l'arpentage, le nivellement, le dessin linéaire ; le chant et la gymnastique. […] »[6]

On peut tout d'abord constater, à la suite de l'énoncé des contenus du primaire élémentaire de 1833 qui figurent inchangés, l'apparition de nouveaux mots : hygiène, industrie, agriculture, ainsi que la disparition d'un autre : géométrie, seules restant en

---

[5] Voir A. Chervel, opus cité, p. 113.

[6] Voir A. Chervel, opus cité, p. 168 ou R.d'Enfert, opus cité p. 125-127.

effet citées ses applications que sont l'arpentage et le dessin linéaire. En fait, il n'est plus question dans cette loi d'enseignement primaire supérieur ; celui-ci est oublié et les matières qui le constituaient soit disparaissent, soit deviennent facultatives comme les sciences qui, de fait, sont le plus souvent absentes. On a ainsi, à la suite de cette loi, un abaissement des exigences en mathématiques et une réduction de l'enseignement des sciences. Il peut être intéressant de commenter plus avant la disparition du mot géométrie des titres des matières de l'ordre primaire. Sa présence dans la loi de 1833 avait en effet été l'occasion d'un débat à la chambre des pairs lors de la discussion de la loi[7], les débats portant sur l'opportunité de faire figurer ce mot au côté de ses applications (le dessin linéaire et l'arpentage) : les références alors induites par un savoir savant, théorique, pourraient sembler entrer en contradiction avec les orientations pratiques de l'ordre primaire et favoriser toute prétention contraire à ses limites. Avec la loi Falloux, la question est réglée par la disparition même du mot géométrie.

Dans cette même décennie, parallèlement à cette restriction des contenus, le ministère cherche à impulser de nouvelles ambitions pédagogiques et à promouvoir de nouvelles méthodes. Ainsi, dans une instruction relative à la direction pédagogique des écoles primaires adressée aux recteurs[8], le ministre Rouland, faisant le bilan des moyens mis par le second empire dans le développement de l'instruction primaire, indique : « Mais construire des écoles n'est qu'une faible partie de la tâche. Quand on a rendu l'enseignement accessible, il reste à le rendre profitable ». C'est le rôle dévolu à une bonne direction pédagogique des écoles qui doit considérer que « tout enfant qui vient s'asseoir sur les bancs d'une école apporte avec lui, sans en avoir conscience, l'usage des genres, des nombres, des conjugaisons ». « Qu'y a-t-il à faire ? » continue alors le ministre : « tout simplement l'amener à rendre un compte rationnel de ce qu'il sait par routine et répète de lui-même machinalement ». Déclinant matière par matière les mauvaises habitudes pédagogiques qui se sont installées, il indique ce qui devrait être et avance pour les mathématiques, c'est-à-dire en fait le seul calcul, les préconisations suivantes :

> « Dans l'enseignement du calcul, les maîtres s'attachent-ils à exercer le raisonnement, à donner à cet enseignement un caractère tout pratique, en

---

[7] Voir R. d'Enfert, opus cité, p. 67.

[8] Voir A. Chervel, opus cité, p. 208-211.

> empruntant les problèmes aux circonstances de la vie réelle, aux faits de l'économie domestique, rurale et industrielle ? S'efforce-t-on ainsi de faire de l'arithmétique une sorte de cours de logique populaire appliquée aux besoins, aux relations de chaque jour ? »[9]

L'ambition de raisonnement apparaît ici forte mais précisons que la réalité des classes est à cent lieues de ces préconisations. Les conditions matérielles des écoles, la scolarisation irrégulière, toujours non-obligatoire et payante, l'importance des classes uniques, la qualité des maîtres dans une France essentiellement rurale, sont des obstacles évidents à ces ambitions pédagogiques ministérielles. Ces ambitions sont cependant réelles même si, dans leur formulation même, étroitement liées aux restrictions de contenu déjà mentionnées. Elles peuvent se résumer en effet, outre l'abandon de l'apprentissage par cœur ou mécanique, à une volonté d'éliminer les règles abstraites (en grammaire et en orthographe en particulier), les « définitions métaphysiques », les « difficultés extraordinaires », éliminer en fait un enseignement trop théorique en cherchant au contraire à ce que l'enseignement soit « profitable » à l'enfant par une mobilisation de qu'il peut connaître dans sa vie quotidienne. La référence à l'expérience, l'expérience de l'enfant, devient ici un moyen pédagogique. C'est ainsi, non plus seulement comme marque de limitation sociale des ambitions du primaire, mais également pour une rentabilité des méthodes d'enseignement que l'on prône le recours à la pratique.

Comment, pourquoi peut-on avoir pour cet ordre primaire à la fois cette réduction des contenus et cet approfondissement pédagogique ? Ce double statut de la référence à un enseignement pratique, donc opposé radicalement à un enseignement théorique, s'explique par le réajustement, dans ces années 1850, de la fonction même de l'école primaire qui doit former de futurs travailleurs pour l'industrie ou pour l'agriculture.

La loi de 1833 s'était attachée à résoudre ce défi, former les classes populaires, tout en prenant également en compte un autre défi, de nature différente, celui de la formation de la couche supérieure de ces classes et de la petite bourgeoisie avec la création de

[9] Voir A. Chervel, opus cité, p. 208-211

l'enseignement primaire supérieur présenté comme une « innovation prudente », un « bienfait social ». Double fonction, donc, de l'ordre primaire, avec ces deux niveaux, élémentaire et supérieur. En effet, ce niveau extrêmement bas du primaire avant les années 1830, qui ne pouvait de fait assumer la deuxième fonction, était jugé comme un facteur grave de désordre social comme on le voit dans cet extrait du rapport à la Chambre des pairs sur le projet de loi de 1833 déjà cité :

> « L'instruction primaire ainsi abaissée, la voilà séparée par un intervalle immense de l'instruction secondaire ; et une classe très nombreuse de citoyens, qui ne peuvent atteindre jusqu'à celle-ci, et auxquels celle-là trop limitée ne suffit plus, manque d'une instruction qui convienne à leur situation et à leurs besoins. Ou ils se réduisent à l'instruction primaire, et descendent au lieu de monter dans la culture de l'intelligence ; ou ils s'élèvent à force de sacrifices jusqu'à l'instruction secondaire, qui s'efface bientôt et ne laisse aucune trace dans leur esprit, s'ils rentrent dans les modestes professions de leurs pères, ou qui les pousse à en sortir. Ainsi se forment dans nos collèges de nombreuses générations qui, contractant de bonne heure des habitudes incompatibles avec leur destinée naturelle, la rejettent, et se répandent dans la société, y cherchant une place qu'elles ne trouvent pas toujours, portent partout une inquiétude fatale, toujours prêtes à se jeter dans tous les désordres. Ce mal est grave, Messieurs ; il est déjà ancien ; il tourmente, il menace la société, et il tient en très grande partie à une mauvaise solution d'une question d'instruction primaire. »[10]

Au-delà du côté caricatural de ce texte, qui a au moins le mérite d'être explicite quant aux enjeux sociaux de l'école et de ses contenus, il est important d'y lire la véritable question qu'il souligne : comment éduquer cette partie du peuple appelée à avoir des fonctions économiques et sociales qui ne coïncident pas avec la vocation théorique et désintéressée du secondaire calquée sur les humanités classiques ? Comment former les élites commerciales, industrielles de la petite bourgeoisie ? Il s'agit là d'une question d'éducation dont le texte nous montre bien qu'elle se combine à une question politique. Question qui se décline suivant les différentes disciplines. Ainsi, quelles mathématiques pour les uns et les autres ? Les réponses de 1833 et de 1850 diffèrent, cette différence

[10] voir note 2

étant symbolisée par la disparition, avec le primaire supérieur, de ce mot de géométrie. La révolution de 1848 a en effet montré avec éclat que la solution adoptée avec la loi Guizot n'a pas calmé les couches les plus éclairées du peuple, cette élite du peuple, de sa classe ouvrière, appelée à fréquenter le primaire supérieur. Il faut changer de cap, trop instruire s'avère dangereux.

Il ne suffit pas, cependant, de restreindre les contenus. Les besoins de formation sont réels, la tâche de scolarisation massive, d'alphabétisation, d'acculturation de la population n'est pas terminée. L'instruction ministérielle de 1857 aux recteurs, que j'ai déjà citée, désigne un des freins à ce développement de la scolarisation :

> « Quand on a rendu l'enseignement accessible, il reste à le rendre profitable. Il importe que les populations puissent toucher du doigt l'utilité pratique de l'instruction. On ne saurait se le dissimuler, le tour vague, abstrait, purement théorique, de l'enseignement est trop souvent l'une des causes de la désertion des classes. Pourquoi, dans les campagnes particulièrement, le chef de famille tiendra-t-il à ce que les enfants fréquentent régulièrement l'école, si les heures qu'on y passe paraissent des heures mal employées ; si la dépense qu'elle entraîne est, à ses yeux, une dépense stérile ? Il faut à tout prix, que les familles, les communes, les départements, l'Etat, puissent se considérer comme amplement dédommagés, par les résultats, des sacrifices qu'ils auront accomplis. »[11]

Il faut donc des résultats, il y a un besoin économique, politique de réussite, et les questions de direction pédagogique ont des enjeux qui dépassent le seul cadre de l'école.

Les années 1850, je l'ai dit, sont aussi des années de réaménagement pour l'ordre secondaire confronté lui aussi à des questions de redéfinition de ses finalités. La révolution industrielle, le développement du commerce, de la banque aiguisent le besoin de former une élite bourgeoise, industrielle et commerciale sur d'autres modes que celui des humanités classiques. Le second empire va tenter d'adapter l'enseignement secondaire à cette fin et instaure en 1852 la réforme dite de la bifurcation qui va essayer

[11] Voir A. Chervel, opus cité, p. 208-211.

d'introduire au lycée une nouvelle voie où les mathématiques et les sciences seront à la base de la formation. A l'issue de la classe de quatrième, après trois années d'études avec latin obligatoire, s'ouvre une bifurcation, vers deux baccalauréats distincts, avec :

> « d'un côté les sciences [qui] ouvrent le vaste champ des applications pratiques. Elles dirigeront spécialement vers le but utile des sociétés l'intelligence de la jeunesse. De l'autre, les études classiques de nos lycées seront ravivées par la séparation même des éléments hétérogènes qui en altéraient la pureté. »[12]

Remarquons, qu'une nouvelle fois, les sciences, donc les mathématiques, ne trouvent une légitimité que du côté de l'utilitaire. Le secondaire doit être performant dans ses deux missions, réussir la formation de ses deux types d'élites, les « pures » pour reprendre les termes du texte, et les « moins pures ».

Quels contenus, quelles méthodes correspondent à ces deux voies ? La commission qui prépare les programmes de l'enseignement scientifique expose l'alternative suivante :

> « Quelques géomètres veulent que l'intelligence des élèves soit obligée de déduire toutes les vérités de leurs principes les plus abstraits, et qu'elle s'assouplisse par cette gymnastique qui la rend à la fois plus subtile et plus féconde en ressources pour l'argumentation. Cette méthode réussit à quelques esprits rares, mais elle décourage le plus grand nombre. […] D'autres, au contraire, demandent au professeur d'éviter les abstractions ; de ne pas définir ce qui est connu, de ne pas démontrer ce qui est évident, de s'appuyer sur des notions naturelles pour commencer l'étude d'une science ; de jalonner sa marche par des démonstrations matérielles souvent répétées... ».[13]

La commission n'hésite pas entre ces deux méthodes, c'est la seconde qui obtient toutes ses préférences, qui préside à la rédaction des programmes et à laquelle le professeur doit se conformer. Ce choix - dans la mesure où les mathématiques étaient enseignées car elles étaient en fait repoussées pour l'essentiel dans les toutes dernières années du lycée - est en rupture totale avec ce qui précédait : rejet des démonstrations abstraites et

---

[12] Voir B. Belhoste, *Les sciences dans l'enseignement secondaire. Textes officiels. Tome 1,* Paris, INRP-Economica, 1994, p. 254.

[13] Voir B. Belhoste, *Les sciences dans l'enseignement secondaire. Textes officiels. Tome 1,* Paris, INRP-Economica, 1994, p. 264.

théoriques, recours aux démonstrations matérielles, recours à l'expérience, recours, d'une certaine façon, à une « pratique » d'ordre pédagogique.

Il y a ainsi, dans cette décennie, un développement réel de l'enseignement des mathématiques et des sciences dans l'ordre secondaire. Or, dans le même temps, ce qui pourrait sembler paradoxal, celles-ci disparaissent pratiquement du champ de l'enseignement primaire avec la loi Falloux. Contrairement aux élites, le peuple n'est pas considéré assez mûr pour connaître les sciences. Entre science et religion, souvent opposées, c'est la religion qui est privilégiée dans la plupart des écoles rurales. Alors que les sciences sont souvent mises en avant comme instrument d'émancipation face aux croyances, aux mythes, entre autre pour ce qui a trait à l'agriculture, on préfère renoncer à certains de leurs avantages jugés potentiellement dangereux. La baisse des ambitions du primaire, le resserrement des liens avec l'église et son clergé, marginalisent la fonction de culture « pratique », émancipatrice que peuvent porter les sciences.

Ce nouveau paysage scolaire, dans lequel mathématiques et sciences ont un rôle nouveau, ne va pas tenir. Dès avant même la fin du second empire, au début des années 1860, des réadaptations sont proposées, tant pour le primaire que pour le secondaire. La réforme de la bifurcation est rejetée par les enseignants des lycées. Ces enseignants, y compris de mathématiques, formés selon le modèle des humanités classiques, tiennent à cette distinction sociale des études classiques et désintéressées et rejettent une réforme qui introduit un modèle alternatif basé sur des considérations utilitaristes. La réforme est petit à petit amendée, les programmes et méthodes, dont ceux de mathématiques, révisés. Ainsi, en ce qui concerne la géométrie en classe de quatrième, Victor Duruy recommande dans une instruction aux recteurs sur les programmes de sciences des lycées :

> « Les notions de géométrie au lieu d'embrasser, comme par le passé, toute la géométrie plane, seront restreintes aux principales propriétés de la ligne droite et

> du cercle, présentées dans l'ordre didactique [c'est-à-dire l'ordre euclidien] que l'expérience a consacré. »[14]

Et de même, en classe de troisième, « où un système d'enseignement géométrique sans rigueur avait prévalu », il repousse l'ancien mode d'enseignement :

> « Il est périlleux, ne fût-ce que pendant un semestre, d'habituer les élèves à se contenter de l'à peu près en matière géométrique. Je préfère de beaucoup les initier de bonne heure à l'admirable enchaînement des propositions d'Euclide : enseigner moins de choses, mais enseigner mieux. »[15]

La géométrie retrouve ainsi toute sa noblesse, tout son caractère rigoureux, théorique, savant. Mais pour quels élèves ? Cette instruction sur les nouveaux programmes est contemporaine de la création d'un nouveau type d'enseignement secondaire, l'enseignement spécial, l'adjectif choisi renvoyant à l'idée de spécialisation, c'est-à-dire un enseignement qui n'est pas de culture, qui n'est pas général. Il prend la place de la seconde voie de l'ex-réforme de la bifurcation, mais hors du lycée qui redevient donc uniquement classique. Les élèves du secondaire spécial ne fréquentent pas le lycée et le discours de Duruy sur l'enseignement de la géométrie ne les concerne pas. Il est consacré aux seuls élèves des lycées qui poursuivent des études théoriques, abstraites.

Quelles sont les méthodes de l'enseignement spécial ? Duruy, à nouveau, précise dans une autre instruction aux recteurs :

> « Vous recommanderez aux professeurs de ne jamais mettre en oubli qu'il ne s'agit point, dans l'école spéciale, de préparer, comme au lycée classique, des hommes qui fassent, des plus hautes spéculations de la science ou des lettres, leur étude habituelle, mais des industriels, des négociants, des agriculteurs, dont beaucoup d'ailleurs, étendant par l'expérience de la vie cette instruction en apparence plus étroite, sauront rejoindre ceux qui auront cherché pour leur esprit un développement plus large dans des études désintéressées.
>
> [.…] Il faut diriger constamment l'attention des élèves sur les réalités de la vie ; les habituer à ne jamais regarder sans voir, les obliger à se rendre compte des phénomènes qui s'accomplissent dans le milieu où ils sont placés, et leur faire

[14] Voir B. Belhoste, opus cité, p. 83-84.

[15] Idem

goûter si bien le plaisir de comprendre, que ce plaisir devienne un besoin pour eux. »[16]

On le voit bien ici. Quelles mathématiques ? Quels contenus ? Quelles méthodes ? Nous avons deux types de réponses différentes pour des enfants de même âge en fonction de leur situation, des perspectives d'avenir auxquelles la société les destine.

Dernier moment scolaire pour le dix-neuvième siècle, le « moment Ferry », aux débuts d'une troisième république triomphante qui fait des sciences un symbole de son développement tant pour des raisons d'ordre économique qu'idéologique. Dans l'enseignement, la part des sciences va effectivement augmenter mais, à nouveau, de façon différenciée pour l'ordre primaire et pour l'ordre secondaire. Quoiqu'il ait rendu l'école laïque, gratuite et obligatoire, Jules Ferry n'a absolument pas cherché à entamer la dualité scolaire. Il affirme explicitement dans ses lois les principes d'une école duale toujours composée de deux ordres socialement déterminés, l'ordre primaire – avec le primaire supérieur de 1833 qu'il fait revivre – et l'ordre secondaire avec ses petits classes élémentaires.

En ce qui concerne le secondaire, Jules Ferry réforme ses classes élémentaires (avant la classe de sixième), y supprimant l'enseignement du latin et y introduisant à la place l'enseignement des sciences. Il ne touche pas, en revanche, aux classes suivantes des lycées. Il ne peut heurter une bourgeoisie, dont il a politiquement besoin, attachée au lycée classique et à son modèle des humanités, d'autant que le secondaire spécial qui a déjà des programmes de mathématiques et de sciences ambitieux, même si tournés vers des orientations « pratiques », connaît alors un gros succès. Jules Ferry ne touche pas, ou peu, à l'enseignement des mathématiques et des sciences au lycée classique.

L'ordre primaire, par contre, connaît des modifications profondes. Malgré la confirmation de la dualité, de nouvelles ambitions culturelles sont affichées pour le primaire, que résume la promotion d'une nouvelle méthode pédagogique, la « leçon de choses ». Appliquée d'abord à toutes les disciplines, elle va se spécifier pour l'enseignement des sciences. Ainsi, dès 1882, dans les programmes annexés au

[16] Voir B. Belhoste, opus cité, p. 413-416.

règlement d'organisation pédagogique des écoles primaires publiques lit-on au chapitre « Education intellectuelle. Objet, méthode, programme » :

> « 1. Objet de l'éducation intellectuelle - […] L'instruction primaire, en raison de l'âge des élèves et des carrières auxquelles ils se destinent, n'a ni le temps ni les moyens de leur faire parcourir un cycle d'études égal à celui de l'enseignement secondaire ; ce qu'elle peut faire pour eux, c'est que leurs études leur profitent autant et leur rendent, dans une sphère plus humble, les mêmes services que les études secondaires aux élèves des lycées. »
>
> « 2. Méthode – L'objet de l'enseignement étant ainsi défini, la méthode à suivre s'impose d'elle-même. […] En tout enseignement, le maître, pour commencer, se sert d'objets sensibles, fait voir, toucher les choses, met les enfants en présence de réalités concrètes, puis, peu à peu, il les exerce à en dégager l'idée abstraite, à comparer, à généraliser, à raisonner sans le secours d'exemples matériels. L'enseignement est essentiellement intuitif et pratique. […] C'est à cette double condition que l'enseignement primaire peut entreprendre l'éducation et la culture de l'esprit ; c'est, pour ainsi dire, la nature seule qui le guide. »[17]

Remarquons, tout d'abord, en pensant au thème de ce colloque, qu'il s'agit ici d'observation, absolument pas d'expérimentation[18] ni même de démarche expérimentale. L'observation est alors considérée comme la qualité scientifique cardinale, non seulement pour les élèves mais pour les savants eux-mêmes. Elle fait référence à une conception épistémologique de ce qu'est la science, dominante en France jusqu'aux premières décennies du vingtième siècle, qui renvoie le moment théorique de la démarche scientifique en aval de l'observation, comme si émettre des hypothèses et observer n'étaient pas déjà des moments où intervient un cadre théorique.

---

[17] Voir R. d'Enfert, opus cité, p. 216-218.

[18] C'est ce que font remarquer les instructions sur les nouveaux programmes des écoles primaires de 1923 qui, tout en étant « rempli d'admiration » à la lecture des instructions des années 1880, précisent : « Le grand ennemi de l'éducateur, c'est l'habitude.[…] C'est pour ce motif qu'à l'observation, qui laisse encore l'écolier passif, nous préférons, dans la mesure où elle peut être pratiquée à l'école primaire, l'expérimentation qui lui assigne un rôle actif. […] A l'enseignement par l'aspect […] il faut superposer une autre forme de la même méthode […] l'enseignement par l'action. » Voir Chervel, opus cité tome 2, p. 313-320, extraits cités p. 319.

C'est cette conception-là de la science - pour laquelle la science c'est d'abord observer - qui est incarnée totalement dans le principe de la leçon de choses.
Cette méthode, c'est là une deuxième caractéristique de cet extrait des programmes, est un moyen pédagogique qui apparaît spécifiquement destiné, dans l'horizon « plus humble » de l'ordre primaire, à « l'éducation et la culture de l'esprit ». La vocation intellectuelle nouvelle du primaire suppose une immédiateté qui ne peut s'offrir le luxe d'une scolarisation prolongée comme pour les élèves du secondaire. C'est donc sur l'intuition et la pratique immédiatement disponible et mobilisable des élèves que le maître peut s'appuyer. Mais ainsi fondé sur l'expérience réelle, quotidienne des élèves, « procédant du connu à l'inconnu », cet enseignement risque de dériver rapidement vers l'usuel et se limiter au strict nécessaire « approprié à leurs futurs besoins ».
Il y a une vraie difficulté à gérer une telle ambition, à assumer la dimension culturelle du recours au pratique, au concret, au matériel dans cet ordre primaire encore inséré dans un système dual où des enfants de onze ans des classes populaires peuvent travailler, aux champs ou à la ville, s'ils ont leur certificat d'études. On en trouve la marque dans une des œuvres pédagogiques majeures de cette époque, le Dictionnaire de pédagogie de Ferdinand Buisson, comme en témoigne, par exemple, cet extrait de l'article « Problèmes » :

> « L'arithmétique devant contribuer, même à l'école primaire, à l'éducation générale de l'esprit, tout exercice qui force l'enfant à réfléchir, à chercher, à comparer, à déduire, à juger, semble à ce titre être du domaine de l'enseignement primaire. C'est là, il nous semble une grave illusion. […] Il faut donc tirer le meilleur parti possible de ces quelques années de l'enfance dont nous disposons, et nos programmes doivent avoir en vue l'acquisition la plus prompte et la plus solide des éléments indispensables de chaque science. L'arithmétique ne peut pas faire exception. Avant tout l'enfant doit savoir calculer sûrement et rapidement et résoudre toutes les questions pratiques qu'il peut être appelé à rencontrer sur sa route pendant sa vie. Tel est le caractère que doivent avoir les problèmes de l'école primaire ; et la marge est grande encore sans quand on ait besoin de se jeter sur les curiosités de la science, sur les

propriétés abstraites des nombres, sur les problèmes fantaisistes et compliqués à plaisir. »[19]

L'histoire de l'école au dix-neuvième siècle, que je viens de brosser à grands traits, a montré, je l'espère, à quel point les réponses successives à la question « Quelles mathématiques à l'école ? » ont pu dépendre des différentes finalités assignées à l'école et à ses différents ordres[20]. Qu'en est-il pour le vingtième siècle ? Sans reprendre toute l'histoire de l'école sur ce siècle, je donnerai juste deux pistes de réflexion concernant le recours à l'expérimental – une fois encore plus tiré vers la pratique que vers l'expérimentation – à deux moments clés du siècle, la réforme des lycées de 1902-1905 et la réforme dite des mathématiques modernes des années 1960-1970.

En 1902 a lieu une réforme des lycées qui crée enfin, à l'intérieur du lycée, une voie moderne à égalité officielle, sinon symbolique, avec la voie classique et instaure une organisation des études secondaires qui durera jusque dans les années 1960. Avec cette réforme, des élèves des lycées peuvent suivre dès la classe de sixième un enseignement important de mathématiques et de sciences. Dans cette perspective, de nouvelles instructions relatives à l'enseignement des mathématiques dans les lycées et collèges de garçons paraissent en 1905. Pour ce qui est de la géométrie dans le premier cycle, elles rompent radicalement avec celles vues plus haut de Victor Duruy :

> « L'enseignement de la géométrie doit être essentiellement concret ; il a pour but de classer et de préciser les notions acquises par l'expérience journalière, d'en déduire d'autres plus cachées et de montrer leurs applications aux problèmes qui se posent dans la pratique. Toute définition purement verbale étant exclue, on ne devra parler d'un élément nouveau qu'en donnant sa représentation concrète et

[19]Voir, T. Assude et H. Gispert, « Les mathématiques et le recours à la pratique : une finalité ou une démarche d'enseignement ? », in D. Denis et P. Kahn (dir), *L'école républicaine et la question des savoirs. Enquête au cœur du Dictionnaire de pédagogie de Ferdinand Buisson*, Paris, CNRS Editions, 2003, p. 175-195.

[20] Pour une histoire plus complète, je renvoie aux préfaces des deux ouvrages de Bruno Belhoste (pour l'ordre secondaire) et de Renaud d'Enfert (pour l'ordre primaire) signalés dans ces notes. Dans les deux cas, la réalisation du tome consacré au vingtième siècle est en cours.

> en indiquant sa construction […]. Au point de vue de l'explication des faits, le professeur devra faire appel à l'expérience et admettre résolument comme vérité expérimentale tout ce qui semble évident aux enfants […] On aura ainsi l'occasion de montrer qu'il y a deux certitudes d'ordre différents : l'une expérimentale, qui appartient aux sciences physiques, l'autre logique, qui est celle des vérités mathématiques ; mais, il y aurait un grave inconvénient à donner à cette dernière une importance qu'elle n'a pas dans la réalité et à jeter le discrédit sur la première qui, il faut bien l'avouer, est la seule que nous possédions, puisque les principes mathématiques n'ont pas d'autres fondements, tout au moins pour les élèves. Ce qu'il importe de faire ressortir, c'est l'importance du raisonnement logique pour réduire au minimum les faits expérimentaux.[…] ».[21]

On retrouve ici, dans un texte pour l'enseignement des lycées, des préceptes pédagogiques comme la référence au concret, à l'expérience « journalière », à l'expérimental, jusqu'alors réservés au primaire. Mais la justification en est différente. Non seulement les arguments pédagogiques ne sont pas tout à fait de même nature, mais, ils ne sont pas accompagnés des mêmes limitations sociales que pour le primaire. A l'appui de cette méthode, des mathématiciens comme Henri Poincaré, Emile Borel, Jacques Hadamard apportent une « caution » épistémologique[22]. A l'occasion de cette réforme, ils expliquent que « la géométrie est véritablement une science physique », que c'est « la considération du mouvement des corps solides qui est […] la véritable source de la géométrie ». Nous sommes loin de la conception euclidienne de la géométrie ; à la suite du programme d'Erlangen, les conceptions épistémologiques des savants sur leur

---

[21] Voir B. Belhoste, opus cité, p. 673

[22] Les conférences de Poincaré et de Borel se trouvent en ligne, la première sur le site de la revue *l'Enseignement mathématique* (1904, n° 5, p. 257-283), la seconde sur le site Gallica de la BNF dans la *Revue générale des sciences pures et appliquées* (1904, n° 15, p. 431-440). On peut, à propos de ces deux conférences, voir H. Gispert, « Quelles lectures pour les conférences de mathématiques : savante, pédagogique, politique ? », dans H. Gispert, N. Hulin, MC Robic (dir), *Science et enseignement. L'exemple de la grande réforme des programmes du lycée au début du XXe siècle*, Paris, INRP-Vuibert, 2007, p. 203-222.

discipline ont changé et l'ordre et les principes euclidiens d'exposition, chers à Victor Duruy, en ont été bousculés.

Certains de ces mathématiciens, comme Emile Borel, ajoutent un autre argument d'ordre politique.

> « Il est, en effet, nécessaire d'arriver, non pas à multiplier les points de contact entre les Mathématiques et la vie moderne (ces points de contact sont innombrables et se multiplient chaque jour d'eux-mêmes), mais à mettre ces points de contact en évidence pour tous ; c'est le seul moyen d'empêcher que les mathématiques soient un jour supprimées comme inutiles par voie d'économie budgétaire. »[23]

Cette orientation nouvelle de l'enseignement des mathématiques dans les lycées qui prouverait, ce qui est vrai, que les mathématiques ne sont pas qu'abstraction, exercerait, d'après Borel, la plus heureuse influence sur la formation des élites du pays qui ne connaissent ni les sciences, ni les mathématiques. Notons, ce qui peut être intéressant dans la perspective de votre colloque, qu'Emile Borel développe cette argumentation en conclusion d'une conférence sur les nouveaux programmes intitulée « Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire » dans laquelle il propose de créer de vrais laboratoires de mathématiques dont l'idéal serait pour lui, par exemple, un atelier de menuiserie qui permette de réaliser des modèles simples. Modélisation ? Expérimentation ? Le recours ici au pratique, au concret, à l'expérimental peut provoquer un changement de perspective par rapport aux références contemporaines plus théoriques de ces deux mots.

Dernier moment, les années 1960 qui marquent, avec la fin du système dual, un changement de cadre radical pour toutes les questions scolaires, dont celles de contenus et de méthodes. L'école élémentaire devient alors la première étape, pour tous, d'une scolarisation prolongée. L'école primaire élémentaire n'a plus la charge sociale de devoir fournir en cinq ans tout ce dont un enfant aura besoin au cours de sa vie. Il existe dorénavant, pour tous, après l'école, un avenir scolaire, dans un premier temps

[23] Voir la conférence d'Emile Borel.

diversifié avec des cursus et des établissements différents, puis, à partir de 1975, dans le « collège unique » de René Haby.

Un résultat immédiat, pour les mathématiques de l'école élémentaire, est un allègement des programmes. Mais comment choisit-on d'alléger ? Quelles mathématiques choisit-on alors d'enseigner à l'école ? La massification scolaire se télescope avec un phénomène qui touche le champ mathématique et intellectuel et savant de ces années, celui des « mathématiques modernes ». Les nouvelles réponses pour les programmes de mathématiques sont ainsi le fruit de deux changements profonds, un premier d'ordre social, un second d'ordre savant, ce dernier affectant mathématiques, psychologie de l'enfant, pédagogie, etc. Ainsi, la circulaire du 2 janvier 1970 concernant les programmes de mathématiques à l'école élémentaire, indique :

> « Il s'agit dès lors de faire en sorte que cet enseignement contribue efficacement au meilleur développement intellectuel de tous les enfants de six à onze ans afin qu'ils entrent dans le second degré avec les meilleures chances de succès. L'ambition d'un tel enseignement n'est donc plus essentiellement de préparer les élèves à la vie active et professionnelle en leur faisant acquérir des techniques de résolution de problèmes catalogués et suggérés par la « vie courante », mais bien de leur assurer une approche correcte et une compréhension réelle des notions mathématiques liées à ces techniques. »[24]

A la lecture de certaines de ces notions et techniques, on reconnaît la marque de ces « mathématiques modernes » : ainsi, la mention qui est faite du langage des ensembles, des « relations mathématiques et quelques structures associées à ces relations », etc. Le rapport préliminaire de 1967 de la commission ministérielle sur l'enseignement mathématique, « la commission Lichnérowicz »[25], traduit une autre dimension très historiquement située de la réponse à la question « Quelles mathématiques

[24] Circulaire du 2 janvier 1970 concernant le programme de mathématiques à l'école primaire, citée dans R. d'Enfert, « L'enseignement mathématique à l'école primaire de la Troisième République aux années 1960 : enjeux sociaux et culturels d'une scolarisation « de masse », *Gazette des mathématiciens*, n° 108, avril 2006.

