ACTES du
XXXII^{e} Colloque COPIRELEM

Des Professeurs et des Formateurs

de Mathématiques chargés

de la Formation des Maîtres

IREM de Strasbourg

30 - 31 mai et 1er juin 2005

Enseigner les mathématiques

en France, en Europe

et ailleurs

Photo : parlement européen- Strasbourg

Colloque International Francophone

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

IREM STRASBOURG

IUFM ALSACE

ulp UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR STRASBOURG

REMERCIEMENTS

Le XXXIIe colloque de la COPIRELEM s'est tenu en 2005 dans les locaux de l'UFR de mathématique et informatique de l'université Louis Pasteur. Il a réuni comme chaque année des formateurs des maîtres de l'école élémentaire exerçant dans des IUFM, mais aussi des animateurs des IREM, enseignants du secondaire ou du supérieur. Le bureau de la COPIRELEM s'est chargé de son organisation scientifique et l'IREM de Strasbourg de son organisation locale.

La réussite d'une telle rencontre, réunissant ceux qui enseignent les mathématiques à tous niveaux, est, me semble-t-il, un signe de la vitalité de la communauté des mathématiciens.

Le comité local d'organisation était composé de Robert ADJIAGE, Richard CABASSUT, Annie GREWIS qui ont dépensé beaucoup d'énergie à ce que l'accueil à Strasbourg des participants soit convivial, Jean-Claude RAUSCHER qui a consacré beaucoup de temps à la mise au point des actes du colloque, Loïc TEYSSIER qui a mis en place avec beaucoup d'efficacité le site du colloque et moi-même. Bien que nous ayions par moments trouvé la tâche bien lourde nous avons travaillé dans la bonne humeur et, je crois, efficacement.

L'organisation de ce colloque n'aurait pu être menée à bien sans le travail de secrétariat d'Alexandra CARMINATI et celui des bibliothécaires de l'IREM, Evelyne LE GUYADER et Christiane MOLARD. Le colloque n'aurait pu avoir lieu sans le soutien de l'Université Louis Pasteur, de l'IUFM d'Alsace, de l'ADIREM et de la région Alsace, de la mairie de Strasbourg et des agences locales de la CME et de la MAIF.

Qu'ils en soient tous remerciés ici.

Nicole BOPP
Directrice de l'IREM de Strasbourg

PRÉSENTATION DES ACTES

Reflétant l'orientation européenne et internationale que s'était fixé le colloque, une grande part des textes présentés permet de confronter des dispositifs de formation et d'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire dans différents pays et contextes. Nous nous permettons d'affirmer d'emblée que ces actes offriront l'occasion au lecteur d'effectuer un voyage qui lui réservera de belles surprises et de belles occasions de questionner nos institutions, leurs politiques et nos métiers d'enseignants et de formateurs en mathématiques.

D'entrée, c'est le cas avec les textes relatifs à la Table Ronde. Le premier permet de comparer l'enseignement des mathématiques en donnant une vision des différences et ressemblances des systèmes primaires des écoles d'Europe. Les suivants présentent des informations sur la formation des enseignants au Portugal, en Suisse Romande et en Italie et mettent en évidence les questions vives qui se posent à ce sujet.

Le texte de la première conférence met lui, en évidence quelques questions à propos des mathématiques enseignées dans différents pays du monde et ceci tout particulièrement à travers l'enseignement de la géométrie. Le texte de la deuxième conférence dépasse le cadre des contenus enseignés pour aborder le problème des apprentissages à travers une analyse cognitive de l'activité mathématique.

Muni de ces repères le lecteur pourra poursuivre son périple et ses questionnements à sa guise en prenant connaissance des différentes communications et des ateliers présentés brièvement dans le « volume papier » et exposés complètement dans le CD-Rom. Enfin, pour terminer et poursuivre ce voyage la COPIRELEM signale quelques « Éléments bibliographiques pour une culture de base ».

La dimension internationale présente dans ce colloque continuera à se développer avec certitude dans les deux prochains colloques avec la question de la place de l'expérimentation et de la modélisation dans l'enseignement des mathématiques, question qui reflète des préoccupations largement partagées par de nombreux pays.

Pour finir, je voudrais remercier tout particulièrement Alexandra CARMINATI pour la mise en page de ces actes.

Jean-Claude RAUSCHER,
Rédacteur en chef pour la COPIRELEM

SOMMAIRE

TABLE RONDE

CONFÉRENCES

COMMUNICATIONS

ATELIERS

TABLE RONDE

MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE (ENFANTS DE MOINS DE 12 ANS). QUELLE FORMATION POUR LES ENSEIGNANTS ?

Sous l'hypothèse que la connaissance, voire l'étude, des décisions, fonctionnements, contraintes, questions vives propres à d'autres pays est en effet de nature à enrichir le regard que nous portons sur notre propre système, la COPIRELEM a décidé de consacrer une table ronde à la formation mathématique des professeurs d'école en sollicitant des collègues francophones d'autres pays d'Europe.

Elle a invité :

- Lucia GRUGNETTI Italie
- François JAQUET Suisse
- Isabel ROCHA Portugal
- Dietmar GUDERIAN Allemagne

Les actes regroupent les différents textes qui ont ponctué le travail. Un texte court de Catherine HOUDEMENT a permis aux participants d'avoir une vision rapide des différences et ressemblances des systèmes primaires des écoles d'Europe. Un questionnaire finalisé par Catherine HOUDEMENT et Pierre EYSSERIC a guidé les intervenants pour offrir aux auditeurs un plan commun. Trois textes (Lucia GRUGNETTI, François JAQUET et Isabel ROCHA) présentent des informations sur la formation des enseignants de leur pays, reprenant des éléments de leur conférence.

L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES EN EUROPE AU NIVEAU PRIMAIRE : QUELQUES INFORMATIONS (2002, 2005)

Catherine HOUDEMENT
IUFM de Haute Normandie, COPIRELEM
catherine.houdement@rouen.iufm.fr

Ce texte rassemble des informations sur la structure globale des écoles primaires d'Europe. Il est construit à partir d'une présentation faite en janvier 2002[1] et des actualisations (2005) fournies par trois intervenants de la table ronde : Lucia Grugnetti pour l'Italie, François Jaquet pour la Suisse, Isabel Rocha pour le Portugal.

LA STRUCTURE DU NIVEAU PRIMAIRE

L'école primaire constitue dans beaucoup de pays un niveau d'enseignement autonome avec sa propre organisation. On trouve ainsi un niveau primaire bien étiqueté en Allemagne, France, Italie, Roumanie et Angleterre, dans la plupart des autres pays de l'Union Européenne 2002[2] et en Suisse romande. Dans d'autres pays, le niveau primaire est intégré dans une structure unique (sans distinction entre enseignement primaire et secondaire), qui court jusqu'à la fin de la scolarité obligatoire. C'est le cas du Portugal, de l'Angleterre, de la République Tchèque. L'enseignement primaire peut alors correspondre à une sous-unité de la structure, l'école basique : il s'agit des premier (4 ans) et second (2 ans) cycles (sur trois cycles et 9 ans) en Angleterre et au Portugal ; du premier niveau (5 ans sur deux niveaux et 9 ans) en République Tchèque.

L'âge de fin de scolarité obligatoire est **de 15 ou 16 ans** (voire **18 ans** en Italie[3]).

L'enseignement primaire dure **six ans** dans la majorité des pays de l'Union Européenne : cependant il est réduit à **quatre ans** dans les *Länder* d'Allemagne (sauf Berlin et Brandenburg), en Roumanie et à **cinq ans** en France, en Italie, en République Tchèque, dans certains cantons suisses.

Ces variantes sont à croiser avec l'existence (et le taux de fréquentation) d'un enseignement pré-primaire et avec l'âge de l'entrée à l'école primaire.

[1] Extrait des Actes du colloque (à paraître) " *Qu'enseigne-t-on aujourd'hui en mathématiques dans les écoles élémentaires d'Europe et que pourrait-on y enseigner ?* " Paris Sorbonne, 7/1/2002. CNP et CREM (Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques, responsable J.P.Kahane).

[2] UE 2002 **(15)** UE 2005 **(***+10***)** : Allemagne, Autriche, Belgique, *Chypre*, Danemark, Espagne, *Estonie*, Finlande, France, Grèce, *Hongrie*, Irlande, Italie, *Lettonie*, *Lituanie*, Luxembourg, *Malte*, Pays-Bas, *Pologne*, Portugal, Royaume-Uni, *République Tchèque*, *Slovaquie*, *Slovénie*, Suède……En pré-adhésion : Roumanie…..

[3] L'âge de fin de scolarité obligatoire est passé à 18 ans (mais le décret-loi parle d'étude et de « travail » pour les écoles professionnelles).

Dans la moitié des pays de l'Union Européenne 2002, on note une fréquentation massive des établissements à finalité éducative (mais non nécessairement scolaires) **dès trois ans** (ainsi en Belgique, France, Italie, Portugal…) ou dès **quatre ans** (en Allemagne, Espagne, Danemark, Luxembourg et Pays Bas, **quatre** ou **cinq an**s en Suisse romande). En Roumanie et en République Tchèque, on trouve des classes pré-primaires à partir de 3 ans dans le secteur scolaire.

L'entrée à l'école primaire se fait à **6 ans** pour presque tous les enfants de l'Union Européenne, de la Suisse romande et pour la République Tchèque, quelquefois après un test de maturité (Allemagne) ; **à 7 ans** pour le Danemark, la Roumanie, la Finlande. En Angleterre, tous les enfants sont en primaire à **5 ans**.

Le niveau étiqueté primaire est divisé en années ou structuré en cycles de plusieurs années. On trouve ainsi deux cycles en France (cycle 2 de deux ans, cycle 3 de trois ans), en Italie (cycle 1 de deux ans, cycle 2 de trois ans[4]), en Angleterre (*key stage* 1 de deux ans, *key stage* 2 de quatre ans), au Portugal (cycle 1 de quatre ans, cycle 2 de deux ans). En général, les classes (ou les cycles) sont plutôt constituées par niveaux. Par contre en Italie, en Angleterre, les classes sont constituées uniquement par âges.

LA CLASSE : NOMBRE D'ÉLÈVES, NOMBRE D'ENSEIGNANTS

La plupart des pays de l'Union Européenne 2002, la Roumanie et la République Tchèque fixent par prescription ou recommandation **le nombre d'élèves par classe,** en indiquant un effectif minimal et un effectif maximal.

L'effectif maximal variait en 1997-98 entre 25 ou 26 (Italie, Roumanie) ; en 2005 il était de 24 pour le cycle 1 et 28 maximum pour le cycle 2 au Portugal.

Certains pays (France[5], Angleterre, Belgique, Pays Bas) n'ont pas de réglementation globale sur ce point, ce sont les autorités locales qui décident, en fonction du contexte local et de considérations pédagogiques.

En général, dans les premières années (au Portugal seulement dans le premier cycle, de 6 à 10 ans) et au cours du primaire, **un seul enseignant** enseigne dans une classe la plupart des matières. Il peut être relayé par d'autres enseignants dans quelques disciplines : éducation physique et sportive, éducation musicale, éducation religieuse, langue étrangère. Mais il peut aussi exister plusieurs modalités de répartition des matières dans l'école (par exemple en France, en Allemagne).

Au Danemark, chaque matière est prise en charge par **un enseignant différent**, les enseignants travaillent en équipe et l'enseignement est interdisciplinaire. Au Portugal, on trouve dans le second cycle (10 à 12 ans) des enseignants différents par **champs disciplinaires** : portugais, langue étrangère, histoire et géographie // mathématique et sciences expérimentales // éducation physique // éducation artistique et technologique.

[4] dans les nouvelles « indications nationales » : première année, puis premier cycle de deux ans, puis second cycle de deux ans.

[5] En France ; le nombre moyen d'élèves par classe tourne autour de 22 (mais avec 25% de classes à 26 élèves et plus). Le nombre de classes par école est en moyenne de 4,6.

En Italie, **trois enseignants se partagent deux classes**, auxquels s'ajoute éventuellement un enseignant de langue étrangère : la nouvelle loi prévoit un enseignant « tutor » qui coordonne les autres, mais la plupart des écoles refuse.

Souvent l'enseignant de primaire suit sa classe les deux premières années ou le temps du cycle (République Tchèque, Portugal, Roumanie) ou plus longtemps (Allemagne deux ou quatre ans, Italie cinq ans). C'est plus rare en Angleterre et en France[6].

Le redoublement n'est pas une pratique commune à tous les pays : par exemple, il est inexistant en Angleterre et au Danemark où a lieu un passage automatique de classe en classe. Il reste exceptionnel en Italie. Il est limité à un redoublement par cycle en France. Il est possible chaque année en Roumanie, en Suisse romande, au Portugal.

DES PROGRAMMES IMPOSÉS OU COOPÉRATIFS

Des pratiques différentes régissent les programmes, selon le degré de contraintes nationales et d'autonomie accordée aux écoles. En voici quelques exemples.

En France, contenus et horaires sont imposés par des textes nationaux. Les programmes sont déclinés en termes de contenus et de compétences à atteindre.

En Allemagne les contenus sont prescrits par le *Land* avec des recommandations nationales. Les méthodes ne sont que conseillées.

En République Tchèque, les objectifs sont fixés et il existe trois programmes approuvés (définissant sujets, horaires et méthodes) dont un est choisi en majorité par les enseignants. Un pourcentage de modifications (30%), au choix du professeur, est toléré à l'intérieur de ces programmes.

En Angleterre, le *National Curriculum* fixe des contenus et des référentiels de compétences, mais n'impose pas les horaires par discipline. Par contre il indique des indications très strictes fixant le déroulement d'une leçon de mathématiques (*NNS*) : 5-10 minutes d'activité mentale/orale, un temps d'activité principale, souvent en petits groupes, 10 minutes de synthèse en classe entière.

En Italie, les objectifs et les champs disciplinaires sont fixés au niveau national. Chaque école conduit son projet (contenus, horaires par champ disciplinaire…) en respectant les objectifs du système national d'éducation et en s'aidant des recommandations nationales.

Au Portugal, à partir de 2001, avait été instauré un " aménagement flexible des programmes " : une plus grande autonomie laissée aux écoles : seuls sont fixés des " compétences essentielles " et des types " d'expériences éducatives " ; les méthodes et le temps alloué à chaque discipline devaient être décidés par l'école. Il n'est pas sûr que cette organisation ait résisté au changement de gouvernement (2002)…

---

[6] En France 23% des classes de l'école élémentaire sont à plusieurs cours.

En Suisse romande, un « plan d'études » commun fixe les contenus objectifs généraux et compétences, complété par des adaptations cantonales.

LES MANUELS SCOLAIRES

Ils peuvent être :

- librement choisis par l'école ou les professeurs (France, Angleterre, Italie) ; l'écriture et le contenu des manuels est alors sous la responsabilité des éditeurs, il n'existe pas de contrôle public des manuels ;

- librement choisis par l'école ou les professeurs après que certains aient été recommandés (en Roumanie, il existe un agrément national sur trois manuels) ou que le Ministère donne des conseils pour éclairer la décision des professeurs (Portugal) ;

- choisis dans une liste agréée par le Ministère ou le *Land* (Allemagne, République Tchèque).

Les manuels scolaires sont souvent prêtés et gratuits (Allemagne, France, République Tchèque, Roumanie, Italie).

La Suisse romande écrit et édite ses propres manuels scolaires, en fonction de son « plan d'études ». Chaque canton les distribue, gratuitement, aux maîtres et élèves de toutes ses classes[7].

LA PLACE DES MATHÉMATIQUES

Les mathématiques sont une discipline identifiée et obligatoire, dont l'horaire est en général imposé par les textes officiels. Cependant ce n'est le cas ni au premier cycle au Portugal, ni en Italie, ni en Angleterre.

Dans presque tous les cas où il est imposé, la part de l'horaire de mathématiques par rapport à l'horaire total d'enseignement est relativement identique : **vers l'âge de 7 ans** elle tourne (source 1996-97) autour de 20% (Roumanie…), plutôt un peu en dessous (en France notamment), un peu au-dessus en Allemagne (22%) et en République Tchèque (23%) ; pour les élèves **vers 10 ans,** cet horaire reste identique ou diminue, sauf en France, où la part mathématique passe de 19% à 21% ; au Portugal il est fixé au second cycle à quatre plages hebdomadaires de 45 minutes (ou deux de 90 minutes si l'école le décide), soit autour de 12% de l´horaire total d´enseignement.

Dans tous les programmes de mathématique d'école primaire, on retrouve nombres, espace et géométrie, mesure, un peu de traitement de données ou de statistiques, un peu

[7] Ce « monopole » de l'institution scolaire sur les manuels remonte aux années 1970 pour répondre à un besoin et à une demande des enseignants d'une coordination inter-cantonale, pour des considérations d'ordre géographique, culturel, économique (les 7 cantons francophones de Suisse ne représentent que 1500000 habitants, ce qui correspond à une « petite » Académie en France).

de logique. La résolution de problèmes est aussi très présente, même si elle ne recouvre pas la même signification dans tous les programmes.

REMARQUES COMPLÉMENTAIRES

La Suisse est constituée de 23 cantons, tous très jaloux de leur autonomie, en matière d'éducation, à l'image des Länder en Allemagne. La partie francophone, ou "Suisse romande" cherche à coordonner son enseignement par des plans d'étude et des moyens d'enseignement communs, mais ses 7 cantons conservent leurs propres structures scolaires.

En Suisse alémanique (15 cantons), la coordination est à peine esquissée, il y a certaines collaborations régionales pour des manuels et programmes, mais la diversité est très grande.

La partie italienne de la Suisse, le canton du Tessin, a son programme propre et deux collections de manuels.

RÉFÉRENCES

Informations apportées par les intervenants présents.

Commission Européenne (2000) *Les chiffres clés de l'éducation en Europe 99-2000*, Office des publications officielles de Communautés Européennes, Luxembourg.

QUESTIONNAIRE PRÉPARATOIRE À LA TABLE RONDE

Catherine HOUDEMENT
COPIRELEM, IUFM Haute Normandie
catherine.houdement@rouen.iufm.fr

Pierre EYSSERIC
COPIRELEM, IUFM Aix Marseille
p.eysseric@aix-mrs.iufm.fr

Résumé
Ce questionnaire préparatoire à la table ronde du colloque COPIRELEM de Strasbourg a été établi à partir des « Actes du colloque Paris La Sorbonne 2002 : *Qu'enseigne-t-on aujourd'hui en mathématiques dans les écoles élémentaires d'Europe et que pourrait-on y enseigner ?* » (à paraître).

Les intervenants ont été invités, dans un premier temps, à situer l'école primaire[1] de leur pays (ou région) et notamment dire les décalages principaux entre le **curriculum souhaité** (*intended curriculum*), le **curriculum réel** (*implemented curriculum*), et quels moyens se donne l'institution d'évaluer les **effets du curriculum** (*achieved curriculum*), tout cela, soit suite si possible à des études scientifiques, soit de « leur » point de vue de spécialiste de l'éducation.

Voici les questions qui ont guidé leur apport d'informations sur la formation des enseignants.

OUTILS POUR L'ENSEIGNEMENT

Quels documents existent pour les enseignants : objectifs secs, objectifs et contenus mathématiques, propositions d'activités, *etc*.… en bref quel est le curriculum disponible officiel (édité par le Ministère ou le Land, obligatoire ou conseillé)

Quels sont les autres éléments du curriculum disponible (non institutionnel) : manuels scolaires s'ils ne sont pas choisis par le Ministère ou le Land, logiciels, sites….

PROFIL DES FUTURS ENSEIGNANTS

Qui enseigne les mathématiques aux enfants de moins de 12 ans ?

Comment devient-on enseignant de mathématiques en primaire, en général ? Par examen, concours, sur dossier, sur entretien ? A quel niveau d'étude ? A quel niveau d'étude de mathématiques ? (ce point sera développé dans le § qui suit).

Est ce possible de dire quelle proportion de scientifiques parmi eux ?

[1] On appellera ici **école primaire** l'école pour enfants de moins de 12 ans.

Existe-t-il une épreuve de math au moment de leur recrutement ?

Peut-on être enseignant sans beaucoup de connaissances en mathématiques ?

LA FORMATION INITIALE DES ENSEIGNANTS

Existe-t-elle ? Dans quel dispositif (école professionnelle, institution par compagnonnage dans une école primaire) ? Comment y entre-t-on ?

Quelle durée ?

Quels formateurs ? Comment sont ils recrutés ? Quelle spécificité ?

Existe il un curriculum spécifique ? (si oui, nous le fournir si possible, le prévoir dans les actes) Existe il une certification à la sortie de la formation ?

Quelle est la part des mathématiques dans la formation ?

Quelle est la place de la didactique des mathématiques ?

Quelle est la part de la pratique en classe dans la formation ? L'élève professeur est-il seul responsable en classe, sous l'œil du maître de la classe ??? *etc*.