[25] Ce rapport a été publié dans le *Bulletin de l'APMEP*, n°258, 1967, p. 246 et suivantes.

enseigner ? »[26]. Les mathématiques n'y apparaissent plus seulement comme l'outil privilégié de la physique ; elles sont avant tout – et ce ne sont pas les seuls mathématiciens qui le décrètent mais l'ensemble des milieux intellectuels y compris des sciences de l'homme et de la société – l'outil par excellence pour accéder, grâce aux structures et à la modélisation, à la connaissance du réel, de la nature, du social, de l'homme. Ainsi l'éventail des sciences qui ont alors à faire avec les mathématiques, des ressources mathématiques à mobiliser, s'élargit considérablement, y compris dès le primaire dans la perspective d'une scolarisation prolongée. Le lien pédagogique des mathématiques au concret, à l'expérience, à la société bouge ainsi à nouveau, mais cette fois-ci de concert dans l'élémentaire et le secondaire.

Je voudrais en conclusion reprendre un élément de la discussion qui a suivi cet exposé ouvrant sur la période du collège unique jusqu'à aujourd'hui. Un projet de recherche d'histoire de l'enseignement est actuellement en cours pour approfondir l'articulation entre les réformes institutionnelles de ce temps de la massification du secondaire et toutes les réformes disciplinaires lourdes qui leur sont contemporaines. Avec ce moment historique du collège unique, où il y a confluence des deux ordres scolaires anciens, il semble, ce qui sera à confirmer, que l'ordre secondaire – c'est-à-dire ses valeurs, ses maîtres (agrégés par définition sinon en réalité), ses méthodes, ses fonctions, ses contenus, ses finalités (toujours avant tout théoriques et désintéressées) - a *naturellement* recouvert les valeurs, les maîtres, les contenus, les méthodes, les finalités de l'ordre primaire. *Naturellement*, car la démocratisation a été pensée alors par tous comme devant offrir au plus grand nombre ce qui était alors le modèle de l'élite sociale et intellectuelle, le modèle *naturellement* meilleur du secondaire des lycées. Il n'y a ainsi eu aucune réflexion spécifique, semble-t-il, ni en mathématiques, ni dans d'autres disciplines, sur ce qu'auraient dû ou pu être des contenus pensés pour toute une clase d'âge. Pourquoi devoir prendre le modèle de l'élite pensé pour une finalité toute particulière qui n'était pas celle de toute une classe d'âge ? La question n'est pas ici de

---

[26] Voir à ce propos, l'article H. Gispert, « Pour quoi, pour qui enseigner les mathématiques ? Une mise en perspective historique des finalités et des contenus des programmes de mathématiques dans la société française au XXe siècle, Bulletin de l'APMEP, n° 438, janvier 2002. Cet article se trouve également en ligne sur le site cultureMATH (http://www.dma.ens.fr/culturemath/).

juger de ce qui est mieux ou non dans l’absolu, elle est celle du rôle de la formation, de l’école, de ses contenus. Il sera intéressant, avec cette recherche, de chercher à démonter cette évidence qui s’est imposée pour des raisons idéologiques, politiques au sens le plus tranquille du terme et qui a fait que le modèle qui s’appliquait aux 10 % d’une classe d’âge qui se trouvaient au lycée, a recouvert sans discussion celui des 90 % scolarisés dans l’ordre primaire. Il y a probablement là un écho aux difficultés du collège unique et aux débats actuels sur la définition d’un socle commun de connaissances.

L'expérimentation en mathématiques

La science ne nous apprend rien,
c'est l'expérience qui nous apprend quelque chose.
R. Feynman

Introduction

Je remercie les organisateurs du colloque de la Copirelem de m'avoir invité à faire cette conférence[1]. Initialement, la demande qui m'avait été faite était de parler de modélisation et d'expérimentation en mathématiques, mais, après réflexion, j'ai choisi de n'aborder ici que la question de l'expérimentation. J'ai choisi cette option pour deux raisons. D'abord, le temps qui m'est imparti me semble trop court pour aborder valablement les deux questions et, même si toutes deux m'intéressent, j'ai choisi celle qui me faisait le plus envie. Ensuite, en y réfléchissant bien, je ne suis pas sûr que ces deux notions, qui sont évidemment corrélées dans les sciences expérimentales, soient forcément liées en mathématiques. Je verrais plutôt la modélisation comme l'une des réponses à la question : pourquoi faire des mathématiques, tandis que l'expérimentation serait, elle, l'une des réponses à la question : comment faire des mathématiques.

Il me semble que parmi les raisons de faire des mathématiques, et partant, de les enseigner, l'une des plus importantes, la plus importante sans doute vis-à-vis du monde extérieur, est à chercher dans leurs innombrables applications, à des niveaux et dans des domaines variés. C'est tout cela que j'ai envie d'englober dans le mot modélisation : la description du réel au moyen des mathématiques. Cette utilité des mathématiques est fondamentale à l'école primaire et elle est assez bien reconnue, chacun comprenant bien qu'il lui sera utile de savoir "compter" dans la plupart des situations de la vie courante, ou encore d'être familier avec les objets géométriques les plus élémentaires. Elle est peut-être moins évidente au collège et au lycée où l'apport des mathématiques n'est pas toujours clair (je pense ici à l'utilisation de l'algèbre et à l'apprentissage de la démonstration, notamment en géométrie). Ce qui est évident, en tous cas, c'est qu'au niveau de l'enseignement supérieur

[1] Une version longue de ce texte, citée [DP] dans ce qui suit, est disponible en ligne à l'adresse suivante : @@

scientifique et technologique, les mathématiques sont un outil indispensable et qu'il est d'un intérêt capital pour le pays que le système scolaire forme suffisamment de chercheurs, d'ingénieurs, de techniciens dotés d'un bagage mathématique important. Si je n'aborde pas ce point ici, ce n'est donc pas parce que je pense qu'il est mineur, mais parce que je me sens peu qualifié pour en parler, car les mathématiques que je pratique, comme chercheur, n'ont pas d'applications – pas encore ? – à ma connaissance et je suis donc mal placé pour développer ce point. J'ai cependant essayé de faire cela, dans une conférence prononcée devant la régionale d'Alsace de l'APMEP en 2003. Je renvoie le lecteur qui souhaiterait connaître ma position sur ce point à l'article de *L'Ouvert* issu de cette conférence (numéro 109 d'avril 2004).

Mais, à côté de cette raison utilitaire, l'enseignement et la pratique des mathématiques ont une autre raison d'être : ils contribuent à former les citoyens au raisonnement et à la réflexion, donc à leur donner les outils pour comprendre le monde et le regarder avec un esprit critique. C'est à ce deuxième aspect que renvoie la question : comment faire des mathématiques. En effet, on peut tout à fait enseigner les mathématiques de manière rigide, formelle, contraignante et insipide. On le voit trop souvent dans les classes, à tous les niveaux[2], et c'est d'ailleurs souvent ainsi que le grand public les perçoit. Je pense qu'on ne remplit pas alors l'objectif d'apprendre à raisonner, à penser, en un mot. Pour éviter cette dérive, l'une des solutions essentielles me semble être de revenir à la vocation première des mathématiques et de leur enseignement, qui est de poser[3] et de résoudre des problèmes. C'est dans ce cadre que j'évoquerai l'expérimentation, comme méthode de recherche et d'investigation. Je vais même faire de ce principe la première d'une longue série de maximes[4] que je soumets à votre réflexion :

0.1 Maxime. *Faire des mathématiques, c'est poser et – si possible – résoudre des problèmes.*

Un mot sur les raisons de ma présence parmi vous. Comme vous le savez peut-être, je n'ai aucune expérience de l'enseignement en formation des professeurs des écoles[5], même si j'ai beaucoup parlé depuis quinze ans, avec des

[2]Y compris dans l'enseignement supérieur.

[3]De manière provocatrice, sans doute parce que c'est ce je sais le mieux faire, j'ai envie de dire que c'est cela le plus important, battant en brèche une tradition séculaire de l'enseignement des mathématiques, qui ne sort que rarement du : "montrer que".

[4]Ces maximes n'ont aucune valeur prescriptive : elles me permettent seulement de préciser ma propre vision des choses.

[5]Hormis au niveau de la licence pluridisciplinaire d'Orsay que j'ai mise en place et où j'ai enseigné pendant sept ans, mais il s'agit d'une licence, donc quelque chose qui se situe avant la formation des PE proprement dite.

formateurs PE de l'IUFM de Versailles et d'ailleurs. Ma légitimité (s'il en est une !) est donc à chercher ailleurs. J'imagine qu'elle réside dans mon statut de chercheur, donc de créateur (modeste) de mathématiques et dans ma longue expérience d'enseignant. En vérité, sur ce thème de l'expérimentation, ce que je peux savoir des pratiques de l'école et de la formation des maîtres du primaire, semble indiquer que je vais prêcher nombre de convaincus et enfoncer beaucoup de portes ouvertes, en prônant une pratique qui est probablement la vôtre depuis belle lurette. J'espère simplement que vous ne m'en tiendrez pas rigueur.

1 Faire des mathématiques

1.1 Introduction

Mon point de départ est le document d'accompagnement des programmes de mathématiques de l'école primaire[6], et précisément le paragraphe qui concerne les "problèmes pour chercher". Je cite le document en question :

[Il s'agit] de véritables problèmes de recherche, pour lesquels [les élèves] ne disposent pas de solution déjà éprouvée et pour lesquels plusieurs démarches de résolution sont possibles. C'est alors l'activité même de résolution de problème qui est privilégiée, dans le but de développer chez les élèves un comportement de recherche et des compétences d'ordre méthodologique : émettre des hypothèses et les tester, élaborer une solution originale et en éprouver la validité, argumenter.

Je souscris tout à fait à cette vision de l'activité de recherche, qui est voisine de ma propre pratique, non seulement dans ma fonction de chercheur, mais aussi, mais surtout, dans mon activité quotidienne d'enseignant. En particulier j'utilise systématiquement, pour résoudre des problèmes, une méthode que je n'hésite pas à qualifier d'expérimentale. J'appelle ici problème une question mathématique, en général ouverte, soit que je me la soit posée tout seul, soit qu'elle me l'ait été par un collègue ou un étudiant[7].

[6]Voir aussi [Arsac], [Kuntz], [Massola] entre autres.

[7]Je n'entends donc pas du tout ici le mot problème au sens scolaire du terme comme un problème de Bac ou un problème de CAPES. D'une certaine façon, ces problèmes là sont (en général) le contraire de vrais problèmes car les élèves qui les résolvent n'ont ni à se poser les questions, ni à faire preuve d'initiative pour les résoudre, mais au contraire à se couler dans la pensée de l'auteur du problème en appliquant les techniques adéquates. Attention, je ne dis pas que de tels problèmes ne sont pas utiles. Ils ont pour fonction de vérifier les acquisitions d'un certain nombre de techniques et de modes de raisonnements sans lesquels on ne peut pas faire de mathématiques. Mais ce n'est pas de cela dont je parle aujourd'hui.

J'essaierai dans ce qui suit de décrire de façon générale cette méthode expérimentale et de l'illustrer par des exemples concrets. Comme je l'ai dit plus haut, je ne fais pas ici de lien direct avec l'activité de modélisation. Il se trouve que, ni ma recherche, ni l'essentiel de mon enseignement, ne se situent dans le domaine des mathématiques appliquées et les exemples que je prendrai viendront donc des mathématiques pures (arithmétique, géométrie, analyse). Il me semble que cela ne fait que renforcer ma thèse : la méthode expérimentale est universelle en mathématiques, qu'elles soient appliquées ou non.

En discutant avec Hélène Gispert à propos de nos conférences respectives, un fait nous a frappés tous deux : le souci de prôner une méthode expérimentale dans l'enseignement des mathématiques, qui apparaît dans le document d'accompagnement cité ci-dessus, est quelque chose de nouveau dans les programmes, même au niveau de l'école primaire. La question qui se pose est donc de savoir à quelle visée, notamment sociale, répond cette nouvelle demande. On peut penser que la perte d'importance des techniques opératoires, liée à l'évolution technologique y est pour beaucoup. En tous cas, il est clair que les nécessités économiques d'aujourd'hui et la structure de la société n'ont rien à voir avec celles de la fin du XIX-ième siècle, ni même avec celles des années 1950. Peut-être certains pourraient-ils en prendre conscience ...

1.2 Quelques problèmes

On part d'une situation, de nature mathématique ou au moins mathématisable (ce pourrait être une situation de la vie courante, dans ce cas il y a d'abord une phase de modélisation). Cette situation peut donner lieu à un ou des problèmes. Je vais, tout au long de cet exposé, étudier plusieurs problèmes qui illustreront mes propos en me servant de fils conducteurs[8] (et je vous en laisserai quelques autres à dérouler vous mêmes). Je les énumère ici, *grosso modo* dans un ordre de difficulté croissante. Tous sauf le dernier sont des questions que j'ai rencontrées dans mon enseignement. Certains sont élémentaires, d'autres moins, ils sont formulés de manière plus ou moins vague, mais on verra que l'approche est similaire dans tous les cas. J'ai choisi de privilégier l'authenticité en sélectionnant des problèmes que j'ai vraiment rencontrés[9]. En contrepartie, ils ne concernent pas nécessairement l'école primaire, mais la démarche devrait être valable à n'importe quel niveau.

[8]Dans l'exposé oral, j'ai abordé seulement les problèmes 2,3,4,6,10,11.

[9]Et j'ai dû me censurer pour ne pas en proposer de nombreux autres ; les problèmes sont comme les têtes de l'Hydre de Lerne : on en résout un, il en surgit dix autres !

1.2.1 Les aires égales

On considère un triangle ABC (fig. 1). Quels sont les points M du plan qui vérifient l'égalité d'aires $\mathcal{A}(AMB) = \mathcal{A}(AMC)$? Variante : quels sont les points du plan qui sont tels que le rapport d'aires $\mathcal{A}(AMB)/\mathcal{A}(AMC)$ soit une constante positive donnée ?

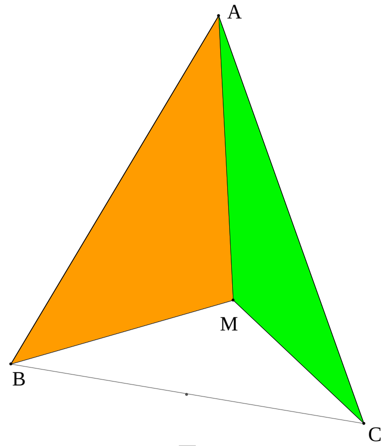


Figure 1

1.2.2 La longueur du segment mobile

Soit ABC un triangle rectangle en A, P un point de l'hypoténuse et M, N ses projetés orthogonaux sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$ respectivement. Pour quelle position du point P la longueur MN est-elle minimale ?

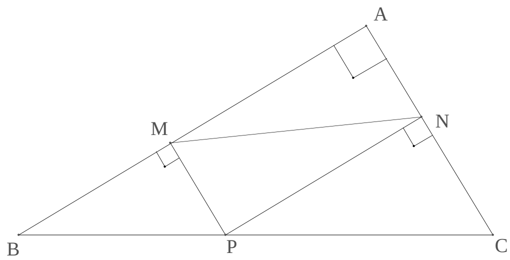


Figure 2

1.2.3 Sommes et différences de carrés

Tous les entiers ne sont pas des carrés parfaits, mais de nombreuses questions d'arithmétique consistent à essayer de représenter les entiers à l'aide des carrés. Par exemple : tout entier naturel est-il somme de deux carrés (ou de plus de deux) ? est-il différence de deux carrés ? est-il de la forme x^2+5y^2 ? de la forme x^2+dy^2 avec d entier >0 fixé ?

1.2.4 Les développements décimaux

On considère un nombre rationnel $\frac{p}{q}$ et on effectue la division euclidienne de p par q en base 10, en écrivant aussi les chiffres derrière la virgule. On obtient un développement décimal. Que peut-on dire de ce développement ?

1.2.5 Les fractions égyptiennes

Les anciens égyptiens utilisaient des fractions, mais seulement de numérateur 1, c'est-à-dire de la forme $\frac{1}{n}\cdot$ Bien sûr, tout nombre rationnel s'écrit comme somme de fractions égyptiennes : il suffit de répéter la même fraction :

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q}, \qquad (p \text{ fois})$$

mais on peut se demander si tout rationnel positif peut s'écrire comme somme finie de fractions égyptiennes de dénominateurs *tous différents*. Parmi les variantes de ce problème : peut-on écrire 1 comme somme de deux ou trois ou quatre ou ... fractions égyptiennes distinctes, cf. [Arsac].

1.2.6 Le reste de la série

Il s'agit d'un exercice qu'on trouve dans certains manuels de terminale S. On étudie la suite :

$$u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot$$

Le lecteur aura reconnu le développement en série de $\operatorname{Arctan} 1 = \pi/4$. L'exercice permet de montrer, en utilisant le calcul de la somme des termes d'une suite géométrique, que la suite (u_n) converge effectivement vers $\pi/4$ et qu'on a, plus précisément :

$$r_n = \left|u_n - \frac{\pi}{4}\right| = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \leq \frac{1}{2n+3}\cdot$$

La question est de savoir si cette majoration du reste est optimale ou non, ou encore de trouver un équivalent de r_n.

1.2.7 Les suites logistiques

Cet exemple est l'occasion de parler de modélisation et précisément du modèle dit "logistique à temps discret" d'évolution de populations. Dans ce modèle, la population est bornée et si on appelle u_n le rapport entre la population au temps (discret) n et la population maximum, on a une relation de récurrence $u_{n+1} = \mu\, u_n(1-u_n)$, avec $0 \leq u_0 \leq 1$ et $0 \leq \mu \leq 4$. La question est d'étudier le comportement d'une telle suite.

1.2.8 Les médiatrices hyperboliques

Chacun sait que les hauteurs, médiatrices, etc. d'un triangle sont concourantes en géométrie euclidienne, mais qu'en est-il en géométrie non euclidienne (par exemple en géométrie hyperbolique) ?

2 La démarche expérimentale

Face à une situation comme celles évoquées ci-dessus, plus ou moins vague, avec des questions qui peuvent être très imprécises (voir par exemple 1.2.7), je propose une méthode d'investigation systématique, que je n'hésite pas à désigner sous le nom de méthode expérimentale. Elle comprend plusieurs étapes, à répéter éventuellement :

- expérience,
- observation de l'expérience,
- formulation de conjectures,
- tentative de preuve,
- contre-expérience, production éventuelle de contre-exemples,
- formulation de nouvelles conjectures,
- nouvelle tentative de preuve, etc.

2.1 L'expérience

Il n'est sans doute pas inutile d'expliquer un peu plus en détail ce que peut signifier ce recours à l'expérience[10] et quel est son intérêt. Fondamentalement, cela signifie que, face à un problème général, on va regarder d'abord un cas particulier, *a priori* plus simple, plus facile à examiner, plus aisément calculable, et le faire varier éventuellement. On examine ce qui se passe dans ce cas, on y repère des phénomènes, avec toujours en tête l'idée de **généraliser** ce que l'expérience nous aura montré.

On peut résumer cette démarche sous forme d'une maxime :

2.1 Maxime. *Les mathématiques sont aussi une science expérimentale et une science d'observation.*

Dans le choix des cas particuliers à étudier, il convient d'éviter certains cas triviaux, qui ne méritent pas un examen approfondi. Attention, le mot trivial dépend évidemment des connaissances de chacun, il n'a pas le même sens pour un élève de l'école primaire et pour un chercheur confirmé[11], mais

[10] Après tout, on ne range pas ordinairement les mathématiques parmi les sciences expérimentales et il subsiste d'ailleurs une différence fondamentale entre les deux domaines, car si la découverte en mathématiques peut être largement expérimentale, la validation reste la démonstration. Mais c'est la part que représente celle-ci qui est discutable. Martin Andler (cf. [Andler]) dit que les mathématiques consistent en 45% d'observation, 45% de démarche expérimentale et 10% de démonstration. Je ne dirais sans doute pas exactement les choses comme lui, mais cela me paraît essentiellement juste.

[11] Par exemple, quand j'examine le problème de savoir si les nombres $n^2 + n + 11$ sont tous premiers, posé par [Sauter] et repris dans [Froger], je ne peux pas m'empêcher de

ce qui est commun à tous c'est l'idée de regarder **le premier exemple non trivial**, le premier que l'on ne comprend[12] pas complètement[13].

Peut-être n'est-il pas inutile de donner quelques indications sur ce que j'entends par exemple trivial (et de noter qu'on peut parfois remettre en question cette appellation). S'il s'agit de représenter les entiers à l'aide de carrés, les carrés parfaits sont triviaux[14] (puisqu'on a $a^2 = a^2 \pm 0^2$). Les fractions $1/n$ sont déjà égyptiennes et leur décomposition est toute trouvée (quoiqu'on puisse aussi en chercher d'autres décompositions ...).

Un deuxième point est plus subtil. En fait, ce que l'on espère de l'exemple que l'on a choisi d'étudier, c'est qu'il soit un exemple **générique**, c'est-à-dire un exemple où les comportements observés vont s'étendre au cas général. Mais il arrive souvent que, même si l'exemple est non trivial, il soit cependant trop particulier, et qu'il induise une généralisation incorrecte. J'ai rencontré plusieurs exemples de ce type en recherche. Dans l'un d'eux, il y a quelques années, il a fallu revenir à la charge plusieurs fois, avec des exemples de plus en plus complexes, avant de comprendre vraiment ce qui se passait.

2.2 Maxime. *Pour trouver un exemple générique, on commence par étudier le premier exemple non trivial*[15].

Cet aspect expérimental est lié à la technologie dont on dispose. Dans les exemples ci-dessus j'utiliserai papier et crayon (dans tous les exemples, mais notamment 1.2.3, 1.2.4), une calculatrice évoluée (exemples 1.2.4, 1.2.5, 1.2.6, 1.2.7), un ordinateur, avec notamment le logiciel Cabri (1.2.1, 1.2.2, 1.2.8).

2.2 Les conjectures

C'est l'un des moments les plus amusants de la recherche, l'un de ceux où l'on peut donner libre cours à son imagination. Il m'est impossible d'évoquer

reconnaître une question liée aux anneaux d'entiers des corps $\mathbf{Q}(i\sqrt{d})$ et cela me permet d'en envisager deux variantes avec 17 et 41 au lieu de 11. Cela étant, il y a beaucoup de questions sur ce thème pour lequelles je n'ai pas de réponse et donc où je dois expérimenter : comment construire des n tels que le nombre soit non premier, etc.

[12] L'expérience montre qu'on a souvent intérêt à revenir sur des exemples qu'on jugeait initialement trop simples !

[13] Dans mon domaine de recherche, la théorie des courbes gauches, le premier exemple non trivial est celui de la cubique gauche. Lorsque j'animais un groupe de travail pour des étudiants de DEA, ils avaient très vite compris que s'ils voulaient me faire plaisir, il fallait réussir à caser la cubique gauche dans chaque exposé ...

[14] Sauf si l'on souhaite les écrire comme somme de deux carrés non nuls ...

[15] Mais on reste conscient que le chemin peut être long.

cette phase du travail de recherche sans citer Alexandre Grothendieck, l'un des plus grands mathématiciens du XX-ème siècle :

Quand je suis curieux d'une chose, mathématique ou autre, je l'interroge. Je l'interroge, sans me soucier si ma question est peut-être stupide ou si elle va paraître telle ... Souvent la question prend la forme d'une affirmation – une affirmation qui, en vérité est un coup de sonde. ... Souvent, surtout au début d'une recherche, l'affirmation est carrément fausse – encore fallait-il l'écrire pour que ça saute aux yeux que c'est faux, alors qu'avant de l'écrire il y avait un flou, comme un malaise, au lieu de cette évidence. Ça permet maintenant de revenir à la charge avec cette ignorance en moins, avec une question-affirmation peut-être un peu moins "à côté de la plaque".

Je n'ai jamais rencontré Grothendieck, mais je souscris absolument à sa façon de voir les choses et je me reconnais comme son disciple sur ce point. J'ai moi-même la conjecture facile, comme vous le verrez (mon collègue Robin Hartshorne parle de conjectures "au sens de Daniel") et la plupart de mes conjectures ne vivent que ce que vivent les roses, et encore[16]. Je vais maintenant examiner cette phase sur les divers exemples évoqués ci-dessus. Sur ce sujet, la maxime que je propose est :

2.3 Maxime. *Il faut for-mu-ler.*

Cela signifie qu'il faut dire ce qu'on voit dans l'expérience, et si possible tout ce qu'on voit et rien que ce qu'on voit.

2.2.1 Les aires égales

L'outil d'expérimentation est Cabri, ou un autre logiciel de géométrie, qui permet d'afficher les aires des triangles et de regarder comment elles varient avec M. Une conjecture se dégage assez vite, car on voit apparaître la médiane issue de A. On propose :

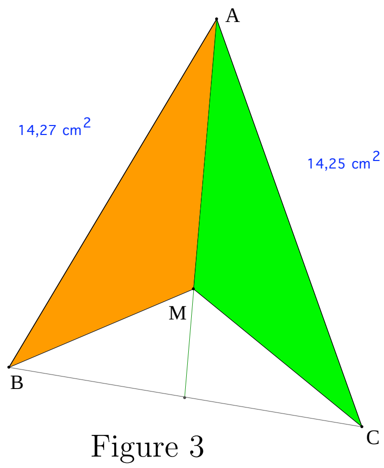


Figure 3

2.4 Conjecture. *Les aires de AMB et AMC sont égales si et seulement si M est sur la médiane de ABC issue de A.*

[16] L'un des principaux intérêts de l'expérience, notamment grâce aux moyens modernes, c'est justement de repérer très vite les conjectures fausses, c'est-à-dire les fausses pistes.

2.2.2 La longueur du segment mobile

Ce problème a été proposé par Mireille Sauter, cf. [Sauter], et repris dans sa classe de cinquième par Magali Froger (cf. [Froger]). Une première remarque c'est que la bonne conjecture, dans une vraie classe, et sans utilisation de logiciel de géométrie, n'est pas si évidente à se dégager : les élèves pensent d'abord au milieu de $[BC]$, puis à la bissectrice. Ces conjectures ne résistent pas à l'utilisation de Géoplan, avec lequel la conjecture émerge très vite :

2.5 Conjecture. *Le minimum de MN est atteint lorsque P est le projeté orthogonal de A sur (BC).*

Cet exemple est révélateur de l'un des intérêts principaux de l'expérimentation qui est la fermeture des fausses pistes. C'est notamment le cas avec les logiciels de géométrie. Quand on étudie un problème de géométrie (ouvert, bien entendu), on cherche souvent à établir des résultats intermédiaires et, avec Cabri, il est très facile de savoir rapidement si telle propriété que semble suggérer la figure est robuste ou non : il suffit de bouger les données. Dans le même ordre d'idée, les macros du type “lieu géométrique” sont aussi précieuses, soit qu'elles montrent aussitôt la nature du lieu (par exemple, un cercle, une droite, une conique), soit, au contraire, qu'elles montrent un lieu qui n'est manifestement pas une courbe usuelle (au sens moderne et donc restrictif du terme : plus personne ne connaît les courbes “remarquables” de nos ancêtres). Un bon exemple de ce style est donné par le problème suivant.

On considère un cercle Γ, un point A et une longueur l. Un point M décrit Γ, on appelle H le milieu de $[AM]$ et on construit P vérifiant $\widehat{MHP} = \pi/2$ et $HP = l$. Quel est le lieu de P ?

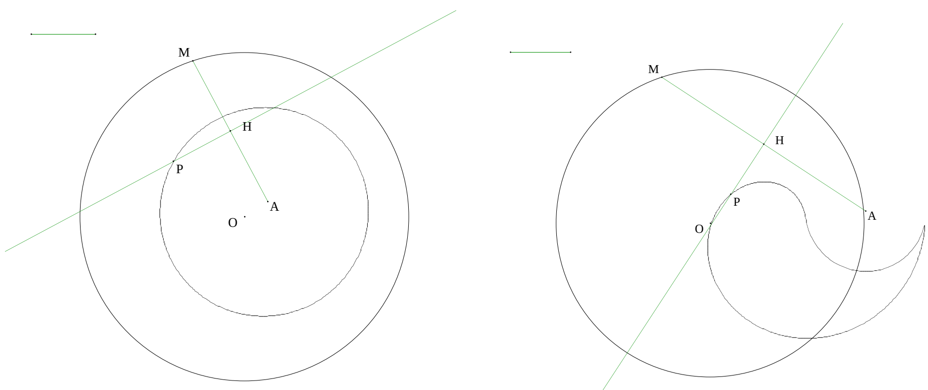


Figure 4

En faisant tracer le lieu par Cabri, et en déplaçant le point A, on voit que, pour certaines positions, il s'agit d'une courbe qu'une droite coupe en 4 points, ce qui permet de subodorer une courbe algébrique de degré ≥ 4, que l'on ne pourra atteindre que par le calcul.

Cela vaut bien une nouvelle maxime :

2.6 Maxime. *Un des intérêts de l'expérience, parfois, c'est de se rendre compte que le problème est difficile.*

2.2.3 Les sommes ou différences de carrés

C'est typiquement un problème où l'expérience est importante et parfois décisive. La première chose à faire pour pouvoir travailler est de disposer d'une liste des carrés (disons de 0 à 144). Voilà la liste :

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144.$$

Ensuite, si l'on cherche quels sont les entiers différences[17] de deux carrés, on peut faire une première liste en retranchant deux carrés consécutifs, puis deux carrés sous-consécutifs, etc. Voilà ce qu'on obtient :

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23$$

$$4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44$$

$$9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57, 63$$

$$16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80...$$

L'observation fait apparaître plusieurs faits :

• il semble qu'on atteint tous les nombres impairs,

• il semble qu'on atteint aussi tous les multiples de 4,

• en revanche il semble bien que l'on n'atteint pas les multiples de 2 qui ne sont pas multiples de 4.

La conjecture est donc la suivante :

2.7 Conjecture. *Les entiers n qui sont différences de deux carrés d'entiers sont les nombres impairs et les nombres multiples de* 4.

Pour les sommes de deux carrés, les choses sont plus compliquées. On voit facilement que certains nombres n'en sont pas : $3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, 19$, etc. Ensuite, les choses dépendent beaucoup des connaissances de l'expérimentateur ! Je conseille au lecteur de faire l'expérience : s'il ne connaît pas la réponse à la question des deux carrés, qu'il essaie donc de produire une conjecture permettant de décider si un entier est, ou non, somme de deux carrés. Il pourra alors s'assurer expérimentalement de sa solidité. S'il est plus savant, il pourra essayer avec les entiers sommes de trois carrés, ou ceux de la forme $x^2 + 5y^2$, voire d'autres.

[17] Ce n'est sans doute pas le problème le plus naturel, mais c'est le plus facile !

2.2.4 Les développements décimaux

Commençons par le commencement. On calcule $1/2 = 0,5$, puis $1/3 = 0,3333\ldots333\ldots$. Rien que sur ces deux exemples, on voit déjà qu'il y a deux sortes de développements, certains sont finis, d'autres infinis. On continue avec $1/4 = 0,25$ puis $1/5 = 0,2$ et $1/6 = 0,1666\ldots666\ldots$. Le premier exemple non trivial, qui, on l'a vu, doit être l'objet de toute notre attention, est $1/7$ car on y voit apparaître une période non triviale : $1/7 = 0,142857\,142857\ldots$. On peut poursuivre l'expérience avec beaucoup d'autres exemples. Ici les choses sont très différentes selon que l'on fait les divisions à la main ou avec une calculatrice. La calculatrice permet de déceler de nombreux phénomènes, mais pas nécessairement de comprendre ce qui se passe[18]. Si on a le courage de faire la division à la main, en revanche, on comprend aussitôt le pourquoi de la périodicité. Dans le cas de $1/7$ par exemple, comme il n'y a que 6 restes possibles dans une division d'un nombre par 7 qui ne tombe pas juste (1, 2, 3, 4, 5, 6), on est sûr qu'au bout de 6 divisions au plus on va retomber sur une qui a déjà été vue (dans le cas de la division de 1 par 7 les restes apparaissent dans l'ordre[19] $1, 3, 2, 6, 4, 5$). On a donc trouvé (et essentiellement prouvé) un théorème :

2.8 Théorème. *Le développement décimal du rationnel p/q est périodique avec une période de longueur $\leq q-1$.*

Si l'on est vraiment très imprudent, on peut se hasarder à prédire que la longueur de la période est toujours $q-1$, mais comme les expériences déjà effectuées contredisent cette conjecture ...

2.2.5 Les fractions égyptiennes

Nous nous limiterons ici au cas des rationnels plus petits que 1, voir [DP] annexe, pour le cas général.

On peut commencer par les fractions les plus simples : $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, etc. On trouve rapidement des expressions égyptiennes pour chacun de ces cas :

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6},\ \ \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4},\ \ \frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15},\ \ \frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}.$$

Pour trois d'entre elles, on avait une fraction a/b plus grande que $1/2$. On a donc déjà pris $1/2$ parmi les égyptiennes et, par chance, ce qui restait : $a/b - 1/2$ était une fraction égyptienne. Pour $2/5$, qui est $< 1/2$, on a utilisé $1/3$. Cela conduit d'abord à proposer la conjecture :

[18] Et elle est vite limitée. Par exemple, on ne voit pas d'emblée la période des dix-septièmes, même sur une bonne calculatrice.

[19] Question : pourquoi cet ordre ?

2.9 Conjecture. *Tout rationnel positif plus petit que* 1 *est somme d'un nombre fini de fractions égyptiennes distinctes.*

De plus, cela nous donne une idée pour trouver ces fractions : on prend comme première fraction égyptienne la plus grande possible. Et si la différence n'est pas égyptienne comme pour $\frac{3}{7}-\frac{1}{3}=\frac{2}{21}$? Eh bien, on recommence avec la fraction obtenue : $\frac{2}{21}-\frac{1}{11}=\frac{1}{231}$ et c'est gagné.

2.2.6 Le reste de la série

La formule de la somme de la suite géométrique :

$$1-t^2+t^4-\cdots+(-1)^n t^{2n}=\frac{1+(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}$$

donne, en intégrant de 0 à 1, la formule annoncée en 1.2.6 :

$$u_n-\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}-\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=(-1)^n\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt.$$

Il s'agit donc d'estimer l'intégrale $r_n=\displaystyle\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$. Pour cela, on peut encadrer le dénominateur entre 1 et 2, ce qui nous conduit à l'encadrement :

$$\frac{1}{2(2n+3)}=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{2n+2}\,dt\le\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt\le\int_0^1 t^{2n+2}\,dt=\frac{1}{2n+3}\cdot$$

C'est déjà très satisfaisant car on voit que u_n converge bien vers $\pi/4$ et que la convergence est bien de l'ordre de $1/n$. Mais, il reste une question : r_n est-il équivalent à $\frac{1}{2n+3}$, $\frac{1}{2(2n+3)}$, à quelque chose d'intermédiaire, voire à rien du tout ? Mon expérience est qu'il est difficile de démontrer quelque chose quand on ne sait pas ce qu'il faut démontrer ! Pour se faire une idée, on a ici un outil excellent avec les calculatrices. On calcule explicitement soit la différence entre $\pi/4$ et la somme u_n (avec la fonction Σ de la TI-Voyage 200), soit une valeur approchée de l'intégrale (avec la fonction $\int$), avec un n tel que $2n+3$ soit voisin de 1000 ($n=499$). On trouve, dans les deux cas[20] $0,0004999995$, ce qui est, à très peu près, égal à $\frac{1}{2(2n+3)}\cdot$ C'est donc la borne inférieure de l'intervalle qui semble être l'équivalent et il n'y a plus qu'à prouver la conjecture :

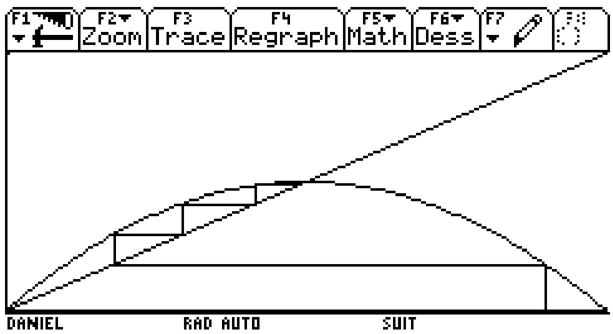
[20]Respectivement en 14 secondes et 25 secondes.

2.10 Conjecture. *La suite* $r_n = \left|1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} - \frac{\pi}{4}\right|$ *est équivalente à* $\frac{1}{2(2n+3)}$.

2.2.7 Les suites logistiques

Les calculatrices actuelles sont une aide précieuse pour étudier de telles suites. On peut faire quelques expériences avec $\mu = 0,5$ et des valeurs initiales variées dans $[0,1]$, disons $u_0 = 0,1$, $u_0 = 0,2$, ..., $u_0 = 0,9$ par exemple. La suite semble être décroissante et converger vers 0 et cela semble être toujours le cas si l'on répète l'expérience avec des valeurs $\mu < 1$. Pour $\mu = 2$ en revanche (voir ci-dessous écran 1), la suite semble croître (au moins à partir du deuxième terme) et converger vers $0,5$ et cela semble vrai encore pour $\mu = 1,3$ ou $1,7$. Si l'on est à la fois paresseux et optimiste, on peut faire une conjecture "à la Daniel" :

2.11 Conjecture. *La suite* (u_n) *est monotone et converge*[21].



Écran 1

2.2.8 Les médiatrices hyperboliques

Un mot pour justifier ce choix de la géométrie hyperbolique. Mon objectif est de mettre le lecteur en situation d'élève, en lui proposant de se confronter à une situation sur laquelle, contrairement peut-être aux autres problèmes, il ne connaît pas tout d'avance. Dans cette situation l'expérimentation prend tout son sens, comme moyen de familiarisation avec le domaine. Un moyen merveilleux pour cela consiste à utiliser les macros mises en place par Yves Martin, voir [Martin] ou :

[21]Quand on est instruit, on sait que la limite est un des points fixes de la fonction $f(x) = \mu x(1-x)$ c'est-à-dire 0 ou $(\mu - 1)/\mu$.

http ://www.reunion.iufm.fr/Dep/mathematiques/Formateurs/Yves/these.html.

La géométrie hyperbolique est l'une des deux principales géométries non euclidiennes (l'autre est la géométrie elliptique). On renvoie à la thèse d'Yves Martin pour toutes précisions sur le sujet. Dans ces géométries, le postulat d'Euclide *(par tout point passe une parallèle et une seule à une droite donnée)* n'est pas vérifié (en géométrie hyperbolique il en passe plusieurs en général). Cette géométrie peut se représenter dans des modèles situés dans le plan ou l'espace euclidien, mais jamais de façon totalement satisfaisante. Dans ce qui suit, nous travaillerons dans le modèle du disque de Poincaré (le plan est un disque ouvert et les droites sont des arcs de cercle orthogonaux au bord du disque). Il s'agit d'un modèle conforme (les angles[22] sont conservés), mais pas isométrique (les longueurs ne le sont pas).

Le principe de départ est d'expérimenter dans ce modèle, grâce aux outils implantés par Yves Martin (droites, perpendiculaires, milieu, médiatrice, distance, etc.). L'expérience, en bougeant les sommets du triangle, semble mener à la conjecture (voir fig. 5 pour les médianes et fig. 6 pour les médiatrices) :

2.12 Conjecture. *Les médianes, les médiatrices, les hauteurs, les bissectrices d'un triangle hyperbolique sont concourantes.*

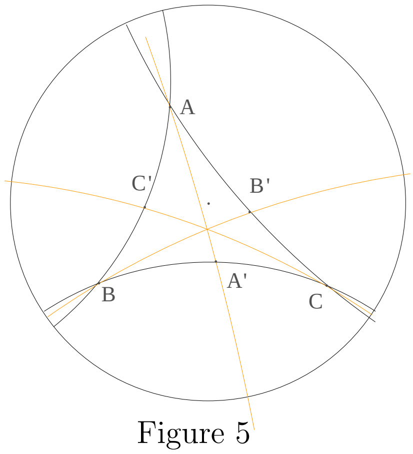


Figure 5

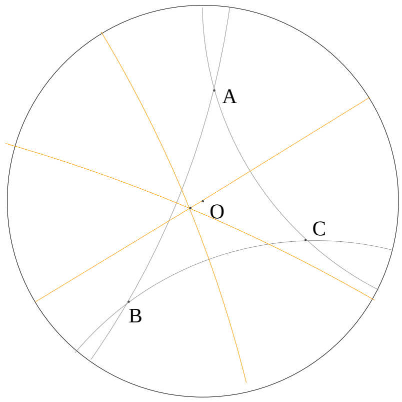


Figure 6

2.3 Des preuves ?

Nous venons d'obtenir, pour chaque problème, une ou plusieurs conjectures qu'il s'agit maintenant de prouver. C'est une phase moins exaltante, qui peut être souvent longue et pénible, mais qui est nécessaire cependant. En effet, l'expérience montre que les conjectures, même celles qui semblent bien solides, peuvent être fausses, et la preuve reste le meilleur moyen de se

[22]L'angle de deux droites hyperboliques est l'angle des tangentes aux arcs.

convaincre (et accessoirement de convaincre les autres) de la véracité d'une affirmation.

La liste de conjectures qui précède n'est pas du tout homogène, à aucun point de vue. Certaines sont évidemment vraies, d'autres évidemment fausses, d'autres sont beaucoup plus subtiles et pour certaines, la réponse peut n'être nullement évidente. Ce qui m'intéresse dans la phase des premières tentatives de preuve, c'est de voir en quoi l'expérience initiale peut être (ou non) une aide à la démonstration.

Je traite maintenant les exemples ci-dessus ; attention, il ne faut pas croire tout ce qu'on vous dit ...

2.3.1 Aires égales

La preuve de la conjecture est facile : on regarde le point d'intersection A' de (AM) et de (BC). On montre facilement (c'est le lemme du chevron, voir fig. 7, qui résulte par exemple de la formule $base \times hauteur/2$, cf. [ME]) que l'on a $\dfrac{\mathcal{A}(AMB)}{\mathcal{A}(AMC}=\dfrac{A'B}{A'C}$, de sorte que les aires sont égales si et seulement si le point A' est milieu de $[BC]$, donc si (AM) est la médiane issue de A.

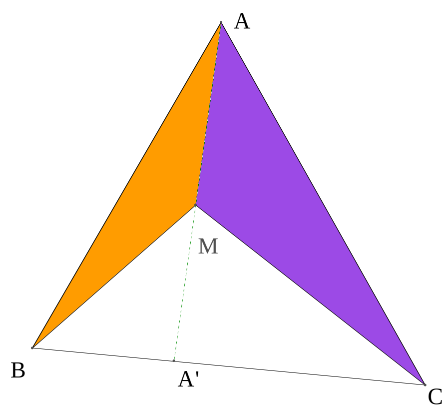


Figure 7

2.3.2 La longueur du segment mobile

Dans le cas proposé en 1.2.2, la preuve (pour un expert) est bien claire. Le quadrilatère $AMPN$ est un rectangle, donc ses diagonales sont égales et il revient au même de minimiser MN ou AP, mais pour AP, avec A fixe et P se déplaçant sur (BC), le minimum est atteint quand P est le projeté, c'est bien connu.

Soit, mais comme je l'ai dit plus haut, l'une des fonctions d'un mathématicien est de poser des problèmes. En regardant cette situation, je n'ai pas pu m'empêcher de me poser la question : et si le triangle ABC n'est pas rectangle ? J'ai donc couru à mon ordinateur et Cabri m'a très rapidement montré que le minimum était encore atteint au projeté H de A. J'ai été un peu surpris et j'ai essayé de comprendre pourquoi. Cette fois l'argument du rectangle tombe à l'eau. Bien sûr, le point H réalise toujours le minimum de

AP, mais AP ce n'est plus MN comme je l'ai vérifié aussitôt. Tout de même, en les faisant afficher tous les deux (avec ABC fixe, mais P variable) j'ai constaté qu'ils semblaient varier de conserve. Petite expérience pour en être sûr, j'ai fait afficher le rapport MN/AP et j'ai constaté qu'il était constant.

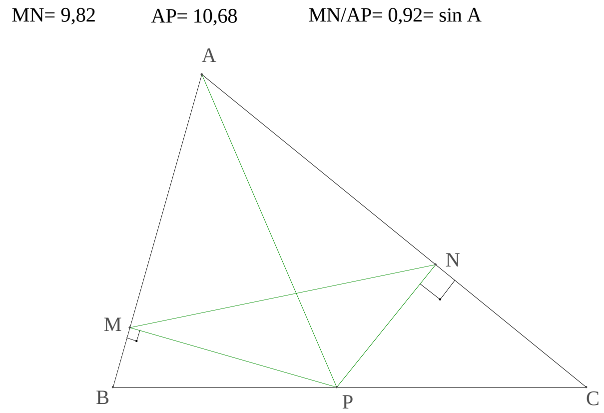


Figure 8

Déjà, cela explique le résultat constaté, puisque les longueurs AP et MN sont alors minimales en même temps, de sorte que c'est bien H qui réalise le minimum. Il reste à comprendre pourquoi ce rapport est constant. Là, s'agissant de rapport, une foule d'idées arrivent (similitude, lignes trigonométriques, etc.). En bougeant le point A, on peut faire quelques observations nouvelles. Bien entendu, on retrouve que le rapport vaut 1 quand le triangle est rectangle, car c'est la situation initiale, mais on note aussi qu'il est toujours < 1 sinon et qu'il est d'autant plus petit que l'angle en A est petit (ou au contraire très obtus). Cela fait penser au sinus de l'angle en A et il suffit de faire afficher ce sinus pour en avoir confirmation.

On a donc obtenu une nouvelle conjecture :

2.13 Conjecture. *Dans la situation de 1.2.2 (mais avec ABC quelconque), on a* $MN/AP = \sin \widehat{A}$.

Au vu des indications de Cabri, je croyais dur comme fer à cette conjecture, mais il restait à la prouver. C'est joli, mais pas tout à fait évident, et je la laisse au lecteur, qui trouvera une indication dans [DP], annexe.

2.3.3 Les différences de carrés

Il s'agit de savoir quels sont les nombres qui sont différences de deux carrés. L'expérience a fourni la conjecture 2.7 et elle permet aussi de la démontrer, au moins dès qu'on dispose de l'écriture et du calcul algébrique. En effet, si on compulse la liste, on voit qu'on atteint, par exemple, le nombre impair 11 (c'est-à-dire $2p+1$ avec $p=5$) comme différence de $36=6^2$ moins $25=5^2$. Il n'est pas besoin d'être grand clerc pour voir ce qu'il faut vérifier : $2p+1=(p+1)^2-p^2$, c'est bien vrai ! On peut même dire ça (à l'école primaire ou au début du collège) sans disposer de l'écriture algébrique : il suffit de noter qu'un nombre impair s'écrit comme somme de deux entiers consécutifs (ses deux "moitiés") et qu'il est alors aussi différence de leurs carrés. On trouve cela grâce à l'expérience, que l'on peut poursuivre autant qu'on veut pour s'assurer de la validité du résultat. Pour en donner une preuve convaincante, il y a une jolie méthode géométrique qui consiste à dessiner deux carrés de côtés p et $p+1$ l'un dans l'autre, cf. fig. 9. De même, on obtient $20=4\times 5$ comme différence de $36=6^2$ moins $16=4^2$ et on voit aussitôt que c'est bien une formule générale : $4p=(p+1)^2-(p-1)^2$ (et là aussi, il y a une preuve géométrique, cf. fig. 10).

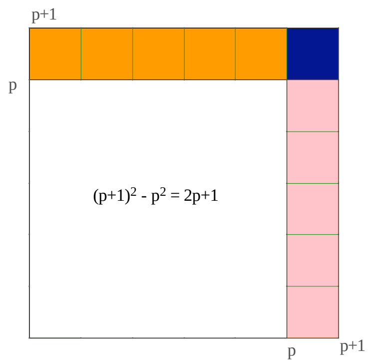


Figure 9

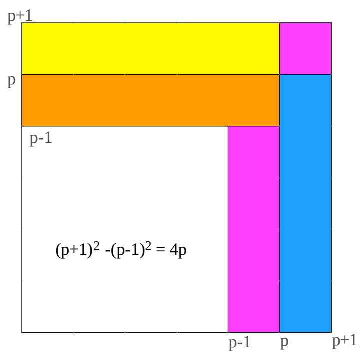


Figure 10

Je voudrais insister fortement sur cet exemple. Toute mon expérience de chercheur m'apprend que cette méthode, qui consiste à induire d'un cas particulier une formule générale (ou un théorème général) est un outil fondamental de découverte. Il y a en arithmétique, en algèbre, des dizaines de formules[23] que l'on peut trouver ainsi. Pourtant, je ne suis pas sûr que cette procédure ait vraiment droit de cité dans nos classes. C'est peut-être le cas au niveau de l'enseignement primaire, ça l'est beaucoup moins au niveau du collège et du lycée, et au niveau de l'enseignement supérieur, sauf dans de rares exceptions, cette procédure n'est que rarement employée[24].

Il reste à vérifier que les nombres pairs non multiples de 4 ne sont pas de

[23] Un exemple simple est celui de la somme des n premiers cubes, au moins si l'on connaît la somme des n premiers entiers.

[24] Je parle par expérience, notamment celle de la licence pluridisciplinaire. Lorsqu'on suggère à des étudiants de regarder des cas particuliers pour se faire une idée, ils oscillent entre deux attitudes : l'incompréhension *mais, qu'est-ce qu'il me veut !* et la réprobation *mais, on n'a pas le droit !*

la forme $x^2 - y^2$. C'est facile en distinguant selon les parités de x et y. Bien entendu, selon la culture des gens, le mot “congruence” peut être utilisé.

Pour en finir avec les différences de carrés, l'expérience montre encore autre chose : certains nombres sont atteints plusieurs fois, par exemple $15 = 64 - 49 = 16 - 1$. Cela pose une nouvelle question : lorsqu'un nombre s'écrit sous la forme $x^2 - y^2$, de combien de façons est-ce posssible ? Là, il faut sans doute utiliser de nouveaux outils, un peu plus sophistiqués (notamment la décomposition en produit de facteurs premiers[25]). Si j'ai bien compris la philosophie du document d'accompagnement des programmes, on sort des “problèmes pour chercher” et on aborde les “problèmes pour apprendre”.

2.3.4 Les fractions égyptiennes

La conjecture proposée semble particulièrement solide et l'algorithme indiqué aussi. Pour avancer sur ce problème, il est bien agréable de disposer d'une bonne calculatrice, programmable et capable de travailler en mode formel (donc avec des fractions et pas des nombres décimaux). En effet, on tombe très vite sur des fractions de grands dénominateurs qu'il devient pénible de calculer à la main. Par exemple on trouve :

$$\frac{4}{17} = \frac{1}{5} + \frac{1}{29} + \frac{1}{1233} + \frac{1}{3039345}.$$

Il est facile d'écrire un petit programme qui fait le travail à notre place. Voilà un exemple sur TI-Voyage 200 :

```
egypte()
Prgm
Local r,p,n
Prompt r
1/r → p
While p-entPréc(p)>0
entPréc(p)+1  → n
Disp 1/n
r-1/n  → r
Disp r
1/r  → p
EndWhile
EndPrgm
```

[25]Car une première constatation est que les nombres premiers semblent n'apparaître qu'une fois.

L'affichage des fractions intermédiaires (Disp r) n'est pas indispensable, mais il fournit la démonstration de la propriété. En effet, ce qu'il faut voir c'est pourquoi l'algorithme "termine" comme disent les anglo-saxons. Or, c'est bien clair sur les fractions intermédiaires, par exemple pour $4/17$ on trouve successivement $3/85 = 4/17 - 1/5$ puis $2/2465 = 3/85 - 1/29$. On peut multiplier les expériences (avec un programme ce n'est pas fatigant !) et on constate que les numérateurs des fractions décroissent, de sorte qu'ils finissent nécessairement par aboutir à 1 comme souhaité. Cet argument expérimental est parfaitement convaincant pour tout le monde (y compris pour moi). Si l'on veut une "vraie" démonstration il reste à le mettre en forme. Pour un mathématicien c'est facile car tous les ingrédients sont apparus et il reste à traduire les propriétés (par exemple, que signifie retrancher le plus grand $1/n$ possible, mais si l'on a écrit le programme on a déjà explicité cette propriété) et à faire une récurrence. Je fais cette preuve pour convaincre le lecteur qu'elle n'est pas difficile.

On a un rationnel $r = \dfrac{p}{q}$, *écrit sous forme de fraction irrréductible. On cherche la plus grande fraction égyptienne* $1/n$ *telle que* $\dfrac{1}{n} \leq r$. *Cela revient à chercher le plus petit* $n \geq 1/r$ *(c'est donc la partie entière de* $1/r$ *plus un, sauf si* r *est déjà égyptienne). Un tel* n *vérifie* $n \geq 1/r > n - 1$, *soit,* $pn \geq q > pn - p$. *Si on calcule alors* $\dfrac{p}{q} - \dfrac{1}{n}$, *on trouve* $\dfrac{np - q}{qn}$ *et on voit que le numérateur est bien* $< p$ *comme annoncé.*

L'expérience m'a montré pourtant que pour beaucoup des étudiants (scientifiques, mais pas très matheux) que j'avais en licence pluridisciplinaire, écrire cette preuve, avec la manipulation des fractions et des inégalités, a été franchement difficile[26]. C'est une difficulté qu'il ne faut pas sous-estimer. La question de l'apprentissage de ce type de techniques et son lien avec les problèmes n'est pas évidente. Quand j'essaie d'analyser comment je fais un calcul comme le précédent, la chose qui me semble essentielle, c'est que j'ai confiance en les mathématiques : ayant vu l'algorithme fonctionner, je suis sûr que la preuve va marcher. D'une certaine manière, je peux alors cesser de réfléchir et laisser le calcul se faire tout seul, en traduisant simplement l'algorithme. Cette confiance est souvent ce qui manque à nos étudiants.

2.3.5 Le reste de la série

[26]Il faut dire que j'avais donné ce texte en "devoir-maison", rédigé de manière un peu formelle (voir [ME] p. 91) et c'est sans doute une explication de leurs difficultés.

Maintenant qu'on a une conjecture qui affirme que $r_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$ doit être équivalent à $\dfrac{1}{2(2n+3)}$, on calcule la différence $r_n - \dfrac{1}{2(2n+3)}$ en interprétant la fraction comme la moitié de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{2n+2}\,dt$ (c'est ainsi qu'elle est apparue). On trouve :

$$r_n - \frac{1}{2(2n+3)} = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{2n+2}\,\frac{1-t^2}{1+t^2}\,dt$$

et il reste à voir que cette intégrale est un $o(1/n)$. Il y a plusieurs méthodes pour faire cela : soit couper en deux l'intégrale en un point $a \in]0,1[$, soit intégrer par parties en posant $u = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $dv = t^{2n+2}dt$. On trouve :

$$r_n - \frac{1}{2(2n+3)} = \frac{2}{2n+3}\int_0^1 \frac{t^{2n+4}}{(1+t^2)^2}\,dt \leq \frac{2}{(2n+3)(2n+5)}.$$

Peu importe la technique (classique) d'analyse, mais mon expérience, sur ce problème, c'est qu'avant d'avoir fait l'expérience pour déterminer que l'équivalent était $\dfrac{1}{2(2n+3)}$ et pas $\dfrac{1}{2n+3}$, j'étais comme l'âne de Buridan à me demander lequel j'allais essayer de prouver et à ne pouvoir me résoudre à me lancer des calculs qui risquaient d'être inutiles si mon choix était mauvais. Bref, il s'agit d'un élément psychologique, mais qui a joué un rôle important[27]. Cela mérite bien une nouvelle maxime :

2.14 Maxime. *Souvent, quand on a trouvé ce qu'il fallait démontrer, le plus dur est fait.*

2.3.6 La suite logistique

La machine nous a dévoilé le comportement de la suite, au moins pour $\mu \leq 2$, donc le plus dur est fait, si l'on en croit la maxime 2.14. Si on pose $\tau = \dfrac{\mu - 1}{\mu}$, la formule $u_{n+1} - u_n = \mu u_n(\tau - u_n)$ permet effectivement de montrer que, si μ est ≤ 1 la suite décroît et tend vers 0 et que, si μ est

[27]En fait, on montre plus généralement que, pour une série alternée $\sum_n (-1)^n v_n$ dont le terme général est "convexe" (i.e. vérifie $v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n \geq 0$) et tel que v_{n+1}/v_n tend vers 1 à l'infini, le reste est toujours équivalent à $v_n/2$. Je pense que j'ai connu ce résultat dans une vie antérieure, mais je l'avais totalement oublié.

compris entre 1 et 2, elle est croissante (au moins à partir du deuxième terme) et converge vers τ.

En revanche, pour $\mu > 2$, les choses sont moins simples et l'on ne parvient plus à prouver ni la monotonie, ni le fait que u_n reste inférieur à sa limite supposée τ.

2.3.7 Les médiatrices hyperboliques

C'est encore un exemple où l'on peut induire la preuve à la fois de l'expérience et de l'analogie euclidienne. Montrons par exemple que les médiatrices sont concourantes. Bien entendu, il faut connaître quelques propriétés des médiatrices hyperboliques, mais ce sont presque les mêmes qu'en euclidien.

En particulier un point M est sur la médiatrice de $[AB]$ si et seulement si on a $MA = MB$ comme on le vérifie aisément avec la macro Cabri “distance hyperbolique” d'Yves Martin.

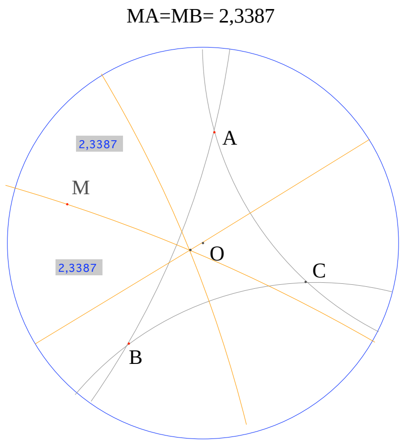


Figure 11

Dans ce cas, la preuve coule de source : on prend le point O, intersection des médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$. On a donc $OA = OB$ et $OA = AC$, donc $OB = OC$, de sorte que O est aussi sur la médiatrice de $[BC]$.

2.4 Critique des preuves et retour à l'expérience

C'est ici que mon métier de chercheur m'apporte une autre vision de la démarche mathématique. En effet, j'y ai appris à être méfiant en ce qui concerne les preuves, les miennes et celles des autres, et à les mettre systématiquement en doute. Reprenons donc une nouvelle fois certaines de nos situations. Il n'y a pas de problèmes pour les entiers de la forme $x^2 - y^2$, ni pour les fractions égyptiennes. En revanche, dans plusieurs autres cas, notre conjecture était incorrecte et donc la “démonstration” proposée aussi.

2.4.1 Aires égales

Revenons sur la situation des triangles d'aires égales et bougeons un peu plus sérieusement le point M dans le plan, en lui permettant, en particulier, de s'extirper de l'angle en A. On s'aperçoit bien vite qu'il semble y avoir d'autres positions dans laquelle les aires sont égales. Et pourtant, nous avions écrit une preuve, non ? Alors, cette preuve n'en était pas vraiment une ? Non, et ici, on voit aisément où est l'erreur : avant de parler du point A', intersection de (AM) et de (BC), encore faut-il s'assurer que ces droites se coupent.

En effet, si M est sur la parallèle à (BC) passant par A, on vérifie qu'on a aussi $\mathcal{A}(AMB) = \mathcal{A}(AMC)$ (c'est ce que j'appelle le lemme du trapèze, évident encore avec la formule *base* $\times$ *hauteur* !).

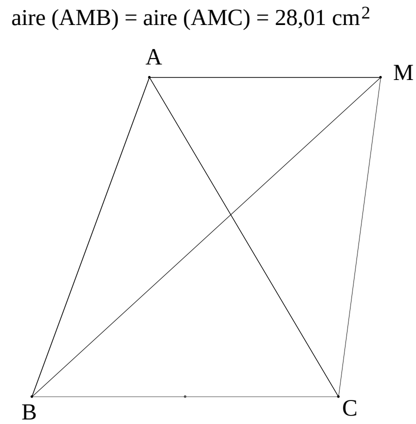


Figure 12

Ici, à bien regarder la figure et ses variantes, on a donc fini par montrer un théorème :

2.15 Théorème. *Les aires de AMB et AMC sont égales si M et sur la médiane issue de A ou sur la parallèle à (BC) passant par A.*

Ce type d'exemple est fondamental en formation des maîtres (je pense ici plutôt aux futurs professeurs de mathématiques) car il montre deux choses essentielles, dont nous allons faire deux nouvelles maximes. En premier lieu, dans l'exemple ci-dessus, l'expérience initiale avait été menée avec trop de désinvolture pour être satisfaisante :

2.16 Maxime. *En mathématiques, comme dans les autres les sciences, si l'on utilise l'expérience, elle doit être menée sérieusement.*

Cet exemple montre aussi quelle est la raison d'être de la rigueur, qu'on impose souvent sans discussion aux élèves :

2.17 Maxime. *Si une preuve n'est pas rigoureuse, on court le risque qu'elle soit fausse et, pire, que le résultat annoncé soit faux.*

2.4.2 Errare humanum est

Sur ce sujet de l'erreur et de la rigueur, mon expérience de chercheur, c'est qu'une preuve, réputée soigneuse, soi-disant rigoureuse, considérée comme telle par les experts, peut parfois ne pas l'être autant qu'on le croit. Une des raisons qui fait qu'une erreur peut intervenir tient à la volonté, souvent très forte, du chercheur de parvenir au résultat qu'il convoite. Il **veut** à tout prix prouver son théorème ! Cela peut le conduire à une attitude simplificatrice par rapport à la réalité. Il faut bien comprendre que cette volonté de simplifier est un puissant moteur de découverte, mais qu'elle crée un obstacle lorsque la situation se révèle vraiment plus complexe qu'on ne l'avait imaginé. J'ai une petite histoire, que j'espère instructive, à raconter à ce sujet.