Comment est prise en compte l'articulation entre théorie et pratique ?

Quelle évaluation de la formation initiale ?

LA FORMATION PERMANENTE DES ENSEIGNANTS

Existe-t-elle ? Sous quelle forme ? A quel rythme ? Pour tous ou sur la base du volontariat ?

Est-elle valorisée ? Comment ?

Des formations sont-elles organisées lors des changements de programme ?

Quelle intégration des technologies modernes de l'information et de la communication dans la formation ?

Quel lien entre la formation des enseignants et la recherche en didactique des mathématiques ?

Quelle évaluation de cette formation permanente ?

QUESTIONS VIVES

Quelles sont-elles selon vous en ce moment dans votre pays ou région concernant la formation ou concernant l'enseignement ?

MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE. QUELLE FORMATION POUR LES ENSEIGNANTS ? LE CAS DE L' ITALIE

Lucia GRUGNETTI
Unité de recherche en didactique des mathématiques de l'Université de Parma
lucia.grugnetti@unipr.it

Résumé
Ce papier présente quelques informations sur la formation initiale des instituteurs et des professeurs de mathématiques en Italie et donne aussi un bref aperçu de la situation italienne en ce qui concerne les programmes de mathématique de l'école primaire et du collège.

I – CURRICULUM DE L'ÉCOLE PRIMAIRE (ENFANTS JUSQU'À 10/11 ANS)[1]

I – 1 Dichotomie entre deux visions différentes de l'enseignement

Bien que les Nouvelles indications nationales ne soient entrées en vigueur qu'en 2002, la plupart des enseignants font encore référence à la loi de 1985[2], qui met en exergue la *Mathématique et la formation de la pensée* : « L'éducation mathématique contribue à la formation de la pensée dans ses différents aspects : d'intuition, d'imagination, de projet, d'hypothèses et déduction, de contrôle, et donc de validation ou de démenti. Elle vise à développer, de manière spécifique, concepts, méthodes et attitudes qui rendent capables d'ordonner, de quantifier et de mesurer des faits et des phénomènes de la réalité ; elle vise à former les habilités nécessaires à interpréter la réalité de façon critique pour agir consciemment sur elle ».

Ces anciens programmes s'organisaient en 5 thèmes généraux, avec objectifs, contenus et indications méthodologiques permettant une gestion souple et des méthodologies ouvertes et diversifiées : ces thèmes étaient les suivants :

a) *Les problèmes ;*
b) *Arithmétique ;*
c) *Géométrie et mesure ;*
d) *Logique ;*
e) *Probabilité, statistique et informatique.*

Les Nouvelles indications nationales se présentent en termes de « compétences » à atteindre à propos de cinq contenus :

---

[1] Je remercie beaucoup Roberto Battisti, Clara Bisso et Nunzia Iesu, qui m'ont donné des renseignements précieux sur la situation actuelle de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège.

[2] Loi qui n'a pas encore été abrogée.

- *Nombre ;*
- *Géométrie ;*
- *Mesure ;*
- *Introduction à la pensée rationnelle ;*
- *Données et prévisions,*

auxquels il faut ajouter, pour la cinquième année : Aspects historiques qui concernent les mathématiques.

Ces indications nationales ne sont pas accompagnées de commentaires méthodologiques. Par leur présentation, on en revient aux « Unités d'apprentissages » des programmes traditionnels exprimés sous forme de « notions » indépendantes les unes des autres.

II – AUTRES OUTILS POUR L'ENSEIGNEMENT

Outre les programmes, les autres outils pour l'enseignement sont, en particulier :

- les manuels scolaires. Ils sont librement choisis par les maîtres ; l'écriture et le contenu des manuels sont sous la responsabilité des éditeurs. Il n'existe pas de contrôle public des manuels scolaires qui, très souvent, exercent le conditionnement de la pratique en classe ;
- les ateliers d'informatique : dans les écoles, ils sont organisés en fonction des disponibilités économiques des écoles et des compétences des enseignants. Le Ministère de l'instruction publique a mis en place des cours d'alphabétisation « on-line », ils ne sont obligatoires que pour les nouveaux enseignants.

III – PROFIL DES FUTURS ENSEIGNANTS

L'enseignement des mathématiques pour les enfants de moins de 11 ans est donné par des instituteurs qui, maintenant, doivent obtenir une licence en « Sciences de la Formation Primaire » et passer, en principe, un concours[3]. En général, ces maîtres ne sont pas issus de formations scientifiques. Le concours ne prévoit pas d'épreuve spécifique de mathématiques mais il existe une formation disciplinaire et des stages, dans le cadre universitaire, en plus de la formation psychopédagogique.

Pour les enfants de plus de 11 ans (et moins de 14 ans : collège) l'enseignement des mathématiques est donné par des professeurs qui ont pour la plupart une licence en Sciences biologiques. En général, les licenciés en Mathématiques enseignent à l'école secondaire supérieure (lycée). En principe ils passent tous une épreuve de mathématiques au moment de leur recrutement, mais on peut cependant être enseignant au collège sans beaucoup de connaissances en mathématiques.

[3] Cette année de nombreux enseignants ont été recrutés sans devoir passer ce concours.

IV – FORMATION

Jusqu'aux années 1990, il n'y avait pas de formation institutionnelle des enseignants, selon le principe : « Qui a des connaissances (par exemple en mathématiques) est capable d'enseigner » ! Pour les professeurs des écoles secondaires, en particulier. En revanche, les instituteurs, bien qu'ils n'aient pas eu de formation universitaire, passaient par une école secondaire spécifique où ils suivaient des cours de pédagogie.

C'est seulement en 1990 qu'une loi du Parlement concernant l'Université introduit une formation supérieure des instituteurs (enseignants de l'école enfantine et de l'école primaire, pour les enfants jusqu'à 10/11 ans) et une formation spécifique (notée « SSIS » par la suite) pour les professeurs du collège[4] (que fréquentent les enfants de 11 ans à 15 ans) et des écoles secondaires supérieures (lycée, écoles techniques et professionnelles).

Les cours de formation ont débuté effectivement à la fin des années 1990.

IV – 1 La formation initiale des professeurs

Actuellement, en Italie, il y a 19 « Instituts spécialisés pour l'enseignement secondaire » (*Scuola di Specializzazione per l'Insegnamento secondario*) ou SSIS » pour 11000 futur(e)s enseignant(e)s chaque année. L'examen pour y accéder est organisé par des tests à choix multiple, et, en général, un examen oral. Il faut avoir une licence universitaire pour s'y inscrire.

En ce qui concerne les mathématiques, le curriculum des « SSIS » (qui s'accomplit sur une période de deux ans), prévoit 300 heures de stage dans des classes. Les 700 à 900 heures restantes (selon les différentes « SSIS ») sont consacrées à des cours de « didactique générale », de « didactique des mathématiques » et « un atelier didactique ».

La loi qui régit les « SSIS » établit explicitement que les cours doivent concerner les aspects didactiques et épistémologiques de la discipline et **pas** les contenus scientifiques en eux-mêmes.

Les « acteurs » de ces instituts sont les futurs enseignants, les professeurs universitaires, les superviseurs (des enseignants qui ont une réduction d'horaire a l'école et qui sont les tuteurs des futurs enseignants), les enseignants qui accueillent les stagiaires (les futurs enseignants).

IV – 2 La formation initiale des maîtres

Les futurs enseignants d'école enfantine et d'école primaire (les instituteurs) suivent les cours de licence en « Sciences de la Formation Primaire ».

On y entre par concours. Les formateurs sont :

a) Des professeurs d'université (si possible des didacticiens) ;

[4] En Italie, le collège concerne les trois années qui suivent les cinq ans d'école primaire.

b) Des maîtres expérimentés qui s'occupent des stages des étudiants.

La durée des études est de 4 ans.

Les cours sont répartis en un premier cycle de deux ans, propédeutique, pour tous et un deuxième cycle différent selon deux filières : l'une pour les enseignants de l'école enfantine et l'autre pour les enseignants de l'école primaire.

Tous les étudiants du premier cycle de deux ans passent des examens en mathématiques générales, en histoire des sciences et sur un « laboratoire » de logique et mathématiques,

Lors du second cycle, de deux ans aussi, pour ceux qui choisissent la *maîtrise* scientifique des mathématiques et des sciences expérimentales, d'autres enseignements sont prévus tels que les fondements de physique, la didactique et les laboratoires de physique et didactique des mathématiques.

À tout ceci s'ajoute le laboratoire de stage obligatoire, quadriennal qui permet d'expérimenter « en situation » ce qui a été appris en théorie, au travers d'une pratique didactique réelle.

À la fin des études, les étudiants reçoivent un Diplôme en Sciences de la Formation Primaire.

Quelques détails

Répartition des 240 « crédits formatifs » (CF) sur les 4 ans[5].

Cours théoriques	147 CF	30 heures, 3,5 CF
Stages	48 CF	25 heures, 3 CF
Ateliers	24 CF	25 heures, 3 CF
Travail de diplôme	21 CF	

Dans les deux premières années (communes à tous) les heures de cours théoriques de mathématiques s'élèvent à 60 sur 360 (de cours théoriques), 25 heures d'atelier de mathématiques, 25 heures d'atelier d'informatique.

Dans les deux deuxièmes années, pour le « maior » de mathématiques et sciences expérimentales : *maîtrise* scientifique des mathématiques et des sciences expérimentales, les heures de Didactique de mathématique et informatique s'élèvent à 60 sur 180.

[5] Je fais référence ici à la situation de l'Université de Cagliari.

Remarques

Les difficultés liées à un tel cours de formation sont certainement nombreuses et je fais ici référence à celles du genre scientifiques-culturelles bien mises en évidence par Bonotto et Zuccheri (2003) *Un des aspects le plus compliqué est celui de l'hétérogénéité des étudiants : les âges, le « background » culturel, le vécu personnel, l'attitude envers le cours même et le sujet sont différents. L'âge oscille entre 20/21 et 40 ans et plus, vu que les enseignants en service s'inscrivent aussi. La préparation mathématique est, en général, insuffisante et l'attitude envers ce sujet n'est pas non plus positive...* .

IV – 3 La formation permanente des enseignants

La formation permanente ou continue n'est ni obligatoire, ni structurée, bien qu'elle l'ait été dans le passé.

Mais les enseignants participent à des cours ou séminaires ou encore à des rencontres, à leurs frais (en général).

V – QUESTIONS VIVES

V – 1 La formation des formateurs

Les formateurs sont, pour la plupart, des professeurs ou des chercheurs d'université et leur préparation dans le domaine de la formation et de la didactique des mathématiques est assez hétérogène.

V – 2 Passage d'une loi à l'autre sans formation spécifique obligatoire pour les enseignants en service

Cette formation peut s'organiser si les écoles le décident librement, sur la base d'une loi sur l'autonomie des écoles.

V – 3 Un nouveau système national d'évaluation

Ce système (pour les classes de CE1, CM1 et de sixième) n'est pas élaboré par les enseignants qui le contestent, ainsi que les parents des élèves. Il repose sur des questionnaires à choix multiples et, souvent, ne correspond pas aux méthodologies d'enseignement adoptées par les maîtres.

Par exemple, voici une question proposée récemment pour le CE1 :

Dans le parking de la gare il y a 6 voitures. Par quelle opération peux-tu calculer combien de roues il y a en tout ?

A) 6 + 4

B) 6 + 6 + 6 + 6

C) 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4

Commentaire d'un élève : « *Mais chaque voiture est obligée d'avoir la roue de secours, donc il y a 5 roues* ».

Commentaires d'un didacticien « *Chacun sait que 6 + 6 + 6 + 6 est différent de*

4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 !!! »

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BONOTTO C., ZUCCHERI L. (2003) *Sulla formazione matematica degli insegnanti: esperienze delle sedi di Padova e Trieste*, La matematica e la sua didattica, **4**, 485-510.

FASANO M., PERTICHINO M., POLO M. (2003) *SSIS a confronto*, Ibidem, 441-465.

IESU N. (2003), *RMT e programmazione didattica/,* in Grugnetti, Jaquet, Medici, Polo, Rinaldi (Eds.) RMT : Potentialités pour la classe et la formation. Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin, Università di Parma, Dipartimenti di Matematica di Parma et Cagliari & ARMT, 151-164.

MAFFINI A., MARCHINI C., RIZZA A., VIGHI P. (2003) *La Scuola di Specializzazione per l'Insegnamento Secondario. Il punto di vista dei matematici di Parma*, La matematica e la sua didattica, **4**, 511-540.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI (2003/2004) *Notiziario della Facoltà di Scienze della formazione (Piani di studio, Programmi dei corsi).*

ZAN R. (2003) *Formazione insegnanti e ricerca in didattica*, La matematica e la sua didattica, **4**, 541-570.

MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE. QUELLE FORMATION POUR LES ENSEIGNANTS ? LE CAS DE LA SUISSE ROMANDE

François JAQUET
Ancien collaborateur de l'Institut de recherche et documentation pédagogique (IRDP)
Neuchâtel (Suisse)
fr.jaquet@wanadoo.fr

Résumé
Cet exposé est construit selon le canevas proposé par la présidente de la Table ronde, Catherine Houdement. Il en reprend les titres et la terminologie. Trois professeurs de mathématiques des instituts romands de formation des maîtres ont répondu aux questions posées dans le canevas. Leurs opinions sont prises en compte dans le texte qui suit et nous les remercions de leur contribution. Il s'agit de Mme et MM. Jacqueline Hofner, HEP (BEJUNE) de la Chaux-de-Fonds, Stephane Clivaz, HEP (VD) de Lausanne et Antoine Gaggero, HEP (BEJUNE) de Bienne.

I – LE CADRE GÉNÉRAL

La Suisse est une confédération de 23 cantons, autonomes dans le domaine de l'instruction publique. Les sept cantons de langue française, ou partiellement francophones (Berne, Fribourg, Valais, Vaud, Neuchâtel, Genève et Jura) ont coordonné leurs systèmes scolaires dès 1972 pour les degrés de l'école primaire en adoptant des plans d'études communs, en éditant des moyens d'enseignement propres pour l'ensemble des classes, en harmonisant peu à peu la répartition des disciplines dans les grilles horaires et les autres caractéristiques de leurs systèmes scolaires comme l'âge d'entrée à l'école primaire, les modalités de passage et l'orientation des élèves dans les différentes filières de l'école secondaire (Collège).

La formation des maîtres est aussi en voie d'harmonisation, en vue d'une reconnaissance par les différents cantons de Suisse romande, de leurs titres ou diplômes d'enseignement.

II – LE CURRICULUM

Le **Plan d'études romand de mathématiques, degrés 1 à 6,** adopté en 1997 et en vigueur actuellement, est articulé en six domaines d'étude et s'inscrit dans la perspective de finalités qui mettent en évidence les rôles social et culturel des mathématiques.

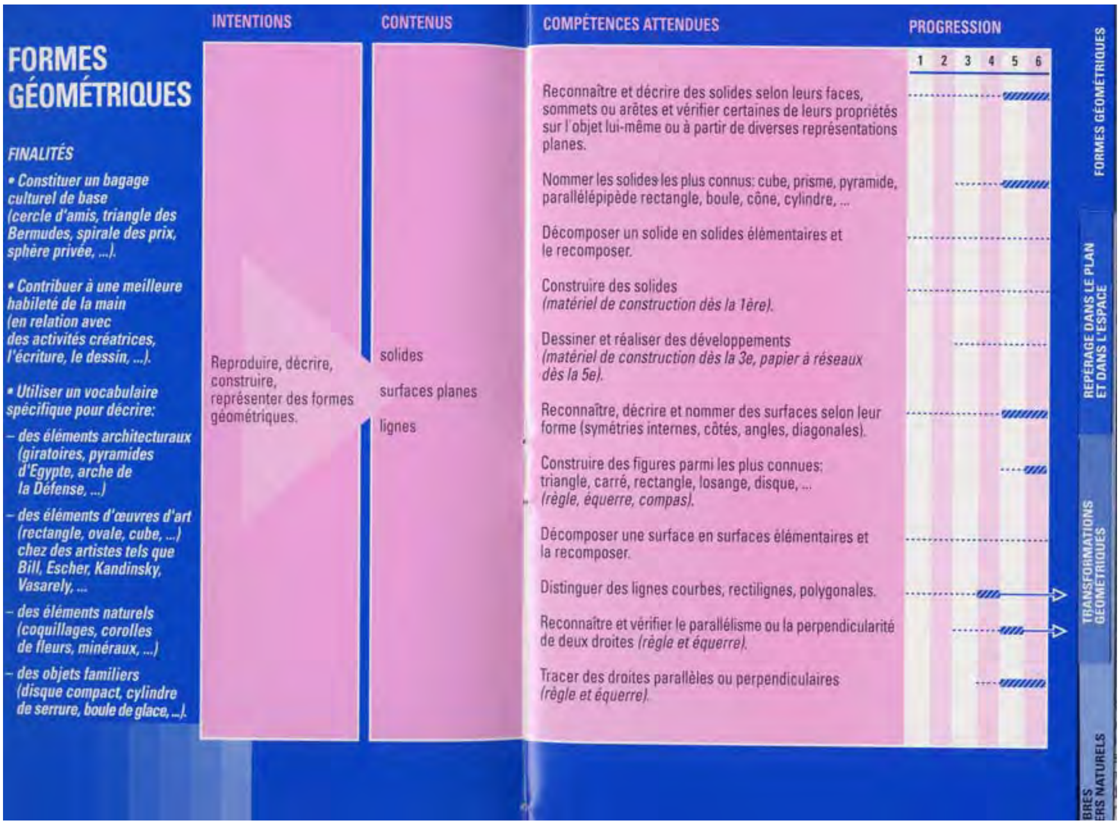
Il porte en exergue l'affirmation : Faire des mathématiques, c'est d'abord résoudre des problèmes.

Pour chacun des six domaines, il définit, après les finalités, des intentions poursuivies par l'école, des contenus relevant de notions et d'outils, des compétences attendues de l'ensemble des élèves et un tableau de progression situant les connaissances et savoir faire des élèves sur les six premières années d'école obligatoire, selon trois phases : temps de sensibilisation, temps de construction, de structuration et de consolidation, moment où la compétence est mobilisable en situation.

Les six domaines sont, dans l'ordre :

1. Formes géométriques (11 compétences attendues, dont 7 vont jusqu'à la phase de construction aux degrés 5 et 6 seulement) Par exemple : Reconnaître décrire et nommer des surfaces selon leur forme (symétries internes, côtés, angles, diagonales) ;
    - ses intentions : Reproduire, décrire, représenter des formes géométriques ;
    - ses trois contenus : solides, surfaces planes, lignes.

Un exemple de ses finalités : Constituer un bagage culturel de base (cercle d'amis, triangle des Bermudes, spirale des prix. sphère privée, …)



FORMES GÉOMÉTRIQUES

FINALITÉS

• Constituer un bagage culturel de base (cercle d'amis, triangle des Bermudes, spirale des prix, sphère privée, ...).

• Contribuer à une meilleure habileté de la main (en relation avec des activités créatrices, l'écriture, le dessin, ...).

• Utiliser un vocabulaire spécifique pour décrire:
– des éléments architecturaux (giratoires, pyramides d'Egypte, arche de la Défense, ...)
– des éléments d'œuvres d'art (rectangle, ovale, cube, ...) chez des artistes tels que Bill, Escher, Kandinsky, Vasarely, ...
– des éléments naturels (coquillages, corolles de fleurs, minéraux, ...)
– des objets familiers (disque compact, cylindre de serrure, boule de glace, ...).

INTENTIONS	CONTENUS	COMPÉTENCES ATTENDUES
Reproduire, décrire, construire, représenter des formes géométriques.	solides surfaces planes lignes	Reconnaître et décrire des solides selon leurs faces, sommets ou arêtes et vérifier certaines de leurs propriétés sur l'objet lui-même ou à partir de diverses représentations planes. Nommer les solides les plus connus: cube, prisme, pyramide, parallélépipède rectangle, boule, cône, cylindre, ... Décomposer un solide en solides élémentaires et le recomposer. Construire des solides *(matériel de construction dès la 1ère).* Dessiner et réaliser des développements *(matériel de construction dès la 3e, papier à réseaux dès la 5e).* Reconnaître, décrire et nommer des surfaces selon leur forme (symétries internes, côtés, angles, diagonales). Construire des figures parmi les plus connues: triangle, carré, rectangle, losange, disque, ... *(règle, équerre, compas).* Décomposer une surface en surfaces élémentaires et la recomposer. Distinguer des lignes courbes, rectilignes, polygonales. Reconnaître et vérifier le parallélisme ou la perpendicularité de deux droites *(règle et équerre).* Tracer des droites parallèles ou perpendiculaires *(règle et équerre).*

PROGRESSION 1 2 3 4 5 6

FORMES GÉOMÉTRIQUES
REPÉRAGE DANS LE PLAN ET DANS L'ESPACE
TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES

2. Repérage dans le plan et l'espace (6 compétences attendues) Par exemple, en construction dès le degré 5 : Se construire un système de référence personnel ou utiliser un système conventionnel pour mémoriser et communiquer des positions et des itinéraires (coordonnées, points cardinaux, angles de visée …) ;
3. Transformations géométriques (dont les contenus portent sur les isométries, avec 5 compétences attendues, dont 2 vont jusqu'à la phase de construction aux degrés 5 et 6 seulement) ;

4. Nombres entiers naturels : numération, comparaison avec 11 compétences attendues, allant toutes jusqu'à la phase de construction avant les degrés 5 et 6) ;
5. Nombres réels et mesures (la sensibilisation aux nombres décimaux et aux fractions ne débute qu'au degré 5, les calculs de longueur et d'aire interviennent un an plus tôt. Il y a 17 compétences attendues pour ce domaine) ;
6. Opérations, fonctions et linéarité (19 compétences attendues réparties sur les degrés 1 à 6).