Il y a quelques années, nous travaillions, Mireille Martin-Deschamps et moi-même, sur le schéma de Hilbert des courbes gauches de degré d et genre g (un objet, noté $H_{d,g}$, peu importe ce que signifie ce symbole) et nous avions cru prouver que $H_{d,g}$ n'était **"presque" jamais connexe**. La démonstration était écrite, soumise à une excellente revue, contrôlée par un rapporteur, acceptée, mais heureusement pas encore parue (voir [MDP1] et [MDP2]) ! Pourtant, en étudiant plus à fond un exemple précis, le premier exemple non trivial : $H_{4,0}$, nous avons montré qu'il était connexe, contrairement à ce que nous affirmions. Il nous a fallu quelques jours pour admettre notre erreur et quelque temps encore pour comprendre où était la faute dans la démonstration.

L'intérêt de cette erreur c'est qu'elle était révélatrice d'une conception erronée sur l'objet en question, fondée sur une connaissance trop fragmentaire des exemples. La preuve en est que, passant d'un extrême à l'autre, nous pensons maintenant que le schéma de Hilbert est **toujours** connexe.

Le lecteur mauvais coucheur pourra m'objecter que, si notre démonstration était fausse, c'est que nous n'avions pas été suffisamment rigoureux et il sera d'autant plus enclin à le faire, que, du haut de ses connaissances mathématiques, il aura décelé les entorses à la rigueur commises dans les pseudo-démonstrations ci-dessus. Certes, en théorie c'est vrai. Mais je lui rappellerai, avant qu'il ne me jette la première pierre, que d'autres ont été aussi confrontés à cette difficulté : lorsqu'on propose une preuve, en étant à son niveau de compétence (et pas cent coudées au-dessus, ce qui est souvent le cas en situation d'enseignement), il est bien difficile d'assurer que cette preuve est vraiment correcte. Ainsi, récemment, les premières versions des démonstrations du théorème de Fermat par Andrew Wiles ou de la conjecture de Ramanujan par Laurent Lafforgue étaient toutes deux entachées d'erreurs, que leurs auteurs ont mis plusieurs mois à corriger.

Fort de ma propre expérience et instruit par celles de mes illustres collègues, je suis beaucoup plus circonspect maintenant, et d'avant d'être certain d'un résultat, je préfère le confronter à l'expérience. Cela donne encore une maxime, frappée au coin du bon sens :

2.18 Maxime. *Deux expériences valent mieux qu'une démonstration fausse.*

2.4.3 Médiatrices hyperboliques

L'exemple précédent doit nous mettre la puce à l'oreille : dans notre preuve du concours des médiatrices hyperboliques, nous avons défini le point O comme l'intersection des médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$. Et si, comme dans l'exemple ci-dessus, elles ne se coupaient pas[28] ?

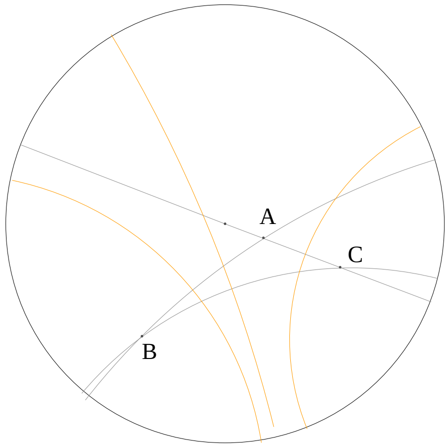


Figure 13

De fait, l'expérience montre que si le triangle est suffisamment aplati, elles ne se coupent pas : notre conjecture, là encore, est fausse !

Déceler une erreur dans une démonstration est un des moments les plus difficiles dans la vie d'un chercheur et je n'ai toujours pas acquis le détachement qui serait nécessaire pour vivre ce genre de moment avec sérénité. Avec l'expérience j'ai cependant appris quelques petites choses. D'abord, je me récite ce que dit à ce sujet A. Grothendieck :

Mais il arrive aussi que cette image [de la situation] *est entachée d'une erreur de taille, de nature à la fausser profondément. … Le travail, parfois laborieux, qui conduit au dépistage d'une telle idée fausse est souvent marqué par une tension croissante au fur et à mesure qu'on approche du nœud de la contradiction, d'abord vague, puis de plus en plus criante jusqu'au moment où elle éclate avec la découverte de l'erreur et l'écroulement d'une certaine vision des choses, survenant comme un soulagement immense.*

Et il ajoute plus loin, ce qui vaut bien une maxime :

2.19 Maxime. *La découverte de l'erreur est un des moments cruciaux, un moment créateur entre tous, dans tout travail de découverte.*

Il a raison, et l'exemple du schéma de Hilbert a bien montré comment la découverte de l'erreur est décisive pour remettre en cause une conception

[28]Pour le mauvais coucheur de tout à l'heure : aviez-vous vraiment vérifié, en euclidien, que les médiatrices se coupaient ? Et la rigueur, alors ?

erronée, mais c'est dur à supporter tout de même ! Cependant, une des petites choses que j'ai apprises en trente années de recherche c'est :

2.20 Maxime. *Il ne faut pas jeter le bébé avec l'eau du bain.*

Cette maxime, que nul ne contestera, peut revêtir deux significations. La première, c'est que, lorsqu'on s'aperçoit qu'une démonstration est fausse, avant de se faire hara-kiri, on peut d'abord essayer de la réparer[29], en vertu de la maxime :

2.21 Maxime. *Démonstration fausse ne signifie pas toujours idée fausse.*

D'une certaine façon, c'est ce que nous avons fait dans le problème des aires égales où la découverte de l'erreur contenait en germe le moyen de la surmonter.

La situation est parfois plus grave. En particulier, dans l'exemple des médiatrices hyperboliques, comme le dit Grothendieck, c'est à une complète remise en question de notre vision des choses que nous sommes conduits. Cependant, la maxime 2.20 s'applique tout de même, mais il faut d'abord réparer la conjecture avant de penser à produire une nouvelle démonstration.

Ce n'est pas totalement évident. Bien sûr, on pourrait dire que les médiatrices sont concourantes ou parallèles, au sens bête où elles ne se coupent pas, mais cette notion est beaucoup trop faible en hyperbolique (il y a une flopée de droites passant par le milieu de $[BC]$ et parallèles aux deux autres médiatrices en ce sens). La question est donc de trouver ce qui va remplacer le parallélisme. C'est encore l'analogie euclidienne qui donne la solution. En euclidien, lorsque deux droites du plan sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. En hyperbolique, l'expérience montre aussitôt que c'est faux : si on a deux droites D, D', parallèles au sens bête, une droite perpendiculaire à l'une n'est pas, en général, perpendiculaire à l'autre (cf. fig. 14 : la droite L est perpendiculaire à D mais pas à D', et moins encore à D''). Je dis "en général" car il existe tout de même une perpendiculaire commune, mais elle est unique. Bien entendu, si l'on prend trois droites D, D', D'' parallèles au sens bête, elles ont, deux à deux, des perpendiculaires communes distinctes en général, comme le montre, une fois de plus, l'expérience (cf. fig. 14, F est perpendiculaire commune à D, D' et E à D', D'').

[29] Je me souviens encore de la première fois où, jeune chercheur, je me suis aperçu qu'une de mes preuves était fausse. J'en ai été déprimé pour plusieurs semaines, jusqu'à ce que, en désespoir de cause, j'aille la soumettre à mon patron de thèse qui l'a réparée en quelques minutes !

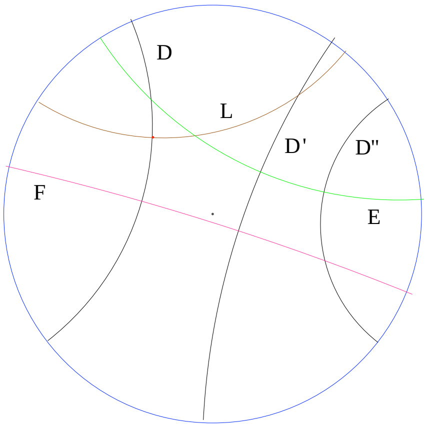


Figure 14

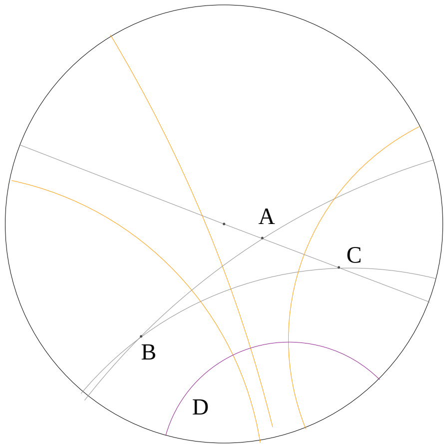


Figure 15

En revanche, si l'on regarde les trois médiatrices, dans le cas où elles ne sont pas concourantes, on constate qu'il y a une perpendiculaire commune aux trois (cf. fig. 15 : la droite D). On a donc une nouvelle conjecture :

2.22 Conjecture. *Les médiatrices d'un triangle hyperbolique sont concourantes, dans le plan hyperbolique ou sur le bord, ou admettent une perpendiculaire commune.*

L'énoncé semble vrai, et il l'est, mais il reste à le prouver. Il y a de nombreuses méthodes, certaines plus éclairantes que d'autres, cf. [Perrin2], mais, dans tous les cas, il faut quand même posséder un peu de technique[30].

Parmi les preuves possibles, il en est une que j'aime particulièrement car c'est une nouvelle illustration de la maxime sur le bébé et l'eau du bain. Elle consiste à reprendre la démonstration fausse vue ci-dessus et à essayer de la réparer. Lorsque les médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$ se coupent en O, on a vu que O est équidistant de A, B, C et c'est cela qui prouve que O est sur la médiatrice de $[BC]$. Lorsque les médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$ ne se coupent pas, la propriété de remplacement c'est qu'elles admettent une perpendiculaire commune Ω. L'analogue, somme toute naturel, de l'assertion précédente,

[30] Attention, tout ce que je suis en train d'expliquer à propos de l'expérimentation, n'exonère pas de devoir acquérir le bagage technique nécessaire pour traiter les problèmes. On ne fait pas de mathématiques sans cela. Mais inversement, la technique n'est pas suffisante. La métaphore classique à ce sujet, d'ailleurs convaincante, concerne le lien entre musique et virtuosité. On me permettra de préférer une image sportive, actualité oblige. Au football, beaucoup de joueurs ont une parfaite maîtrise technique. Mais, parmi ceux-là, les grands joueurs sont ceux qui mettent cette technique au service du jeu collectif : grâce au temps d'avance sur leurs adversaires qu'elle leur donne, ils peuvent lever la tête, ce qui leur permet de voir le jeu et de distribuer de bons ballons à leurs partenaires.

c'est que les points A, B, C sont alors équidistants de Ω. Cela vient du lemme suivant, qui remplace la caractérisation usuelle des points de la médiatrice, que l'on peut vérifier sans peine avec Cabri et que l'on démontre à l'aide de la symétrie par rapport à cette médiatrice :

2.23 Lemme. *Soient Ω une droite du plan hyperbolique et A, B deux points. Alors, Ω est perpendiculaire à la médiatrice de A, B si et seulement si A et B sont équidistants de Ω et situés du même côté de Ω.*

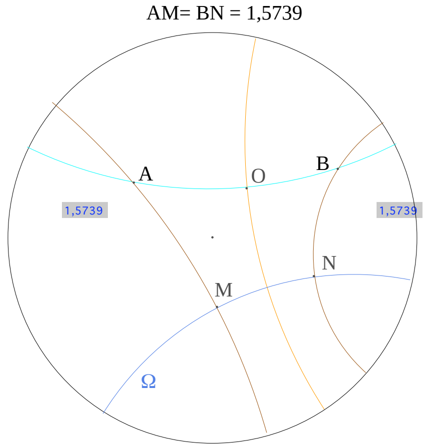


Figure 16

Ce lemme entraîne notre théorème. En effet, si Ω est la perpendiculaire commune aux médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$, les points A, B, C sont équidistants de Ω par le sens direct du lemme, et donc Ω est perpendiculaire aussi à la médiatrice de $[BC]$ par sa réciproque.

On renvoie le lecteur à [DP], annexe, pour d'autres précisions à ce sujet.

2.4.4 Une remarque didactique ?

Cette question de l'erreur est très importante dans la gestion des classes. Je pense qu'il ne peut exister de véritable recherche si l'erreur n'y est pas tolérée, voire reconnue comme un moteur. Pourtant cela n'est pas toujours naturel, ni pour le professeur[31], ni pour les élèves. Voilà ce que dit Magali Froger à propos des narrations de recherche de ses élèves (cf. [Froger] ; la classe de Magali est une très bonne classe du collège franco-allemand de Buc) :

Les élèves se censurent eux-mêmes. Ils gardent, inconsciemment sûrement, une idée de ce qu'ils peuvent écrire ou ne pas écrire dans leur compte-rendu. Conscients du fait que leur professeur et leurs parents attendent beaucoup

[31] Et c'est l'une des carences de la formation des maîtres, à mon avis.

d'eux, les élèves ne veulent pas décevoir et n'acceptent pas de montrer qu'ils font des erreurs.

Et elle ajoute, plus loin, cette remarque plus fondamentale encore :

Les élèves étant habitués à trouver les réponses aux exercices presque instantanément, pour eux le mauvais élève cherche parce qu'il ne trouve pas[32]*, alors que le bon élève trouve la solution immédiatement. La recherche est donc, pour eux, synonyme d'échec.*

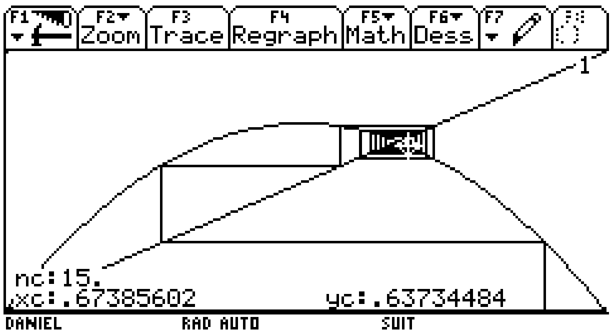
En conclusion, il me semble que tout professeur devrait garder en permanence dans un coin de sa tête deux maximes, la maxime 2.21 et la suivante :

2.24 Maxime. *On peut avoir une idée fausse sans pour autant être stupide.*

2.4.5 La suite logistique

Bien entendu, dans ce cas, nous étions bien conscients d'avoir été très optimistes. De fait, si on effectue quelques expériences supplémentaires, on voit apparaître de nouveaux phénomènes :

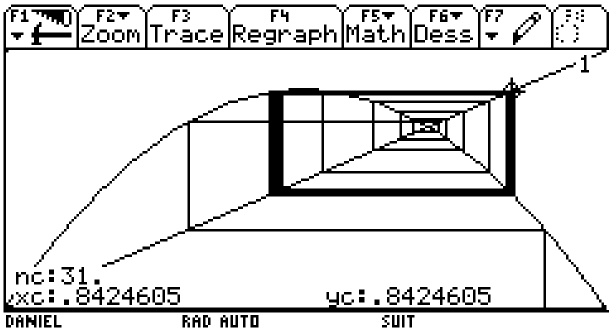
• Pour $\mu = 3$, la suite converge encore vers τ, mais elle n'est plus monotone (elle est "en escargot"). Plus généralement, cela semble être le cas pour μ compris entre 2 et 3 (l'écran 2 correspond à $\mu = 2,9$).



Écran 2

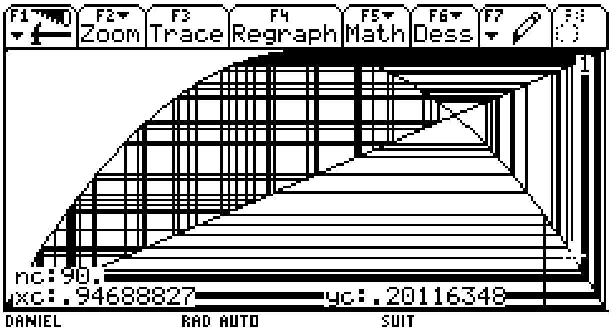
• Pour $\mu = 3{,}2$, la suite ne converge plus, mais on a toutefois ce qu'on appelle un cycle attractif, une suite de 2 valeurs dont la suite se rapproche de manière périodique : $0,7994$, $0,5130$. Pour $\mu = 3{,}5$ (écran 3) on a cette fois un cycle attractif d'ordre 4 : $0,8749$, $0,3828$, $0,8269$, $0,5008$.

[32] André Revuz dit que ce que la recherche peut apporter de plus important pour l'enseignement c'est la constatation que la principale occupation d'un mathématicien est de sécher.



Écran 3

• Enfin, pour $\mu = 4$ c'est l'horreur, si l'on trace le graphe de la suite, l'écran de la calculatrice se noircit rapidement, ce qui indique que la suite semble remplir tout le segment $[0, 1]$, autrement dit que l'ensemble des valeurs u_n est partout dense dans $[0, 1]$. C'est ce qu'on appelle le cas **chaotique**.



Écran 4

Dans les trois premières situations, il y a une conjecture claire et stable (elle ne dépend pas du point de départ dans $[0, 1]$) et il s'agit de la montrer, en précisant dans quel domaine de variation du paramètre μ elle est vraie. Dans le dernier cas, les choses sont plus difficiles. Là, on atteint d'ailleurs une des limites de l'expérimentation. En effet, si l'on voit bien le comportement générique de la suite (elle est partout dense), il y a d'autres phénomènes (des points stationnaires, des points périodiques, etc.) que la calculatrice ne permet pas vraiment de déceler. Par exemple, si on prend $u_0 = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$, on montre facilement par le calcul que la suite est périodique de période 2. Si l'on tabule la suite avec cette valeur initiale, tout semble bien se passer au départ, la suite prend alternativement les valeurs $0,9045$ et $0,3454$, mais à partir du neuvième coup elle déraille et retrouve le comportement générique de remplissage du segment. La raison est simple, en mode tabulation, la calculatrice prend une valeur approchée, qui n'est donc pas exactement la valeur périodique et l'erreur, minime au départ, augmente un peu à chaque itération. Bien entendu, on peut forcer la machine à calculer en mode formel, mais encore faut-il avoir trouvé la valeur de départ, et l'expérience ne peut pas vraiment la donner. On est ici en présence d'un cas où l'expérience, si elle montre clairement ce qui se passe dans le cas générique, ne permet pas de traiter les cas particuliers intéressants : il faut bien que les mathématiciens aient encore quelque chose à faire !

2.5 De nouvelles questions

Les mathématiques sont un éternel recommencement. À peine a-t-on fini de résoudre un problème que d'autres surgissent. On en a vu déjà quelques exemples ci-dessus et le lecteur en trouvera d'autres dans [DP], qu'il complètera avec ses propres questions. J'évoque seulement ici l'exemple des développements décimaux, qui est une mine dans le registre : poser les problèmes (pour la résolution, s'adresser à notre service après-vente).

2.5.1 Les développements décimaux

L'expérience manuelle nous a permis de montrer :

Le développement décimal du rationnel p/q (écrit sous forme irréductible) est périodique, avec une période de longueur $\leq q-1$.

Une expérimentation rudimentaire, dans laquelle la calculatrice est bien utile, montre que la longueur de la période n'est pas toujours[33] $q-1$ (pour $q = 3$ c'est 1, pour $q = 11$ c'est 2, pour $q = 13$ c'est 6), mais que cela arrive souvent (pour $q = 7, 17, 19$, par exemple). De plus, si on ouvre bien les yeux (c'est le "dire tout ce qu'on voit" vu précédemment), on constate que cette longueur est toujours un diviseur de $q-1$. Une première question est donc de prédire la longueur de période. Mais il y a bien d'autres questions qui surgissent dès qu'on étudie cette situation. D'abord, dans certains cas, comme $1/7$, la période commence tout de suite, mais pour $1/28$ on a une pré-période : $1/28 = 0,03\,571428\,571428\ldots$. Autre chose, si on examine les septièmes, on constate qu'ils ont tous la même suite de chiffres comme période, mais décalée : $1/7 = 0,142857\,142857\ldots$, $2/7 = 0,285714\,285714\ldots$, $3/7 = 0,428571\,428571\ldots$, $4/7 = 0,571428\,571428\ldots$, etc. Pourquoi ce phénomène ? Et que se passe-t-il dans les autres cas (les treizièmes, les quarante-et-unièmes par exemple) ? De plus, même si l'on est convaincu de l'existence de la période, comment faire pour la trouver explicitement lorsqu'elle excède la capacité de la calculatrice (par exemple pour les fractions de dénominateur 17 ou 19) ?

Dans ce cas, l'expérimentation est donc source de nombreuses questions, auxquelles nous laissons au lecteur le plaisir de trouver les réponses (il faut

[33] Même si q est premier, ce qui pourrait être une première conjecture.

penser à la seule chose qu'on sache faire facilement avec les développements décimaux : multiplier par 10). Voir [DP] pour quelques indications.

3 En guise de conclusion

3.1 Quelques bémols

L'honnêteté intellectuelle m'oblige à dire que, si l'expérimentation est une méthode de recherche souvent fructueuse en mathématiques, ce n'est pas pour autant la panacée universelle. Il y a plusieurs raisons à cela.

• Dans certains cas, l'expérience est inutile, ou impossible. On a rencontré plus haut un exemple dans le cas de la suite logistique. À ce sujet, l'une des choses que j'ai apprises en utilisant les logiciels de calcul formel en recherche, c'est que, s'ils sont un outil extraordinaire pour explorer des zones qui seraient inaccessibles à la main, leur pouvoir n'est pas infini, tant s'en faut, et on arrive vite à leurs limites[34]. Le lecteur se convaincra que la calculatrice peut induire en erreur en regardant le comportement des suites $2^n/n^{20}$ (jusqu'à $n = 27$, cette suite semble décroître vers 0), voire $2^n/n^{500}$ (la calculatrice baisse rapidement les bras). Dans ce cas, même si notre intérêt se porte vraiment sur ces suites, il n'est pas interdit de faire une expérience plus simple, avec de plus petits exposants, pour comprendre ce qui se passe.

• Dans d'autres situations, l'expérience peut masquer la véritable nature des problèmes, en confinant l'observateur dans un cas trop particulier[35]. On a vu ci-dessus qu'il suffit parfois de raffiner l'expérience, mais ce n'est pas toujours possible.

Voici un exemple de ce phénomène que j'ai rencontré en recherche. Notre philosophie, pour étudier le schéma de Hilbert $H_{d,g}$ déjà évoqué plus haut, était de le décomposer en des objets plus petits, notés $H_{\gamma,\rho}$, en pensant que ces objets eux, ne pouvaient plus être décomposés, en termes mathématiques,

[34] Par exemple, j'ai souvent été amené à faire calculer au logiciel Macaulay les mineurs d'une grosse matrice, disons les mineurs 8×8 d'une matrice 15×20, dont les coefficients sont des polynômes en plusieurs variables. Le logiciel y parvient, bien qu'il y en ait plus de 8×10^8, mais on est tout proche de la saturation. De plus, il est totalement impossible – et inutile – de les faire afficher, car cela dépasse les capacités d'affichage du logiciel et de la machine. On peut cependant calculer avec l'idéal engendré par ces mineurs, en faisant alors une confiance aveugle à la machine, situation un peu désagréable pour un mathématicien. Mais, une fois encore, cette expérience en aveugle permet de trouver les résultats qu'il reste évidemment ensuite à prouver directement, selon la maxime 2.14.

[35] Jean-Pierre Serre dit que, souvent, quand on ne parvient pas à prouver un théorème, c'est qu'on cherche à prouver un théorème trop facile, au sens où les hypothèses sont trop fortes et où elles cachent le point crucial de la question.

qu'ils étaient **irréductibles**. On sait maintenant que c'est très faux. En effet, ces objets sont repérés (entre autres) par un entier appelé largeur. Or, s'ils sont bien irréductibles en largeur ≤ 2 et aussi, avec une condition, en largeur 3, ils ne le sont jamais en largeur ≥ 4, donc dans une immense majorité des cas. La source de l'erreur c'est que les premiers exemples que nous avions examinés étaient tous en largeur ≤ 2. Je retiens plusieurs choses de cet exemple :

— Les exemples que l'on considère en premier sont souvent trop simples. C'est normal, ce sont les premiers qui viennent à l'esprit, ce sont les plus faciles à calculer, sinon les seuls. La volonté farouche de démontrer des théorèmes fait qu'on a tendance à prendre ces exemples particuliers pour argent comptant.

— Lorsqu'on se rend compte de la difficulté, passé le temps de la déprime, il reste à en tirer les conséquences, en se gardant de jeter le bébé avec l'eau du bain, cf. 2.20. En fait, dans notre cas, même si les $H_{\gamma,\rho}$ ne sont pas irréductibles, la méthode garde son intérêt, notamment parce qu'on dispose d'une méthode d'investigation de ces objets qui a des conséquences intéressantes sur l'objectif initial. Simplement, ici, comme souvent en mathématiques et ailleurs, les choses étaient plus complexes que nous ne l'avions pensé, mais cette mésestimation des difficultés est, à mon avis, un atout psychologique important pour la recherche : si le chercheur imaginait toutes les embûches du chemin avant de s'y engager, sans doute renoncerait-il souvent à l'emprunter.

• Une fois que le problème est circonscrit, qu'une bonne conjecture est trouvée, il reste à la prouver et l'expérience n'indique pas toujours comment. Sans aller chercher le théorème de Fermat ou l'hypothèse de Goldbach, pour montrer que tout nombre premier congru à 1 modulo 4 est somme de deux carrés (conjecture robuste s'il en est), il faut une idée supplémentaire, par exemple factoriser $x^2 + y^2$ en $(x + iy)(x - iy)$ dans les complexes et travailler dans l'anneau $\mathbf{Z}[i]$ des entiers de Gauss, cf. [Perrin1] : l'imagination est indispensable pour faire vraiment des mathématiques. Mais la nécessité de l'expérience revient vite. En effet, ce problème et celui des nombres de la forme $x^2 + dy^2$ conduisent à étudier ces nouveaux objets que sont les anneaux de nombres $\mathbf{Z}[i\sqrt{d}]$ et pour cela que fait-on ? On regarde des exemples[36] : $d = 1, 2, 3, 5$, etc.

[36]Là encore, il y a une dialectique entre expérience et démonstration. Quand on étudie les anneaux d'entiers des corps $\mathbf{Q}(i\sqrt{d})$ on voit que neuf d'entre eux sont principaux ($d = 1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67$ et 163). La question, qui remonte essentiellement à Gauss, est de savoir s'il n'y en a pas d'autres. L'expérience permet de le montrer si on borne d (par exemple $d \leq 10000$), mais le cas général est beaucoup plus difficile et n'a été résolu qu'en 1968.

• Plus fondamentalement encore, il me semble l'objectif des mathématiques, comme de toute science, est de **comprendre** les phénomènes et la phase expérimentale, pour importante qu'elle soit, n'est que la première phase de cette connaissance, celle qui permet de rentrer dans les problèmes. Ce que j'entends ici par "comprendre" c'est être capable de ramener le champ étudié à quelques principes directeurs avec lesquels on peut aborder et résoudre toutes les questions qui se posent. Cependant, cet objectif est largement inaccessible, même dans les domaines qu'on maîtrise le mieux (je pense à l'arithmétique où le moindre problème peut se révéler redoutable ou à la géométrie où l'expert le plus confirmé peut sécher sur une question élémentaire).

En résumé, je propose encore deux maximes, pour modérer les opinions bien établies des uns et des autres ;

3.1 Maxime. *Quel que soit le problème, il se trouvera toujours un mathématicien (peut-être pas encore né !) qui n'aura nul besoin de recourir à l'expérience pour le traiter.*

3.2 Maxime. *Quel que soit le mathématicien, il y a toujours un problème pour lequel il aura besoin d'avoir recours à l'expérience*[37].

3.2 Plaidoyer

Comme je l'ai dit dans l'introduction, faire des mathématiques c'est, pour moi et pour beaucoup d'autres, poser et résoudre des problèmes. Il est clair que cela nécessite de posséder un bagage technique, d'autant plus important qu'on s'attaque à des problèmes difficiles, et je ne méprise pas la technique. Il est clair aussi que la validation ultime d'un résultat mathématique est la démonstration déductive : c'est notre chance d'avoir une méthode pour convaincre qui résiste au temps. Mais, mon sentiment est que l'enseignement des mathématiques se résume trop souvent à ces deux points, en négligeant la phase de recherche. C'est d'autant plus dommageable que cette phase est évidemment la plus passionnante. Lorsqu'on fait cette remarque à des enseignants de collège ou de lycée[38], la réponse qui vient le plus souvent est la suivante : *Bien sûr, nous trouvons nous aussi que l'étude de problèmes ouverts est intéressante, mais elle est très coûteuse en temps et nous avons*

[37] Même s'il ne le dit pas explicitement et, je dirais presque, même s'il n'en est pas conscient.

[38] D'ailleurs, changeant de casquette, je pourrais tout à fait tenir ce langage à propos de mon propre cours d'intégration en licence.

des programmes à boucler. C'est vrai, mais on a vu que ces problèmes sont aussi l'occasion de mettre en œuvre les compétences techniques. De plus, je me demande souvent ce qui est le plus important, dans l'apprentissage des mathématiques, lorsqu'il s'adresse à tous[39] : est-ce la technique ? est-ce l'apprentissage de la démonstration ? J'ai plutôt tendance à répondre, avec de multiples précautions, que la capacité de chercher, d'observer, de faire des hypothèses, de raisonner, d'argumenter, de critiquer, de surmonter ses erreurs, est bien plus importante encore. C'est en ce sens que je développe ce plaidoyer pour l'expérimentation en mathématiques. Il me semble que notre enseignement n'utilise pas suffisamment cette possibilité d'accès, sauf peut-être l'enseignement élémentaire, mais cela, le lecteur le sait mieux que moi.

4 Références

[Andler] Andler M. *in* Colloque Mathématiques, Sciences expérimentales et d'observation à l'école primaire, Saint-Etienne, septembre 2005.

[Arsac] Arsac G., Germain G., Mante M. *Problème ouvert et situation problème*, brochure IREM de Lyon, 1991.

[DP] Perrin D., *L'expérimentation en mathématiques*, Version longue, @@

[Froger] Froger M., *Initier à la démarche scientifique en classe de 5e à l'aide des problèmes ouverts*, Mémoire PLC2, IUFM de Versailles, 2006.

[Kuntz] Kuntz G. (coordonné par) *Démarche expérimentale et apprentissages mathématiques*,
http ://educmath.inrp.fr/Educmath/etudes/experimentation-math

[Martin] Martin Y., *Conception et mise en oeuvre de géométries non euclidiennes dans le cadre de la géométrie dynamique illustrées avec Cabri-Géomètre. Expérimentation en formation des maîtres*, thèse, Grenoble, 2003. Voir aussi : http ://www.reunion.iufm.fr/Dep/mathematiques/Formateurs-/Yves/these.html

[MDP1] Martin-Deschamps M., Perrin D., *Le schéma de Hilbert des courbes localement Cohen-Macaulay n'est (presque) jamais connexe ni réduit*, Rapport de recherche du LMENS, 1995.

[MDP2] Martin-Deschamps M., Perrin D., *Le schéma de Hilbert des courbes localement Cohen-Macaulay n'est (presque) jamais réduit*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4ème série, t. 29, 1996, p. 757-785.

[39]Ma réponse est un peu différente lorsqu'il s'agit de futurs scientifiques.

[Massola] Massola J.-P., *Osons la difficulté*, PLOT, 13, 2006, p. 18-23.

[ME] Perrin D., *Mathématiques d'École*, Cassini, 2005.

[Perrin1] Perrin D., *Cours d'algèbre*, Ellipses, 1995.

[Perrin2] Perrin D., *Géométrie projective et applications aux géométries euclidienne et non-euclidiennes*, en préparation.

[Sauter] Sauter M., *Formation de l'esprit scientifique avec les narrations de recherche au cycle central du collège*, Repères IREM, 39, p. 7-20.

REGARD SUR EXPERIMENTATION MODELISATION EN SCIENCES A L'ECOLE

Élisabeth PLĖ
Professeur IUFM Champagne Ardenne
Laboratoire A.E.P. Université de Reims.
elisabeth.ple@reims.iufm.fr

Résumé

Les programmes de 2002 en sciences mettent en avant la *démarche d'investigation,* et font aussi référence à l'opération « la Main à la Pâte ». A partir d'un bref regard historique, nous nous poserons la question du rôle des fondements épistémologiques dans les pratiques des enseignants de l'école élémentaire et surtout nous analyserons la place que peut occuper l'expérimentation et la modélisation dans les activités scientifiques à l'école. Enfin nous illustrerons nos propos à partir d'un exemple, celui de la construction de la matérialité de l'air chez des élèves du cycle 3.

I – UN COURANT DE RENOVATION DE L'ENSEIGNEMENT DES SCIENCES EN FRANCE

I – 1 *La main à la Pâte,* un nouvel élan pour les sciences

Depuis quelques années, la France est engagée dans un courant de rénovation de l'enseignement des sciences. C'est à l'initiative d'un prix Nobel de Physique, Georges Charpak (1996), qu'a été expérimentée l'opération « La Main à la Pâte ». Il est revenu conquis par ce qu'il avait observé dans des quartiers difficiles de Chicago : « *là bas, les enfants ne sont pas assis à écouter le maître…ils font des manips par groupe…chaque jour ils écrivent ce qu'ils ont fait et compris sur leur cahier d'expérience* ». Si elle a irrité certains, c'est qu'elle s'affichait au départ comme une nouvelle méthode importée des États Unis, alors que ce type de pratique était préconisé dans notre pays depuis longtemps et que des enseignants pratiquaient humblement mais avec enthousiasme ce genre d'enseignement dans leur classe. Celui-ci restait, il est vrai, confidentiel et surtout, était considéré comme inaccessible par tous les autres qui oeuvraient de manière plus traditionnelle.

Cependant « La Main à la Pâte » fut déterminante pour dynamiser l'enseignement des sciences à l'École pour trois raisons :

- Pour la première fois, la communauté scientifique, au plus haut niveau puisque qu'elle sera pilotée par trois académiciens des sciences[1], se mobilise pour reconnaître l'importance du développement de ces démarches chez les jeunes enfants, et mettre en avant des travaux réalisés par les enseignants. L'enseignement des sciences à l'École est enfin pris au sérieux et n'est plus considéré comme une sous-science de bouts de ficelle.

- Des ressources clés en main sont produites et mises en ligne[2] sur un site Internet. Un accompagnement à distance ou de proximité est offert aux enseignants.

- Une forte médiatisation met en avant ce type d'activités auprès du grand public.

« La Main à la Pâte » mobilisera, dès le début, des didacticiens des sciences, puisque c'est l'INRP avec l'aide de l'Académie des Sciences qui sera chargée de la piloter. Elle n'est évidemment pas un renouveau pédagogique créé de toutes pièces par des académiciens des sciences[3] mais plutôt une promotion des sciences à l'école accompagnée d'aides pratiques à destination des enseignants pour assurer la faisabilité de ces activités.

Georges Charpak usera de sa notoriété, de son influence et de toute son énergie pour convaincre le Ministère de l'Éducation Nationale de dépasser le stade expérimental de cette opération. Ainsi en 2000, le M.E.N. lance un plan de Rénovation des Sciences en reprenant les principes de la M.A.P., et en 2002, les nouveaux programmes pour l'école élémentaire mettent en avant *la démarche d'investigation.*

I – 2 Les sciences à l'École, effet de mode ?

Dix ans après, on constate un certain engouement pour les activités scientifiques à l'École. Sans douter bien au contraire de cette embellie, on peut cependant s'interroger sur la pertinence des arguments mis en avant.

- *« Les élèves sont actifs »* dit-on. Il est en effet de bon ton dans les pédagogies actives de faire participer les élèves. La manipulation ne doit cependant pas constituer une finalité, c'est un moyen pour construire du savoir. Encore faut-il avoir pensé la place de l'expérience dans ce processus d'élaboration intellectuelle…

- *« C'est concret »*, mais chacun sait que l'exemple ne suffit pas, l'élève doit d'ailleurs se déprendre de l'exemple pour comprendre…

[1] Georges Charpak, Pierre Léna et Yves Quéré.

[2] www.inrp.fr/lamap

[3] Georges Charpak ne s'est jamais présenté comme un pédagogue ni comme un spécialiste de l'enseignement.

- *« C'est motivant »*, certes, mais si le plaisir de la manipulation est important, il ne doit pas constituer le seul moteur de l'activité. La motivation à prendre en compte est surtout celle qui anime tout chercheur et qui est liée au plaisir de la découverte. C'est aussi celle-là qui engendre, à partir des nouvelles connaissances, d'autres questionnements.

Bien sûr, évaluer ce type d'activités ne peut se limiter à une approbation enthousiaste mettant en avant ce genre d'arguments relevant plutôt du « pédagogiquement correct » ou de l'air du temps.

II – QUELQUES MOTS SUR L'EXPERIMENTAL DANS LES ACTIVITES SCIENTIFIQUES A L'ECOLE : REGARD HISTORIQUE

Nous n'avons pas l'ambition de réaliser une étude exhaustive sur ce thème, mais nous souhaitons poser le problème du rôle tenu par l'expérimental et l'empirisme dans l'enseignement, à la lumière d'un éclairage porté sur les « leçons de choses », pionnières de l'enseignement obligatoire des sciences.

C'est à travers l'article 1er de la loi du 28 mars 1882 que pour la première fois figure nommément l'enseignement obligatoire des sciences physiques et naturelles à l'école. Il est d'ailleurs dans ce texte associé aux mathématiques sous l'appellation « d'éléments de sciences naturelles, physiques et mathématiques ». Mais dès la sortie des programmes de 1882, cette association disparaît (le terme mathématiques est également balayé des programmes) et ces éléments de sciences naturelles et physiques deviendront même « usuels ». Rapidement cet enseignement est désigné sous le terme « leçons de choses ». En 1908, Pauline Kergomard, Inspectrice de l'Éducation Nationale et cheville ouvrière de la « *leçon de choses* », après avoir sillonné la France, apporte ses conseils aux enseignants. « *Règle absolue : l'enfant doit voir la chose sous toutes ses faces, sous tous ses aspects, …, il doit la voir dans la lumière et dans l'ombre, avec les yeux, mais aussi avec les doigts…il doit la sentir si elle a de l'odeur, l'écouter si elle a du son, la goûter si elle a de la saveur* ». C'est donc en premier lieu une perception sensorielle qui est sollicitée nécessitant un contact avec la *chose à manipuler*.

Comme le souligne Kahn (1999), dès le début, les leçons de choses sont écartelées entre deux modèles, celui des « connaissances usuelles » pour répondre aux « usages de la vie » et un « modèle épistémologique » qui renvoie à la nature de la démarche préconisée. A l'instar du savant qui établit des lois à partir d'observations de la nature, l'enfant est invité à l'observation.

Les instructions de 1923 préconisent de rendre l'enfant non seulement observateur, mais aussi « expérimentateur » et ainsi de le rapprocher encore plus de la science qui se pratique dans les laboratoires. Mais en même temps cet enseignement devient une sorte

« *de paradigme d'une éducation à la raison par les méthodes actives, à laquelle doit contribuer la totalité de l'enseignement primaire* » (Kahn, 2000)[4].

Si les instructions de 1945 suppriment le caractère expérimental pour ne garder que l'observation, elles font toujours référence à des fondements épistémologiques en justifiant cette réduction du fait de l'incapacité pour des enfants de cet âge d'accéder à d'autres opérations jugées trop complexes. Cependant, une fois encore, cette pédagogie inductive n'est pas limitée à l'enseignement des sciences et tout l'enseignement primaire prône une « méthode intuitive et inductive » où l'observation est centrale (en particulier en histoire, géographie, arithmétique et géométrie).

Certes, cette « leçon par les choses », où la vérité est dans la chose à condition de bien l'observer est très marquée par le positivisme du 19ème siècle. Tout au long du 20ème siècle (jusqu'aux activités d'éveil), cette référence épistémologique constituera une sorte de caution pour lutter contre un enseignement dogmatique, verbaliste et livresque. C'est aussi la conclusion que tire J. Lebeaume (2002) à la suite de l'analyse des programmes scolaires (fin du 19ème siècle et du début du 20ème) qui accolent l'adjectif expérimental aux disciplines (travail manuel, géométrie, mécanique, technologie…). Il cite ainsi Basquin (1947) qui propose un enseignement de la mécanique à partir d'expériences : « *L'exposé est dans le livre, et c'est par là que le Professeur peut gagner du temps. Qu'il y renvoie les Élèves sans regret ! Mais les expériences, elles, n'y sont que décrites, et il faut qu'elles soient vécues. Les faire bien, c'est ajouter à la boîte à conserves qu'est le livre les vitamines indispensables ; c'est vacciner l'esprit des élèves contre le scorbut intellectuel que la seule parole du Professeur est impuissante à vaincre* ».

Nous aurions bien sûr pu continuer cette réflexion en faisant aussi appel aux « activités d'éveil » qui remplaceront « les leçons de choses », et pour lesquelles la démarche expérimentale deviendra d'une certaine façon une figure de référence pour une démarche d'apprentissage à l'école élémentaire, mais ce regard historique a seulement la prétention de poser la question du rôle joué par l'affichage des fondements épistémologiques dans une rénovation pédagogique pour l'école. Nous considérons avec J.L. Martinand (1995) que la polyvalence de l'école élémentaire ne peut être considérée comme une multivalence, mais comme une spécialité, celle des apprentissages fondamentaux et des premiers apprentissages dans chaque domaine. Dans ce contexte, n'est-il pas utopique de penser qu'une didactisation des différents domaines disciplinaires soit compatible avec une pédagogie prenant en compte l'élève dans sa globalité ? Ainsi les démarches mises en avant en sciences ne sont-elles pas plutôt considérées dans les pratiques comme des figures emblématiques pour lutter

---

[4] « Cet esprit générateur de liberté et de personnalité tend à animer de plus en plus un enseignement primaire qui, à tous ses degrés, vise à n'être plus verbal et s'efforce de faire observer, expérimenter et réinventer. L'enfant, remarque Bergson, est un inventeur et un chercheur » ; prenons garde à ne pas en faire un écouteur » (Auriac, 1939, cité par Kahn (2000)).

contre un enseignement dogmatique et frontal, que comme une transposition à l'échelle de l'école de la science des laboratoires ?

III – QUELLES ACTIVITES POUR L'ECOLE ?

III – 1 Épistémologie sous-jacente des activités scientifiques à l'école

Les activités scientifiques à l'école préconisées par les programmes de 2002 possèdent bien sûr des fondements épistémologiques différents de ceux des « leçons de choses » empreintes d'inductivisme et de positivisme et faisant la part belle à l'observation. C'est la période des activités d'éveil et en particulier les travaux de recherche de l'INRP qui ont marqué ce renouveau pédagogique.

L'activité scientifique ne commence pas par l'observation mais, avec K. Popper, par une problématisation du réel. Bachelard (1938) est aussi passé par là, et l'on sait que « l'expérience première » (l'expérience sensible non questionnée) est trompeuse. La « logique de la découverte » consiste à délimiter le problème et présenter des hypothèses les plus réfutables possible sur le plan empirique.

À Bachelard, on doit aussi la notion « d'obstacles épistémologiques ». Ce concept viendra d'ailleurs conforter celui de représentations issues de la psychologie. L'obstacle au sens bachelardien n'est pas un manque, mais plutôt comme le définit Fabre (1995), un trop plein de connaissances qu'il faut déconstruire pour accéder à un savoir scientifique.

Avec Thomas Kuhn, la science n'est pas un reflet objectif du monde mais un construit social. Le débat scientifique est donc un combat, la recherche pure de vérité, un mythe. Ainsi, l'idée que le savoir procède du simple au complexe est totalement remise en question. À l'ordre encyclopédique du savoir on substitue la notion de niveaux de formulation du concept. Le savoir se construit par ruptures et continuité.

Les programmes de 2002, tout comme « La Main à la Pâte », mettent particulièrement l'accent sur la pratique de la langue et la socialisation. C'est en se référant au modèle du chercheur tenant dans son laboratoire un « cahier d'expériences » que les enseignants sont invités à faire tenir un carnet d'expériences à leurs élèves. C'est aussi en faisant référence à ce même modèle qu'est mis en avant le développement de l'objectivité et de la citoyenneté. Mais ce sont surtout deux objectifs fondamentaux de l'école, la pratique écrite et orale de la langue et la construction du lien social qui sont ainsi visées.

III – 2 Deux registres d'activités pour l'école

Nous empruntons à Jean Louis Martinand les deux registres d'activités pour l'école. D'une part un niveau de familiarisation pratique avec des phénomènes, des objets, des procédés, des rôles... D'autre part un registre d'élaborations intellectuelles que nous pouvons suivant la suggestion de V. Host, scinder en deux :

- Un niveau de *représentation*. Il s'agit parfois de définir les objets de la science, par exemple la matière, la température, la fusion, la dissolution… Bien entendu la définition est bien souvent le point d'arrivée, résultant de la construction. On pourra se reporter à l'exemple développé ci après concernant l'air. Dans d'autres situations, il s'agira de substituer des relations systématiques (des lois) aux corrélations aléatoires entre objets et événements perçus globalement.

- Un niveau d'explication scientifique visant à construire des *modèles et des théories.*

III – 3 Modèle, modélisation ?

III – 3.1 Qu'est-ce qu'un modèle ?

Notre réflexion se limitera à l'enseignement pour un niveau élémentaire correspondant à l'école primaire et au collège.

Sous le terme modèle on désigne des choses fort diverses, comme les maquettes de l'astronomie pour comprendre par exemple le phénomène de saisons, des analogies, des schémas ou diagrammes mettant en relation par exemple l'état de l'eau et la température, les modèles particulaires de la matière (modèle moléculaire, atomique…) ou bien des équations mathématiques (par exemple, pour exprimer la relation entre l'intensité et la tension aux bornes d'un dipôle).

Si une théorie peut être conçue comme un ensemble de lois traduisant intellectuellement des phénomènes de la nature, le modèle s'affiche comme un artefact, une construction de l'esprit qui se substitue à l'objet réel.

Toutefois, selon les cas, le modèle se rapproche davantage de :

- l'image, c'est alors l'aspect figuratif qui est privilégié ;

- la théorie qui met en avant la construction intellectuelle, par opposition au côté empirique ;

- la mathématisation qui est associé à la formalisation rendant compte, grâce à des formules, de réalités très différentes les unes des autres.

Selon les sens envisagés le modèle se caractérise par le fait qu'il est :

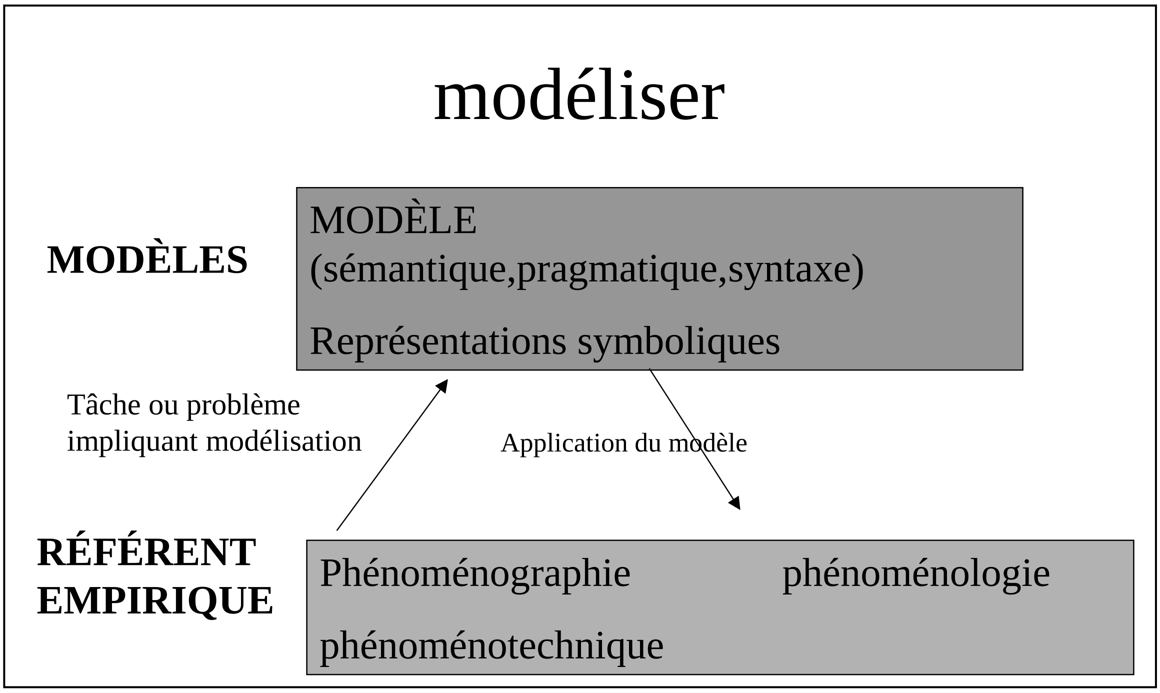
- hypothétique ;

- modifiable ;

- pertinent pour certains problèmes, dans certains contextes.

III – 3.2 Qu’est-ce que modéliser ?

Nous nous appuierons sur le schéma de J.L. Martinand (1992,1994) pour définir cette opération.



Martinand distingue bien le registre du « référent empirique » de celui des modèles. Il insiste sur la particularité de ce référent empirique pour les sciences expérimentales. D’une part le registre du modèle se construit en s’appuyant sur ce référent mais selon des exigences qui n’ont pas de solutions au niveau empirique. D’autre part, ce référent n’est pas seulement constitué par des objets, des phénomènes, des procédés, des rôles, mais aussi par des descriptions, des règles, des lois, des savoirs qui n’ont cependant qu’un statut empirique. Ce niveau d’élaboration intellectuelle que nous qualifions précédemment de « Représentation » est bien constitutif lui aussi du registre empirique.

Dans le registre des modèles, se poser les questions des théories élaborées, des outils symboliques mis en jeu, des significations ainsi construites, du domaine de validité des modèles c’est ce que Walliser (1977) désigne par la sémantique, pragmatique, syntaxe des modèles.

Le pouvoir du modèle est bien sûr d’apporter des outils, des ressources pour questionner le référent empirique, se représenter, expliquer, prévoir, inventer. On distinguera donc les descriptions qui sont à l’origine des élaborations modélisantes (phénoménographie, phénoménotechnique), des descriptions qui relèvent d’une projection du modèle sur le référent (phénoménologie).

Enfin modéliser, implique une tâche qui est loin d'être une simple utilisation d'un modèle ad hoc. Elle nécessite de se poser la question de ce qui doit être pris en charge par l'élève et ce qui doit lui être fourni (les germes du modèle).

III – 3.3 Modéliser à l'école ?

Modéliser, c'est résoudre un problème qui n'a pas de solution au niveau empirique. De nombreuses situations de l'école élémentaire, en particulier celles relatives aux études de transformation de la matière, amènent les élèves à se poser des pourquoi nécessitant le recours au modèle particulaire. C'est par exemple le cas de l'évaporation qui pose à l'élève de 10 ans le problème de la représentation d'une matière existante, l'eau, dans un état invisible, la vapeur.

Spontanément les élèves sont tentés de dire que le liquide s'envole sous forme de très petites gouttes très légères, si petites qu'elles sont invisibles. Pour l'élève, ces petites gouttes sont encore du liquide, même si elles sont petites et invisibles. Elles sont donc très différentes des particules du physicien… On trouve ici l'obstacle classique de la non-dissociation entre le registre empirique et le registre du modèle. Ainsi ce « modèle spontané » est fort discutable car il manque aux élèves le caractère hypothétique d'un raisonnement sur le possible. L'opération de construction du modèle (sémantique et syntaxe) n'est pas envisagée dans les programmes actuels. Elle demanderait une forte didactisation, mais serait surtout à la limite des possibilités des élèves de cet âge.

En revanche, il est parfois fait usage de modèles à l'école élémentaire, en particulier pour traiter des questions d'astronomie. Cette manipulation de modèles est souvent qualifiée à tort de modélisation. Elle n'est pas sans poser des problèmes ! La manipulation d'un simple globe terrestre par les élèves n'est pas simple car la maquette sensée modéliser la Terre est placée sur la Terre elle même. Pas étonnant par exemple que cette utilisation amène les élèves à penser qu'il existe une verticale universelle dans l'espace, par référence à la verticale du lieu de manipulation…

IV – UN EXEMPLE DE DEMARCHE D'INVESTIGATION A L'ECOLE

La stratégie didactique que nous décrirons par la suite est centrée sur le franchissement de l'obstacle « l'air n'est pas de la matière », par des élèves de 10 -11 ans. Si l'enfant de cet âge n'entend pas le terme matière dans son acception scientifique - ce mot évoque pour lui : la matière grasse, les matières premières, les disciplines - c'est que ce concept n'est que partiellement construit. Son expérience première l'amène implicitement à reconnaître la matière sous sa forme liquide et solide. C'est alors quelque chose qui se voit, se manipule, oppose une certaine résistance, est pesant. Tout le contraire de la conception qu'il a de l'air en somme !...

Le schéma suivant, document 2 (Astolfi, Peterfalvi, 1993), figure le caractère fonctionnel de l'obstacle.

OBSTACLE

L'air n'est pas de la matière

CONCEPT VISÉ

L'air est de la matière

1

Réseau d'idées associées qui expliquent la résistance de l'obstacle

- la matière est visible
- elle oppose une certaine résistance
- elle est palpable
- l'air « sert à respirer »
- l'air est un réservoir

2

Conditions de possibilité pour le franchissement de l'obstacle

- l'air est pesant
- l'air peut transmettre un mouvement à un objet solide
- l'air peut s'opposer au déplacement de substances reconnues implicitement comme matérielles (solides, liquides)
- l'air peut être transvasé

Document 2 - Fonctionnement de l'obstacle « l'air n'est pas de la matière »

Cet obstacle est véritablement résistant car il est fermement implanté dans la tête de l'enfant, constituant un système cohérent d'interprétation du monde construit grâce à ses propres expériences. Le réseau d'idées associées (1) justifie le fait que l'élève n'abandonne pas facilement ses représentations au profit d'une représentation alternative (2) à construire à partir de l'acte d'enseignement.

L'enseignant, lui, perçoit d'abord l'obstacle comme un écart au savoir à enseigner, comme ce qui s'oppose à la réussite de son projet. L'idée d'objectif-obstacle, (Martinand, 1986), se présente comme l'envers de l'idée de blocage :

« *Dans la mesure où ces obstacles ont une signification épistémologique profonde, je crois qu'ils fournissent la clé pour formuler les buts les plus essentiels de l'éducation.*

Autrement dit, il s'agit d'exprimer les objectifs en termes d'obstacles franchissables, car parmi la diversité des objectifs possibles, les objectifs intéressants sont les objectifs-obstacles. ».

C'est dans cet esprit que Astolfi & Peterfalvi (1993) suggèrent de traiter les obstacles, « *non pas négativement comme ce qui empêche l'apprentissage, mais plutôt de les considérer comme l'enjeu conceptuel* », à condition bien sûr, « *de se donner les moyens de les penser d'une manière qui rende possible leur dépassement* ».

IV – 1 Déroulement des activités

IV – 1.1 Le verre vide / L'air s'oppose à l'entrée de l'eau

La première séance est centrée sur une activité expérimentale qui consiste à enfoncer un verre en plastique transparent, au fond duquel on a collé un sucre, dans un bac transparent rempli d'eau, tout en le maintenant bien verticalement, l'ouverture vers le bas. Cette expérience sera réalisée par l'enseignant, après avoir demandé aux élèves d'anticiper ce qui va, selon eux, se passer.

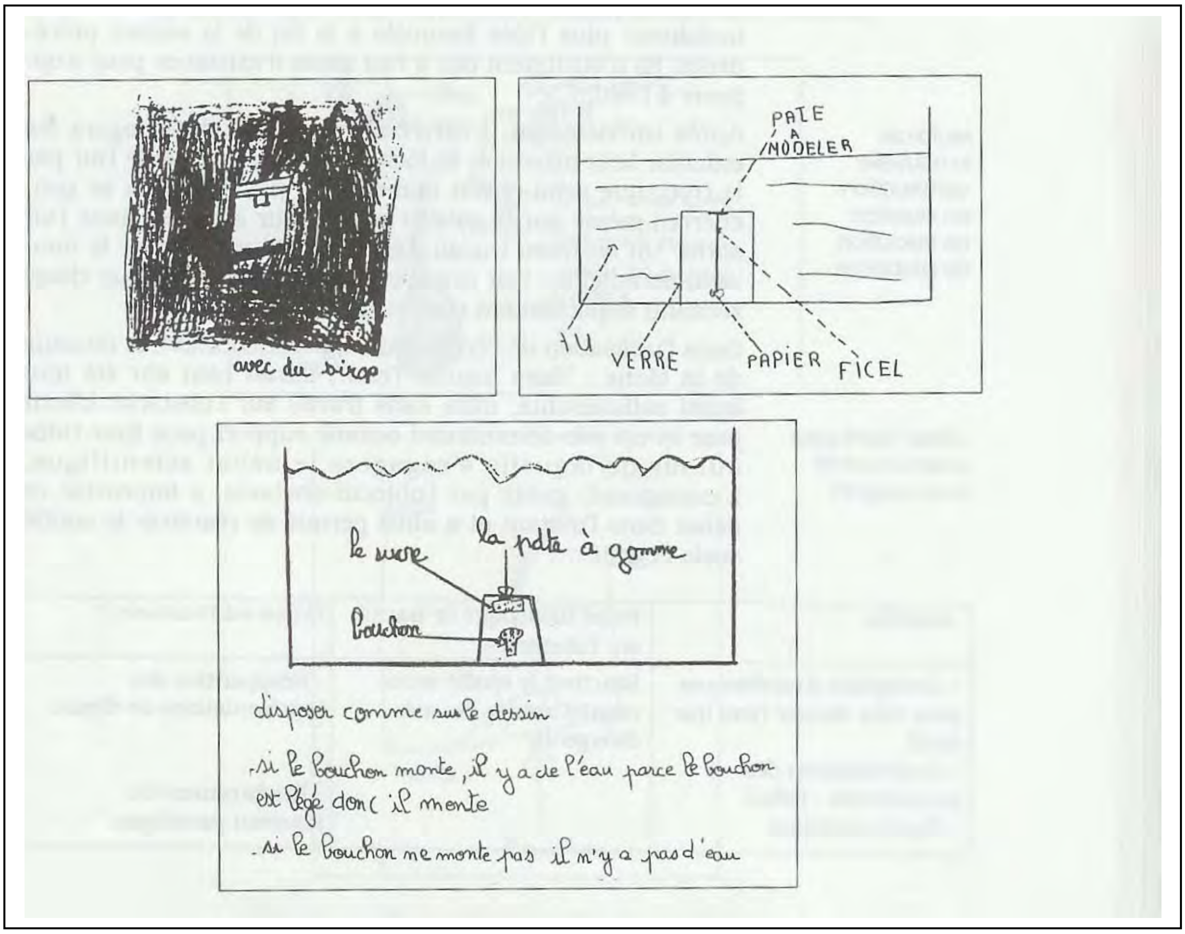
La présence du sucre donne à la situation un caractère inattendu, propice à la mobilisation des idées. Les élèves, dans leur grande majorité, 19/23, prévoient que l'eau montera dans le verre :

- *dans l'eau, le sucre va fondre* ;

- *le sucre tombe en petits morceaux* ;

- *l'eau ira dans le pot et le sucre se décollera*.

On réalise l'expérience, mais le fait a priori surprenant sur lequel l'enseignant espérait s'appuyer pour créer le conflit - l'eau ne monte effectivement pas dans le verre - est nié. Certains affirment voir monter l'eau, d'autres demandent de refaire l'expérience en enfonçant plus rapidement le verre, ou bien à l'inverse, plus lentement... L'argument de la non dissolution du sucre n'est pas pour eux une preuve pour montrer que l'eau ne monte pas (« peut-être que l'eau monte à ras du sucre, sans le mouiller »). La plupart affirment ne pas bien voir. Manifestement, la contradiction apportée par l'enseignant par l'intermédiaire de l'expérience, n'est pas perçue comme telle : les élèves fuient le conflit cognitif, ils tiennent trop à leur représentation de départ et préfèrent mettre en doute le fait observé. Face à cette situation, l'enseignant met au point une stratégie d'évitement de fuite du conflit : il entre dans le jeu des élèves et leur donne le droit au doute. « C'est vrai on ne voit pas bien.» Il les met alors au défi de concevoir par eux-mêmes, en petits groupes, une expérience pour prouver que l'eau monte (ou pas). Cette phase joue sur le mode de la dévolution du problème : l'imperfection de la situation qui n'est pas favorable au projet de l'enseignant est utilisée positivement pour enrôler les élèves. Sans perdre de vue le cap conceptuel fixé, l'enseignant permet une négociation entre son projet et les idées des enfants : il infléchit son projet en impliquant les élèves dans l'explicitation de leur arguments.



Document 3 - Propositions d’expériences d’élèves pour prouver que l’eau monte ou pas dans le verre.

Bien sûr, hélas pour eux, toutes les expériences qu’ils proposent (colorer l’eau, mettre un bouchon en liège comme flotteur, introduire un mouchoir en papier dans le verre…) vont à l’encontre de leur prévision. Cette réactivation du conflit amène les élèves à reconsidérer le problème et à accréditer le fait a priori inacceptable. Ils y sont d’autant plus disposés que ce sont eux qui ont conçu et réalisé les expériences pour le vérifier.

Les élèves formuleront finalement, individuellement et par écrit, que ce « verre vide » contenait de l’air qui s’oppose à l’entrée de l’eau : - « *parce qu’il y a de l’air dans le pot* » - « *l’air met l’eau sur les côtés* » - « *l’air forme un bouchon* » - Mais ont-ils une alternative possible ?

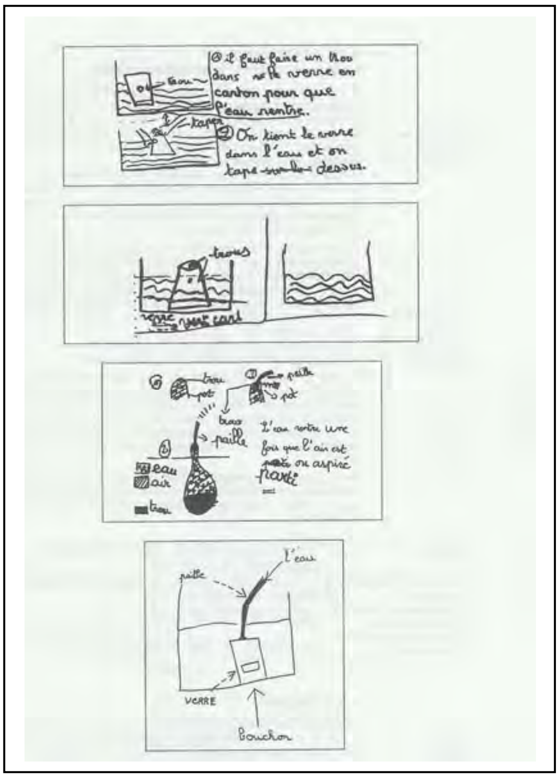
IV – 1.2 Faire monter l'eau / C'est bien l'air qui empêche l'eau de monter.