Selon ce plan d'études, qu'on peut considérer comme le **curriculum souhaité**, l'enjeu fondamental des mathématiques en primaire est, au travers de la résolution de problèmes, de « participer, avec d'autres disciplines, au développement de diverses capacités intellectuelles :

- imagination, curiosité ;
- raisonnement, modélisation ;
- argumentation. Vérification.

et de susciter l'envie de comprendre, permettre le développement d'une pensée autonome et de la confiance en soi. »

II – 1 Le curriculum réel

Il est déterminé par les moyens d'enseignement, manuel de l'élève, fichier, livre du maître, élaborés au niveau romand et par les pratiques d'orientation des élèves à la fin de l'école primaire, sensiblement différentes d'un canton à l'autre. Par exemple : à Genève, 80% des élèves accèdent à une filière du Collège qui leur permettra de poursuivre leurs études en Lycée de type scientifique ou classique pour obtenir une « maturité » ou baccalauréat (40%). Dans d'autres cantons, ces taux peuvent descendre à 40% et 30%, voire 30% et 20%.

II – 2 Les effets du curriculum

Ils sont évalués au niveau romand par des enquêtes ou recherches conduites par « l'Institut romand de recherche pédagogique » et les centres de recherche cantonaux, lorsqu'ils existent.

Le premier curriculum romand des années 1970 dit des « maths modernes » a été évalué par une enquête de grande dimension - où tous les maîtres et tous les élèves ont été interrogés - et a conduit à une réécriture des manuels. Les résultats des élèves ont fait apparaître des différences significatives entre cantons qui ont été très délicates à expliquer (comme l'ont également fait apparaître les enquêtes TIMMS et PISA chez les élèves de 15 ans et 13 ans).

Le deuxième curriculum, actuel, et ses effets sont évalués par des recherches plus modestes et donnent des résultats plus conformes aux attentes institutionnelles.

Les différents cantons ont aussi leurs propres évaluations, en général des « épreuves communes » ou les « tests d'orientation de la fin du primaire » pour l'accès aux différentes filières du Collège.

Mais dans un cas comme dans l'autre, les organismes qui conduisent les évaluations sont institutionnellement et financièrement dépendants des pouvoirs exécutif et législatif auquel est soumis le curriculum. Il n'y a pas d'exploitation directe de ces résultats pour une réflexion didactique ou pédagogique sur l'évolution du curriculum.

III – LES OUTILS POUR L'ENSEIGNEMENT

Le plan d'étude est connu au sens de « nul n'est censé l'ignorer » mais ce n'est pas le livre de chevet des maîtres !

Ce sont plutôt les moyens d'enseignement, d'usage généralisé, qui déterminent le programme.

Pour chaque degré, un livre du maître, très détaillé, commente chaque activité du manuel de l'élève et chaque fiche de travail. Des commentaires didactiques et méthodologiques complètent l'ensemble de ces documents, décrivent les conceptions de l'apprentissage de la collection (qui se réfère explicitement au socio-constructivisme et à la résolution de problèmes).

Au niveau cantonal, la formation permanente peut fournir des textes complémentaires (en général des propositions de progression qui ne figurent pas dans les moyens d'enseignement officiels).

Il existe aussi d'anciens manuels, fiches de calcul ou autres recueils d'exercices dans les collections personnelles des maîtres.

Parfois, les épreuves communes ou tests d'orientation, à une échelle locale ou cantonale, donnent quelques éléments temporaires de progression.

Première « question vive »

Derrière ce monopole des moyens d'enseignement officiels, apparaît la problématique spécifique de la « masse critique » d'un petit pays ou d'une région qui tient à conduire une politique scolaire autonome et cohérente, avec sa formation et sa recherche en didactique.

Combien est-on prêt à investir pour la réflexion et la recherche dans la conduite de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire ?

IV – PROFIL DES FUTURS ENSEIGNANTS

IV – 1 Qui enseigne les mathématiques aux enfants de moins de 12 ans ?

Dans tous les cantons de Suisse romande, les enseignants de l'école primaire sont des généralistes.

Les futurs enseignants sont détenteurs d'une « maturité fédérale » (baccalauréat) se sont inscrits dans un institut de formation d'enseignant, (Haute Ecole Pédagogique depuis quelques années dans 6 cantons sur 7) en présentant un dossier, y ont été acceptés sur un entretien d'entrée en général, sans examen. Il peut y en avoir, sur la maîtrise des branches à enseigner qui fait (théoriquement) partie des critères de sélection lorsque le nombre de candidats dépasse le nombre de places disponibles.

Une très faible majorité (de 0 à 5 % selon les cantons) des futurs maîtres sont issus de sections scientifiques du Lycée. « Les étudiants qui ont des aptitudes particulières en mathématiques ne vont pas à la HEP » nous a confié un formateur, avis partagé par de nombreux autres.

On peut être candidat, puis enseignant à l'école primaire, sans beaucoup de connaissances en mathématiques.

Deuxième « question vive »

Le constat précédent, évident et « naturel » pour la Suisse romande, l'est peut-être pour d'autres pays aussi et conduit à la question :

Quels contenus de l'enseignement des mathématiques faut-il choisir pour de futurs enseignants ?

La question n'est pas abordée en Suisse romande car personne ne remet en cause le programme du lycée qui est considéré comme la « culture mathématique de base » nécessaire à tous les types d'études ultérieures. Pourtant l'époque n'est pas si lointaine où les enseignants étaient formés dans des « écoles normales », où ils n'apprenaient que les mathématiques qu'ils auraient à enseigner. On peut même attribuer à cette proximité historique, un blocage récent qui va conduire à une restructuration totale d'une des HEP romandes.

V – LA FORMATION INITIALE DES ENSEIGNANTS

Elle se déroule dans un dispositif appelé « Haute Ecole Pédagogique » (HEP, créées entre 2000 et 2002 dans la majorité des cantons romands et suisses), sur une durée de 3 ans. On y entre sur dossier ou examen en cas de numerus clausus.

Un diplôme cantonal d'enseignant primaire est délivré en fin de formation, reconnu en principe par les autres cantons. Un souci actuel en Suisse romande est que ce diplôme soit « bologno-CDIP compatible ».

La part des mathématiques et de la didactique de la discipline dans la formation varie de 5 à 7 %. Dans la HEP du canton de Vaud, par exemple, elle représente une vingtaine d'heures par année (autant qu'en français, rythmique, dessin, *etc.*) ou 9 crédits (sur 180), dont 2 de "savoirs disciplinaires" et 7 de didactique)

La part de la pratique en classe dans la formation est plus importante : un quart du temps de formation en stage, sous le contrôle de « formateurs en établissement », c'est-à-dire les maîtres des classes de stage, sans formation spécifique (dans l'exemple précédent : 42 crédits sur 180).

Les modalités de stage varient sensiblement : stages bloc ou stages filés, stage de type observation ou enseignement sous la responsabilité d'un praticien formateur ou en « responsabilité relative » et parfois à mi-temps en « responsabilité totale » en 3e année

Pour la Suisse romande, il n’y a pas de politique commune explicite permettant de répondre à la question **« comment est prise en compte l’articulation entre théorie et pratique ? »** Chaque formateur a ses propres perceptions sur ces relations et sa réponse est empirique comme celle-ci : « Nous essayons ma collègue et moi de faire au maximum des liens entre nos cours et la pratique. Les étudiants ont des cours avant leur stage, cours appelés de *préparation* et des cours après le stage dits *d’exploitation*. Ainsi, nous pouvons vérifier - dans le meilleur des cas, car cela n’est de loin pas la règle - si les notions étudiées en cours et si le travail demandé aux étudiants a été compris et/ou fait correctement. »

L’évaluation de la formation initiale se fait par « crédits »: entretiens, appréciation de leçons données, avis du maître de stage, travaux écrits à faire durant leur stage : préparation de leçons, articulation théorie/pratique, objectifs, analyse a priori, *etc*. La formation se conclut par un travail de diplôme, parfois en relation avec un thème de mathématiques.

Troisième « question vive »

On ne sait pas encore vraiment, en Suisse romande, comment articuler théorie et pratique et comment évaluer les connaissances en didactique des futurs enseignants.

Quels pourraient être les critères d’évaluation d’une formation d’enseignants au niveau de la didactique des mathématiques ?

VI – QUI SONT LES FORMATEURS ?

Les formateurs, dans leur grande majorité, sont actuellement d’anciens professeurs de mathématiques. Ils sont en général licenciés en mathématiques, avec un « Certificat d’aptitudes pédagogiques » pour l’enseignement secondaire. Ils n’ont pas de formation spécifique en didactique des mathématiques.

Ils sont recrutés par mise au concours des postes.

Leur cahier des charges précise qu’ils consacrent de 30 à 50 % à la recherche dans la didactique de leur discipline, ce qui reste encore un vœu pieux.

Il est prévu que, à l’avenir, ces formateurs auront un doctorat ou d’autres titres universitaires en sciences de l’éducation et en formation d’adultes (master ou titre jugé équivalent), avec expérience professionnelle (de 6 à 10 ans dans la formation).

VII – LA FORMATION PERMANENTE DES ENSEIGNANTS

Elle est très développée et les cantons romands y consacrent un budget important.

Le catalogue des cours de la HEP des cantons de Berne, Jura et Neuchâtel propose environ 350 cours (de 4 à 16 périodes) et conférences pour l'année scolaire 2005-2006. Le domaine des mathématiques propose 16 cours, dont la plupart sont en relation avec les nouveaux moyens d'enseignement.

Les cours sont facultatifs, gratuits et se déroulent hors des horaires scolaires.

Des formations spécifiques, obligatoires, d'une demi-journée, sont organisées lors des changements de programme.

Le domaine des technologies modernes de l'information et de la communication est représenté par 47 cours dans le catalogue cité précédemment.

Quatrième « question vive »

En Suisse romande, les liens entre la formation des enseignants et la recherche en didactique des mathématiques sont très ténus, en formation initiale comme en formation permanente. Ils dépendent des connaissances des formateurs dans le domaine, dont la plupart sont « débutants ».

Comment faire la transition entre la période où les travaux de la recherche en didactique des mathématiques ne sont pas connus des formateurs et celle où formation et recherche iront de pair ?

Corollaire : La recherche en didactique peut-elle actuellement donner des réponses aux enseignants et à leurs formateurs ? Est-ce un de ses soucis ?

MATHÉMATIQUES À L´ÉCOLE (ENFANTS DE MOINS DE 12 ANS). QUELLE FORMATION POUR LES ENSEIGNANTS ? LE CAS DU PORTUGAL

Isabel ROCHA
Professeure, École Supérieure d´Éducation de Leiria, Portugal
Président de l'Association Portugaise des Enseignants des Mathématiques
isabelr@esel.ipleiria.pt

Résumé
L´article situe l'enjeu fondamental des mathématiques en 1er et 2ème cycles du primaire (enfants de 6 à 12 ans), réfléchit à quelle formation pour les enseignants, décrit le recrutement et le profil des futurs enseignants, le curriculum de la formation initiale, notamment la place des mathématiques et de leur didactique, l'articulation avec la pratique en classe. Il aborde l'histoire de la formation permanente des enseignants au Portugal.

Je remercie la COPIRELEM de m'avoir invitée à participer à la table ronde du colloque de Strasbourg, centrée sur la formation des enseignants pour les enfants de moins de 12 ans.

Je suis formatrice à l'École Supérieure d'Éducation de Leiria pour les Professeurs des Écoles Élémentaires (élèves de 6-12 ans).

Mon intervention dans la table ronde et ce texte visent à préciser certains aspects concernant le profil des futurs enseignants et l'organisation de la formation initiale et permanente des enseignants pour les écoles élémentaires de Portugal.

I – OUTILS POUR L´ENSEIGNEMENT

I – 1 Le curriculum officiel portugais

Au Portugal, à partir de 2001, est instauré un "aménagement flexible des programmes" dans l'Enseignement Basique (élèves de 6 à 15 ans). Une plus grande autonomie est laissée aux écoles : seules sont fixées des "compétences essentielles" et des types "d'expériences éducatives", mais les programmes officiels (par discipline) datées de 1990/91 restent fixés. Les méthodes et le temps alloué à chaque discipline sont décidés par l'école aux niveaux pré primaire et 1er cycle du primaire (élèves de 6 à 10ans). Par contre, au 2ème cycle (5ème e 6ème années, élèves de 10 et 11 ans), les temps alloués à chaque discipline sont fixés au niveau national : 4 périodes de 45 minutes par semaine pour les mathématiques, qui peuvent être complétés par au maximum de 2 périodes de 90 minutes (décision de l'école), soit autour de 12% de l'horaire total d'enseignement. Le temps alloué à chaque contenu mathématique est fixé au niveau national seulement pour les 2ème et 3èmecycles du secondaire.

Le *«Curriculo Nacional do Ensino Básico* » (*Curriculum* National de l'Enseignement Basique, ME, 2001) précise les compétences générales, transversales et spécifiques de chaque domaine disciplinaire. Le concept de compétence est structurant dans ce document officiel ainsi que dans d'autres et se place dans la ligne de pensée de Perrenoud (1996, 1997). Le document caractérise la notion de compétence mathématique et précise ses aspects pour chacun des trois cycles de l'enseignement basique (mettant toutefois en évidence une logique de cycle, à savoir, que la compétence telle qu'elle est définie est un processus graduel et continu tout au long de l'enseignement basique) et par thèmes mathématiques : Nombres et Calcul ; Géométrie ; Statistiques et Probabilités ; Algèbre et Fonctions. Ces thèmes font aussi partie du programme du 2ème cycle, mais ne figurent pas au programme du 1er cycle. Celui-ci est organisé en 3 parties : Nombres et Opérations ; Forme et Espace ; Grandeurs et Mesure. En dehors de ce document, le Ministère a publié, pour les professeurs, un autre document d'appui «*A Matemática na Educação Básica* » (Mathématique pour l'enseignement basique) (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999), qui a précédé la réorganisation curriculaire et a appuyé la réflexion avec la participation des institutions sur les curricula, qui a conduit aux changements introduits en 2001.

I – 2 Le curriculum souhaité (intended curriculum) et le curriculum réel (implemented curriculum)

Ce sont les programmes qui contiennent les objectifs généraux et spécifiques, les contenus mathématiques, les ressources adéquates et les suggestions méthodologiques. Toutefois, au Portugal, ce ne sont pas les programmes qui déterminent la pratique en classe, mais l'interprétation qui en est faite par les auteurs des manuels scolaires. En fait, les manuels ont un grand pouvoir sur la façon de concrétiser le curriculum et peu de professeurs construisent leur enseignement directement à partir des programmes produits par le Ministère (APM, 1998 ; Martins, 1991 ; Pires, 2003).

L'étude « *Matemática 2001* » réalisée par un groupe de travail de l'Association d'Enseignants de Mathématiques et publiée en 1998, élabore un diagnostic de l'enseignement et de l'apprentissage de la mathématique au Portugal (il a couvert tout le territoire national) : il a montré qu'entre un curriculum prescrit et un curriculum réalisé, des différences significatives peuvent surgir. En analysant les données sur les ressources que les professeurs utilisent pour préparer leurs cours, il ressort que 87% mentionnent le manuel scolaire adopté par l'école et seulement 50% environ déclarent utiliser d'autres ressources (comme le programme) en complément, cependant avec une fréquence réduite. Des études plus récentes dans le 1er cycle, notamment celui de Patrício (2003), désignent également les épreuves d'examen blanc (qui ont commencé en 2000) comme facteur influençant les décisions curriculaires des professeurs. A titre d'exemple, jusqu'en 2000, les manuels scolaires ne prenaient pas en considération des tâches de recueil et d'organisation de données ou d'analyse et d'interprétation de données sur des tableaux ou des graphiques, bien que le programme en cite quelques (rares) aspects liés à la statistique : « …l'utilisation de diagrammes, de tableaux, de schémas et de graphiques aideront à communiquer et enregistrer des idées, lire et interpréter l'information… ». Avec l'introduction des premières épreuves d'examen blanc dans lesquelles ces aspects étaient pris en compte, les auteurs de manuels eux-mêmes introduisent des changements dans ce domaine.

II – PROFIL DES FUTURS ENSEIGNANTS

Au Portugal, tous les enseignants dans les écoles publiques sont des fonctionnaires de l'État, recrutés sur concours ouverts aux titulaires d'une licence.

II – 1 Recrutement des enseignants

Depuis 1998, une formation supérieure de 4 ans correspondant au degré de la « *licenciatura*» (licence) est exigée pour le 1er cycle et, avant cette date, c'était une formation de 3 ans correspondant au degré du « *bacharelato* » (DEUG). Mais il a toujours existé une formation spécifique pour l'enseignement de ces niveaux de scolarité. Pour le 2ème cycle, les profils sont plus divers, en termes de capacités de base. Ceci est dû au besoin d'enseignants de mathématiques qui s'est fait sentir au début des années 80. Ainsi, nous avons des enseignants avec un niveau de « *bacharelato* » (DEUG) ou de « *licenciatura* » (licence) en Économie, Sociologie, Biologie, Pharmacie, Chimie, Physique, Mathématique, dans n'importe quelle branche de l'Ingénierie et qui, pour acquérir une capacité professionnelle pour l'enseignement ont dû réaliser une formation pédagogique désignée (à partir de 1988) sous le nom de « professionnalisation en service » d'une durée de 1 ou 2 ans (ceux qui ont 6 ans ou plus d'expérience de l'enseignement ont été dispensés de la 2ème année). La 1ère année est organisée en disciplines de Psychologie de l'Éducation, Sociologie de l'Éducation, Développement Curriculaire et Didactiques spécifiques, enseignées dans des institutions d'enseignement supérieur. Pendant la 2ème année, chaque licencié élabore un Projet de Formation et d'Action Pédagogique ainsi que le plan correspondant à suivre. L'exécution de ce plan est accompagnée et supervisé par un enseignant de l'école dans laquelle le licencié enseigne et par un professeur de l'institution d'enseignement supérieur. Cet accompagnement inclut l'observation de cours. A notre avis, la possibilité d'être dispensé de la 2ème année de formation a été une erreur, car nous avons dans le système un grand nombre d'enseignants qui n'ont jamais observé ni réfléchi sur le cours d'un collègue et leurs cours n'ont jamais été observés par des pairs.

En avril dernier, lors de la présentation et de l'analyse publique des résultats des élèves portugais dans l'étude internationale PISA 2003, relativement à la formation et au recrutement des professeurs, le Ministre de l'Éducation a annoncé que quelques mesures seraient prises (mais elle n'ont pas été précisées), parmi lesquelles la révision des compétences d'accès à l'enseignement du 2ème cycle, privilégiant la formation supérieure en Mathématiques ou Enseignement des Mathématiques et la révision des conditions d'accès et de formation des professeurs du 1er cycle, notamment l'accès à la carrière d'enseignant pour un élève ayant un passé scolaire d'échec en Mathématiques.

II – 2 Le niveau de connaissances en mathématiques

Actuellement il n´existe pas d'épreuve de mathématiques au moment du recrutement des futurs enseignants pour les niveaux pré-primaires et primaires, mais pour enseigner au 2ème cycle (élèves de 10 à 12 ans), les candidats doivent faire une épreuve de mathématiques.

Aux niveaux pré-primaire et primaire, la formation en mathématiques est insuffisante, parce que la plupart des futurs enseignants, à l'école secondaire (10ème, 11ème et 12ème

années), ont choisi une série générale (sociale ou littéraire) sans bénéficier d'un enseignement de mathématiques.