Pour faire fonctionner la nouvelle idée, l'enseignant demande de proposer, par écrit et en groupe, des moyens pour faire entrer l'eau dans le gobelet (celui-ci étant toujours maintenu verticalement dans l'eau, l'ouverture vers le bas).

Les résultats de chaque groupe (Document 4) sont communiqués à toute la classe au moyen de posters. Chaque groupe propose plusieurs solutions, dont faire des trous. Seul le groupe dans lequel un élève avait prévu et expliqué, en faisant intervenir l'air, que l'eau ne monterait pas, propose un dispositif pour aspirer l'air. Un autre propose de faire un trou sur une partie non immergée. L'explicitation de cette proposition par le groupe, à la demande de l'enseignant, déclenche une très vive réaction et relance le précédent conflit : « *Ça ne marchera pas l'eau ne pourra pas entrer - quand un bateau est percé l'eau rentre, mais il faut que le trou soit dans l'eau, autrement ça ne fait rien.* » Les élèves semblent penser que c'est seulement la paroi du verre qui empêche l'eau de rentrer et ne mobilisent plus l'idée formulée à la fin de la séance précédente. Ils n'attribuent pas à l'air assez de « consistance matérielle » pour qu'elle soit capable de s'opposer à l'eau.

Après un vif débat, c'est l'expérience qui départagera les enfants. Leur attention se focalisera sur la sortie de l'air par le trou, que celui-ci soit immergé ou pas. Certains se pencheront même sur le gobelet pour sentir avec leur joue l'air sortir. Un nouveau travail d'écrit individuel stabilise le nouveau paradigme : l'air existe et peut résister à quelque chose que les élèves reconnaissent implicitement comme de la matière : l'eau .

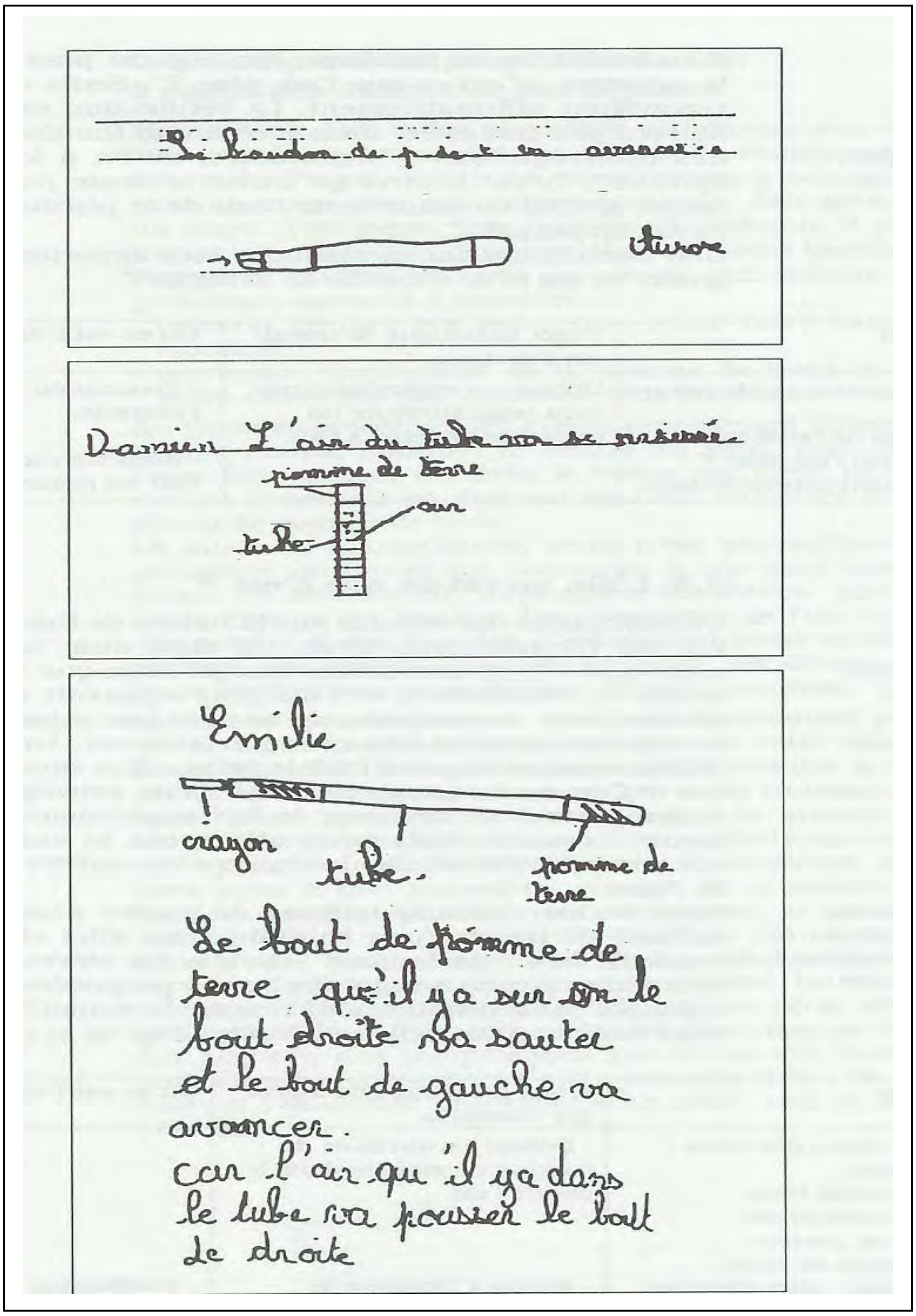
On peut supposer que sans le débat préalable s'appuyant sur les écrits des différents groupes, la réussite de la tâche : « faire monter l'eau dans le verre» aurait bien sûr été tout aussi satisfaisante, mais sans travail sur l'obstacle. L'écrit joue ici un rôle déterminant comme support pour fixer l'idée autour de laquelle s'engagera le débat scientifique. L'enseignant, guidé par l'objectif-obstacle, doit cependant être capable de réagir dans l'urgence à une prise de position imprévue pour réactiver le conflit.



Document 4 - Propositions d'expériences d'élèves pour faire monter l'eau dans le verre.

IV – 1.3 Le tube à patate / l'air peut pousser de la matière solide

On présente aux élèves un tube transparent fermé aux 2 extrémités par des bouchons de pomme de terre, et on leur demande, individuellement et par écrit, de prévoir ce qui va se passer lorsqu'on appuie sur l'un des bouchons. Seuls 7 enfants évoquent dans leur explication la présence d'air entre les deux bouchons (document 5).



Document 5 - Prévisions d'élèves sur ce qui se passera avec le tube à patate

La réalisation de la manipulation remporte évidemment un grand succès, mais c'est un aspect, là aussi imprévu, qui est exploité par l'enseignant pour travailler l'obstacle. Certains canons ne fonctionnent pas : les élèves sont invités à rechercher la cause de la panne et à solutionner le problème :
- « *Peut-être que la pomme de terre est trop petite et que l'air part sur le côté*.»

- « *Peut-être qu'il y a un trou dans la pomme de terre*. »

- « *Il n'y a peut-être pas assez d'air pour pousser*.»

Certains refusent d'adhérer à l'idée commune qui est en train de se construire et s'étonnent par exemple que l'air sorte du tube pour aller vers la classe et pas l'inverse. Cette résistance est encore un signe d'évitement du conflit : ces élèves avancent cette idée en apparence saugrenue car ils perçoivent qu'elle est à la limite du réfutable par l'enseignant.

Enfin la nouvelle propriété - l'air peut pousser un solide - est discutée et généralisée à travers différentes situations pour lui faire acquérir le statut d'attribut du concept de matière.

IV – 1.4 Aller chercher un litre d'air de la cour / L'air peut se transvaser.

Afin d'évaluer les acquisitions des élèves, l'enseignant demandera de trouver une solution pour aller chercher une « bouteille d'air de la cour ». Certes les élèves trouveront la demande un peu saugrenue, mais proposeront des réponses attestant le niveau de franchissement de l'obstacle. À cet âge, les élèves proposent en général de courir dans la cour en maintenant horizontalement une bouteille ouverte. Cette solution sera bien sûr proposée par certains mais contredite par d'autres qui, pour éviter le mélange de deux airs, bien qu'invisibles, proposeront par exemple de presser une bouteille souple dans la cour, puis de la refermer. Ou bien encore de remplir une bouteille d'eau, de la vider dans la cour… elle se remplira alors d'air. Une telle proposition n'est possible que si leurs auteurs considèrent que cette opération consiste à échanger une matière contre une autre.

IV – 1.5 L'air pèse

Le fait que l'air pèse sera un argument massue pour donner à l'air le statut de matière. Cet argument est déterminant car il arrive, d'une part, après plusieurs phases de fissuration de l'obstacle qui ont déstabilisé les élèves, d'autre part, à un moment où les constructions nouvellement élaborées font s'interroger les enfants sur la nature de l'air.

Pour introduire ce problème, l'enseignant pose directement la question : « est-ce que l'air pèse ? ». Seuls deux sur 23 répondront affirmativement. La vérification expérimentale, au moyen d'une balance Roberval et d'un ballon dégonflé puis gonflé créera une franche surprise et des interrogations : « *mais alors, on en a lourd sur les* *épaules* », « *c'est bizarre qu'on ne le sente pas quand on bouge. Quand on saute dans l'eau de la piscine, on la sent, ça fait un plaqué* ....».

C'est le moment choisi par l'enseignant pour apporter une information déterminante : « *ce qui pèse, s'appelle de la matière* ».

IV – 1.6 Structurer les connaissances

Si la dernière activité a spontanément réactivé l'interrogation des élèves concernant la nature de l'air par des questions du type : *« oui mais l'air c'est quoi ? », « c'est peut être un gaz solide ? »*, ils ne sont pas capables, à ce stade, d'en définir ses caractéristiques.

Il est donc capital pour l'enseignant de structurer les connaissances pour dépasser le fait expérimental, l'anecdotique, l'émotionnel, et aller vers le conceptuel et déterminer les attributs du concept de matière dans le cas de l'air. Montrer que ces propriétés sont communes aux solides et aux liquides est aussi une des conditions de franchissement de l'obstacle (Piaget, 1971).

La masse apparaît comme le critère déterminant pour définir la classe matière, mais la limite de cette classe reste floue. En effet, le franchissement de l'obstacle a demandé un tel effort aux enfants que ce qui a été reconstruit prend alors une valeur universelle. L'air devient même le prototype de la matière et la nouvelle construction conforte un autre obstacle celui du substancialisme qui se manifeste quand ils sont prêts à tout considérer comme de la matière : « *alors tout est matière, les rêves, les sentiments, la lumière..., car comme l'air on ne peut pas les toucher* ». On retrouve là, le constat que faisait Piaget : les enfants de cet âge se servent de l'air pour expliquer la pensée, les rêves ou la mémoire. Il n'est donc pas étonnant que cette idée resurgisse ici. Mais, la démarche mise en place depuis le début a fait acquérir des compétences aux élèves qui leur permettent d'évacuer rapidement cette nouvelle idée : ils proposeront, et réaliseront une expérience pour « voir si la lumière pèse »…

IV – 2 Principes de fonctionnement du dispositif

IV – 2.1 Articuler déconstruction / reconstruction

Le pôle construction est valorisé par la majorité des enseignants. Confrontés au problème de construire à terme le fait que l'air est de la matière, la plupart des enseignants observés dans des situations de formation préconisent de lister les attributs du concept de matière (« *il faut bien leur donner puisqu'ils ne savent pas ce qu'est la matière* » disent-ils) et de démontrer, preuves expérimentales à l'appui, que l'air possède bien ces propriétés.

Cette stratégie qui délaisse la déconstruction pour travailler d'emblée à une nouvelle construction néglige la notion d'obstacle ou plutôt ne considère de cette notion que l'écart entre le modèle explicatif de l'enfant et celui à construire. Si cette stratégie est efficiente dans bien des cas (Barth, 1987), elle ne semble pas opérante à long terme dans le traitement d'un obstacle car celui-ci « *n'est pas un vide, mais un trop plein de connaissances* » (Fabre, 1995) ... qui risque de revenir au galop une fois le « vide » comblé. Ces dispositifs qui articulent déconstruction et reconstruction conceptuelle ont été qualifiés de « souple-dur » (Plé, 1995) dans la mesure où ils favorisent l'expression des idées des élèves en s'infléchissant en fonction des différentes propositions, tout en maintenant le cap conceptuel fixé.

IV – 2.1 Opposition par le conflit et coopération entre élèves

La gestion d'une telle situation a ceci de paradoxal, c'est qu'elle oblige l'enseignant à créer une situation d'opposition, en rendant explicite les deux termes de la contradiction, tout en développant un climat favorable à la coopération entre élèves.

C'est en installant le droit à l'erreur, en dédramatisant la situation, ou encore, en accompagnant affectivement l'élève dans la défense de son point de vue, que l'enseignant contribue à installer ce climat favorable.

Ce n'est qu'à ce prix que l'accent pourra être mis par l'enseignant sur les expériences qui ne fonctionnent pas (le tube à patate…) ou sur des anticipations conduisant à des échecs (verre vide, …) pour s'en servir comme un tremplin afin que les élèves réexaminent leur conception de l'air.

La réussite de l'expérience en situation scolaire est donc toute relative. Elle provoque certes un certain plaisir quand elle vient conforter les attentes de son concepteur, mais l'échec est bien souvent plus porteur pour faire réaliser un saut conceptuel.

IV – 2.2 Articuler écrits, débats et expérimentations

La production d'écrit intervient comme un des moyens pour favoriser l'installation d'un réel conflit (Vérin, 1996), éviter la négation d'un des deux termes de la contradiction et permettre un investissement des élèves dans un débat. Ses formes et ses fonctions sont diverses.

- Lors de la prévision du résultat d'une expérience

Chaque élève est sollicité et formule par écrit son idée. C'est une manière d'engager personnellement chaque individu dans le débat scientifique qui en découlera. Ainsi, en empêchant l'oubli grâce à « la chose écrite », on évite le refuge vers une position consensuelle et confortable comme le génèrent souvent les sollicitations uniquement orales.

- A l'occasion de la recherche d'un procédé expérimental pour résoudre un problème

Cette procédure est organisée en deux temps : une recherche par groupe, où les élèves imaginent des solutions et doivent s'accorder pour les présenter aux autres sous forme de posters, suivie d'une mise en commun où les affiches sont examinées, discutées, critiquées par la classe entière, comme le ferait une communauté scientifique.

De ce point de vue, le cahier d'expériences joue un rôle prépondérant. Il est un outil de la pensée en construction, à la fois point d'ancrage pour affirmer des idées, les exposer, les argumenter, lieu pour risquer sa pensée, trace d'une démarche d'investigation avec des allers-retours, des errements, des erreurs.

IV – 2.3 Tenir le cap conceptuel et infléchir le dispositif en fonction des réactions des élèves

L'enseignant doit conjuguer deux logiques : celle du savoir à construire fixé par l'objectif-obstacle visé, et la logique de pensée des élèves. Pour prendre en compte cette dernière, l'enseignant doit être capable d'infléchir son dispositif pour permettre un véritable enrôlement au sens de Bruner (Bruner, 1983). La simple contradiction logique ne suffisant pas à amorcer le conflit, celui-ci ne sera effectif que si ces élèves se « prennent au jeu », s'ils peuvent s'investir affectivement dans un débat d'idées, si on les prend au sérieux, ou bien encore si on leur donne la possibilité de défendre leur point de vue en leur offrant la possibilité de résoudre un problème pour trancher entre différentes solutions.

Ainsi le dispositif est-il suffisamment rigide pour éviter les dérives, tout en laissant du jeu pour permettre un investissement des élèves.

IV – 3 Nature des activités

Chaque séquence présente des spécificités liées en particulier à la nature des savoirs à construire. Ici la spécificité réside dans le type de dispositif mis en place pour franchir l'obstacle de la non prise en compte du caractère matériel de l'air. Il s'agit en somme d'attaquer l'obstacle sur toutes ses faces. Pour chaque séance, les élèves appréhendent la nouvelle situation présentée avec le savoir nouvellement construit. Ces situations d'investigation empirique vont à terme contribuer à construire une nouvelle représentation de l'air, mais aussi de la matière. C'est donc bien un « niveau de représentation » que nous travaillons et nous restons à un traitement au niveau empirique. En revanche, lorsque les élèves se demandent « oui mais l'air c'est quoi ? », « c'est peut être un gaz solide ? », ce type de questionnement appelle des solutions qui n'existent pas au niveau du registre empirique et nécessiteraient de mettre en place un processus de modélisation, ce que nous avons délibérément écarté pour les raisons exposées plus haut.

V – EXPERIENCES, EXPERIMENTATION

Nous empruntons à Maryline Coquidé (1998) la distinction entre les trois niveaux d'expérimentation**.**

L'expérimentation-action, correspondant à un registre de familiarisation pratique avec les phénomènes, les objets, les rôles et répondant au besoin de l'élève de faire des essais, de s'initier à des techniques et d'éprouver la résistance du réel. Outre ce besoin, il s'agit de construire chez l'élève une base empirique sur laquelle il pourra ensuite s'appuyer pour construire des concepts. Ce sont des expériences pour essayer, voir, explorer, s'initier**.**

L'expérimentation-objet, qui est au cœur de la démarche d'investigation. Comme le souligne Astolfi (2002), **« engager les élèves à expérimenter suppose qu'on encourage leur activité investigatrice et divergente** ». Si l'enseignant est loin d'être absent, il ne doit pas ouvrir un chemin balisé aux élèves. La connaissance s'expérimente dans **l'incertitude, la controverse, le débat** et l'expérimentation suppose la mise en place d'un espace discursif du type dialogique s'appuyant sur des outils langagiers divers, et en particulier des écrits instrumentaux (Vérin, 1996) et des échanges où sont mis en débat des arguments contradictoires dans un climat **« d'égalité argumentative »** (Rey, 1998). Ce qui est visé ici c'est construire un problème, examiner des solutions, mettre en doute, formuler une conclusion à remettre en débat le cas échéant ou bien à valider. C'est aussi développer par la même occasion des compétences langagières et des qualités d'écoute, de coopération et d'esprit critique. L'expérience a pour fonction de **tester, contester, argumenter.**

Enfin l'expérimentation-outil au service de la construction d'une notion comme on en trouve classiquement dans les séances de travaux pratiques, qualifiée par Joshua de **monstration.** L'expérience est ici une sorte d'artifice pour concrétiser la notion. Elle doit « marcher ». C'est l'expérience pour **démontrer, conceptualiser, modéliser.**

À l'école élémentaire, pour les raisons évoquées plus haut, c'est essentiellement les deux premières catégories d'expérimentation qui sont mises en œuvre. Cependant beaucoup d'enseignants ont une conception expérienciellle de l'expérience. J'entends par là qu'ils associent expérience en sciences à expérience de la vie quotidienne et tendent à interpréter les modules proposés avec cette conception.

V I– POUR CONCLURE

Vous remarquerez qu'invitées à croiser nos regards sur la modélisation à l'école en sciences et mathématiques, j'ai pour mon compte, mis plus l'accent sur les caractéristiques de la démarche d'investigation envisagée par les programmes que sur la modélisation. Il ne s'agit évidemment pas d'une dérobade, mais une manière d'affirmer le peu de place tenue par cette opération en sciences (physiques en tous cas) à l'école.

En faisant ressortir les caractéristiques de la *démarche d'investigation* en sciences, qui est avant tout une démarche heuristique et non algorithmique où la connaissance s'expérimente dans l'incertitude, la controverse, le doute, je souhaitais apporter une contribution pour continuer à croiser nos regards dans le cadre de la formation des maîtres. En effet, pour une formation à la polyvalence des maîtres (au sens où je l'ai définie), je ne pense pas que nous ayons intérêt à construire une tour de Babel dont on sait qu'elle est forcément vouée à l'échec, mais plutôt de faire ressortir des points communs et des différences dans nos approches. C'est, il me semble, une condition pour résister à la tentation du « pédagogiquement correct ».

BIBLIOGRAPHIE

ASTOLFI J.P. & PETERFALVI B. (1993) *Obstacles et construction de situations didactiques en sciences expérimentales*, Aster INRP, **16**, 103-141.

BACHELARD G. (1938) La formation de l'esprit scientifique, *PUF, Paris.*

BARTH (1987) L'apprentissage de l'abstraction, *Retz, Paris*

BRUNER G. (1983). Le développement de l'enfant : savoir faire, savoir dire,*PUF, Paris*.

CHARPAK G. (1996) La main à la Pâte, *Flammarion, Paris.*

COQUIDE M. (1998) *Les pratiques expérimentales : propos d'enseignants et conceptions officielles*,Aster, 26, INRP.

FABRE M. (1995) Bachelard éducateur, *PUF, Paris.*

KAHN P. (1999) De l'enseignement des sciences à l'école primaire. L'influence du positivisme, *Hatier, Paris.*

KAHN P. (2000) L'enseignement des sciences, de Ferry à l'éveil, Aster, **31**, 9-35, INRP.

LEBEAUME J.(2002) *De quelques enseignements expérimentaux…disparus*, Cahiers pédagogiques, **409**, 11-14.

MARTINAND J.L. (Dir.) (1992) Enseignement et apprentissage de la modélisation en sciences, *INRP, Paris.*

MARTINAND J.L. (Dir.) (1994) Nouveaux regards sur l'enseignement et l'apprentissage de la modélisation en sciences, *INRP, Paris.*

MARTINAND J.L. (Dir.) (1996) *Observer-agir-critiquer l'enseignement des sciences expérimentales à l'école élémentaire*,in La formation initiale des professeurs des écoles en sciences et technologie, Documents et travaux de recherche en éducation, INRP, 61-66.

ORANGE C. (2002) *L'expérimentation n'est pas la science*, Cahiers pédagogiques, **409**, 19-20.

ORANGE C.& PLE E. (coord.) (2000) Les sciences de 2 à 10 ans, Aster, **31**,INRP.

PLE E. (1995) *Objectif-Obstacle et gestion du conflit socio-cognitif : difficultés liées à la reprise d'un dispositif flexible*, In Actes du 5ème séminaire national de recherche en didactique de la physique. Reims.

PLE E. (1997) *Transformation de la matière à l'école élémentaire : des dispositifs flexibles pour franchir les obstacles,* Aster, **24**, 203-229,INRP.

REY B. (1998) *Savoir scolaire et relation à autrui*, In Cahiers pédagogiques, **367-368**

VERIN A. (1996). *Mettre par écrit ses idées pour les faire évoluer en sciences* , in Repères INRP,**12**,

WALLISER B. (1977) Systèmes et modèles., *Le Seuil, Paris.*

HASARD ET MODELISATION

QUELQUES OBJECTIFS POUR L'ECOLE PRIMAIRE.

Claudine Schwartz
Laboratoire de Modélisation et Calcul
IMAG, B.P. 53, 38041 GRENOBLE cedex 9.

Pour entrer dans la problématique des enjeux éducatifs propres à la modélisation, je choisis ici de parler du hasard qui, pour le meilleur et pour le pire, nous accompagne toute notre vie.

Dans une première partie, nous interrogerons des élèves du primaire, des Professeurs des Ecoles, des dictionnaires sur le mot « hasard ».

Dans une deuxième partie, nous nous poserons la question de l'existence du hasard. Et c'est alors que nous parlerons de modèle.

Enfin, ce hasard doit-il et peut-il être un objet d'enseignement en primaire ? Voilà ce qui nous occupera dans la dernière partie.

Ce texte a été écrit à la suite d'une conférence donnée à Dourdan au congrès de la Copirelem, le 9 juin 2006 et en reprend certaines parties. L'objectif de cette version écrite est de proposer des éléments de réflexion et d'introduire un questionnement destiné à nourrir le débat sur certains enjeux éducatifs de l'école primaire. Il ne s'agit aucunement ici de soutenir des thèses ou des théories particulières.

I – DES PAROLES SUR LE HASARD

A l'occasion d'un mémoire professionnel de fin d'études à l'IUFM de Grenoble [1], deux professeurs stagiaires ont interrogé une classe de CM1-CM2 sur le hasard. On trouvera dans l'encadré A quelques unes de leurs réponses ; toutes celles qui sont écrites en caractères droits ont été données plusieurs fois, sous des rédactions diverses. On peut distinguer trois aspects dans ce corpus de réponses :

- le hasard lié à l'imprévisibilité d'événements extérieurs à l'élève,

- le hasard comme absence de stratégie ou de réflexion lors d'une action produite par l'élève,

- le hasard comme coïncidence entre deux événements.

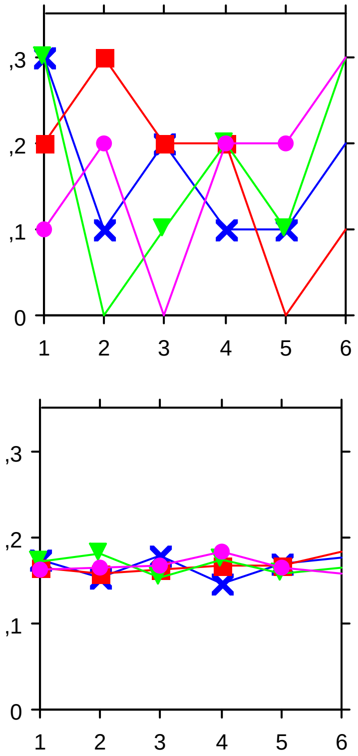
On notera que dans les deux premiers aspects, les événements arrivés *par hasard* résultent d'expériences que l'on peut répéter (les lancers de dés étant des exemples prototypiques). La notion de coïncidence concerne par contre le plus souvent un événement remarquable résultant d'expériences destinées à ne pas être reproduites (par exemple, un homme embarque dans un avion et l'homme qui occupe le siège voisin, qu'il n'avait jamais vu, est né le même jour que lui, dans la même ville).

La réponse en forme d'affirmation, « le hasard n'existe pas » nous a semblé étonnante chez des enfants et il aurait été intéressant de savoir si les deux élèves qui l'ont donnée répétaient ce qu'on leur avait dit, s'ils avait cru un jour que le hasard existait, etc.

Les réponses en italiques de l'encadré 1 n'ont été obtenues qu'une seule fois. Nous avons été surpris de la réponse « c'est quand c'est pas rangé », qui pourrait témoigner d'une intuition précoce du lien profond entre hasard et désordre ; ainsi, si on a une très grande liste de chiffres dans laquelle on observe un ordre, alors on dira que ce n'est pas une liste de nombres choisis au hasard – mais évidemment il faudra s'entendre sur ce qu'on appelle « un ordre » dans une telle liste. Nous n'avons pas pu réinterroger cet élève, mais il semble aussi qu'il aurait pu confondre les locutions « c'est le hasard » avec « c'est le bazar ». Après tout, le hasard, à petite échelle, c'est bien le bazar et ce n'est qu'en regardant à grande échelle qu'on voit des régularités ou de l'ordre apparaître (voir encadré B).

- quand on ne sait pas ce qui va se passer (résultat d'un lancer de dé).
- c'est une chose où on ne peut pas savoir la réponse / quelque chose que tu ne peux pas savoir / quelque chose que tu ne peux pas prédire / tirer au sort
- une désignation au pif / c'est répondre sans réfléchir ; exemple : quelqu'un te - dit « combien un chat a-t-il de pattes ? » et tu lui réponds « 3 »
- c'est quand tu réponds et tu ne sais pas la réponse
- veut dire sans le faire exprès
- le hasard est une chose où on peut avoir de la chance et de la malchance
- une coïncidence / par exemple, on trouve un billet de 50 euros par terre
- le hasard n'existe pas
- *le hasard c'est un peu de tout*
- *des évènements mystérieux de notre vie*
- *c'est quand c'est pas rangé*

Encadré A : réponses d'élèves de CM1-CM2 à la question : que signifie pour vous le hasard ?



Encadré B : Dans le graphique à gauche, on trouve les des fréquences de chaque chiffre pour 4 séries de 10 lancers de dés de couleur ; ainsi les 10 lancers du dé rouge (points représentés par des carrés) ont donné lieu à deux fois la face 1, trois fois la face 2, deux fois la face 3, deux fois la face 4, zéro fois la face 5, une fois la face 6. On peut dire des résultats que « c'est le bazar » : les fréquences varient de 0 à 0,3. Dans le graphique à droite, on trouve les fréquences de chaque chiffre, pour 4 séries de 1000 lancers de dés électroniques : tout s'est aplati entre 0,15 et 0,19.

Nous avons aussi interrogé, en mars 2006, une trentaine de Professeurs des Ecoles, en leur demandant à eux aussi d'écrire ce que signifiait le mot hasard. Les réponses (voir encadré C) relèvent des mêmes catégories que celles des élèves, ce qui a étonné, voire perturbé ces professeurs : s'agit-il là d'un champ où professeurs et élèves en seraient au même point ? Mais cela signifie peut-être simplement qu'au niveau de la signification du mot hasard dans son emploi quotidien, professeurs comme élèves donnent le sens commun, le sens académique donné par le dictionnaire.

- Quelque chose d'imprévu
- C'est l'inconnu / Ne pas savoir ce qu'il y a au tournant
- Les interventions se succèdent, à partir d'un certain moment sans raison humaine
- Quand on laisse libre cours au déroulement des événements, sans intervenir d'aucune manière.
- Un concours de circonstances, c'est-à-dire plusieurs évènements prévus ou non qui se fusionnent entre eux et qui font qu'un évènement a lieu.
- C'est une intuition heureuse, une part de chance.
- Le hasard n'existe pas.

Encadré C : réponses de Professeurs des Ecoles à la question : que signifie pour vous le hasard ?

Chacun pourra consulter un dictionnaire. Il y retrouvera sans doute les aspects dégagés ci-dessus (imprévisibilité pour les événements venant de l'extérieur, absence de stratégie pour des événements dont on est l'auteur, coïncidence). Dans le Dictionnaire des sciences philosophiques de Franck paru dans la première moitié du 19^{ième} siècle, on trouve, pour le mot hasard :

« ce qui ne parait être le résultat ni d'une nécessité inhérente à la nature des choses, ni d'un plan conçu par l'intelligence ».

On trouvera cependant, dans de nombreux dictionnaires, un élément supplémentaire, un lien avec la notion de causalité, ou plutôt d'absence de causalité apparente ou connue. Ainsi dans le « petit Robert », édition 2000, on trouve, en plus des notions d'imprévisibilité et de coïncidence :

….. *Cause fictive de ce qui arrive sans raison apparente ou explicable, souvent personnifiée au même titre que le sort, la fortune, etc.*

L'affirmation par certains professeurs de la non existence du hasard peut être reliée à cette désignation d'une cause purement fictive. La nécessité de systématiquement formuler le cours des événements en terme d'enchaînement d'effets à des causes semble bien ancrée dans l'histoire de l'humanité. Ainsi, la définition devenue classique d'Antoine Augustin Cournot (1801-1877) : le hasard résulte de l'interférence de deux chaînes de causalité différentes. (cette définition est aussi la cinquième de l'encadré C). L'exemple type est celui d'un ouvrier en train de réparer un toit et d'un passant qui marche vers un rendez-vous, l'interférence entre une chaîne de causalité relative à la réparation du toit, et une autre conduit un homme vers son rendez-vous se manifestant par la chute d'une tuile sur la tête du passant.

Cette association entre hasard et causalité, voire hasard et décision divine (celle-ci étant alors la cause de ce qui arrive) se retrouve dans l'usage qu'en font de nombreux auteurs (voir encadré D).

- *Ce que nous appelons hasard, c'est peut-être la logique de Dieu* ».