Ces élèves, non seulement n'ont pas assez de connaissances en mathématiques, mais ils ont également développé des attitudes très négatives relativement aux mathématiques. Ils ont une vision des mathématiques très mécaniste et routinière, très cloisonnée, donc peu tournée vers la compréhension des concepts et de leurs connexions. C'est pourquoi lors de la formation de ces enseignants, il est essentiel qu'ils développent un goût pour les mathématiques et pour l'activité mathématique en soi et construisent une connaissance mathématique qui les prépare à l'enseignement. Le besoin d'une connaissance mathématique plus profonde et substantielle pour enseigner est beaucoup plus admis pour les $2^{ème}$ et $3^{ème}$ cycles que dans l'enseignement primaire ; d'aucuns affirment, et cela est fréquemment assumé, que le niveau des mathématiques apprises en $9^{ème}$ et $12^{ème}$ années d'école basique ($5^{ème}$ et terminale) est suffisant pour enseigner dans les premières années de scolarité. Toutefois, il existe des résultats de recherches (Ball e Bass, 2001 ; Ma, 1999 ; Serrazina, 1998) qui montrent que les enseignants de l'enseignement élémentaire ont besoin d'une connaissance et d'une compréhension profonde des mathématiques qu'ils vont enseigner : en effet dans ces premières années se construisent les concepts, se développent et s'établissent certaines habitudes de raisonnement et de pensée mathématique et c'est à partir de cette construction et de ces habitudes acquises que se développeront des compréhensions postérieures et des raisonnements d'ordre supérieur.

La situation des futurs enseignants du $2^{ème}$ cycle est différente car ils ont une formation en mathématiques de 12 ans et doivent passer un examen de mathématiques pour poser leur candidature, comme cela a déjà été mentionné.

Au Portugal, la communauté de l'éducation mathématique a mis en évidence une certaine préoccupation relativement à la formation scientifique en mathématiques des futurs enseignants et donc, durant la réalisation en 2003 d'un Séminaire de Recherche promue par la « *Secção de Educação Matemática* » (Section de l'Éducation Mathématique) de la Société Portugaise des Sciences de l'Éducation (SPCE), un groupe de travail a été constitué pour réfléchir à cette formation. Le groupe a commencé à travailler en 2004 et inclut trois institutions (APM, SPCE, SPM) : il a pour objectif de produire un rapport mentionnant un ensemble de présupposés généraux d'orientations et plus précis par cycles de scolarité.

III – LA FORMATION INITIALE DES ENSEIGNANTS

Au Portugal, la formation d'enseignants pour les premières années de scolarité (élèves âgés de 3 à 12 ans) est faite essentiellement dans les « *Escolas Superiores de Educação* » (Écoles Supérieures d'Éducation, ESE) des « *Institutos Politécnicos* » (Instituts Polytechniques), bien qu'elle puisse également être faite dans certaines Universités. Les formateurs de ces institutions sont recrutés par concours, certains ayant une formation dans le domaine des sciences de l'éducation et d'autres une formation dans les domaines scientifiques et dans les didactiques spécifiques, avec un degré de « *mestrado* » (master) ou de « *doutoramento* » (doctorat) (ils peuvent entrer uniquement avec une licence et ensuite ils ont un délai pour avancer dans leur formation).

Il existe un curriculum spécifique pour la formation initiale des enseignants du préscolaire, un autre pour la formation des enseignants du 1er cycle qui a un tronc commun avec le curriculum de formation d'enseignants pour le 2ème cycle (option Mathématiques et Sciences de la Nature), dans la mesure où ces enseignants sont compétents pour enseigner dans les deux cycles. Cette dernière voie de formation a été mise en question de nombreuses fois, à cause des difficultés qu'elle pose pour réussir à acquérir en 4 ans, la formation d'un enseignant généraliste et celle d'un spécialiste dans deux domaines scientifiques d'un autre cycle d'études (Brocardo, 2003). Cette difficulté est aggravée par notre tradition scolaire qui a conduit à l'existence de deux mondes différents : celui du 1er cycle et celui du 2ème cycle.

III – 1 Les composantes de la formation initiale

Bien que dans chaque ESE et dans les Universités, chaque « *Departamento de Educação* » (Département d'Éducation), définisse son curriculum pour les cursus de formation de l'enseignant, il existe un référentiel à base législatif relativement consensuel sur les composantes de la formation initiale des enseignants, le poids attribué à chacun des composants ne l'étant pas de la même façon :

1. Une composante de formation personnelle, sociale, culturelle, scientifique et technologique ;

2. Une composante de sciences de l'éducation (Psychologie, Sociologie, Développement Curriculaire) ;

3. Une composante de pratique pédagogique.

La 1ère composante ne peut dépasser 60% du total de la charge horaire prévue par le cursus. La 2ème composante devra frôler 25% et le 3ème composante 15%. Comme dans l'enseignement préscolaire et le 1er cycle, c'est le régime de mono enseignement, c'est-à-dire que les professeurs sont généralistes, la 1ère composante inclut tous les domaines disciplinaires qui composent le curriculum du 1er cycle et pré-primaire (Portugais ; Mathématique ; Histoire, Géographie, Sciences de la Nature, Expression Plastique, Expression Dramatique, Expression Physico- Motrice, Formation Musicale, Langue Étrangère).

Il ne faut pas perdre de vue que les questions liées au développement curriculaire en mathématiques pourraient intégrer la composante de sciences de l'éducation, les éducateurs en mathématiques en étant responsables, mais ce n'est pas ce qui se passe car certains spécialistes des sciences de l'éducation (Nóvoa, 1991) considèrent que c'est une question relevant du spécialiste en mathématiques, et, ainsi, elle doit continuer à être comprise dans la 1ère composante. Supposons que cette composante soit inclue dans cinq grands domaines, Langue Portugaise et Langues Étrangères ; Mathématiques ; Sciences Expérimentales, Études Sociales et Arts, nous constatons que chaque domaine se retrouve avec un peu plus de 10% pour chaque domaine. Dans le tableau 1 figurent les pourcentages des différentes composantes du curriculum d'une école supérieure d'éducation, une de celles, au Portugal, dont le pourcentage consacré à la composante de Mathématiques et didactique des Mathématiques est le plus élevé (Serrazina e Monteiro, 2004).

Formation personnelle, sociale, culturelle, scientifique et technologique		Sciences de l'Éducation	Pratique Pédagogique
Mathématiques et Didactique	Autres champs		
9,3%	**49,1%** 42 disciplines de 5 champs disciplinaires : Portugais, Langue Étrangère, Arts, Études Sociales, Sciences Expérimentales	**24,3%** 12 disciplines de Psychologie, Sociologie, Développement curriculaire	**17%**

Tableau 1 : Pourcentages des différentes composantes du curriculum d'une école supérieure d'éducation.

Une analyse de ce tableau montre une fragmentation des domaines de connaissance et un manque de temps consacré à la mathématique et à leur didactique. Dans la plupart des autres institutions de formation cette composante de formation (mathématiques et didactique des mathématiques) tourne autour de 6,3% et 9%.

III – 2 La place des mathématiques et de la didactique des mathématiques

Dans le cas de mon institution, le curriculum de formation des enseignants du préscolaire et du 1er cycle, inclut, en 1ère année, une discipline annuelle de 90h (fondements des mathématiques ; les mathématiques comme résolution de problèmes ; ensembles et logique ; l'évolution du concept de nombre ; nombres et opérations), en 2ème année une discipline semestrielle de 45h (Géométrie). En 3ème année une discipline annuelle de 300h (Méthodologie de l'éducation dans le 1er cycle) implique des professeurs des diverses didactiques, qui, en dehors des espaces dont ils disposent pour travailler avec les élèves la didactique de leur spécialité, ont d'autres espaces qui fonctionnent comme des séminaires, plusieurs de ces professeurs participant à leur dynamisation de façon intégrée et collaborative. Nous avons comme principe d'intégrer la formation scientifique mathématique avec la formation didactique, en fait, nous essayons de mettre en rapport les Mathématiques qu'ils vont apprendre avec les thèmes qu'ils vont enseigner et les didactiques respectives.

Dans le curriculum de formation des enseignants pour le 2ème cycle, la composante de formation en mathématiques et didactique est plus grande, car en dehors des disciplines déjà mentionnées qui sont communes au curriculum de formation pour le 1er cycle, 270h sont réparties sur 4 disciplines ayant un contenu mathématique (Théorie des nombres et Algèbre, Statistiques et Probabilités, Applications et Modelage Mathématique, Langages de Programmation), 60h pour la didactique des mathématiques et 30h pour l'utilisation spécifique des technologies de l'information et de la communication (software spécifique, recherches sur internet,…) dans l'enseignement de la mathématique.

III – 3 La pratique en classe

La pratique en classe est intégrée avec les autres composantes pendant les quatre années de formation (aux cursus qui habilitent pour enseigner aux 1er et 2nd cycles) ou seulement dans les deux dernières années de formation (aux cursus que permettent d'enseigner seulement au pré-primaire ou 1er cycle du primaire).

En première situation et pendant les deux premières années, la pratique consiste en l'observation des institutions et des classes dans les écoles du 1er cycle (élèves de 6 à 10 ans). En 3ème année de formation, la pratique comprend l'observation des institutions du 2nd cycle et la pratique en classe est faite dans une classe du 1er cycle (élèves de 6 à 10 ans) et en 4ème année dans une classe du 2nd cycle (élèves de 10 à 12 ans).

En 3ème année, la pratique en classe se fait pendant un semestre et trois jours par semaine. En 4ème année elle a lieu tous les matins le long de l'année.

La responsabilité en classe concerne un groupe d'élèves (généralement trois) sous l'œil du maître de la classe et sous la supervision d'un professeur de l'institution supérieure de formation des enseignants. Ce professeur est généralement l'un des professeurs engagés dans une discipline précédemment citée (méthodologie de l'éducation au 1er cycle). Mieux dit, les professeurs superviseurs sont ceux responsables des didactiques spécifiques.

Lors de la quatrième année de la formation vers la spécialité (pour enseigner au 2nd cycle), la responsabilité en classe concerne aussi un groupe d'élèves (généralement trois) sous l'œil d'un professeur de mathématiques et d'un professeur de sciences. Le groupe des élèves-enseignants est responsable des planifications, mais la planification de chaque classe et son implémentation respective est faite, chaque semaine et par rotation, par un des élèves-enseignants du groupe.

Le groupe est aussi responsable de la planification des activités pour un domaine curriculaire non disciplinaire (activités liées à un projet, étude accompagnée ou éducation civique).

La réflexion sur la pratique se fait chaque semaine avec les deux professeurs (l'enseignant de mathématique de l'école basique et le professeur de l'institution de formation). Chaque élève-enseignant écrit sa réflexion sur la pratique de classe réalisée chaque semaine.

Le Tableau 2 donne la distribution horaire de la pratique pédagogique dans mon institution :

	Enseignants du pré-primaire et du 1er cycle (élèves de 3 à 10 ans).	Enseignants pour le 2ème cycle (option Mathématiques et Sciences de la Nature) et aussi pour le 1er cycle.
1ère année	----------------------	60h (semestriel) *a)*
2ème année	---------------------	120h (annuel) *a)*
3ème année	150h (annuel)	320h (annuel) a) + 40h (semestriel -2ème c.)
4ème année	450h (annuel)	150h (Mathématiques) + 120h (Sciences) annuel-2ème c.

Tableau 2

a) formation généraliste pour le 1er cycle.

De même, quand la pratique pédagogique dure deux années, la responsabilité en classe, concerne un groupe d'élèves (généralement trois) sous l'œil du maître de la classe et sous la supervision d'un professeur de l'institution supérieure de formation des enseignants.

Objectifs de la 3ème année

1. Connaître l'école, ses projets et ses activités, son organisation et son fonctionnement, sa dynamique, comme la relation avec son milieu ;

2. Caractériser l'école, le groupe d'enfants de la classe et les supports disponibles pour le développement des activités pédagogiques ;

3. Observer l'intégration de l'enfant aux différents espaces de l'école et avec les membres de la communauté scolaire ;

4. Analyser des situations de la vie scolaire, dans une perspective d'investigation réflexive ;

5. Participer d'une façon progressive aux activités de la vie scolaire ;

6. Planifier les leçons envisageant le contexte éducatif et réel de la classe ;

7. Construire des instruments d'évaluation.

En 4ème année

1. Le groupe d'élèves (futurs enseignants) est responsable de l'élaboration d'un plan global à développer tout au long de l'année, intégré aux projets et aux plans d'activités de l'école ;

2. L'élaboration des plans relatifs à l'action quotidienne et son implémentation est faite, par rotation, par un des élèves du groupe, les autres jouant le rôle d'observateurs.

C´est fondamental que le plan spécifie, d'une façon concise et claire :

- des activités à réaliser avec leurs contenus respectifs, leur organisation et leur relation au temps et à l'espace ;
- des niveaux d'achèvement ;
- des matériels et moyens auxiliaires d'enseignement- apprentissage ;
- des instruments d'évaluation.

3. En classe chaque élève développe les leçons dans les semaines correspondantes à la programmation accomplie. La pratique en classe de chaque élève est progressive, par période chaque fois plus longue, tout au long de l'année scolaire ;

4. Chaque semaine se fait une réflexion sur le travail fourni, en vue d'analyser toutes les dimensions d'intervention développée par l'élève-enseignant. Sur l'observation du travail quotidien, chaque élève recueille des éléments et élabore des grilles pour continuer la réflexion avec le maître de la clase et le professeur superviseur.

Le fait que la pratique pédagogique n'arrive pas seulement pendant la dernière année est une meilleure stratégie pour relier théorie et pratique, mais cela doit s'articuler avec le souci que les professeurs responsables de la discipline référée (pendant la méthodologie de l'éducation au 1er cycle) soient les superviseurs des mêmes élèves dans la pratique en classe

III – 4 Évaluation de la formation initiale

Le processus d'évaluation de la formation initiale est, dès 1998, sous la responsabilité de l'institution ADISPOR – « *Associação dos Institutos Superiores Politécnicos* » (Association des Instituts Supérieurs Polytechniques), institution de droit privé et d'utilité publique, en coordination avec la CNAVES « *Comissão Nacional de Avaliação do Ensino Superior* » (Commission Nationale d'Évaluation de l'Enseignement Supérieur). Le processus englobe deux phases : la phase d'autoévaluation et la phase d'évaluation externe. L'autoévaluation est faite par tous ceux qui développent une activité dans l'institution en rapport avec le cursus qui est évalué (organes dirigeants et scientifiques de l'institution, professeurs, élèves, tout autre personnel). L'autoévaluation est faite sur la base d'un guide élaboré par l'institution externe qui dirige le processus. La phase d'évaluation externe est basée sur le rapport d'autoévaluation et est réalisée par une équipe d'experts nommée par ADISPOR. Cette équipe se déplace dans l'école et recueille des données suite à des observations, des entrevues et des sessions de travail avec les responsables directs et indirects de l'élaboration du rapport d'autoévaluation. Se basant sur l'autoévaluation et sur les informations recueillies, cette équipe élabore un rapport d'évaluation, qui précise les points forts et faibles du cursus évalué. L'institution est supposée avoir défini des stratégies pour s'améliorer et quelque temps après, elle doit présenter un rapport de progrès.

IV – LA FORMATION PERMANENTE DES ENSEIGNANTS

Au Portugal, le besoin de formation au long de la carrière du professeur n'a été reconnu institutionnellement qu'au début des années 90 par le Statut de la Carrière d'enseignant. En 1996, le Régime juridique de formation permanente est publié. Celui-ci définit les objectifs de la formation ainsi que les modalités respectives (cursus, atelier, cercle d'études, projet,…). Le fait que cette formation s'articule avec la progression de la carrière (obtenue par l'acquisition de crédits obtenus lors de la formation), n'a pas permis la viabilité, en partie, de la formation ayant comme axe de référence le développement professionnel des professeurs. Une partie de la formation qui a été réalisée durant cette décennie a reposé, dans la modalité du cursus, sur des programmes non négociés qui étaient définis par le formateur ou dans des institutions où se déroulaient la formation (Institutions d'Enseignement Supérieur ou Centres de Formation d'Associations d'Écoles ou Associations Professionnelles). Actuellement il existe une plus grande offre ainsi qu'une plus grande recherche dans les autres modalités de formation, qui supposent une plus grande relation avec les pratiques d'enseignement, car elles impliquent la construction de matériaux pédagogiques, leur application dans la salle de classe et leur analyse ainsi que leur évaluation.

IV – 1 La place des Mathématiques dans la formation permanente

Dès 2001, quand les nouvelles orientations curriculaires ont été définies, il a été décidé, au niveau supérieur, que les Centres de Formation devaient mener des actions dirigées vers les orientations curriculaires faisant partie du document officiel, mais ils ont visé des aspects en rapport avec l'élaboration de projets curriculaires non disciplinaires (activités liées à un projet, étude accompagnée et éducation civique).

Les Mathématiques comme matière curriculaire n'apparaissent pas fréquemment dans les plans de formation des Centres de Formation d'Associations d'Écoles (Borralho et Espadeiro, 2004). Il conviendrait d'analyser les raisons de cette absence. C'est peut-être pour cela qu'une des mesures récemment annoncées a été la définition de cinq domaines prioritaires pour la formation permanente, parmi lesquels se trouvent les mathématiques et leur didactique.

Suite aux résultats des élèves portugais dans l'étude internationale PISA 2003, associés aux niveaux de redoublement que nous avons dès la 2ème année de scolarité, la Ministre de l'Éducation a annoncé comme première mesure le lancement dès la prochaine année scolaire d'un programme d'accompagnement et de formation en mathématiques pour les professeurs du 1er cycle pour valoriser la formation des professeurs de l'enseignement basique en mathématiques. L'exécution du programme sera de la compétence des Institutions Supérieures de Formation des Maîtres en étroite liaison avec les écoles du 1er cycle par l'intermédiaire des sièges de groupement. Il s'agira d'un modèle de grande proximité, d'accompagnement régulier et périodique des professeurs du 1er cycle, sur leur terrain.

IV – 2 Quelle lien entre la recherche en didactique des mathématiques et la formation permanente

Les études relatives à la liaison entre la recherche en didactique des mathématiques et la formation permanente, ci-dessus décrite, dynamisée par les Centres de Formation sont peu nombreuses mais il existe une certaine recherche réalisée dans des contextes de formation. Les premiers travaux de recherche sur la formation de professeurs de mathématiques, réalisés au Portugal, datent du début des années 80, période où l'éducation mathématique a commencé à se constituer comme domaine de savoir. En ce début de décennie, on assiste à une préoccupation d'intégration des technologies d'information et de communication dans la formation initiale et permanente, notamment le langage LOGO (Moreira, 1984) pour de futurs enseignants du 1er cycle et pour des enseignants en exercice (Moreira, 1992 ; Monteiro, 1994). Dans les années 80, divers pôles du Projet MINERVA (parsemés dans tout le pays) ont essayé de monter des dispositifs qui ont permis des possibilités diversifiées de formation en vue de l'utilisation de nouvelles technologies, auxquels de nombreux enseignants des premières années ont participé. Ceci a impliqué la fréquentation de petits cours, et la réalisation de projets appuyés à distance a été stimulée ; des opportunités fréquentes d'échange d'expériences, avec des résultats significatifs ont été créées (Ponte, 1994). Lors d'une phase postérieure l'utilisation de programmes plus spécifiques est devenue dominante, notamment l'utilisation de software, une dynamique dans l'enseignement de la géométrie, ceci surtout dans les 2ème (Coelho, 1995) et 3ème cycles (Junqueira, 1995 ; Matos e Piteira, 2000).

Au début des années 90 on remarque le souci d'une formation orientée vers la pratique de la résolution de problèmes comme stratégie d'enseignement/apprentissage (Afonso, 1995 ; Fernandes e Vale, 1994 ; Vale, 1994), dans la mesure où dans les nouveaux programmes alors introduits (et encore en vigueur), la résolution de problèmes apparaissait comme le contexte de l'apprentissage des mathématiques. Un grand nombre de ces programmes ont été organisés selon le modèle scolaire, mais un second groupe de programmes de formation avec un dispositif quelque peu différent commence à surgir. Ce sont des programmes prolongés dans le temps (environ un an) et dans lequel le rôle du formateur est moins directif. C'est le cas des programmes de Loureiro (1992), Silva (1992) e Veloso (1992) orientés vers l'utilisation de la calculette élémentaire et de la feuille de calcul dans les premières années de scolarité. Dans les programmes conduits par Ribeiro (1995), Rocha (1996) e Correia (1997), impliquant des enseignants primaires du 1er cycle, l'établissement d'une forte liaison de la didactique (la résolution de problèmes, l'exploration de connexions, la communication mathématique et l'utilisation de matériaux) à la pratique pédagogique, avec des moments de réflexion sur cette pratique a été recherché.

Le Centre de Formation de l'APM, a créé une structure d'appui à des projets professionnels dont l'initiative revient à des groupes d'enseignants (essentiellement dans les modalités d'atelier et projet) qui permettent également la progression dans la carrière. Rien qu'en 2004, 33 actions parsemées sur les 4 régions du pays se sont réalisées.