Georges Bernanos *(Dialogue des carmélites)*

- *Ce qui est hasard à l'égard des hommes est dessein à l'égard de Dieu*

Bossuet (*Maximes*).

- *Il faut, dans la vie, faire la part du hasard. Le hasard, en définitive, c'est Dieu*

Anatole France *(Le jardin d'Epicure)*

- *Laissons le choix au Hasard, cet homme de paille de Dieu*

Marguerite Yourcenar *(Le lait de la mort).*

Encadré D : Quelques exemples de l'usage du mot hasard.

Historiquement le hasard est lié aux jeux ; il se pourrait que les jeux de hasard soient parmi les premières inventions de la société humaine, c'est du moins l'hypothèse émise dans [2], les objets produisant le hasard servant aussi à des pratiques divinatoires. La théorie des probabilités, ou théorie du hasard n'a cependant émergé que bien plus tard, un peu partout dans le monde, à partir du 17$^{\text{ième}}$ siècle. Comment se fait-il que ce hasard n'ait pas fait l'objet d'une mathématisation ou d'une approche scientifique plus précoce ? Pourquoi les grecs, qui se sont intéressés aux sections de cônes par des plans, sont passés complètement à coté du calcul des probabilités ? De nombreuses hypothèses ont été avancées partiellement convaincantes [3] ; les principales sont :

- les lancers de dés étant utilisés en matière de divination, cela en rend l'investigation scientifique impossible,

- une théorie scientifique n'émerge que lorsque le besoin s'en fait ressentir,

- une bonne connaissance de l'arithmétique était nécessaire, et aussi, pour comprendre l'intérêt de quantifier la notion de chance, la découverte des théorèmes limites tel la loi des grands nombres.

II – LE HASARD EXISTE-T-IL ?

On peut arriver, pour certaines coïncidences, à estimer très grossièrement les chances qu'on avait de les observer. De nombreuses coïncidences se produisent à chaque instant, la plupart passent inaperçues, soit qu'on n'en ait pas eu connaissance, soit qu'elles présentent trop peu d'intérêt pour être relevées. Chacun de nous est cependant, au cours de sa vie, frappé par certaines de celles qu'il a pu observer, qu'elles soient heureuses, poétiques, ou malheureuses. Comme dit Balzac, dans l'avant propos de *La Comédie Humaine* « *le hasard est le plus grand romancier du monde ; pour être fécond, il n'y a qu'à l'étudier* ». Nous n'allons pas aborder le champ de la littérature et nous laisserons de côté les coïncidences dont parlent Balzac, Cournot et tout à chacun, pour ne nous occuper que du hasard tel qu'on l'observe lors d'expériences reproductibles.

Pour Voltaire et Laplace, le hasard *n'existe pas*, mais est simplement le nom donné à notre ignorance, à notre manque d'intelligence :

« *Ce que nous appelons le hasard n'est et ne peut être que la cause ignorée d'un effet connu.* » Voltaire, 1694-1778, *in* Dictionnaire philosophique

« Nous devons envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée, et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome; rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé serait présent à ces yeux. » Pierre Simon de Laplace (1749-1827), Essai philosophique sur les probabilités.

Laplace était mathématicien, ses cours de probabilité et *l'essai philosophique sur les probabilités* (1814) sont restés célèbres. La position énoncée ci-dessus est éclairée par d'autres textes, où il explique que les mouvements des astres ne se font pas *par hasard*, ils ont nécessairement une cause. Ce que Laplace appelle cause d'un évènement est en fait une loi physique, c'est-à-dire un modèle dans lequel cet événement est prévisible. Pour lui, la connaissance du monde est la possibilité de le modéliser, de le « mettre en équation » sans que ces modèles fassent intervenir le hasard.

La modélisation est un terme au sens très ouvert, qui recoupe de nombreuses pratiques. Cela commence dès la mise en équation d'un problème d'arithmétique, par exemple : quel est le pourcentage de femmes dans une assemblée, sachant que dans cette assemblée, il y a 63 % de fumeurs, que 40 % des femmes de cette assemblée fument, et que 75 % des hommes fument. Il y a la modélisation de l'ingénieur, qui doit prendre des décisions rapides en fonction d'informations incomplètes (voir [4] et [5]). Et il y a aussi la modélisation de certains chercheurs qui travaillent sur des propriétés de familles de modèles (modèles de diffusion par exemple) ou sur un modèle précis, celui-ci pouvant devenir une théorie (théorie de la gravitation, mécanique quantique, etc).

Un changement décisif dans la vision du hasard est apparue avec la modélisation de phénomènes tels que la trajectoire d’une boule de billard ; une « mise en équation » selon les lois de la physique classique, et la connaissance exacte de la position de départ de la bille, ainsi que la force avec laquelle on la lance suffisent à prévoir sa trajectoire. Mais la connaissance exacte (c'est-à-dire avec une « précision infinie ») de la position initiale de la boule est un concept théorique. La réalité est que la position est connue avec une marge d’incertitude ; dans le cas de la boule de billard, cette incertitude croît exponentiellement au cours du temps, de telle sorte qu’assez rapidement le mouvement réel ne ressemble plus du tout au mouvement calculé dans le modèle précédent : c’est le phénomène du chaos déterministe. On est ainsi en présence d’un phénomène complètement prévisible en théorie, mais le modèle déterministe ne nous est d’aucun secours pour savoir où sera la boule de billard peu de temps après son lancer. Par contre des modèles aléatoires, c'est-à-dire où on fait intervenir une part de hasard, sont efficaces en terme de prévision et d’explication de certains phénomènes observés. Il en est de même d’un lancer d’une pièce ou d’un dé : on peut imaginer écrire les équations du mouvement, mais pour les mêmes raisons, elles ne permettent pas d’expliquer ou de prévoir ce qui se passe effectivement. Dans ces exemples, on bute non sur notre ignorance mais sur le fait que toute mesure physique est entachée d’incertitude.

La question de l’existence du hasard relève ainsi aujourd’hui du domaine de la philosophie ou de l’épistémologie des sciences, mais dans la pratique scientifique, la position est celle que dit en une phrase le mathématicien contemporain David Ruelle [xx] :

« *Je préfère ne pas considérer le hasard comme une partie du monde physique, mais comme une partie de sa description* ».

Le terme description est à prendre ici au sens de modèle, c'est-à-dire d’une reconstruction du réel par la pensée. Le premier pas vers une modélisation, celui qu’on peut envisager de faire à l’école primaire est d’ailleurs de l’ordre de la description puisque l’usage d’outils théoriques à l’intérieur d’un tel modèle n’est pas envisageable.

Dans le sillage de cette réflexion, rappelons que les nombres entiers aussi sont des fictions : ils n’existent pas dans la nature (on peut trouver trois pommes ou quatre lapins, mais pas les nombres 3 et 4). Pour être plus précis et situer le lieu de ces fictions, nous dirons que les nombres et le hasard sont des objets mathématiques. Ou encore, pour ce qui concerne les dés : il existe des objets du monde réel appelés « dés », mais un dé équilibré est lui, un objet mathématique, un modèle de certains de ces dés.

III – LE HASARD COMME OBJET D’ENSEIGNEMENT A L’ECOLE PRIMAIRE ?

De nombreux pays se penchent aujourd’hui sur la notion de « statistical numeracy », qui en France se retrouve sous l’étiquette « culture citoyenne de l’aléatoire ». Ce domaine couvre l’étude des phénomènes variables : descriptions, représentations graphiques, modèles probabilistes.

Il s'agit en premier lieu d'être capable de communiquer (recevoir et transmettre) des informations ayant trait à des phénomènes aléatoires. Au delà de ce qui concerne la vie citoyenne, les phénomènes aléatoires sont aussi au cœur de nombreuses disciplines : physique, chimie, sciences de la vie et de la terre, économie, sociologie, médecine, géographie.

Il s'agit donc de permettre au plus grand nombre de jeunes à la fois de dépasser le stade de consommateurs passifs d'informations et aussi de bénéficier de formations disciplinaires en phase avec la réalité actuelle de ces disciplines.

Enfin, il convient que l'école transmette l'idée qu'apprendre et raisonner concerne non seulement le champ du déterminisme, mais aussi celui des phénomènes individuellement imprévisibles : après deux siècles où la pensée occidentale a été très marquée, voire assujettie aux règles de la logique aristotélicienne, il s'agit là d'une grande nouveauté. De plus, *dans la vie*, les situations sur lesquelles exercer une pensée déterministe ne sont pas les plus fréquentes, d'où cette vision du mathématicien contemporain D. Mumford :

« I believe stochastics methods will transform pure and applied mathematics in the beginnings of the third millenium. Probability and statistics will come to be viewed as the natural tools to use in mathematical as well as scientific modeling. The intellectual world as a whole will come to view logic as a beautiful elegant idealization but to view statistics as the standard way in which we reason and think."[1]

David Mumford, The downing of the age of stochasticity. [6]

Pendant longtemps, comme s'il restait des traces du lien ancien entre prévision et divination, on oubliait bien souvent de dire que penser et comprendre le hasard (ou l'aléatoire) relevait d'un apprentissage ! Au lieu de ce dire, on mettait plutôt l'accent sur les erreurs classiques que font ceux qui n'ont jamais eu l'occasion d'apprendre les concepts de base, et ce long bêtisier n'est vraiment pas de nature à donner envie de travailler le sujet ! Le fait que cette culture statistique a à voir avec l'éducation est une idée assez récente (l'introduction de l'enseignement de la statistique en collège date de 1986 [7]).

Il semble acquis que penser l'incertain concerne le système éducatif, mais est-ce dès l'école primaire ? Le stade de développement cognitif des jeunes élèves du primaire le permet-il ? Il n'est évidemment pas question, à ce niveau, de parler de probabilités, égales ou non, et encore moins d'avoir une approche des phénomènes imprévisibles

---

[1] *Je pense que les méthodes stochastiques vont transformer les mathématiques pures et appliquées dès le début du troisième millénaire. La théorie des probabilités et la statistique deviendront des outils standards tant en mathématiques que dans la pratique de la modélisation scientifique. La communauté intellectuelle verra la logique comme une idéalisation belle et élégante de notre mode de pensée mais verra la statistique comme notre mode effectif de raisonnement et de pensée.* D. Mumford, L'aube de l'ère du stochastique.

dans laquelle la théorie soit première, même en remplaçant les termes de probabilités égales ou inégales par chances égales ou inégales. Cependant, les élèves du primaire sont fort concernés par les jeux de hasard et la variabilité (des tailles, des poids, certains tombent malades et pas d'autres, etc.). Mais plutôt que répondre a priori sur la place de hasard en primaire, regardons la nature des objectifs qu'on pourrait atteindre à ce niveau ; discuter de leur pertinence scientifique, de leur position dans l'ensemble du cursus de la scolarité obligatoire et des moyens pour parvenir à les atteindre permettront de cerner la place que doit tenir le sujet à l'école primaire.

Après diverses expérimentations dans des écoles primaires et deux mémoires [8] et [1], nous proposons comme base de discussion la liste, non limitative, suivante :

1- Se familiariser avec le langage des chances égales ou inégales, ou de hasard équitable ou non équitable.

   « Prendre conscience qu'il y a plusieurs sortes de hasard et trouver des mots pour le dire permettra d'avoir une base solide autour de laquelle l'intuition peut ensuite se construire. »

2- Savoir que les dés et les roulettes n'ont pas de mémoire (d'où l'indépendance des résultats les uns par rapport aux autres), et comprendre les conséquences en termes de prévisibilité.

   - Il semble tout à fait possible de faire comprendre aux élèves que comme une roulette n'a pas de mémoire, si elle n'est pas truquée, les chances de tomber sur rouge ne sont pas influencées par le passé, même si on est tombé sur rouge les quelques coups précédents.

   - Il parait d'autant plus nécessaire de poser cet objectif que certaines calculatrices de poche ont une fonction programmée de dé électronique : lors de chaque appui de la touche « dé », on voit le dessin d'un dé apparaître sur l'écran, ainsi qu'un nombre entier variable entre 1 et 6. Si les élèves n'ont pas manipulé des « objet dés », leur faire comprendre qu'un dé n'a pas de mémoire sera très difficile et relèvera de l'autorité du maître.

3- Prendre conscience que la chance aux dés n'existe que pendant un temps court et non « toute la vie ».

   Se trouver chanceux ou non en ce qui concerne la vie quotidienne relève de la liberté de pensée et de l'histoire propre de chacun de nous ; mais savoir que dans de nombreuses circonstances, cette notion n'est pas étayée par l'expérience relève de l'apprentissage de la vie citoyenne.

4- Construire des histogrammes pour représenter une série de données lorsque leur ordre importe peu.

   D'après les premières expériences faites, il semble que la représentation en histogramme, dessiné horizontalement comme sur la figure 1 puisse être présentée en cycle 3.

Figure 1 : un histogramme réalisé par des élèves de cycle 3.

5- Introduire le dé électronique

Une expérience prometteuse a été faite [8] où les élèves sont passés de leurs propres lancers de dés à une mutualisation des résultats en classe, puis à l'usage d'un programme sur tableur qui tire des nombres entiers au hasard (hasard équiréparti ou équitable) entre 1 et 6 et trace des histogrammes. Il s'agirait d'une première utilisation, qui prépare l'utilisation de dés électroniques au collège.

Les outils logiciels permettent une approche complètement nouvelle des probabilités et de la statistique, et il est important de réfléchir au moment opportun où se fera le lien entre le dé mécanique et le dé électronique. Signalons qu'au delà d'une pratique pédagogique prometteuse, la simulation sur ordinateur est aujourd'hui une pratique scientifique majeure, à laquelle il convient d'initier les élèves. En effet, au traditionnel couple (expérimentation, modélisation) est venu s'ajouter un troisième terme : la simulation. En termes simplifiés, on peut dire que l'expérimentation, c'est « ce que nous dit la nature » et la simulation, c'est « ce que nous dit le modèle » et la confrontation des résultats d'expériences et de simulations est à la base de la pratique de la modélisation.

6- Observer sur quelques exemples l'apparition de régularités obtenues dans de grandes séries de données.

Cet objectif nécessite d'avoir défini les fractions, et d'avoir initié à l'usage du dé électronique. Il est en retour susceptible d'aider les élèves à s'approprier le sens de la notion de pourcentage. Est-il trop ambitieux à ce niveau ?

Quelques principes

Nous allons maintenant dégager quelques éléments d'une approche de l'aléatoire dans le primaire.

- démarche d'investigation : le domaine de l'aléatoire se prête particulièrement bien à un enseignement fondé sur une démarche d'investigation, comme c'est le cas pour l'enseignement des sciences en primaire en continuité avec ce qui est proposé dans le contenu du site de « La main à la Pâte ».

- aborder la réflexion sur l’aléatoire en lien avec diverses disciplines, dans le cadre de jeux, ou dans de situations où le hasard est un « excipient ».

Les mesures (cela concerne donc la biologie, la physique, la géographie, etc.) sont toujours entachées d’incertitude ; le remarquer, le dire, prendre conscience qu’il ne s’agit pas d’erreur au sens usuel du terme est une première grande rencontre avec le hasard. Par ailleurs, on peut utiliser des dés à 6, 8 ou 10 faces pour construire des nombres avec lesquels on travaillera dans le cadre des mathématiques, le hasard étant alors un excipient, sur lequel on peut néanmoins travailler (voir exemples dans [9]).

- trouver, pour chaque situation, le langage qui convient aux élèves et veiller, dans un premier temps, à les mettre en situation d’élaborer leur propre discours, avec leurs mots à eux.

Ainsi, la locution « hasard équitable » ou « non équitable » a été proposée par des élèves de cycle 3 à propos d’un jeu où les chances de gagner des deux joueurs étaient inégales.

Faut-il travailler sur les représentations a priori des élèves ?

La première phase de l’enseignement d’un concept scientifique à l’école consiste souvent à poser des questions qui aident à faire émerger les représentations a priori qu’en ont les élèves. Dans ce cadre, on trouve dans la littérature des questions telles que les suivantes, pour des élèves d’environ 10 ans.

1- On lance un dé dont trois faces sont bleues, trois faces sont jaunes. Vous devez parier sur une couleur. Laquelle choisir ?

2- On lance un dé dont deux faces sont bleues, quatre faces sont jaunes. Vous devez parier sur une couleur. Laquelle choisir ?

3- Dans une boîte, il y a 3 boules noires et 6 boules blanches ; dans une autre boîte, il y a 7 boules noires et 14 boules blanches. En tirant au hasard, est-ce qu’il y a une boîte dans laquelle on a plus de chances d’avoir une boule noire ?

Les questions 1 et 2 nous paraissent plus de nature à troubler les élèves qu’à faire émerger leurs connaissances a priori, dans la mesure où pour eux, le hasard, c’est l’imprévisibilité, l’impossibilité de choisir. La question 1 est même une sorte de piège puisque les deux paris sont équivalents. Il faudra longtemps avant d’appréhender ce qui est prévisible dans le hasard et d’avoir les concepts pour l’exprimer. Pour pouvoir répondre à ces questions, il faut en fait imaginer qu’on lance de nombreuses fois le dé. Alors, autant vaut le dire et remplacer ces questions par :

1*- On lance un grand nombre de fois un dé dont trois faces sont bleues, trois faces sont jaunes. Que va-t-il se passer ?

2*- On lance un grand nombre de fois un dé dont deux faces sont bleues, quatre faces sont jaunes. Que va-t-il se passer ?

La question 3 est trop difficile : pourquoi 3 chances sur 9 serait-il identique à 7 chances sur 21 ? Cette question pourrait être traitée si on disposait du formalisme dans lequel la probabilité se calcule en faisant le quotient du nombre de cas favorables par le nombre de cas possibles. Aborder directement et de front la comparaison de deux « formes » du hasard semble bien en dehors de ce qu'on peut faire en primaire. Une bonne réponse serait, dans le cadre d'un enseignement basé sur la méthode d'investigation : « *nous allons construire de telles boîtes et faire des expériences pour comparer les résultats* ». Malheureusement une telle expérience comparative est difficilement interprétable avant le lycée : si on tire m fois une boule, avec remise, dans la boîte à 9 boules, et qu'on obtient n noires, et m fois une boule, avec remise, dans la boîte à 21 boules, dont n' noires, les deux nombres n et n'ont fort peu de chances d'être égaux et à partir de quel écart entre n et n' va-t-on dire que les chances d'avoir une boule noire sont les mêmes ? Cependant, des élèves peuvent avoir l'intuition que c'est pareil, ou peuvent soulever eux-mêmes la question : il convient bien sûr de leur donner la réponse, avec des explications qualitatives liées au stade de réflexion qu'ils ont atteint.

Il nous parait en fait plus pertinent, si on choisit de voir où en sont les élèves avant de commencer une séquence d'enseignement, de poser des questions plus larges, plus vagues, telles : Que signifie pour vous le mot hasard, ou la locution « chance égale » ?

CONCLUSION

Les positions sur l'approche des phénomènes aléatoires sont variées. Ainsi, Piaget et Inhelder [10] pensent que le dénombrement des issues possibles est la première étape pour un enseignement qui ne vise que la théorie des probabilités (en conséquence, un tel enseignement ne peut être précoce). Il y a par ailleurs ceux pour qui l'observation de différentes sources de variabilité est première, c'est l'option anglo-saxonne notamment. Il semble qu'aujourd'hui, qu'une approche basée sur la modélisation puisse être envisagée et soit très prometteuse. Une telle approche implique un rôle important, voire premier, du questionnement sur des données d'expérience et un accent mis sur ce qui est du domaine de la réalité (un dé en bois par exemple) et ce qui est dans le champ de la théorie (un dé équilibré). A ce titre, l'enseignement de la statistique est aussi celui d'une démarche expérimentale. Inversement, parler du hasard sous l'angle « modèle » permet de prendre conscience des difficultés, de la force et les limites de la modélisation.

BIBLIOGRAPHIE

[1] *Observation de phénomènes aléatoires par les élèves*. Mémoire professionnel PE2, mathématiques de Ludovic Menegoz et Christine Zampa, sous la direction de G. Gerdil-Margueron, IUFM de Grenoble, 2005-2006.

[2] *Games, Gods and Gambling. The origins and history of probability and statistical ideas from the earliest times to the Newtonian era*. F.N. David. London, 1962.

[3] *L'émergence de la probabilité*, Ian Hacking, Seuil, 2002 (première édition anglaise 1975).

[4] Méthodes probabilistes de prévision, M.C. Viano, actes de *Maths en jeans*, 1997

http://www.mjc-andre.org/pages/amej/edition/actes/actespdf/97165172.pdf

[5] *Philosophie des mathématiques et de la modélisation du chercheur à l'ingénieur,* Nicolas Bouleau, l'Harmattan, 1999.

[6] *Mathematics towards the third millenium*. Fascicule spécial des actes de l'académie nationale du centre Lincei, série IX, 2000.

[7] *À l'école des probabilités*, B. Courtebras, PUFC, 2006.

[8] *Entre hasard et déterminisme : un jeu de dés pour approcher l'aléatoire en cycle 3.* Mémoire professionnel PE2, mathématiques de Isabelle Pinet et Christelle Castebert, sous la direction de G. Gerdil-Margueron, IUFM de Grenoble, 2005-2006.

[9] *La spécificité de la démarche d'investigation en mathématiques.* Catherine Houdement (IUFM Rouen) et Claudine Robert (univ. Joseph Fourier Grenoble)

http://www.xplora.org/shared/data/xplora/pdf/aleatoire_en_cycle3.pdf

[10] *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*, Jean Piaget et Bärbel Inhelder, PUF,1951.

ATELIERS

ATELIER A1

ÉLABORATION DE SUJETS DE CONCOURS POUR LE CERPE

Nicole BONNET
Professeur de mathématiques, IUFM de Bourgogne
IREM de Dijon
nicole.bonnet@dijon.iufm.fr

Pierre EYSSERIC
Professeur de mathématiques, IUFM d'Aix-Marseille
IREM de Marseille
p.eysseric@aix-mrs.iufm.fr

Arnaud SIMARD
Maître de Conférences, IUFM de Franche-Comté
Laboratoire de Mathématiques, Université de Besançon
arnaud.simard@fcomte.iufm.fr

L'atelier est animé par trois membres de la COPIRELEM qui participent, depuis plusieurs années à la rédaction des annales éditées par l'ARPEME.
L'article décrit le contenu et le déroulement de l'atelier qui s'est donné pour objectif de produire des exercices à partir de l'étude de concours blancs proposés par nos collègues dans les trois domaines suivants :
LA DIVISION EUCLIDIENNE
LES CONSTRUCTIONS GEOMETRIQUES
LES FRACTIONS ET DECIMAUX.
Il fournit des réflexions générales concernant l'élaboration d'un sujet actuel du CERPE, mission qui peut être confiée à tout formateur de mathématiques en poste en IUFM.
Il analyse les neuf exercices - notionnel et question complémentaire - constituant le corpus proposé par les animateurs (les trois exercices par axe ainsi que leurs corrigés sont joints en annexe). Les participants à l'atelier ont élaboré un nouvel exercice, avec son corrigé, respectant un cahier des charges défini préalablement, dans chacun des trois domaines retenus. Ces exercices ont été publiés dans les annales 2006 de la COPIRELEM.
L'article se termine par des réflexions et des questions encore ouvertes autour du thème « construction géométrique » à travers l'exercice, élaboré en sous-groupe, qui a fait l'objet d'un échange collectif.

Exploitation possible

Enrichissement de la banque d'exercices pour la formation en PE1. Participation à l'élaboration d'une culture commune pour concevoir un sujet de concours.

Mots-clés

Sujets CERPE – constructions géométriques – décimaux – division euclidienne.

RETOUR AU PROGRAMME DE 1945 OU STATU QUO ? ET S'IL FALLAIT REPONDRE : NI L'UN, NI L'AUTRE ?

Rémi BRISSIAUD
MC de Psychologie à l'IUFM de Versailles
Equipe Compréhension Raisonnement Acquisition de Connaissances
Laboratoire Paragraphe http://paragraphe.univ-paris8.fr/crac/
remi.brissiaud@wanadoo.fr

Un vaste mouvement de réformes scolaires s'est développé dans la 2ème moitié du siècle dernier en mathématiques comme en français. Un bilan en serait contrasté mais il ne serait sûrement pas totalement négatif. Depuis plusieurs années, des forces sociales diverses s'organisent en vue d'obtenir un retour aux pratiques pédagogiques d'avant ce mouvement. En mathématiques, elles prônent un retour au programme de 1945 et, en accord avec la Direction des Ecoles, divers enseignants expérimentent cette « réforme » dans plusieurs classes. L'impact de ce genre d'initiatives ne doit pas être sous-estimé : dans le domaine de l'apprentissage de l'écrit, la campagne ministérielle en faveur du rétablissement de la « syllabique » a effectivement conduit à un changement des programmes de 2002.

L'atelier proposé avait pour but de définir et recenser ce qu'on pourrait appeler les « points-clés » de la pédagogie du nombre, des opérations et de la résolution de problèmes à l'école. Cela devait permettre de définir un espace de liberté pédagogique qu'il conviendrait de défendre en cas d'offensive comme celle qui a eu lieu dans le domaine de la lecture.

Après la présentation du contexte politique et des questions en jeu, les participants ont pu, notamment à partir des divers documents fournis, débattre des problèmes, réels ou supposés, de l'enseignement actuel des mathématiques à l'école primaire et des controverses qu'il suscite.

Exploitations possibles

Le compte-rendu de l'atelier permet de mieux comprendre et situer historiquement les débats sur les programmes de mathématiques de l'école primaire.

On y trouve de plus les références de plusieurs textes fondamentaux dans ce débat et des pistes d'arguments à développer pour défendre un enseignement de qualité.

Mots-clés

Programmes, enseignement des mathématiques, conceptualisation, division.

ATELIER A3

HETEROGENEITES ET DIFFERENCIATIONS DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES EN ZEP

Denis BUTLEN
IUFM de Créteil, équipe DIDIREM, Université de Paris 7
Bernadette NGONO
IUFM de Rouen, équipe
DIDIREM,Université de Paris 7

Cet article décrit le fonctionnement d'un atelier. Les activités présentées consistent en une relecture de travaux issus de recherches antérieures et s'appuient sur des corpus déjà analysés selon d'autres entrées. Le déroulement de l'atelier essaie de restituer l'histoire des travaux de Denis BUTLEN et Bernadette NGONO et de rendre partiellement compte de recherches en cours sur la formation. Ces travaux s'inscrivent principalement dans le cadre de la didactique des mathématiques tout en empruntant des éléments à d'autres champs disciplinaires : sociologie, psychologie cognitive, ergonomie cognitive, didactique professionnelle, socio-linguistique.

L'atelier s'est déroulé en deux parties très distinctes :

Dans la première partie relative aux apprentissages numériques des élèves, les supports proposés concernent les rapports qu'entretiennent sens et techniques. Il s'agit d'étudier les difficultés rencontrées par les élèves de milieux populaires : de les diagnostiquer, de les interpréter mais aussi de préciser des conditions permettant de les surmonter. Après une synthèse des travaux produits par les participants, les intervenants montrent l'importance, face aux élèves de ZEP, de prendre en compte dans l'enseignement l'existence de cheminements cognitifs différents, à cette occasion une certaine conception de la pédagogie différenciée est soumise à la discussion.

La seconde partie, qui est plus détaillée, est consacrée à l'analyse des pratiques de Professeurs des Ecoles enseignant en ZEP et à la formation de ces pratiques, il s'agit d'étudier les adaptations effectuées par ceux-ci avant ou pendant la classe en vue de prendre en compte l'éventuelle hétérogénéité de leurs élèves. Il s'agit ainsi d'identifier des éléments à prendre en compte en formation. En conclusion de cette partie l'attention est attirée sur le fait que les analyses présentées dans cet atelier concernent des études de cas très spécifiques, elles ne doivent donc pas être généralisées de manière abusive. De plus les types de documents étudiés ne suffisent pas à rendre compte de la complexité d'une pratique, les analyses des auteurs s'appuient sur un corpus plus important qui n'a pu être présenté dans ce cadre, elles ont permis de restituer la logique de fonctionnement et les grands choix des enseignants concernés.

Mots-clés : élèves de ZEP, difficultés des élèves, hétérogénéité, différenciation, pratiques enseignantes.

ATELIER A4

UN OBJET DE FORMATION PROFESSIONNELLE :

L'USAGE D'UN MANUEL SCOLAIRE

Sophie Gobert
Maître de conférence à l'IUFM de Nantes

Les manuels scolaires, livres du maître et fichiers d'élèves, sont des médias majoritairement utilisés par les professeurs des écoles pour leur travail de préparation et le pilotage des situations d'enseignement. Les recherches en didactique des mathématiques se sont intéressées à ces ouvrages comme moyens d'accès à l'analyse de curriculums ou de leurs évolutions, voire à celle de pratiques globales d'enseignement. Les travaux et documents pour la formation développent, pour leur part, des grilles d'analyses des contenus et s'intéressent aux propositions didactiques des auteurs.

Le propos de l'atelier est d'examiner, de façon collective et dialectique, l'usage de ces instruments du travail de l'enseignant, situés à l'articulation des prescriptions officielles, des contraintes professionnelles, des analyses didactiques et des pratiques effectives. Plusieurs questions se posent, et sont posées, aux formateurs quant aux fonctions, rôles, attributs, vertus, inconvénients de tel ou tel manuel ou de ses usages ; et chacun, formateur débutant ou plus expérimenté, tente d'y répondre selon ses moyens. Il s'agit donc de mettre en commun les connaissances empiriques, pragmatiques, ou scientifiques sur le sujet, à partir d'échanges, de mutualisations et de questionnement des activités pratiquées.

Ainsi, l'ambition du travail proposé aux participants de l'atelier est d'envisager l'usage des manuels scolaires par les professeurs des écoles comme un objet de formation professionnelle, en tentant de clarifier des objectifs potentiels de formation et des dispositifs associés.

Plan de l'article

Compléments d'information
Constat des réalités et questions de formateurs
Propositions d'activités en formation
Éléments de bibliographie.

Mots-clés

Manuel scolaire, livre du maître, fichier d'élève, préparation de classe, formation des PE, objectifs de formation.

ATELIER A5

SITUATIONS DE FORMATION EN PE1 POUR ABORDER LA MODELISATION DE NOTIONS MATHEMATIQUES

Michel JAFFROT
Formateur à l'IUFM des Pays de la Loire

Catherine TAVEAU
Formatrice à l'IUFM de Paris

Cet atelier a été un lieu de réflexion et d'échanges concernant la modélisation de savoirs mathématiques en formation.

Dans un premier temps, les participants de l'atelier ont analysé une situation proposée en PE1, « Les poignées de mains » en explorant différentes dimensions : du côté du vécu des PE1, du côté des mathématiques en jeu, du côté des productions possibles et du côté de la modélisation.

Dans un deuxième temps, les échanges autour de différents modèles proposés par les étudiants ont conduit à une interrogation sur la notion de modélisation et par suite à un débat concernant une institutionnalisation possible : un savoir ou des savoirs mathématiques, une démarche d'investigation, différentes représentations ?

Dans un troisième temps, le groupe a recherché d'autres situations de formation qui pourraient favoriser des conditions de modélisation mathématique.

En annexe

Annexe 1 : Les affiches d'analyse produites par les participants à l'atelier
Annexe 2 : Choix d'affiches produites par des PE1
Annexe 3 : Exercices donnés aux PE1 à la suite de la situation des *poignées de mains*.
Annexe 4 : Définition de modèle selon le dictionnaire d'histoire et de philosophie des sciences

Exploitations possibles

- Une situation de résolution de problème à faire vivre en formation initiale ou continue.
- Une mise au point illustrée du processus de modélisation.