Actuellement, la recherche de quelques enseignants sur leur pratique commencent à avoir une certaine viabilité au Portugal, que ce soit en termes individuels (pour l'obtention de degrés académiques) ou au sein d'équipes collaboratives, comme par exemple un groupe d'études du groupe de Travail en Recherche de l'APM, subordonné à la thématique de « l'enseignant comme chercheur », dont les premières études ont déjà donné lieu à une publication « *Reflectir e Investigar sobre a Prática Profissional* » (Réfléchir et faire des recherches sur la Pratique Professionnelle), édité par l'APM et dont une nouvelle publication est prévue.

V – CONCLUSION

Au Portugal, la réflexion et l'action doivent se poursuivre autour des thèmes ou des questions qui suivent :

- les conditions d'accès aux cours de formation initiale pour le 1er cycle ;
- la formation mathématique dans les cours de formation initiale et permanente ;
- la formation des professeurs du 1er cycle devra-t-elle déboucher sur une spécialisation vers des champs scientifiques de ce cycle ?
- au Portugal, il n´existe pas de structure d'accompagnement des premières années de profession, bien que la création de Programmes d'Induction soit citée dans la législation ;
- quels supports pour les professeurs de mathématique (brochures, bulletins, formation de professeurs à travers un réseau de professeurs accompagnateurs, édition de matériel didactique….) ?

- notre organisation curriculaire par cycles, spécialement l'existence d'un cycle de deux années, pour les enfants de 10-11 ans ;
- la reformulation des programmes, compte tenu des orientations curriculaires vers l'école primaire établies en 2001 ;
- les supports éducatifs pour la remédiation afin de diminuer les taux de redoublement des élèves à partir de la 2ème année.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ABRANTES P., SERRAZINA L. e OLIVEIRA I. (1999) A Matemática na Educação Básica, *Ministério da Educação/DEB, Lisboa.*

AFONSO P. (1995) O video como recurso didáctico para a identificação e desenvolvimento de processos metacognitivos em futuros professores de Matemática durante a resolução de problemas (tese de mestrado, Universidade do Minho), *APM, Lisboa.*

ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA (1998) Matemática 2001 – Diagnóstico e recomendações para o Ensino e Aprendizagem da Matemática, *APM e IIE, Lisboa.*

BALL D. e BASS H. (2001) *Knowledge of Fundamental Mathematics for Teaching*, 27-34, in D. Ball e H. Bass (eds.), *Knowing and Learning Mathematics for Teaching*, National Academy Press, Washington.

BORRALHO A. e ESPADEIRO R. (2004) *A formação matemática ao longo da carreira profissional do professor*, 279-305, in A.Borralho, C. Monteiro e R. Espadeiro (Org.), *A Matemática na Formação do Professo*r, SPCE/SEM, Lisboa.

BROCARDO J. (2003) *Formação incial de professores de Matemática : consensos e dificuldades*, Educação e Matemática, **73**, 3-7.

COELHO M.I. (1995) O Cabri-géomètre na resolução de problemas. Estudo sobre processos evidenciados e construção de conhecimentos por alunos do 6.º ano de escolaridade, *APM, Lisboa.*

CORREIA G. (1997) O desenvolvimento profissional dos professores do 1.º ciclo na área da Matemática (dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa), *APM, Lisboa.*

FERNANDES D. e VALE I. (1994) *Concepções e práticas de dois jovens professores perante a resolução de problemas*, 145-168, in D. Fernandes, A. Borralho e G. Amaro (eds.), *Resolução de problemas: processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular*, IIE, Lisboa.

GRUPO de TRABALHO de INVESTIGAÇÃO (2002) Reflectir e investigar sobre a prática profissional, *APM, Lisboa.*

JUNQUEIRA M. (1995) *Aprendizagem da geometria em ambientes computacionais dinâmicos* (tese de mestrado, Universidade Nova de Lisboa), APM, Lisboa.

LOUREIRO C. (1991) Calculadoras na educação matemática : uma experiência na formação de professores (dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa), *APM, Lisboa.*

MA L. (1999) Knowing and Teaching Elementary Mathematics : Teachers´ Understanding of Fundamental Mathematics in China and in the United States, *Lawrence Erlbaum Associates, New Jersey*.

MARTINS A. (1991) *Manuais escolares por muito « apreciados » que sejam…*, Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, **20**, 31-34.

MATOS J. F. e PITEIRA G. (2000) *Ambientes dinâmicos de geometria como artefactos mediadores para a aprendizagewm da geometria*, 61-72, in Manuel Saraiva, M. Isabel Coelho e J. Manuel Matos (Org.) *Ensino e Aprendizagem da Geometria*, SEM/SPCE, Lisboa.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO (2001) Currículo Nacional do Ensino Básico, *Ministério da Educação, Lisboa.*

MONTEIRO C. (1994) The impact of an in-service teacher training programme on teachers involved with computers in education (doctoral thesis, London University), *APM, Lisboa*.

MONTEIRO C. e SERRAZINA L. (2004) *What mathematics and educational competencies sohuld be developed on elementary prospective teachers* ? (texto não publicado apresentado num grupo de discussão do ICME 10).

MOREIRA C. (1984) *Logo : Design of an unit for a course in computers in education for portuguese student-teachers of Escolas Superiores de Educação* (tese de mestrado, Universidade de Boston).

MOREIRA C. (1992) *Primary teachers´attitudes towards mathematics and mathematics teaching with special reference to a Logo-based in-service course* (tese de doutoramento, Universidade de Londres).

NÓVOA A. (1991) Profissão Professor, *Porto Editora, Porto*.

PATRÍCIO C. (2003) Gestão do currículo de Matemática no 1.º ciclo (Tese de Mestrado, EscolaSuperior de Educação de Lisboa e Departamento de Educação da FCUL), *APM, Lisboa*.

PERRENOUD P. (1996) Enseigner : agir dans l'urgence décider dans l'incertitude, *ESF éditeur, Paris*.

PERRENOUD P. (1997) Construire des compétences dès l' école, *ESF éditeur, Paris*.

PIRES M. V. (2003) *Conhecimento profissional e manuais escolares : um estudo no 1.º ciclo*, 525-544, in Actas do XIV Seminário de Investigação em Educação Matemática, Rocha et al (Org.).

PONTE J. (1994) O Projecto MINERVA- Introduzindo as NTI na Educação em Portugal, *DEPGEF, Lisboa*.

RIBEIRO A. (1995) Concepções dos professores do 1.º ciclo sobre a matemática, o seu ensino e os materiais didácticos (dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa), *APM, Lisboa*.

ROCHA M. I. (1996) A didáctica da matemática no desenvolvimento profissional dos professores do 1.º ciclo (dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa), *APM, Lisboa*.

SERRAZINA L. (1998) Teachers´sprofessional development in a period of radical change in primary mathematics education in Portugal (doctoral thesis), *APM, Lisboa*.

SILVA A. (1992) A calculadora no percurso de formação de professoras de matemática (dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa), *APM, Lisboa*.

VALE I. (1994) *Resolução de problemas : Desempenhos de futuros professores de Matemática*, 209-222, in Actas do V SIEM, APM, Lisboa.

VELOSO G. (1992) Novas tecnologias de informação : um programa de formação de professores de matemática (dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa), *APM, Lisboa*.

CONFÉRENCES

DIVERSITÉ DES MATHÉMATIQUES ENSEIGNÉES « ICI ET AILLEURS » : L'EXEMPLE DE LA GÉOMÉTRIE

Alain KUZNIAK
Professeur des Universités, IUFM ORLÉANS-TOURS
Équipe Didirem Université Paris VII
alain.kuzniak@iufm.orleans-tours.fr

Résumé
L'étude des mathématiques enseignées dans différents pays a fait l'objet de l'attention de grandes études internationales comme TIMSS ou PISA dont les finalités et les cadres théoriques sont différents. La première s'intéressait à l'enseignement des sciences dans l'ensemble du système éducatif, la seconde se propose, par l'évaluation du niveau des élèves, de promouvoir une « mathematical literacy » qui s'appuie le plus possible sur la mathématisation de la réalité. Après avoir présenté ces deux grandes études, nous nous intéresserons au cas de la géométrie que nous proposons d'étudier avec l'éclairage des paradigmes géométriques qui peuvent rendre compte de la diversité des choix effectués par les pays. Nous envisagerons les cas des Pays-Bas pleinement engagés dans le courant « Realistic Mathematics » et du Chili où la Géométrie I (ou Géométrie naturelle) semble dominante. Nous donnerons enfin un rapide aperçu sur le courant de recherche ethnomathématique qui aborde de manière originale la relation entre les mathématiques et leur environnement social local.

L'idée d'enquêter sur les mathématiques enseignées ailleurs n'est pas nouvelle, on la trouve déjà par exemple dans les écrits de Lacroix au début du XIX^{e} siècle au moment de la création des écoles centrales transformées plus tard en Lycée. On la retrouve aussi chez Klein qui, dans son traité sur les Mathématiques élémentaires envisagées d'un point de vue avancé, donne une étude de l'approche de la géométrie dans les pays européens. Mais force est de constater que l'engouement pour ce type d'études s'est avivé depuis quelques années comme en témoigne le thème du colloque de la Copirelem.

De fait, cette question sur les mathématiques enseignées ailleurs se trouve souvent reliée à deux phénomènes : la comparaison et la globalisation. La comparaison d'abord, comparaison hiérarchisante demandée dans des études internationales commandées par des institutions interétatiques comme l'OCDE. La globalisation ensuite car ces comparaisons semblent s'insérer dans un processus normatif global qui transforme l'enseignement en une marchandise susceptible d'être évaluée pour en déterminer le coût et le prix de vente. Il n'est donc pas étonnant que ces études internationales soient souvent vécues comme relativement agressives par les professeurs concernés.

Dans cette conférence, nous allons montrer les fondements et l'intérêt possible des études comparatives. Nous proposerons aussi une réflexion sur un cadre théorique susceptible de permettre une approche didactique et pas seulement économique de la comparaison entre des enseignements donnés dans des institutions fort différentes.

Notre étude n'envisagera que les mathématiques enseignées dans la scolarité obligatoire période qui suivant les pays peut atteindre voire dépasser une dizaine d'années. Nous regarderons ainsi un enseignement allant au-delà de scolarité primaire en France. Comme notre titre l'indique, nous privilégierons l'enseignement de la géométrie.

Cependant, malgré cette limitation, le thème abordé reste particulièrement vaste et notre propos ne fera qu'effleurer ce domaine d'étude.

I – UNE INTERNATIONALISATION CROISSANTE

I – 1 Les institutions

La mise en place d'institutions internationales se préoccupant de l'enseignement des mathématiques suit d'assez près un mouvement semblable chez les mathématiciens. Ce sont d'ailleurs eux qui créent en 1908 la commission internationale sur l'enseignement des mathématiques (CIEM). Le premier président sera justement Klein dont l'influence sur l'enseignement des mathématiques en Allemagne est alors notoire. Il s'agit de s'intéresser prioritairement à l'enseignement universitaire qui préoccupe des chercheurs également engagés dans des cours à l'Université. En 1960, la CIEM devient ICME suivant son acronyme anglo-saxon. En 1969, le premier colloque ICME s'est tenu à Lyon et a réuni 655 participants. Le dixième colloque tenu à Copenhague en 2004 a officiellement accueilli 2324 personnes venant de plus de cent pays. Les participants sont désormais des spécialistes des études sur l'enseignement des mathématiques, nouveau champ de recherche que recouvre en France la didactique des mathématiques.

I – 2 Les études comparatives

Dès sa création, la CIEM a favorisé des études comparatives mais celles-ci apparaissent rétrospectivement comme des études de bonne compagnie avec un enjeu relativement faible. Il s'agissait d'observer ce qui se passait au niveau des programmes dans des pays occidentaux aux économies comparables. Le niveau concerné, l'enseignement secondaire, restait un niveau élitiste ne touchant qu'une infime partie de la population, rappelons que moins de deux mille personnes passaient le bac chaque année en France au début du XX^{e} siècle.

De manière générale pour comprendre l'enjeu des études récentes, nous adapterons une attitude pragmatique suggérée par Keitel et Kilpatrick (1999). Ces auteurs posent trois questions qui peuvent permettre de guider l'interprétation des résultats. Qui dirige l'étude ? Qui la paye ? Qui contrôle la présentation des résultats ? De ce point de vue les deux grandes études internationales récentes, TIMSS et PISA, apparaissent très différentes.

I – 2.1 Les études FIMS, SIMS et TIMSS

Ces sigles recouvrent trois études (First, Second and Third) Internationales sur les Mathématiques. La dernière a intégré l'étude des sciences (ce qui explique les deux S) jusqu'alors disjointe de l'étude sur les mathématiques enseignées.

Ces études ont été lancées dès 1959 par l'IEA[1], organisme créé pour cette occasion et qui regroupait des Universités, des centres de recherches et aussi des ministères de l'éducation de plus de cinquante pays. Il s'agissait de déterminer les effets de l'enseignement des mathématiques en observant notamment les connaissances mathématiques de populations d'élèves dans différents niveaux du cursus scolaire. Trois niveaux avaient été retenus : les années 3 et 4 de la scolarité (CM1), 7 et 8 (3^{e}) et enfin la fin de la scolarité secondaire (11-12). Les pays engagés dans cette étude ne retenaient que deux populations pour mener leur étude. La France avait choisi de tester les populations 2 et 3.

Notre propos n'est pas de rendre compte des résultats de cette étude largement diffusés (notamment chez Kluwer ou Falmer Press) mais de montrer l'émergence du concept de « mathematical literacy ». Cette notion apparaît notamment dans l'étude TIMSS sur les élèves de la fin de la scolarité secondaire. Les auteurs ont distingué deux sous-populations : la première a suivi un enseignement spécialisé en mathématiques dans des classes scientifiques, la seconde a continué ses études dans des domaines non scientifiques. Deux types de connaissances mathématiques sont alors introduits : les « mathématiques avancées » d'une part et d'autre part la « mathematics literacy ». Les connaissances regroupées sous cette dernière dénomination sont celles communes à tous les élèves ayant suivi une scolarité longue. Les questions portent sur des contenus aisément identifiables par les Français : nombres entiers, fractions et proportions, géométrie… Les questions du groupe de « mathématiques avancées » portent, en plus, sur l'algèbre, le calcul intégral ou vectoriel.

Curtis C. McKnight and Gilbert A. Valverde

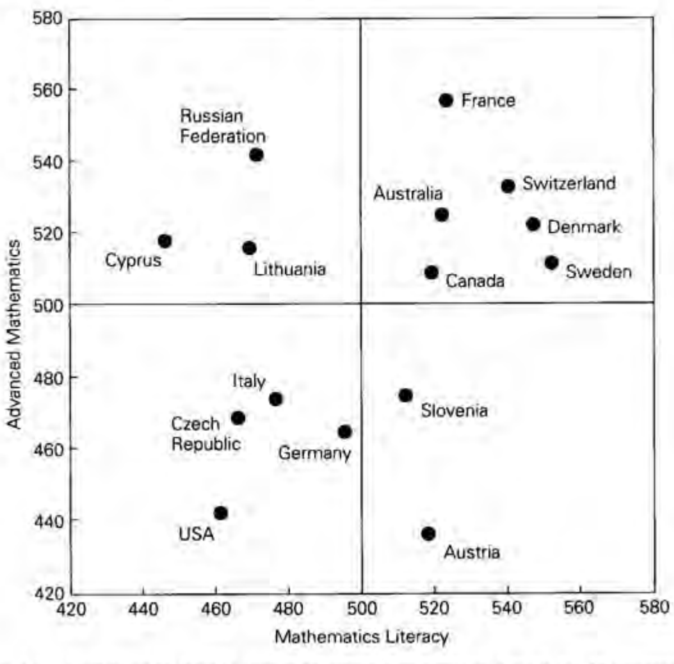


Figure 4.1: Mathematics literacy versus advanced mathematics results for 15 countries

Nous donnons ici un tableau extrait de l'ouvrage International Comparisons in Mathematical Education (1999, p. 50) consacré pour l'essentiel à l'étude TIMSS. Ce

[1] International Association for the Evaluation of Educational Achievement.

tableau montre les bons résultats relatifs des pays scandinaves dans le niveau mathématiques général. La France, quant à elle, se fait remarquer par des résultats meilleurs dans le domaine des « mathématiques avancées » que dans celui de la « mathematics literacy ». Il faut noter la place particulière des USA dans le quadrant des pays aux faibles résultats dans les deux domaines observés. Cette position particulière entraîna une vive prise de conscience aux États-Unis et la mise au point des fameux standards du NCTM (Association américaine pour l'enseignement des mathématiques). Depuis, ce type d'études continue mais est piloté par les États-Unis dans le cadre de TIMSS où le T signifie Trends. La France ne fait plus partie du consortium d'études.

I – 2.2 PISA et la nouvelle notion de « mathematical literacy »

L'étude PISA lancée en 2000 est pilotée par l'OCDE, organisation de coopération et de développement économique qui regroupe 30 pays et dont la vocation première est d'aider à la *bonne gouvernance* des services publics et des organisations dans les pays démocratiques ayant une économie de marché. L'étude PISA se propose d'évaluer chez les enfants de 15 ans ce que les auteurs de l'étude présentent comme la « mathematical literacy » traduit dans les documents en français sous le terme impropre de « culture mathématique ».

> *La culture mathématique est l'aptitude d'un individu à identifier et à comprendre le rôle joué par les mathématiques dans le monde, à porter des jugements fondés à leur propos, et à s'engager dans des activités mathématiques, en fonction des exigences de sa vie en tant que citoyen constructif, impliqué et réfléchi.* (OCDE, 2004, p. 39).

En anglais, le mot *literacy* désigne le fait d'être alphabétisé et ainsi de savoir lire et écrire. Depuis peu est apparu le terme *numeracy* qui renvoie à la capacité de savoir calculer et de comprendre des mathématiques simples. L'idée de *mathematical literacy* suppose une maîtrise des objets mathématiques simples les plus susceptibles de jouer un rôle dans la vie de tous les jours. Les auteurs évitent le terme de culture qui existe aussi bien sûr en anglais mais qui suppose cette fois un degré de maîtrise du domaine envisagé bien plus élevé et distancié.

De manière cohérente, l'enquête PISA privilégie, pour l'évaluation de cette « culture mathématique » des élèves, une approche qui place l'usage fonctionnel des savoirs et savoir-faire dans des situations tirées de la vie réelle au cœur de l'apprentissage des mathématiques. Le processus central sur lequel insistent les concepteurs de l'étude est celui de *mathématisation :* il s'agit, pour eux, d'un processus qui commence par l'organisation du problème à résoudre en fonction de concepts mathématiques, qui se poursuit, après effacement de la réalité, par la résolution grâce à l'usage d'outils mathématiques, et qui se termine par la communication du résultat en retrouvant le sens du problème initial dans la réalité.

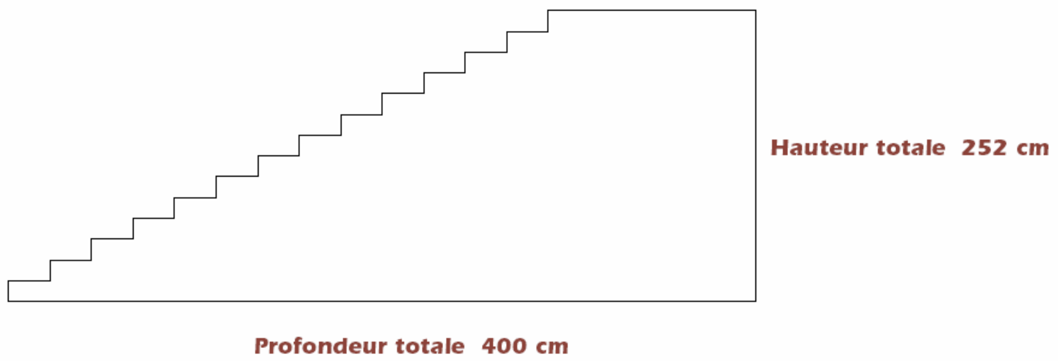
Comme le but principal de l'évaluation est d'apprécier les capacités des élèves à résoudre des « problèmes réels », les auteurs ont décidé de ne pas retenir le découpage traditionnel des mathématiques en arithmétique, algèbre, géométrie *etc.* En effet, selon eux, ce découpage ne se retrouve pas tel quel dans les problèmes issus de la vie réelle. Pour faire l'évaluation, ils ont ainsi déterminé quatre domaines : « Espace et formes », « Variations et relations », « Quantité » et enfin « Incertitude ». Les résultats sont donnés pour chacun des domaines afin de tenir compte des priorités des différents pays.

Nous allons nous intéresser au groupe « Espaces et Formes » en reprenant trois exemples proposés dans le rapport des résultats de PISA (OCDE, 2004).