Mots-clés

Modélisation, démarche, représentation, formation des maîtres, résolution de problème.

MATHÉMATIQUES ET ART CONTEMPORAIN : UNE INTIMITÉ FORMATRICE

Marie-Lise PELTIER
Formatrice à l'IUFM de Rouen

Nathalie SAYAC
Formatrice à l'IUFM de Créteil

Cet atelier présente une réflexion sur les liens qui peuvent être tissés entre les mathématiques et l'art contemporain à travers l'analyse d'œuvres permettant d'enrichir les représentations des élèves et des professeurs sur certaines notions mathématiques.
Avec le souci d'éviter que les œuvres servent de prétexte à faire des mathématiques, la démarche des auteurs s'attache à préserver leur dimension artistique en mettant en parallèle les intentions des artistes et les notions mathématiques utilisées.
L'atelier s'articule en quatre parties :
- les différents courants de l'art contemporain
- les propriétés numériques à travers l'étude d'œuvres de Piet Mondrian, Théo Van Doesburg, Charles Bézie et François Morellet
- les propriétés géométriques avec des œuvres de Laszlo Moholy-Nagy, Joseph Albers, Max Bill et Victor Vasarelly.
- le traitement de cette question par les manuels à travers la présentation de deux exemples (Cap maths CP et EuroMaths CE2)

Exploitations possibles
La démarche décrite dans cet atelier peut permettre aux enseignants de construire des séances alliant les arts contemporains et les mathématiques.
Elle fournit également des outils pour les formateurs afin de concevoir des formations continues sur ce thème.

Mots-clés
Arts contemporains, représentations, démarche artistique, propriétés numériques, propriétés géométriques, formation continue

ATELIER A7

PLUTOT MATHEMATICIEN ... QUE ... MATHEMATIRIEN

Claudine PLOURDEAU
IUFM de Caen
plourdo.clo@caramail.com

L'atelier s'est appuyé sur une recherche-action du Groupe Didactique de l'IREM de Basse-Normandie menée dans des classes de collège et qui débouche aussi sur un travail en formation continue sur la liaison CM2-6èmes. Cette recherche-action est centrée sur le rôle du langage et des écrits dans la construction des apprentissages mathématiques à partir de la résolution de problèmes : pour permettre au mieux aux élèves de faire des mathématiques et de les aimer, il faut les mettre en situation d'actions, de productions, d'échanges et de débats et partir de leurs productions pour qu'ils puissent construire leurs connaissances. Le langage passe par des écrits intermédiaires qui sont une mémoire du chemin d'apprentissage parcouru par l'apprenant.

Au cours de l'atelier, les participants ont eu l'occasion de prendre connaissance, d'expérimenter et de questionner diverses modalités d'enseignement autour de ces hypothèses qui visent à rendre les élèves « mathématiciens », constructeurs de leurs connaissances.

Exploitations possibles

La démarche présentée et les diverses modalités pour mettre des élèves de cycle 3 et de collège en en situation d'actions, d'échanges, de débats et de productions d'écrits en mathématiques (productions écrites dans le cadre de résolution de problèmes, anecdotes et mémoires de classe) peuvent servir de référence et d'éléments de réflexion pour les professeurs.

Les productions d'élèves rapportées permettront d'amorcer un questionnement sur les enjeux d'apprentissage dans le domaine des nombres et de la résolution de problèmes à l'école et au collège et en géométrie au collège.

Type de contenu

Présentation argumentée de modalités d'enseignement et de productions d'élèves.

Mots-clés

Productions d'écrits, anecdotes et mémoires de classe, résolution de problèmes, travaux numériques, géométrie, CM2-6ème.

ATELIER B1

« LA GEOMETRIE DYNAMIQUE DANS LES CLASSES DES CYCLES 2 ET 3»

Teresa ASSUDE
IUFM d'Aix Marseille
t.assude@aix-mrs.iufm.fr

Jean-François BONNET
IUFM de Nice
jfbonnet@wanadoo.fr

Jean-Michel GELIS
IUFM de Versailles
jean-michel.gelis@versailles.iufm.fr

Jean-Pierre RABATEL
IUFM de Lyon
jeanpierre.rabatel@laposte.net

Dans cet atelier, nous nous intéressons au problème de l'intégration, dans les apprentissages, des TICE et plus particulièrement de la géométrie dynamique aux cycles 2 et 3. Cette intégration, mentionnée dans les programmes de l'école et - depuis peu - dans ceux des concours de recrutement, soulève des problèmes complexes, autant du point de vue des enseignants que de celui des formateurs.

Nous n'apportons pas ici de réponse générale aux problématiques soulevées par cette intégration mais, plus modestement, nous proposons des axes d'analyse susceptibles d'éclairer des points qui nous paraissent essentiels. Ces axes d'analyse ont été élaborés lors des nombreuses expérimentations mises en place au sein de l'ERT*e* MAGI, dirigée par Colette Laborde.

Ces axes d'analyse ont été mis en pratique lors du travail en groupe de l'atelier. Chaque groupe avait pour consigne de concevoir une séquence d'apprentissage, à partir de l'une des 5 situations proposées et caractérisées par une figure de géométrie dynamique ainsi que des compétences cibles. La consigne était de situer explicitement les propositions de séquences par rapport aux axes d'analyse précédemment explicités.

Exploitations possibles

Outil de réflexion pour les formateurs qui s'interrogent sur les conditions et les contraintes de l'intégration des TICE dans les pratiques de géométrie à l'école élémentaire. Exemple de situations point de départ pour la formation continue.

Mots-clés

Géométrie dynamique, intégration des TICE, dimension instrumentale, dialectique ancien/nouveau, situations au Cycle 2 et 3.

ATELIER B2

EXEMPLES DE MODELISATION A L'ECOLE PRIMAIRE ALLEMANDE. QUELS ENJEUX POUR LA FORMATION DES MAITRES ?

Richard CABASSUT
Professeur de mathématiques, IUFM d'Alsace
Didirem, Paris 7
Richard.cabassut@alsace.iufm.fr

L'objectif de l'atelier était le développement d'un questionnement sur ce qu'est la modélisation et quels sont les objectifs et les enjeux d'une formation à la modélisation dans le cadre de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire.

Pour cela les participants ont eu l'occasion de prendre connaissance des expériences de modélisation à l'école primaire menées en Allemagne par Peter-Koop (2003) et Maaβ (2005) et d'expérimenter et de questionner des problèmes de modélisation de Fermi données dans ce cadre.

Le compte rendu des productions et des discussions des participants, complété par quelques références à l'évaluation Pisa et aux plus récentes directives européennes et françaises dans le domaine des finalités de l'enseignement des mathématiques, débouche sur quelques questions importantes concernant les enjeux et les modalités de la formation des maîtres.

Exploitation possible

Par les informations et références données ainsi que par les réflexions rapportées, le compte rendu de cet atelier peut être un point de départ utile pour des collègues qui voudraient s'informer, s'interroger ou travailler sur ce chantier qui s'ouvre à propos de la nature et de l'apport de problèmes de modélisation à l'école primaire, tant du point de vue des pratiques en classe que du point de vue de la formation des enseignants.

Type de contenu

L'article rend compte d'observations à propos d'expériences de modélisation à l'école primaire en Allemagne et de réflexions menées dans le cadre de l'atelier à ce sujet.

Mots-clés

Modélisation, monde réel, réalité, problèmes de Fermi, formation des maîtres, école primaire.

ATELIER B3

MIEUX APPROCHER LES CONCEPTS MATHEMATIQUES PAR UNE MEILLEURE CONNAISSANCE DU LEXIQUE

Annie CAMENISCH
Maître de Conférences Lettres, IUFM d'Alsace
EA 1339, Université Marc Bloch, Strasbourg
annie.camenisch@alsace.iufm.fr

Serge PETIT
Professeur de mathématiques, IUFM d'Alsace
EA 1339, Université Marc Bloch, Strasbourg
serge.petit@alsace.iufm.fr

Cet atelier s'inscrit dans le cadre de la maîtrise de la langue dans les disciplines. Les participants à l'atelier ont été amenés à manipuler des mots de la langue française utilisés en mathématiques afin de leur donner davantage de sens.

Ils ont été invités à s'interroger sur les processus de formation des mots et sur les impacts en classe de mathématiques d'un travail réalisé sur le lexique, tant au niveau de la maîtrise de la langue que de la compréhension des mathématiques.

Plusieurs jeux de création de mots savants ont été proposés aux participants et ceux-ci ont pu mesurer leurs progrès sur la compréhension de la langue.

Un diaporama a présenté l'exploitation possible de ce travail dans une classe de CM2, travail qui a été partiellement relaté dans la revue *Journal Des Instituteurs* n°5 de janvier 2004.

En annexe

Listes des mots analysés.
Petit dictionnaire de mots savants.

Exploitations possibles

Utilisation de ces situations en formation initiale et continue.

Mots-clés

Maîtrise de la langue, mots mathématiques, lexique, vocabulaire, étymologie.

ATELIER B4

DE L'UTILISATION DES JEUX DU COMMERCE EN FORMATION INITIALE ET CONTINUE

Liliane SOSSA
PIUFM, IUFM de Créteil
liliane.sossa@wanadoo.fr

Cet article présente des pratiques de formation, initiales et continues, autour du jeu mathématiques en classe. De nombreux jeux, commercialisés en particulier par DIDACTO, ont été analysés par les participants de l'atelier. Ces analyses ont été construites en s'appuyant sur une grille qu'ils ont élaborée à partir d'un travail de Jeanne Bolon.

Exploitations possibles

Une analyse de nombreux jeux de qualité constitue une ressource indispensable pour tout formateur qui souhaiterait mener des actions de formation autour des jeux mathématiques à l'école.
La bibliographie, proposée dans cet article, est une aide pour l'élaboration de mémoires professionnels pour les stagiaires PE2.

Mots-clés

Jeux - Jeux mathématiques - Formation initiale - Formation continue

ATELIER B5

JOUER AVEC LES FRACTIONS ?
JOUER EN FORMATION !

Joële TREMEJE
PIUFM, IUFM de Nice
j.tremeje@wanadoo.fr

Henry DAVIO
PEMF, **École Marie Curie - Draguignan**
henri.davio@cegetel.net

Denise ROSSO
PEMF, **École Marie Curie - Draguignan**
Denise.rosso@club-internet.fr

Claire WINDER
PIUFM, IUFM de Nice
Claire.winder@free.fr

Chaque année, dans les évaluations nationales d'entrée en sixième, l'erreur $\frac{13}{10}$ = 13,10 est fréquemment retrouvée.

Pour tenter de remédier à cette situation, le groupe IREM premier degré de Draguignan (IUFM de Nice) a créé des jeux (au sens de Gilles Brougère), évolutif et s'insérant dans la progression sur les fractions et décimaux d'ERMEL.

Après une étude des programmes officiels et des apports théoriques concernant les jeux, les auteurs décrivent leur expérimentation en classes.

Ces jeux permettent de manipuler, du CM1 à la sixième, les fractions simples usuelles puis les fractions décimales dans le cadre de la mesure des aires. Trois variantes sont déclinées : jeu des octogones pour les fractions du type $\frac{a}{2^n}$, jeu des hexagones pour les fractions du type $\frac{a}{3n}$ et jeu des décagones pour les fractions décimales. En outre plusieurs niveaux de jeu sont proposés permettant une progression ou une différenciation pédagogique.

Exploitations possibles

Pour les formateurs qui s'intéressent à la didactique des mathématiques enseignées à l'école primaire, particulièrement à l'enseignement des fractions et des fractions décimales et aux difficultés qu'il pose.

Mots-clés

Concept de jeux, manipulation, fractions simples, fractions décimales, nombres décimaux, théorie constructiviste du savoir, progression du CM1 à la 6^{ième}, apprentissage, consolidation, remédiation.

ATELIER B6

LES SITUATIONS-RECHERCHE POUR LA CLASSE

Cécile OUVRIER-BUFFET
Maître de Conférences, IUFM de Melun
DIDIREM, Paris 7
ERTé *Maths à Modeler*
cecile.ob@wanadoo.fr

Le savoir scientifique se construit dans le domaine de la recherche. Le chercheur peut, et doit, pour faire évoluer son questionnement, choisir lui-même le cadre de résolution, modifier les règles ou en changer, s'autoriser à redéfinir les objets ou à transformer la question posée. Il peut momentanément s'attaquer à une autre question si cela lui semble nécessaire.

Dans les programmes scolaires de mathématiques se dessine un intérêt relativement nouveau pour la démarche de recherche. L'expression même de « *démarche de recherche en mathématiques* » a pris une place importante et apparaît actuellement de manière transversale dans les instructions officielles françaises, et ce dès le primaire. Il est en effet préconisé de confronter les élèves à « *de véritables problèmes de recherche* » (cycle 2). L'introduction de ce type d'activités vise à « *intéresser les élèves à la pratique des mathématiques* », en faisant de la classe « *une véritable petite communauté mathématique* ».

Cette dimension « recherche », qui se veut donc proche de l'expérience des chercheurs professionnels, s'inscrit dans une vision des mathématiques scolaires qui donnerait plus de poids au raisonnement mathématique qu'aux connaissances notionnelles. Le travail de cet atelier interroge cette dimension « recherche » et questionne le thème suivant : la construction, la dévolution et la gestion de Situations-Recherche (SR) pour l'enseignement de la démarche scientifique en mathématiques. Les particularités des SR sont spécifiées ; la dévolution et la gestion des SR sont illustrées sur l'exemple de « la chasse à la bête » ; enfin un retour sur le vécu des participants à l'atelier permet un questionnement sur la place des SR dans la formation des PE.

Exploitations possibles

Formation initiale et/ou continue des PE dans le domaine de la résolution de problèmes, et plus particulièrement les problèmes pour chercher.

Mots-clés

Résolution de problèmes, problème pour chercher, argumentation, preuve, heuristique.

COMMUNICATIONS

COMMUNICATION C1

PROJETS D'ECRITURE EN MATHEMATIQUES

Annie CAMENISCH
Maître de Conférence, IUFM D'Alsace
EA 1339, Université Marc Bloch, STRASBOURG
annie.camenisch@alsace.iufm.fr

Serge PETIT
Professeur de Mathématiques, IUFM D'Alsace
EA 1339, Université Marc Bloch, STRASBOURG
serge.petit@alsace.iufm.fr

Cette communication constitue un bilan de travaux menés dans des classes ainsi qu'en formation initiale et continue autour de la lecture et de l'écriture d'énoncés de problèmes additifs, en référence aux ateliers des colloques COPIRELEM de Foix et de Strasbourg. Elle s'inscrit dans le champ de la maîtrise de la langue en mathématiques articulant lecture, écriture et observation réfléchie de la langue.

Il s'agit essentiellement de montrer comment il est possible, à la fois, de réaliser des apprentissages ciblés sur la langue et de développer la compréhension d'énoncés de problèmes. La mise en œuvre se réalise par la mise en place de projets d'écriture d'énoncés de problèmes qui nécessitent une analyse fine du fonctionnement de ces énoncés.

Exploitations possibles

Cette communication permet aux formateurs et aux professeurs des écoles d'avoir des données théoriques fines sur la compréhension d'énoncés mathématiques.
Elle permet également de mettre en place de véritables séquences d'apprentissages à la compréhension d'énoncés destinés aux élèves de cycle 3.

Mots-clés :

Enoncés – Histoire – Langue et maths – cycle 3.

COMMUNICATION C2

APPROCHE DIDACTIQUE DES DIFFERENCIATIONS DANS LES APPRENTISSAGES SCOLAIRES DES MATHEMATIQUES

Etude de cas : enseignement autour des pourcentages dans une classe de CM2

Lalina COULANGE
Maître de Conférences, IUFM DE CRETEIL
DIDIREM, Université Paris 7
lalina.coulange@gmail.com

Cette communication s'appuie sur des recherches engagées au sein du réseau d'équipes de recherche : RESEIDA (recherches sur la socialisation, l'enseignement, les inégalités et les différenciations dans les apprentissages) piloté par E. Bautier et J-Y. Rochex. Une partie des chercheurs regroupés dans ce réseau s'investit actuellement dans la mise en œuvre d'un projet de recherche commun, autour de l'articulation CM2-Sixième. C'est dans ce contexte, que les données, présentées ici, ont été recueillies dans une classe de CM2 en ZEP (en 2004-2005) et ont été analysées. Dans un premier temps, quelques pistes théoriques issues de la didactique des mathématiques qui nous semblent pertinentes pour approcher les processus différenciateurs dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques dans un contexte de « classe ordinaire » sont développées. A l'occasion ce « point de vue didactique » est croisé avec des perspectives issues de la sociologie de l'éducation. Ensuite c'est l'analyse d'épisodes relatifs à l'enseignement des pourcentages au sein de la classe de CM2 observée illustrant des éléments du questionnement actuel sur les processus différenciateurs dans les apprentissages scolaires des mathématiques, qui est développée.

Exploitations possibles

Cette communication apporte aux formateurs et aux professeurs des écoles des éléments théoriques relatifs à l'analyse des pratiques de classe effectives d'un enseignant. Elle pose des questions autour de la différenciation dans l'apprentissage des mathématiques dans le cadre de la didactique des mathématiques.
Elle permet également, à travers l'analyse de deux séances menée par une enseignante de CM2, et notamment de quelques épisodes révélateurs de processus de différenciation à l'œuvre pour quelques-uns des élèves de mettre en évidence différents cheminements des élèves liés aux apprentissages mathématiques.

Mots-clés

Didactique des mathématiques – Sociologie – Pratiques enseignantes – Processus différenciateurs - cycle 3.

COMMUNICATION C3

L'ENSEIGNEMENT MATHEMATIQUE A L'ECOLE PRIMAIRE DE LA TROISIEME REPUBLIQUE AUX ANNEES 1960 : ENJEUX SOCIAUX ET CULTURELS D'UNE SCOLARISATION « DE MASSE »

Renaud D'ENFERT
Maître de conférences, IUFM de l'Académie de Versailles,
Groupe d'histoire et de diffusion des sciences d'Orsay-Université
Paris XI

Exploitations possibles

Pour les nouveaux formateurs qui s'intéressent à la didactique des mathématiques enseignées à l'école primaire et qui veulent avoir une idée complète, mais résumée des divers concepts qui permettent de mieux comprendre l'enseignement- apprentissage des mathématiques.
La majorité des outils présentés ont été développés par les didacticiens des mathématiques avec l'idée de construire des séances pour l'apprentissage de notions mathématiques données (ici la proportionnalité) à un niveau donné. La « situation du puzzle » peut être aisément mise en œuvre par un formateur débutant. Les conséquences qu'il en tirera sont conformes à la théorie.

Mots-clés

Théorie des situations didactiques ; apprentissage par adaptation ; dialectique outil-objet ; notion de cadre ; jeux de cadres ; transposition didactique ; théorie des champs conceptuels ; erreur ; obstacle ; conception ; rétroaction ; validation ; milieu ; dévolution ; institutionnalisation ; milieu ; dévolution ; contrat didactique ; variable didactique ; situation-problème.

COMMUNICATION C4

QUELQUES ENJEUX DIDACTIQUES DE LA PRISE EN COMPTE DE LA DIMENSION EXPERIMENTALE EN MATHEMATIQUES À L'ECOLE ELEMENTAIRE : LE CAS DE LA MESURE DES GRANDEURS

Viviane DURAND-GUERRIER
Maître de conférences, IUFM de Lyon, LIRDHIST[1]
et IREM, Université Claude Bernard Lyon1
vdurand@univ-lyon1.fr

Cet article se propose, au travers de l'enseignement des grandeurs à l'école élémentaire, de poser la question de la nature et des modalités d'élaboration des objets mathématiques et de leurs propriétés en lien avec les objets sensibles d'une part, avec les objets déjà naturalisés d'autre part. Cette question est étroitement liée à celle des enjeux épistémologiques et didactiques de la prise en compte de la dimension expérimentale des mathématiques.
En s'appuyant sur les programmes de 2002 dans lesquels apparaît explicitement la notion de grandeur et sur les documents d'accompagnement qui insistent sur la nécessité de travailler les notions de grandeur avant celle de la mesure, l'article développe trois exemples proposés en formation initiale et/ou continue.
La première illustration - celle de la notion de cardinal d'une collection présenté comme la mesure de la taille de la collection – souligne le rôle de la correspondance terme à terme comme protocole expérimental permettant de comparer la taille de deux collections sans les dénombrer ainsi que l'importance des liens entre les actions sur les collections et les opérations sur les cardinaux.
La seconde – celle de la construction du concept de longueur - affirme l'importance de la mise en place d'un protocole expérimental permettant les comparaisons lorsque les contrôles sensoriels, en particulier perceptifs, ne suffisent pas.
Puis la troisième – celle du « problème de Galilée » - s'intéresse à la comparaison des volumes des deux cylindres qu'il est possible de construire en enroulant une feuille rectangulaire soit sur sa longueur, soit sur sa largeur. Ce problème, présenté d'abord comme une situation de formation à l'IUFM, est ensuite envisagé pour des élèves de cycle 3 pour lesquels un protocole expérimental est développé.

En conclusion l'attention est attirée sur les bénéfices attendus pour les élèves de pouvoir éprouver les relations dialectiques qu'entretiennent les nombres avec les objets du monde dans un va et vient entre situations mettant en jeu les grandeurs avant la mesure ; élaboration d'une mesure adaptée et pouvoir prédictif, en retour, des résultats des calculs numériques.

Mots-clés
Grandeurs - Mesures- Formation initiale- Problème de Galilée

[1] Laboratoire de Recherche en Didactique et en Histoire des Sciences et Techniques

COMMUNICATION C5

ETUDE DE LA FORMATION DES PRATIQUES A TRAVERS L'ETUDE D'UN SCENARIO DE FORMATION

Christine Mangiante
ATER, IUFM Orléans Tours DIDIREM PARIS 7
christine.mangiante@orleans-tours.iufm.fr

Cette recherche se présente comme une étude de la formation des pratiques des enseignants débutants vue à travers l'analyse des effets d'un scénario de formation centré sur l'analyse de pratiques : des Ateliers de Pratiques Professionnelles avec utilisation de la vidéo.
Utilisant à la fois les outils de la didactique des mathématiques et les concepts définis en psychologie ergonomique, nous décrivons ce qui se passe lorsqu'un enseignant en formation initiale élabore, met en œuvre et analyse *a posteriori* un projet d'enseignement. L'analyse de l'activité du formé dans le cadre de ces ateliers consistera à étudier comment celui-ci modifie, pour le mettre en œuvre, le projet de séances proposé par le formateur et réfléchit, *a posteriori*, sur sa pratique.
Nous étudierons comment ce processus de modifications, de la tâche prescrite à la tâche réalisée, permet, non seulement, d'étudier le fonctionnement du dispositif de formation mais aussi, de mettre en lumière certains phénomènes qui nous renseignent sur la façon dont se constituent les pratiques des enseignants débutants.

Exploitations possibles

Ce texte s'adresse aux formateurs PIUFM et PEMF qui s'interrogent sur l'effet de modalités de formation type « analyse de pratiques professionnelles » chez les PE2.

Mots-clés

Scénario de formation, pratiques d'enseignement, débutant, expert, atelier de pratiques professionnelles

COMUUNICATION C6

GEOMETRIE PLANE AU CYCLE 3 DE L'ECOLE ELEMENTAIRE DANS DIFFERENTS ESPACES INSTRUMENTES

Jean-Pierre RABATEL
Maître-Formateur
Ecole Jean Moulin, Caluire
Jeanpierre.rabatel@laposte.net
Christiane ROLET
Chercheur
UMR ICAR, Lyon
Christiane.Rolet@univ-lyon2.fr

Le texte présente les résultats d'une recherche concernant l'apprentissage des concepts géométriques. Cette recherche est initialisée par les travaux de René Berthelot s'appuyant sur les apports de Guy Brousseau concernant les espaces de tailles différentes.

Après s'être attaché à clarifier le savoir à enseigner en géométrie et les moyens de contrôle associés, l'exposé présente une analyse des difficultés d'apprentissage des savoirs géométriques et de l'articulation des connaissances dans les espaces de tailles différentes. Il propose ensuite un exemple d'ingénierie reposant sur le principe du travail dans différents espaces instrumentés à partir de l'hypothèse que cela constitue la condition d'une bonne conceptualisation en géométrie.

Enfin, le document aborde la question de la mise en œuvre de cette ingénierie dans les classes et cherche à définir certaines modalités visant à permettre son appropriation par un enseignant.

Exploitations possibles

Le texte constitue une ressource utile aux formateurs de professeurs des écoles pour aborder les questions relatives à l'apprentissage de la géométrie à l'école primaire en formation initiale ou continue.
Il offre un exemple de proposition d'enseignement s'inspirant de la recherche menée par René Berthelot et Marie-Hélène Salin, visant à faire articuler les connaissances géométriques dans des espaces de tailles différentes.
Il constitue une ressource intéressante pour tout formateur qui veut avoir une vision synthétique et concrète des travaux de Guy Brousseau et des prolongements apportés par Berthelot -Salin concernant l'apprentissage de la géométrie à l'école primaire.

Mots-clés

géométrie – espaces - instrumentation – résolution de problèmes.

COMMUNICATION D1

EXPERIMENTATION ET RESOLUTION DE PROBLEMES

André DELEDICQ

Texte non communiqué.

COMMUNICATION D2

EXPERIMENTATION EN MATHS : DE QUOI PARLE-T-ON ?

Thierry DIAS
Formateur associé, IUFM
Laboratoire LIRDHIST Lyon 1
thdias@wanadoo.fr

Cette communication a été l'occasion de faire une brève présentation du travail de Gérard Kuntz publié dans la lettre de la veille scientifique et technique de l'INRP à laquelle Thierry Diaz a participé en tant que co-auteur avec Viviane Durand Guerrier.

Après avoir présenté ce que sont les *lettres de la VST* , publiées par l'INRP, celle qui traite de la dimension expérimentale des mathématiques dans l'enseignement a été l'objet d'une lecture spécifique en essayant notamment de clarifier la notion d'expérimentation sur un plan épistémologique, mais aussi en abordant quelques principes didactiques qui lui sont corrélés.

Mots-clés

Expérimentation, INRP, démarche expérimentale.

COMMUNICATION D3

GEOMETRIE AU CYCLE 3 : OBJETS ET RELATIONS

Gérard GERDIL-MARGUERON
Professeur de mathématiques, IUFM de Grenoble
Equipe ERMEL - INRP
gerard.gerdil-margueron@wanadoo.fr

Cette communication est issue d'un travail dans le cadre d'une recherche INRP concernant l'enseignement de la géométrie au cycle 3. Elle a abouti à la publication d'un ouvrage par l'équipe ERMEL.

Dans un premier temps, les objectifs visés et la méthode de travail utilisée dans cette recherche sont présentés. Quelques éléments de cadrage aussi sont évoqués :
- les différents espaces dans lesquels s'exercent les apprentissages à l'école, en particulier le domaine spatio-graphique ;
- les savoirs abordés en géométrie : les objets, les relations et les propriétés.

Dans un second temps, la démarche didactique - qui s'appuie sur de véritables problèmes spatiaux à soumettre aux élèves - est illustrée par la présentation de situations relatives à l'approche de la notion de perpendicularité par « l'angle droit » du rectangle.
Les activités successives proposées ont été expérimentées dans les classes. Elles sont détaillées et visent à permettre de faire évoluer les connaissances spatiales des élèves sur les objets (ici le rectangle identifié, au départ, par sa forme globale) vers une relation sur les droites (les supports des côtés du rectangle). Ainsi, le statut des objets géométriques se trouve modifié.

Exploitations possibles

La communication et l'ouvrage ERMEL - *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes* (Hatier, septembre 2 006) – auquel elle renvoie permettent aux formateurs et aux professeurs des écoles de connaître :

- des activités à proposer aux élèves de cycle 3 afin qu'ils construisent les savoirs au programme en géométrie ;
- les éléments théoriques et didactiques qui les fondent.

Mots-clés :

Géométrie – espace – domaine spatio-graphique – résolution de problèmes – objet – relation – propriété - représentation.

COMMUNICATION D4

LE JEU COMME MODELISATEUR DES SAVOIRS MATHEMATIQUES

Didier FARADJI
Concepteur de jeux mathématiques
Intervenant exterieur en formation continue
Le carré musical Paris
didier@faradji.fr

Dans cette communication, Didier Faradji propose aux enseignants de moyenne et grande section de maternelle d'aider leurs élèves à appréhender la notion de différence entre deux nombres et à parvenir ainsi à construire par eux-mêmes « la transformation de la quantité » au moyen d'un jeu intitulé le Quadruplay.

Dans un premier temps, une analyse théorique de la notion de transformation de la quantité est présentée en lien avec les programmes officiels du cycle 2 (et plus particulièrement de la Grande Section de Maternelle).
Dans un second temps, les contraintes théoriques étant fixées, Didier Faradji présente la conception du jeu Quadruplay et montre en quoi ce jeu peut répondre aux attentes théoriques.
Finalement, dans un dernier temps, il propose une manière d'introduire et de pratiquer le jeux en classe.

Exploitations possibles

Permettre aux formateurs et aux professeurs des écoles de connaître :

- les éléments théoriques et didactiques sur la notion de transformation de la quantité,
- les éléments de conception d'un jeu mathématique en réponse à un questionnement théorique,
- la pratique d'un jeu mathématique en classe.

Mots-clés :

Transformation de quantités, cycle 2, Grande Section, Quadruplay, jeu mathématique.

COMMUNICATION D5

MATHEMATIQUES ET MULTIAGE

Marie-Pierre Galisson
Maître de conférences, centre IUFM d'Arras
DIDIREM
mpgalisson@aol.com

Quelles mathématiques fait-on vivre dans une école qui fonctionne en multi-âge ? Comment y apprend-on les mathématiques ? Comment y enseigne t-on les mathématiques quand on décide de faire de l'hétérogénéité des âges et des compétences un levier d'apprentissage ?
Ces questions définissent, depuis septembre 2005, les axes de travail d'un groupe Recherche-Action- Formation mis en place dans le Val d'Oise. Le projet est né du besoin d'interroger les pratiques pédagogiques qui prévalent en regroupement multiâge pour analyser leurs effets sur les apprentissages mathématiques des élèves. Rappelons que ces activités s'organisent sous forme de « rituels », de « démarches d'auto-socio construction des savoirs (GFEN), d'ateliers de résolution de problèmes et de travail d'entraînement et de systématisation. Ces activités sont pensées dans le cadre d'une pédagogie interactive fondée sur les échanges entre élèves, un étayage par les « plus compétents ».
Nous présentons quelques aspects du cheminement réflexif de l'équipe et quelques éléments révélateurs de la dynamique impulsée : nous mettons ainsi en évidence l'influence de l'organisation pédagogique sur les situations d'apprentissage et les questions que soulève l'analyse *a posteriori* de quelques-unes de ces situations.
Notre cadre d'analyse se propose de prendre appui sur les apports de « l'auto-évaluation régulatrice » (CRESAS) et sur les apports de la didactique des mathématiques (conditions et contraintes déterminées au niveau de la pédagogie et de l'école, caractéristiques et co-détermination des organisations mathématiques et didactiques qui en résultent).

Exploitations possibles

Source documentaire pour la formation initiale et continue des professeurs d'école, l'article décrit des pratiques originales d'enseignement des mathématiques dans un cadre où l'hétérogénéité des élèves est choisie et considérée comme un atout.

Le formateur y trouvera des outils d'analyse de ces pratiques et des questions sur les conséquences vis à vis des apprentissages des élèves.

Mots-clés

Multiâge, enseignement des mathématiques, hétérogénéité, pratiques enseignantes, analyse de pratique, apprentissage.