Le premier exercice *Quelle est la hauteur d'une marche ?* est considéré comme facile et ne mobilise suivant les concepteurs que les deux premiers niveaux de compétences dans une échelle qui en comporte six. Sa cotation est de 421 par rapport à un système de notation où la moyenne des résultats des pays de l'OCDE participant à l'étude est mise à 500 avec les deux tiers des notes comprises entre 400 et 600.

ESCALIER

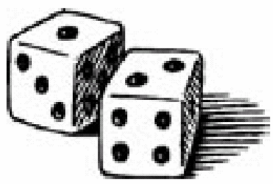
Le schéma ci-dessous représente un escalier de 14 marches, qui a une hauteur totale de 252 cm :



Voici le deuxième exemple proposé et qui utilise des dés à jouer comme support de la question. Cet exercice a la cotation 503, c'est-à-dire qu'il est d'une difficulté moyenne.

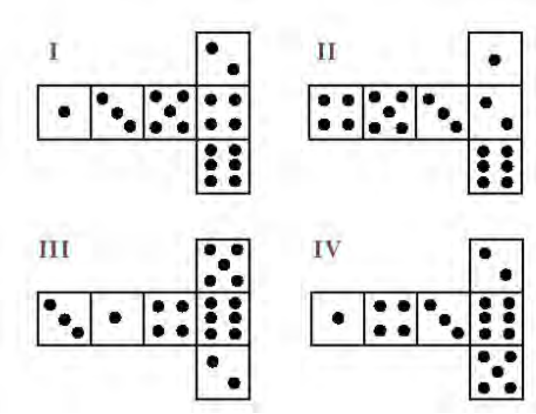
DÉS À JOUER

Le dessin à droite représente deux dés.
Les dés sont des cubes avec des faces numérotées selon la règle suivante :
« La somme des points figurant sur deux faces opposées doit toujours être égale à 7. »



La question est la suivante :

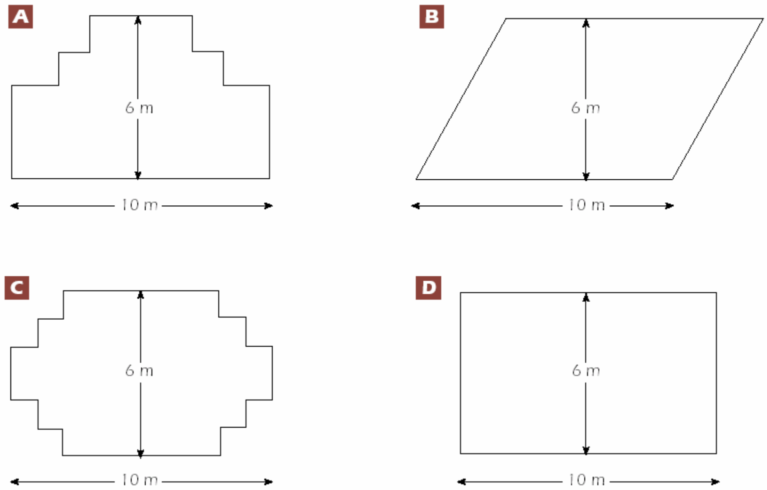
> *Vous pouvez aisément réaliser un dé en découpant, pliant et collant du carton. Cela peut se faire de plusieurs manières. Ci-dessous, vous pouvez voir quatre découpages qui peuvent être utilisés pour faire des dés, avec des points sur les faces.*
>
> *Parmi les découpages ci-dessous, lequel ou lesquels peuvent être plié(s) de manière à former un dé qui obéit à la règle selon laquelle la somme des faces opposées est égale à 7 ? Pour chacun des découpages, entourez soit « oui », soit « non » dans le tableau ci-dessous.*



Enfin voici un dernier exemple classé dans ceux nécessitant le plus de compétences dans l'échelle à six niveaux proposée[2] par PISA.

MENUISIER

Un menuisier dispose de 32 mètres de planches et souhaite s'en servir pour faire la bordure d'une plate-bande dans un jardin. Il envisage d'utiliser un des tracés suivants pour cette bordure :



Question 1

Indiquez, pour chacun des tracés, s'il peut être réalisé avec les 32 mètres de planches. Répondez en entourant « Oui » ou « Non »

Tracé de la bordure	En utilisant ce tracé, peut-on réaliser la plate-bande avec 32 m de planches ?
Tracé A	Oui / Non
Tracé B	Oui / Non
Tracé C	Oui / Non
Tracé D	Oui / Non

[2] Voir OCDE, 2004, p. 49.

Cet item est considéré comme très difficile indice, par les auteurs de l'étude :

> *Cet item se situe au niveau 6 car il demande aux élèves de s'appuyer sur leur compréhension de la géométrie, de mettre en œuvre des savoir-faire d'argumentation et d'appliquer des savoirs géométriques.*

Pourtant, par rapport aux usages de l'enseignement français la question ne demande aucune rédaction de la solution mais simplement de répondre par oui ou par non à quatre questions portant sur la faisabilité de la plate-bande.

La présentation de l'étude se termine par les résultats des différents pays ayant participé à l'évaluation. Deux pays européens se signalent par leur résultats au-dessus de la moyenne : la Finlande et les Pays-Bas. Nous verrons plus loin certaines des raisons de ce phénomène (III-1). Très à la traîne apparaissent des pays comme la Tunisie, le Brésil ou l'Indonésie. Les écarts entre pays développés ne sont pas très importants mais le classement a en cette matière beaucoup d'impact. C'est évidemment cette partie qui a été souvent retenue par les différents médias qui en ont rendu compte avec un raccourci prévisible : le terme culture disparaît et il reste comme dans cette invitation à une émission récente sur France-Culture *à réfléchir sur les mauvais résultats de la France en mathématiques*. Dans le même temps, la Finlande organise des colloques pour montrer le fonctionnement de son système éducatif qui lui a permis d'obtenir la première place dans l'étude avec un clin d'œil aux voisins suédois nettement moins bien classés alors que les minorités suédoises de la Finlande sont au même niveau que le reste du pays.

Mais au-delà de ces raccourcis, l'étude en elle-même est intéressante par la nouvelle perception des mathématiques qu'elle essaye d'installer parmi les pays développés. L'idée est bien de privilégier un enseignement des mathématiques utiles dans la réalité grâce à une succession d'évaluations qui permettront de voir les progrès réalisés dans ce sens car pour l'heure, les auteurs jugent les résultats globalement insuffisants et très préoccupants pour l'avenir des économies des pays de l'OCDE.

II – UN CADRE THÉORIQUE POUR LA COMPARAISON

Les deux exemples précédents attirent l'attention sur l'importance de la finalité de l'étude. Cette finalité permet de définir a priori un cadre théorique ou d'en retenir un quand l'enquête s'appuie sur les travaux antérieurs des concepteurs de l'étude. Ainsi le support théorique principal de l'étude PISA a été développé par Niss (2003) (voir aussi la présentation critique de Winslow (2005) dans les Annales de didactique). Dans l'étude PISA, le principe de l'évaluation reste classique et elle est basée sur des exercices. Une étude économique l'accompagne, OCDE oblige.

Les études de type TIMSS ne s'intéressaient qu'à l'enseignement scientifique mais elles possédaient une ambition plus large et visaient à décrire tout le système d'enseignement en prenant en compte toute sa diversité. Ainsi les concepteurs de ces études ont-ils été conduits à élaborer un cadre théorique suffisamment étendu pour permettre une grande diversité d'approches.

Le point faible de ces grandes études est certainement la réflexion didactique sur les contenus mathématiques spécifiques. Souvent, comme dans l'étude PISA, les contenus disciplinaires sont en quelques sortes évacués a priori au profit des compétences générales. Ainsi se trouvent placées au cœur du dispositif d'évaluation des notions comme le « problem solving » ou la « mathematical literacy ». Dans la suite de notre exposé II-2, nous présenterons le cadre théorique que nous suggérons d'utiliser pour étudier le cas particulier de l'enseignement de la Géométrie en conciliant à la fois compétences spécifiques et diversité d'approches grâce à la notion de paradigme clairement assumé.

II – 1 Le cadre théorique général des études de type TIMSS

Dès la première étude internationale (FIMS), les auteurs ont pris conscience de la nécessité de disposer d'un cadre théorique suffisamment ouvert pour rendre compte des différents systèmes éducatifs étudiés sans privilégier a priori une vision plutôt qu'une autre. Ils ont donc par la suite situé leur réflexion dans une approche systémique du processus éducatif en distinguant différents niveaux de programmes (Curriculum) liés au système éducatif, à la classe et à l'étudiant.

The intended Curriculum : le programme visé

Dans l'étude TIMSS, le curriculum visé doit regrouper les concepts, les connaissances et les compétences visés par l'enseignement des mathématiques. Il se propose ainsi de définir les voies et les buts propres à chaque pays pour enseigner les mathématiques. Les supports nécessaires à cette étude sont les documents officiels produits par les autorités qui pilotent le système éducatif. L'examen des budgets et des textes de lois est également un point intéressant pour repérer les priorités de chaque état.

The implemented curriculum : le programme mis en œuvre

Evidemment, les études sérieuses doivent envisager la mise en œuvre réelle du programme visé et tenter d'apprécier les différences. L'étude TIMSS essaie ainsi de mieux cerner la réalité des classes (effectifs, problèmes sociaux…) et aussi des enseignants (formation réelle et expérience, conception de l'enseignement…).

The attained curriculum : le programme atteint.

La dernière étape de l'approche de la réalité d'un système éducatif passe nécessairement par l'évaluation individuelle des élèves. Mais pour les auteurs, il ne s'agit pas simplement d'évaluer des connaissances mais aussi de mieux connaître les méthodes de travail et les ambitions des élèves.

Ces programmes sont étudiés dans le modèle développé lors de l'étude TIMSS grâce à quatre grandes questions de recherches.

- Que doivent apprendre les étudiants ?
- Qui donne l'enseignement ?
- Comment l'enseignement est-il organisé ?
- Qu'ont appris les élèves ?

Cette conception aboutit à un modèle SMSO (Survey of Mathematics and Science Opportunities) utilisé dans la recherche TIMSS dont on voit l'ambition à saisir les systèmes éducatifs dans toute leur complexité.

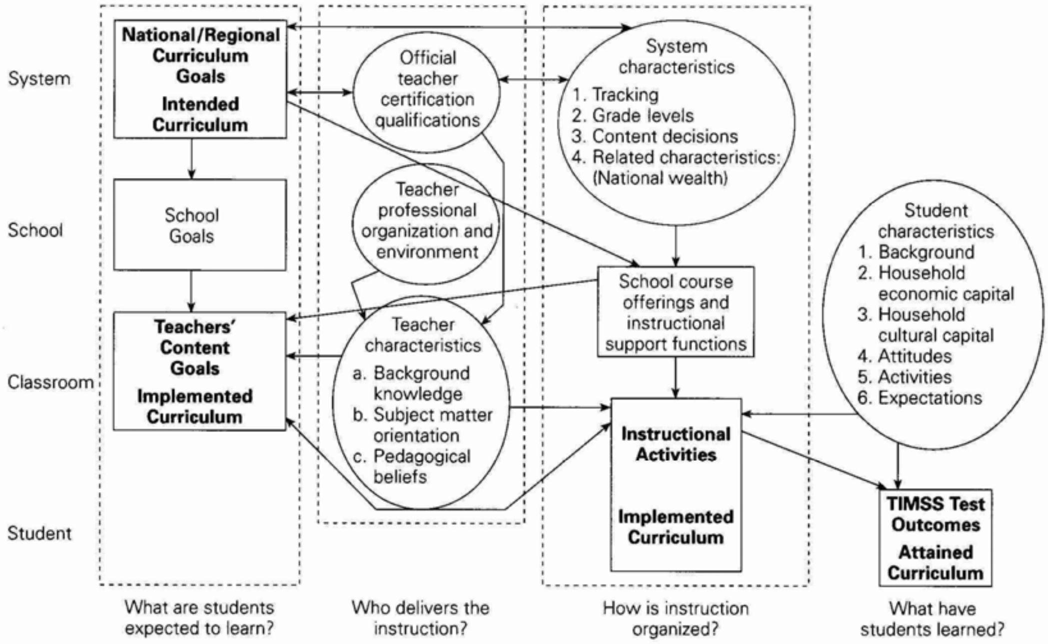
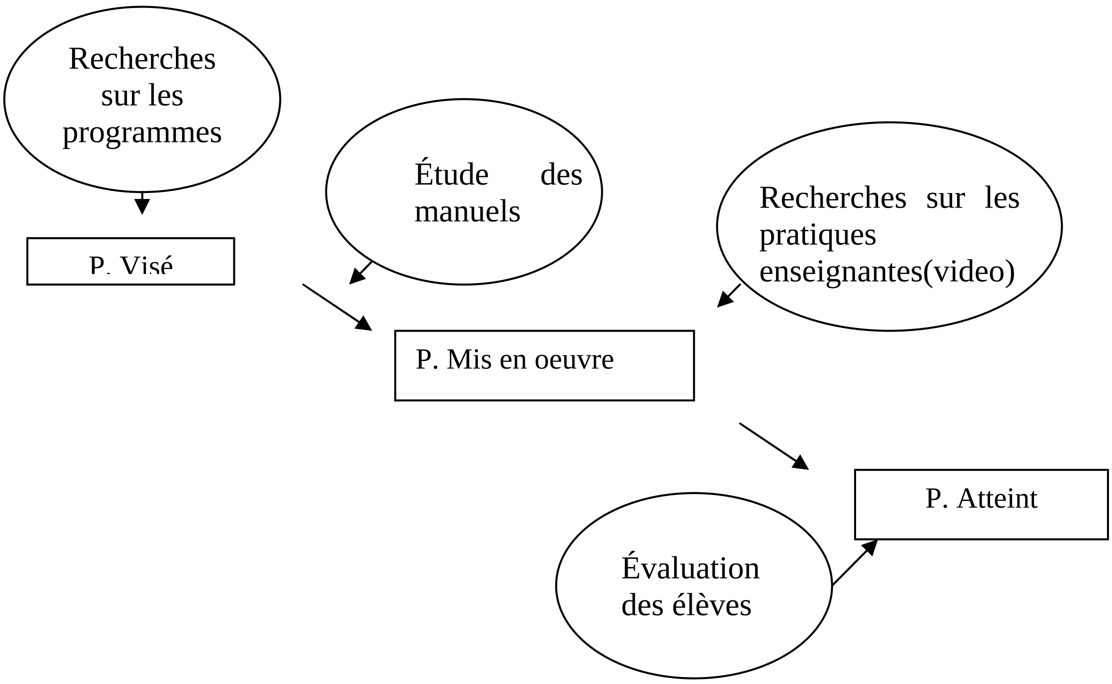


Figure 5.1: SMSO conceptual model of educational opportunity

Cogan et Schmidt, p. 69.

En s'appuyant au moins partiellement sur ce modèle, il est possible de comprendre les nombreuses possibilités de recherche qui ont pu s'appuyer sur ce cadre et dont le schéma suivant illustre quelques-unes unes des directions suivies.



II – 2 Le cas particulier de la Géométrie

II – 2.1 Les géométries en jeu et le travail géométrique

Décider de placer la Géométrie dans le programme visé suppose une conception du rôle de la géométrie dans la formation de l'élève mais aussi plus généralement dans la formation du citoyen. En France, en plein milieu du XIX^e siècle, une vive controverse sur la nature de la géométrie à enseigner à tous a opposé, à l'Assemblée Nationale, les tenants d'une géométrie orientée vers des applications immédiates au monde du travail, aux défenseurs d'une géométrie plus abstraite formatrice du raisonnement. De ce fait, s'il y avait bien un enjeu épistémologique dont rend compte l'idée de paradigmes géométriques, la discussion politique montrait aussi deux visions nettement distinctes de la société et du rôle du citoyen.

Durant la deuxième moitié du XX^e siècle, une troisième approche plus formelle et plus moderniste s'est brièvement, mais avec quelle force, ajoutée aux deux précédentes. Ainsi, sur le long terme et dans un seul pays, la nature de la géométrie enseignée a fortement fluctué et ses horizons problématiques et méthodologiques ont profondément évolué en fonction de décisions souvent plus idéologiques et politiques que scientifiques. L'observation des choix effectués actuellement dans différents pays fait apparaître des approches de la géométrie irréductibles les unes aux autres et qui sous une autre forme ressuscitent les débats évoqués précédemment.

II – 2.2 Trois géométries élémentaires

Pour rendre compte des différences entre les conceptions de la géométrie enseignées, nous avons, avec Houdement (1999), introduit la notion de paradigme empruntée à Kuhn. Dans son ouvrage « Structure of scientific revolutions », Kuhn (1962) analyse l'évolution de la communauté scientifique à travers l'émergence et l'instauration de paradigmes nouveaux qui permettent de poser, d'interpréter et de résoudre d'une certaine manière les problèmes scientifiques. L'importation de ces idées en mathématiques ne se fait pas sans modifications mais la notion de paradigme nous semble particulièrement pertinente dans le domaine des mathématiques enseignées où le rôle de l'idéologie importe autant que celui d'une pure épistémologie des mathématiques vues comme dégagées des problèmes d'application de leur champ de recherches.

Dans le domaine de la géométrie apparaissent clairement trois paradigmes géométriques que nous avons désignés sous les termes de Géométrie I (ou Géométrie naturelle), Géométrie II (ou Géométrie naturelle axiomatique) et enfin Géométrie III (ou Géométrie axiomatique formelle).

Pour comprendre cette approche par les paradigmes, il est nécessaire de voir que ces géométries ne sont pas a priori hiérarchisées par leur nature mathématique, leur complexité psychologique ou leur rôle sociétal. Elles ont en fait des horizons de travail différents et de fait leur impact dépendra beaucoup des intentions des auteurs des programmes.

La Géométrie I regarde du côté de la technologie et du monde de la pratique. Elle apparaît en phase avec la conception des mathématiques outils pour agir sur le monde de l'entreprise. Elles sont censées permettre également de résoudre un grand nombre de problèmes posés dans la vie quotidienne.

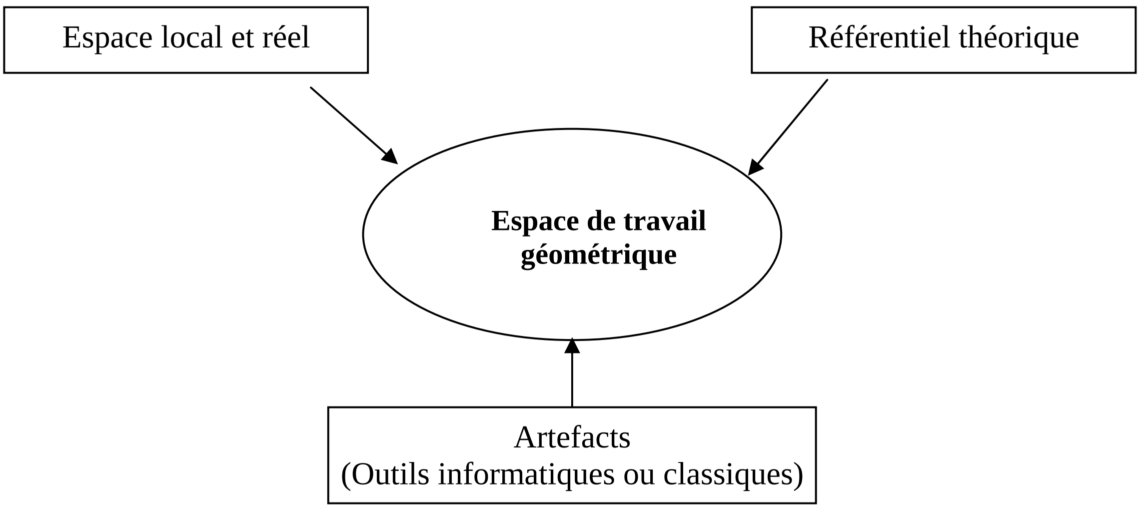
La Géométrie II insiste sur l'explication des actions effectuées et elle a pour horizon une modélisation qui s'articule avec une axiomatisation croissante destinée à fonder le mieux possible la théorie. L'insistance sur la cohérence de la base axiomatique débouche sur la Géométrie III qui privilégie les relations entre les objets théoriques introduits en Géométrie II. Son horizon s'intègre parfaitement dans le développement des mathématiques actuelles dont elle épouse les principes, ce qui fait que certains auteurs la qualifient de mathématique oubliant ainsi que les autres géométries font aussi partie des mathématiques.

II – 2.3 Sur les espaces de travail de la géométrie

L'idée force qui sous-tend notre approche est que l'on ne peut parler réellement de travail géométrique que lorsque l'activité de l'élève est à la fois suffisamment cohérente et complexe pour permettre la mise en oeuvre d'une activité de raisonnement. C'est ainsi que d'une certaine façon nous faisons notre la pensée de Gonseth (1945, p. 72) « être géomètre signifie ne pas confondre une évidence issue de l'intuition avec un renseignement expérimental, le résultat d'une expérience avec la conclusion d'un raisonnement ». Cette conception du travail géométrique nous fait rejeter les désignations faibles et confuses qui sont récemment apparues en France sous les termes erronés de géométrie déductive ou perceptive.

L'activité ou, plus exactement, le travail géométrique se développe au sein d'un espace de travail géométrique (ETG), organisé par et pour le géomètre de façon à articuler, de façon idoine, les trois composantes suivantes :

- un ensemble d'objets, éventuellement matérialisés dans un espace réel et local ;
- un ensemble d'artefacts qui seront les outils et instruments mis au service du géomètre, et enfin ;
- un référentiel théorique éventuellement organisé en un modèle théorique.



Les paradigmes géométriques que nous avons introduits servent de référence et ils permettent d'interpréter les contenus des composantes et ainsi de mieux définir leurs fonctions. Nos études sur les espaces de travail (Kuzniak, 2003 et 2004) ont montré la nécessité d'introduire trois niveaux d'ETG dépendant de l'institution éducative ou des individus concernés par l'enseignement de la géométrie. Une correspondance avec le cadre théorique de TIMSS peut être établie grâce au tableau suivant :

Programme général	Programme géométrique	Espace de travail géométrique
Intended Curriculum	Géométrie visée	de référence
Implemented Curriculum	Géométrie mise en œuvre	idoine
Attained Curriculum	Géométrie à l'œuvre	personnel

En utilisant ce cadre, nous pouvons poser un certain nombre de questions qui permettent d'étudier de manière didactique et relativement neutre idéologiquement l'enseignement de la géométrie.

Quelle est donc la géométrie qui est visée par l'institution scolaire ? S'agit-il de d'une géométrie de type GI, GII ou GIII ? Cette question doit être complétée par une interrogation qui porte sur la nature et la composition de l'ETG mis en place. Quels sont les artefacts utilisés ? Quel référentiel théorique est mis concrètement en œuvre ? Quels types de problèmes sont utilisés et jugés comme significatifs dans cette mise en œuvre pour faire entrer les élèves dans la géométrie attendue ?

Enfin, quelle est l'articulation qui existe entre les diverses géométries de l'école ? Dans ce cas, il est important de savoir si cette articulation repose sur un jeu ce qui suppose qu'elle est maîtrisée et assumée ou si l'on a plutôt affaire à un glissement d'une géométrie à l'autre. Par glissement nous voulons signifier un passage non maîtrisé d'un paradigme à l'autre : ainsi le professeur pense faire de la Géométrie II alors que les élèves sont en Géométrie I.

III – ÉTUDE DE LA DIVERSITÉ

Déterminer la nature de la géométrie est une des premières questions à envisager dans l'étude de la diversité. Mais de manière surprenante, il en est une qui de fait apparaît avant : existe-t-il une place pour la géométrie dans tous les systèmes étudiés. De fait, un des enjeux du rapport de la Royal Society (2001) est de faire réapparaître le terme Géométrie dans les programmes anglais, cette discipline étant englobée sous une rubrique intitulée : shape, space and measure. Nous avons également vu que dans l'étude PISA, la géométrie est recouverte par l'appellation Espaces et Formes. Ces luttes portant sur le vocabulaire ne sont pas anodines et recouvrent, en fait, des choix différents sur la nature et la place des mathématiques enseignées. D'un côté, on insiste sur les objets proches de la réalité et de l'autre, l'accent est mis sur des objets déjà idéalisés et conçus comme mathématiques.

III – 1 Un exemple radical : les Pays-Bas

Les Pays-Bas ont clairement opté dans la scolarité obligatoire pour un enseignement des mathématiques tourné vers ses applications à la réalité sous le nom de « Realistic Mathematics Education ». Cette approche développée par l'Institut Freudenthal à Utrecht s'est d'abord construite en réaction à l'enseignement des mathématiques modernes jugées trop abstraites pour les élèves et déconnectées de toute application au monde réel.

L'ambition du projet est double car il s'agit à la fois de modifier les contenus mathématiques mais aussi les méthodes d'enseignement et le style d'apprentissage des élèves.

L'approche des nouveaux contenus se fait essentiellement à partir de la résolution de problèmes. Il s'agit de problèmes pratiques provenant d'un environnement familier. Ainsi en Géométrie, l'accent est mis sur l'appréhension d'objets 3D grâce à leur représentation et à leur manipulation comme en témoignent ces extraits de programme pour la fin de l'école basique (15 ans).

Interpréter des représentations en 2D d'objets en 3D, les décrire, les visualiser en trois dimensions soit sur le papier soit sur un écran

Effectuer des tâches pratiques avec des objets 'tangible' en référence à des représentations d'objets de 3D. Faire des plans: élévation, dessin à l'échelle d'objet 3D… perspective

Estimer, mesure et calculer les angles, les dimensions, les aires et les volumes d'objets en 2D ou 3D.

Utiliser des instruments.

La géométrie mise en œuvre apparaît ainsi comme une Géométrie I orientée vers la 3D et fortement appuyée sur l'interprétation des objets tridimensionnels lorsqu'ils sont représentés en 2D. L'espace et les objets étudiés sont prioritairement des objets 'tangibles'. Le travail de représentation est très soigné puisqu'il s'agit d'initier à la perspective et à la lecture de dessins. La cohérence du projet apparaît bien lorsqu'on regarde l'importance accordée à l'approximation dans les domaines connexes comme la numération ou dans le domaine de l'arithmétique regroupée avec la mesure et où l'accent est mis sur l'estimation.

Pour mieux comprendre le projet il est utile de savoir que dans le système éducatif néerlandais, tous les élèves vont à l'école primaire (jusqu'à 12 ans) puis dans les écoles basiques secondaires (jusqu'à 15 ans) où se met en place l'orientation des élèves vers quatre institutions différentes. Dans le cadre relativement élitiste de la filière dite « pré-universitaire » (30 % des élèves) deux types de mathématiques sont introduits : les Mathématiques A et B. Dans les premières, prioritairement destinées à tous les élèves qui ne suivront pas des filières de type ingénieur en physique, l'accent est mis sur le rôle outil des mathématiques sans envisager de justifier ou d'expliquer d'un point de vue mathématique la nature de ces outils. Par contre leur rôle dans la résolution de problèmes issus de la réalité est sans cesse mis en avant. Les problèmes que résolvent les élèves néerlandais ne sont pas très éloignés de ceux que nous avons vus dans l'étude PISA.

La mise en place de cette attitude nouvelle vis-à-vis des mathématiques est subtilement mise en place à travers de nouvelles évaluations et aussi de grandes compétitions comme les A-lympiades. Dans ce cadre, les élèves doivent résoudre des problèmes parfois très complexes de modélisation : ils travaillent par équipe et la présentation de leurs résultats est jugée comme très importante, reliant ainsi la forme et le fond. On pourra trouver un exemple de ces épreuves dans l'article de Case (2004).

III – 2 Un exemple de Géométrie I cohérente et presque assumée : le Chili

Suivant un modèle courant dans le monde hispanique, la scolarité au Chili se divise en enseignement élémentaire (Basica) jusqu'à 14 ans puis Lycée (Media) jusqu'à 18 ans. L'enseignement des mathématiques mis en place depuis 1998 tourne le dos à l'enseignement très abstrait qui avait prédominé antérieurement.

Pour illustrer le changement radical d'approche qui existe entre le Chili et la France, nous présentons un exercice extrait d'un ouvrage de 2 Medio (Seconde) (Ramon-Gonzales-Andrade, 2002). Ce problème est donné au début du chapitre sur la similitude. La solution ne sera donnée que plus tard dans le corps du chapitre.

> Alfonso revient juste d'un voyage dans la précordillère, où il a vu un terrain en forme de quadrilatère qui a intéressé sa famille et dont il s'agit d'estimer l'aire. Pour cela, pendant son excursion, il a mesuré successivement les quatre côtés du terrain et il a trouvé approximativement : 300 m, 900 m, 610 m, 440 m. Pourtant, il n'arrive pas à trouver l'aire.
>
> En collaboration avec tes camarades, peux-tu aider Alfonso à déterminer l'aire du terrain ?

L'exercice est ensuite complété par l'indication suivante :

> Nous pouvons te dire, que pendant que vous réfléchissiez, Alfonso a expliqué son problème à son amie Rayen et lui a demandé de prendre une autre mesure du terrain : une diagonale ! Alfonso est revenu avec cette donnée : 632 m. A-t-il bien fait ? Pouvons-nous l'aider maintenant si nous ne pouvions pas avant ?

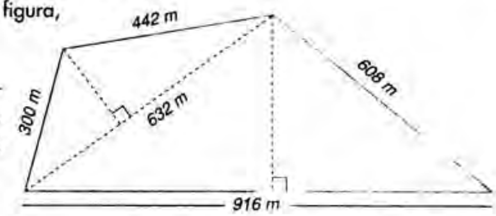
La solution commence de manière classique par proposer une décomposition de la figure à partir des indications données dans l'énoncé. Mais le plus surprenant pour un lecteur français reste à venir. En effet, les auteurs de manuels proposent de mesurer sur le dessin les hauteurs manquantes.

> *Comment peut-on calculer l'aire maintenant ?*
>
> *Bien, on détermine l'échelle du dessin, on mesure les hauteurs indiquées et comme cela on obtient l'aire de chaque triangle (en multipliant chaque base par la moitié de la hauteur).*

EJERCICIOS

RESUELTOS

¿Puedes estimar el área de la parcela de la figura, a partir de las mediciones indicadas?



Solución: Podemos descomponer la parcela en pedazos triangulares como los indicados y reconstruir estos triángulos a partir de las mediciones tomadas.

¿Cómo calculamos ahora el área?

Bueno, determinamos a qué escala está el dibujo, medimos las alturas indicadas y así obtenemos el área de cada triángulo (multiplicando cada base por la mitad de la altura).

Te podemos contar que a tu compañero Horacio, le dio 130.000 m², aproximadamente, es decir 13 hectáreas. Cuando Rayén escuchó esto, dijo: ¡No puede ser! ¡Es como el doble de eso!

¿Serías capaz, como Rayén, de estimar "a simple vista" el área total?

A nosotros nos dio un área total de 240.600 m² o 24,6 hectáreas, aproximadamente. ¿Y a ti?

Ainsi le travail géométrique se situe clairement en Géométrie I avec un va et vient entre réalité et le dessin qui est un schéma de cette réalité : la mesure sur le dessin donne les données manquantes dans l'énoncé. De manière cohérente avec cette approche, le texte se termine par un travail sur l'approximation qui fait partie intégrante d'une géométrie basée sur la mesure.

III – 3 Questions de styles ?

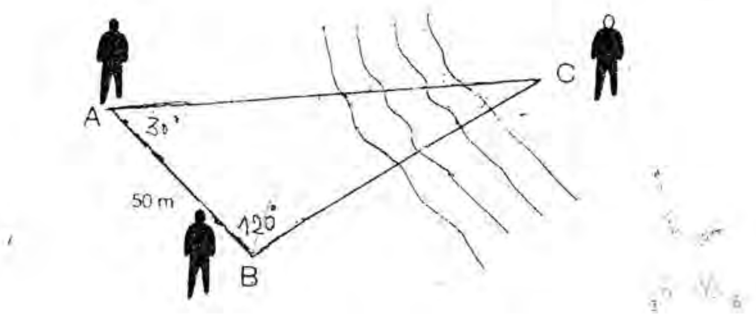
Pour qui a eu l'occasion d'observer des classes dans un autre pays que le sien, l'existence d'un style particulier propre à chaque système d'enseignement paraît évidente au-delà des variations individuelles. Cette constatation s'est imposée avec force aux auteurs de la sous-étude TIMSS sur les pratiques dans six pays différents (Cogan et Schmidt, 1998). Mais évidemment la difficulté est de fonder l'étude sur des bases solides qui permettent de prouver ce que l'intuition donne comme évident.

Dans l'étude TIMSS, les auteurs introduisent la notion de « characteristic pedagogical flow » pour rendre compte des formes récurrentes et typiques qu'ils ont pu observer. Une façon d'interpréter leur travail consiste à dire qu'ils tentent d'observer la nature des contrats pédagogiques mis en œuvre dans chaque système et d'en faire ressortir les spécificités. Ils sont ainsi conduits à observer plus particulièrement la gestion de certaines phases d'une séance d'enseignement.

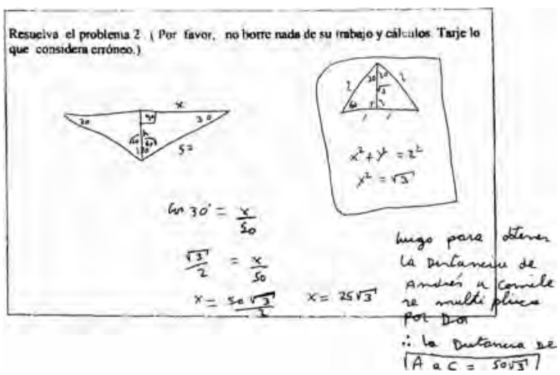
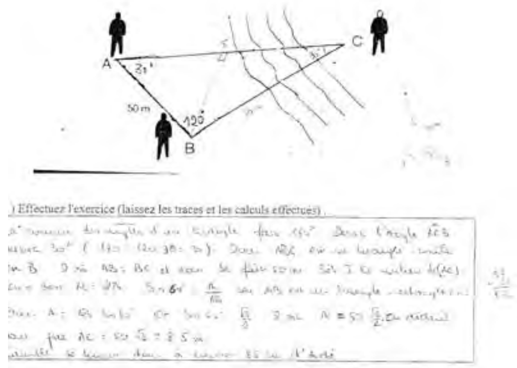
Les contenus sont importants dans l'approche de la diversité mais comme nous l'avons vu, il importe également de savoir la composition effective des Espaces de travail personnels pour savoir la nature exacte du travail géométrique existant. Pour cela, il est intéressant de comparer des copies d'élèves de différents pays confrontés à un même exercice ou à des présentations de théorèmes standards comme celui de Pythagore. En France, des travaux récents ont été réalisés sur ce thème notamment par Knipping (2003), Cabassut (2003) et Celi (2003).

D'autre part, dans le cadre d'une recherche soutenu par ECOS, nous avons pu observer les différences d'approches et d'attentes entre le Chili et la France. Bien sûr il ne s'agit là que d'une approche pointilliste basée sur peu d'exemples mais qui nous semblent cependant significatifs de différences profondes dans la conception et de la géométrie et de son enseignement. Voici un exercice portant sur les grandeurs inaccessibles étudié par Castela, Houdement, Rauscher et Guzman, et que nous avons proposé à des futurs professeurs de Lycée en France (Université Louis Pasteur) et au Chili (Université catholique de Valparaiso) dans le cadre du projet ECOS.

Exercice 2
La figure montre André et Bernard qui se trouvent sur la rive d'un fleuve à une distance de 50m l'un de l'autre. Camille est sur l'autre rive. A quelle distance de Camille se trouve André ?



Nous retenons ici deux copies qui suivent exactement la même démarche de résolution mais adoptent un mode de présentation radicalement différent.

Copie chilienne	Copie française
	

D'un côté, au Chili, un dessin codé qui contient les résultats d'un raisonnement qui n'est pas explicité par écrit. De l'autre, en France, un texte très détaillé que nous transcrivons ici et où aucune assertion, même la plus triviale, n'est omise.

La somme des angles d'un triangle fait 180°. Donc l'angle $\widehat{ACB}$ mesure 30° (180-120-30). Donc ABC est un triangle isocèle en B. D'où $AB = BC$ et donc BC fait 50 m. Soit I le milieu de $[AC]$.
On a donc $AC = 2AI$. Sin 60°$=\frac{AI}{AB}$ car AIB est un triangle rectangle en I.
Donc $AI = AB \sin 60°$ Or $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D'où $AI = 50\frac{\sqrt{3}}{2}$. On déduit donc $AC = 50\sqrt{3} \simeq 85\ m$
Camille se trouve donc à environ 85 m d'André

L'observation des classes au Chili montre que les traces écrites des activités sur le tableau sont souvent semblables à cette production écrite. Elles sont accompagnées par un discours oral qui justifie les résultats alors qu'en France toutes les justifications doivent être écrites. Les travaux de Knipping font également apparaître une gestion différente du tableau et de l'articulation écrit/oral en France et en Allemagne.

De manière plus générale, Knipping et Cabassut ont montré la différence de gestion de l'argumentation dans des classes de plusieurs niveaux équivalents en France et en Allemagne. Ces travaux témoignent d'une mise en place d'Espaces de Travail Géométrique très différents qui montrent que même au sein du même paradigme, le travail géométrique peut revêtir des formes et des styles très différents d'un pays à l'autre. Il y a certainement là une piste de recherche à explorer.

IV – QUAND L'AILLEURS EST ICI : L'ENTRÉE ETHNOMATHÉMATIQUE

Les diverses études comparatives finissent toutes par constater l'importance de la culture locale dans l'enseignement des mathématiques même dans les pays développés. En un certain sens et contrairement aux attentes de certains, les mathématiques enseignées sont aussi dépendantes du pays que l'enseignement de la littérature ou de l'histoire (Cogan and Schmidt, 1999, p. 77). Particulièrement sensibles à l'importance des facteurs culturels dans l'enseignement des mathématiques et les plaçant au cœur de leurs préoccupations, un ensemble de chercheurs a développé à partir du milieu des années 80 un courant dit ethnomathématique.

Le courant ethnomathématique est né dans l'univers de pays anciennement colonisés, notamment lusophones avec d'Ambrosio au Brésil et Gerdes au Mozambique. Il réagit à la fois à des contenus mathématiques et à des formes d'enseignement importés des anciens pays colonisateurs. Cela passe par une réappropriation de la culture mathématique locale : en fait, il s'agit de reconnaître le caractère mathématique d'activités autrefois méprisées et qui supposent une connaissance du nombre ou des formes géométriques. Par exemple Gerdes (2001) observe la fabrication des paniers tressés chez les Tongas du Mozambique pour y découvrir les structures géométriques utilisées par les artisans.

Divers axes de recherches animent l'approche ethnomathématique. Parfois la volonté de retrouver des mathématiques dans les pratiques quotidiennes ne va pas sans quelques exagérations et une sorte d'effet Jourdain. Mais la forme sans doute la plus intéressante de ce mouvement apparaît dans les tentatives de programmes scolaires qui s'appuient sur des pratiques locales de calcul ou sur les conceptions du monde des sociétés en question. L'enjeu est d'importance dans des pays où la langue de l'enseignement est différente de la langue parlée par les enfants en dehors de l'école comme c'est fréquemment le cas en Afrique où jusqu'à présent l'enseignement ignorait la diversité culturelle.

L'intérêt des chercheurs se porte alors sur les manières de pensée propres aux peuples qu'ils étudient et qui transparaissent souvent dans leur langue. Ainsi une étude de Pinxen sur la culture navajo, montre que leur langue est essentiellement basée sur des formes verbales dynamiques : plus de 300 000 (?) formes du verbe « aller » alors qu'il n'existe pas de correspondance exacte pour le verbe « être ». Ainsi en géométrie des termes comme bord ou coté ne sont pas vus comme des lignes mais comme la cause d'une modification d'un mouvement : arrêt, passage *etc.* De même des enfants de tribus africaines villageoises restent perplexes devant un syllogisme de la forme suivante : tous les Kpelle sont paysans, M. Smitt n'est pas paysan, est-il Kpelle ? Cette question n'a pas de sens pour les élèves qui disent « si je connais M Smitt je sais s'il est Kpelle ou non ». Cette réticence n'est pas très éloignée de certains points de vue d'élèves français par rapport à des problèmes qui leur paraissent vides de sens mais un autre point se montre ici, c'est la sensibilité à la culture et au mode de pensée des élèves qui sont issus d'autres cultures. Ainsi, des chercheurs envisagent maintenant à travers ce prisme les difficultés de scolarisation rencontrées en Europe par les populations immigrées lorsqu'elles se regroupent en communauté.

Cette fois, le travail peut porter sur une sorte d'accommodation de l'enseignement dont le style est modifié pour tenir compte de l'origine culturelle de l'enfant (Bishop, 1994).

CONCLUSION

Étudier les manières de voir et de faire dans d'autres systèmes éducatifs permet de mieux comprendre notre système et ainsi de l'améliorer ou de justifier certains choix. Cette façon d'envisager la comparaison est certainement la plus courante au sein de la communauté des chercheurs en didactique. Grâce à l'observation de systèmes différents fonctionnant autrement, il est ainsi possible de répondre à de nombreuses questions comme par exemple le grand problème des différences entre filles et garçons dans leur réussite en mathématiques qui varient beaucoup d'un pays à l'autre. Ces études permettent aussi de quantifier l'effet du travail à la maison ou du temps de travail scolaire (Clarke, 2003).

Mais il ne faut pas perdre de vue qu'au-delà de la recherche classique et d'une certaine façon désintéressée se profilent des enjeux économiques qu'il serait naïf de négliger. D'une part l'éducation n'échappe pas à la logique des marchés et de la globalisation : en effet, nombreux sont les pays où existe une école privée et/ou un marché des produits éducatifs. D'autre part la question de la place des mathématiques dans le monde d'aujourd'hui ne se résume certainement plus à son aspect culturel ou purement scientifique. L'importance du courant des mathématiques dans la réalité témoigne de l'émergence d'une conception dominante qui considère les mathématiques essentiellement dans leur rôle d'outil. Cette conception est, comme nous l'avons vu, supportée par les enquêtes d'organismes comme l'OCDE qui cherchent clairement à imposer cette vision des mathématiques.

Différentes conceptions des mathématiques sont ainsi à l'œuvre qui renvoient réellement à des paradigmes différents dont témoignent les dénominations que l'on peut trouver dans les diverses études : Mathématiques A et B ou Mathématiques avec un grand M et un petit m. Comme toujours l'intérêt d'aller voir « ailleurs » contribue à la remise en cause des évidences entraînées par l'ethnocentrisme, il suggère aussi d'interroger l' « ici » avec des yeux plus ouverts sur la diversité sociale et ethnique de la France.

BIBLIOGRAPHIE

ASCHER M. ET D'AMBROSIO U. ED (1994) *Special issue on Ethnomathematics in Mathematics Education,* For the learning of mathematics, **14-2**, Vancouver.

Et notamment

> BISHOP A. J. Cultural Conflicts in Mathematics Education : Developping a Research Agenda, 15-18.
>
> ZASLAVSKY C. « Africa Counts » and Ethnomathematics, 3-8.
>
> Pinxten R Ethnomathematics and its Practice, 23-25.

BARTON B. (1996) *Anthropological Perspectives on Mathematics and Mathematics Education* in International Handbook of Mathematics Education Kluwer, 1035-1054.

CABASSUT R. (2003) *Enseigner la démonstration,* Bulletin de l'APMEP, **449**, 757-770.

CASE R. W. (2005) *The Dutch Revolution in Secondary School Mathematics* Mathematics Teacher, **98-6**, 374-384.

CELI V. (2003) *L'enseignement de la géométrie en France et en Italie : quels choix et quels effets sur la formation des élèves,* Bulletin de l'APMEP, **449**, 771-783.

CLARKE D. (2003) *International Comparative Research in Mathematics Education* in Second International of Mathematics Education, 143-184.

GERDES P. (1996) *Ethomathematics and Mathematics Education* in International Handbook of Mathematics Education Kluwer, 909-944.

GERDES P. (2001) *Exploring plaited plane pattern among the tonga in Inhambane* Symmetry: Culture and Science, **12**, 115-126.

HOUDEMENT C. ET KUZNIAK A. (1999) *Quelques éléments de réflexion sur l'enseignement de la géométrie : de l'école primaire à la formation des maîtres,* Revue Petit X, **51**, 5-21.

KAISER G., LUNA E. ET HUNTLEY I. (1999) International Comparisons in Mathematics Education Falmer Press, ISBN 0-7507-09026-2.

Et notamment :

> BEATON A. E. ET ROBITAILLE D. F. *An overview of the Third International Mathematics and Science Study,* 30-47.
>
> COGAN L. S. ET SCHMIDT W. H. *An examination of Instructional Practices in Six countries*, 68-85.
>
> KEITEL C. AND KILPATRICK J. *The Rationality and Irrationality of International Comparative Studies*, 241-256.

KNIGHT C. AND VALVERDE G. *Explaining TIMSS Mathematics Achievement : A Preliminary Survey*, 48-67.

KNIPPING C. (2003) *Processus de preuve dans la pratique de l'enseignement : analyses comparatives allemandes et françaises en quatrième*, Bulletin de l'APMEP, **449**, 784-796.

KUZNIAK A. (2003) Paradigmes et espaces de travail géométriques. Note d'habilitation à diriger des recherches, IREM Paris 7, ISBN 2-86612-2486-8.

KUZNIAK A. (2004) *Sur les espaces de travail géométriques*, Séminaire national de didactique des mathématiques, IREM Paris 7, 91-110.

NISS M. (2003) *Mathematical competences and the learning of mathematics : the Danish KOM-project* sur le site http://www7.nationalacademies.org/.

OCDE (2003) *The PISA assessment framework* sur le site www.pisa.oecd.org.

OCDE (2004) *Apprendre aujourd'hui, réussir demain. Premiers résultats de PISA 2003* sur le site www.pisa.oecd.org.

RAMON-GONZALES-ANDRADE (2002) Manuel Marenostrum 2 Medio (Seconde), Chili.

ROYAL SOCIETY (2001) *Teaching and Learning Geometry.*

VALVERDE G. A. et AL (2003) According to the Book Using TIMSS to Investigate the Translation of Policy into Practice Through the World of Textbooks 212 p., Kluwer ISBN:1-4020-1034-6 .

WINSLOW C. (2005) *Définir les objectifs de l'enseignement mathématique : la dialectique matières-compétences*, Annales De Didactique Et De Sciences Cognitives, **10**, 131-156.

TRANSFORMATIONS DE REPRÉSENTATIONS SÉMIOTIQUES ET DÉMARCHES DE PENSÉE EN MATHÉMATIQUES

Raymond DUVAL
Professeur émérite, Université du Littoral Côte d'Opale
Laboratoire LCEM, Université du Littoral Côte d'Opale
Duval.Ray@wanadoo.fr

Résumé
La récurrence des difficultés d'apprentissage que les mathématiques suscitent oblige à s'interroger non pas seulement sur les contenus et sur la manière de les enseigner mais aussi sur les processus cognitifs sous-jacents aux démarches mathématiques. Le propos de cet exposé est d'introduire à une analyse cognitive de l'activité mathématique.
La situation épistémologique particulière des mathématiques par rapport aux autres domaines de connaissance conduit à conférer aux représentations sémiotiques un rôle primordial. Tout d'abord elles sont le seul moyen d'accès aux objets mathématiques ; ce qui soulève le problème cognitif du passage de la représentation d'un objet à une autre représentation de ce même objet. Ensuite, et surtout, les démarches mathématiques impliquent de manière intrinsèque la transformation de représentations sémiotiques.
En prenant quelques exemples dans les différentes représentations, iconiques et symboliques, des nombres, on montre que l'activité mathématique fusionne deux types de transformation de représentations sémiotiques : l'un qui correspond à un changement de registre de représentation et l'autre qui consiste à utiliser les possibilités de transformation propres à chaque registre. C'est le premier type de transformation qui se révèle être le plus difficile et le plus déroutant pour les élèves. Les difficultés pour passer d'une représentation dans un registre à une représentation dans un autre registre révèlent la complexité, trop souvent sous-estimée, de l'articulation entre eux des registres de représentation utilisés en mathématiques.
On montre enfin que l'opposition entre les représentations sémiotiques et les représentations mentales repose sur la confusion entre le système mobilisé pour produire une représentation et la modalité phénoménologique de cette production. Les représentations mentales sont souvent des représentations sémiotiques intériorisées.

Les recherches en didactique des mathématiques sont essentiellement centrées sur l'enseignement et privilégient par conséquent le point de vue et les préoccupations des enseignants. Cela a conduit à considérer les problèmes d'apprentissage en fonction des conditions d'organisation des activités en classe et en fonction de la complexité conceptuelle propre à chacun des contenus curriculaires à enseigner. Ce faisant, on a admis, à la suite de Piaget, l'hypothèse que les processus cognitifs sous-jacents à l'activité mathématique, seraient les mêmes que ceux mobilisés dans les autres domaines de connaissance.

Chacun sait pourtant que les mathématiques suscitent des difficultés d'apprentissage qui se révèlent vite plus complexes et plus résistantes que celles rencontrées dans les autres domaines de connaissance. Et beaucoup d'élèves ont le sentiment d'une séparation invisible entre les manières mathématiques de penser et celles pratiquées en dehors des mathématiques, même si les connaissances mathématiques servent, ou devraient leur servir, pour résoudre des problèmes ou comprendre des phénomènes rencontrés dans la réalité. Ont-ils tort ? Par delà les questions particulières d'apprentissage portant sur l'acquisition des concepts définis dans un programme annuel ou de cycle, cela oblige à se poser la question plus globale : qu'est-ce que l'activité mathématique a de si particulier par rapport aux autres activités de connaissance, pour susciter des difficultés d'apprentissage plus complexes que dans les autres domaines ? Car, en mathématiques, il faut non seulement comprendre pour apprendre, mais *comprendre de manière à apprendre à comprendre*, c'est-à-dire à devenir capable ensuite de se poser de nouvelles questions, de trouver des moyens de les explorer ou, tout au moins, de reconnaître et d'appliquer ce que l'on est censé avoir « acquis ».

C'est dans le champ de cette question, transversale aux activités mathématiques, toujours centrées sur un contenu particulier, que l'importance des représentations sémiotiques ou, plus exactement, le rôle fondamental joué par les transformations de représentations sémiotiques dans les activités mathématiques apparaît. Et cela aussi bien pour les mathématiques enseignées à l'école que pour les mathématiques pratiquées, à un plus haut niveau, par les experts de la discipline. En effet, les transformations de représentations sémiotiques se retrouvent aussi bien dans les mathématiques dites « intuitives » que dans celles qualifiées de « formelles », dans celles considérées comme « pratiques » que dans celles évoquées comme « théoriques ». Ce qui change est le type de représentations sémiotiques qui s'y trouve mobilisé ainsi que l'accent mis sur des productions orales interactives ou sur des productions écrites permettant d'explorer des cas possibles, d'effectuer des traitements ou d'organiser des données. Mais la transformation de représentations sémiotiques est intrinsèque à toute démarche mathématique. Et là se trouve l'une des sources principales des difficultés ou, plus exactement, de la complexité cognitive de l'apprentissage des mathématiques.

Mon propos est de montrer ce fonctionnement cognitif complexe et spécifique dont la pratique des mathématiques requiert le développement. Or ce fonctionnement est loin d'être toujours visible, surtout lorsqu'on se focalise sur un contenu mathématique qui est nécessairement particulier au regard des gestes intellectuels à faire pour pouvoir appréhender ce contenu comme objet ou pouvoir l'utiliser comme outil. Il ne peut pas y avoir d'apprentissage créateur à moyen et à long terme sans une prise de conscience de ces gestes plus globaux.

Pour rendre visible ce fonctionnement cognitif spécifique, j'analyserai quelques exemples très simples, sachant qu'on pourrait en prendre d'autres complètement différents, mais pour lesquels le même type d'analyse pourrait être fait, et a d'ailleurs été fait. Naturellement je le situerai sur le fond d'un problème cognitif fondamental : pourquoi les représentations sémiotiques sont-elles intrinsèquement nécessaires au fonctionnement de la pensée et quel est leur rapport avec les représentations « mentales » ? Ce problème, qui pourrait sembler théorique à certains, commande beaucoup d'explications didactiques concernant les processus de compréhension que l'apprentissage des mathématiques est supposé mobiliser chez les élèves.

I – POURQUOI LES REPRÉSENTATIONS SÉMIOTIQUES SONT-ELLES NECESSAIRES DANS TOUTE DÉMARCHE MATHÉMATIQUE ?

Pour illustrer la complexité du problème de la représentation, je partirai d'une photographie faite par Kosuth en 1965 et intitulée « Une et trois chaises ». Pour réaliser cette photographie, Kosuth a juxtaposé trois éléments dans le montage qu'il a photographié :

Éléments juxtaposés	Nature des éléments juxtaposés
1. Une CHAISE contre un mur.	**(1)L'OBJET lui-même.**
2. **La photographie** de cette chaise contre le mur.	**(2)**Une **image** de cet objet, produite physiquement (par un appareil).
3. **Une page de dictionnaire** ouvert au mot « chaise » et collée sur le mur.	**(3)**Une **description verbale.**
On pourrait compléter ce montage avec :	
4. **Le dessin** d'une chaise permettant de la fabriquer, comme dans une notice de montage.	**(4)Un autre type d'image,** produit par une procédure « sémiotique » de traçage.
5. **Des flèches sur le mur** pour marquer **la relation** (*ressemblance, référence ou équivalence*) **entre** tous ces différents types de présentation d'une chaise.	**(5)Un schéma** (*de type « réseau conceptuel »* ***?)***
	« UNE et CINQ chaises » ?

Figure 1 : Juxtaposition d'un objet et de plusieurs de ses représentations possibles.

L'originalité du montage effectué par Kosuth repose sur une **double juxtaposition**. Il y a tout d'abord la juxtaposition **d'un objet et de l'une de ses représentations** {O, R(O)}. L'objet lui-même, ici, est évidemment une chaise sur laquelle on peut s'asseoir, ce qui la distingue de la photo et du texte descriptif, qui ne sont que des représentations. Il y a ensuite la juxtaposition de **plusieurs représentations d'un même objet** {R.A(O), R.B(O)}. Kosuth s'est limité à deux représentations, mais il aurait pu également réaliser un montage « une et cinq chaises » et, plus généralement, « une et *n* chaises ».

Cette double juxtaposition met en évidence les deux caractéristiques essentielles à retenir pour analyser les représentations et pour comprendre leur rôle dans le fonctionnement cognitif de la pensée et dans l'acquisition des connaissances.

- (1) deux représentations sont différentes lorsque leurs contenus sont de nature différente, c'est-à-dire ne présentent pas le même type d'unités (mots, contours tracés, densité de points, flèches....), même si elles représentent le même objet ;
- (2) il y a autant de types de représentation différents que de moyens ou de systèmes différents pour produire une représentation : appareils physiques, systèmes sémiotiques. On ne peut ni classer, ni analyser les représentations sans les rapporter aux différents systèmes permettant de les construire. Cela veut dire que les représentations ne dépendent pas d'abord des individus mais des systèmes producteurs de représentations.

Ces deux caractéristiques sont liées dans la mesure où le *contenu d'une représentation* dépend autant du *système mobilisé pour produire* la représentation d'un objet que de *l'objet représenté*.

I – 1 La double juxtaposition et les deux problèmes cruciaux pour l'apprentissage et pour l'acquisition des connaissances

La double juxtaposition mise en scène par Kosuth n'a rien de fantaisiste ou d'exceptionnel. Elle reproduit une pratique culturelle devenue dominante dans l'enseignement et dans le monde de la communication. Il suffit de remplacer la chaise par n'importe quel autre objet pour constater que la présentation en parallèle de représentations différentes (la seconde juxtaposition) se retrouve dans n'importe quelle page de manuel, de magazine, de notice, de fiche de travail, et, évidemment, sur un écran d'ordinateur où il est possible de multiplier à loisir les représentations d'un même objet. L'activité cognitive qui est ainsi partout sollicitée est la reconnaissance des objets représentés à travers des représentations variées (images, schémas, explications verbales..), celles-ci devant s'éclairer mutuellement.

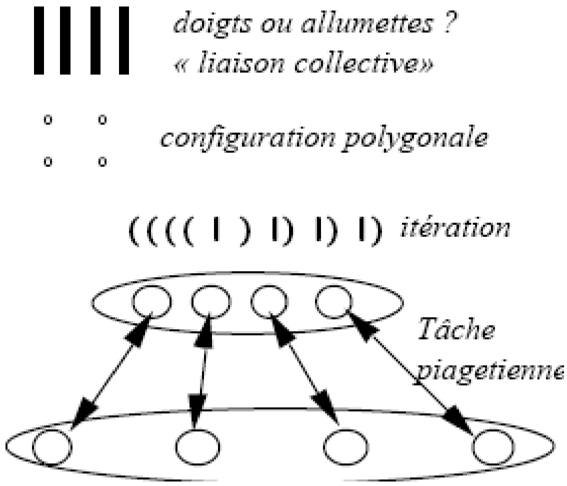
On suppose généralement que cette activité cognitive est triviale. En réalité c'est l'une des plus complexes qui soient, et cela en mathématiques plus que dans les autres domaines de connaissance. Et cette complexité se retrouve au centre de tous les problèmes d'apprentissage et d'acquisition des connaissances. La double juxtaposition mise en évidence par Kosuth permet de poser les deux problèmes cruciaux suivants :

PROBLÈME 1. Il y a beaucoup de situations où l'on donne seulement une représentation sans aucun autre accès à l'objet étudié : {R(O), ?}. Comment à partir de représentations acquérir la connaissance d'objets ou de phénomènes auxquels on ne peut pas avoir accès par une «expérience» plus ou moins directe ou personnelle ? Autrement dit, *les représentations peuvent-elles fonctionner comme des substituts de l'objet pour ceux qui n'en auraient pas déjà acquis une expérience plus ou moins directe ?*

Il y a évidemment une solution que l'on retrouve dans le développement de toutes les pédagogies : faire entrer des échantillons, des spécimens de la réalité étudiée dans la classe, ou au contraire sortir de la classe pour aller sur le terrain, pour permettre justement un accès plus direct aux objets et aux phénomènes étudiés. Cela est particulièrement évident pour les sciences de la vie et de la terre et plus largement pour les sciences expérimentales. La vidéo et les possibilités de simulation sur ordinateur s'inscrivent aussi dans ce souci pédagogique fondamental : ne pas s'en tenir à la présentation de représentations dans l'acquisition de connaissances !

PROBLÈME 2. Quand nous mettons côte à côte plusieurs représentations d'un même objet, pour les comparer {R.A(O_1), R.B (O_1), R.C (O_1)...}, nous pouvons constater que leurs contenus n'ont presque toujours rien de commun. Par exemple une photographie de A et une description verbale de A, ou une photographie de A et une caricature de A. *Comment reconnaître que c'est le même objet qui est représenté dans deux représentations dont les contenus ne présentent aucune ressemblance, si l'on n'a pas (ou pas eu) un autre accès à cet objet autrement que par des représentations ?*

C'est ce problème qui se révèle crucial dans l'apprentissage des mathématiques. Il suffit de prendre l'exemple de la représentation des nombres pour le voir. Nous pouvons aisément réaliser une juxtaposition de différents types de représentations possibles d'un nombre entier (figure 2). Mais pouvons-nous réaliser un montage à la Kosuth, c'est-à-dire juxtaposer les nombres eux-mêmes et leurs multiples représentations ?

<table>
<tr><th>Représentations ICONIQUES
Représentations « propres »</th><th>Représentations SYMBOLIQUES
(chiffres ou mots)</th></tr>
<tr><td>
</td><td>4 : SYSTÈME décimal.

100 : SYSTÈME binaire.
Ces systèmes de position à base n impliquent ce signe par excellence, « 0 », lequel ne s'entend pas dans l'oralisation de l'écriture symbolique et ouvrent des extensions.

64/16 : écriture fractionnaire.

Quatre : dénomination verbale dont le sens vient de sa place dans une suite de dénominations.</td></tr>
</table>

Figure 2 : Juxtaposition de plusieurs représentations d'un nombre.

On remarquera que nous ne pouvons avoir ici qu'une juxtaposition de représentations et non pas une double juxtaposition comme dans le montage photographié par Kosuth, même si les représentations des nombres peuvent être classées en deux catégories : les représentations iconiques, c'est-à-dire celles qui présentent une ressemblance avec des collections d'éléments matériels, et les représentations symboliques c'est-à-dire celles qui dépendent d'un système de règles de composition et qui impliquent des signes ne renvoyant à aucune « intuition » sensible ou concrète, comme le symbole « 0 ».

Cette impossibilité d'une double juxtaposition n'a rien d'accidentel, elle marque le partage entre deux situations épistémologiques fondamentales pour le développement des connaissances. Il y a la situation dans laquelle **on peut avoir accès aux objets eux-mêmes :**

- soit directement par une perception non instrumentée, ou en recueillant des données par le prélèvement d'échantillons, *etc.* ;
- soit par des instruments qui accroissent le champ de perception (télescope, microscope) ou qui permettent de recueillir des données autrement inaccessibles (spectromètres).

Et il y a la situation dans laquelle les objets étudiés **sont inaccessibles en dehors de représentations relevant uniquement d'une activité sémiotique,** comme en mathématiques. Autrement dit le rôle des représentations sémiotiques change totalement selon que l'on se trouve dans l'une ou dans l'autre de ces deux situations épistémologiques. L'enjeu du problème 2 pour l'enseignement est de savoir si les apprentissages mobilisent les mêmes processus cognitifs dans la première situation et dans la seconde ou si, au contraire, ils ne requièrent pas des processus plus complexes lorsque les objets d'étude sont perceptivement ou instrumentalement inaccessibles que lorsqu'ils ne le sont pas.

I – 2 Le problème cognitif du passage d'une représentation à une autre dans les deux situations épistémologiques fondamentales

Les processus cognitifs permettant de reconnaître un même objet dans des représentations différentes ne peuvent pas être les mêmes dans les deux situations.

Dans la situation où un accès direct ou instrumental aux objets étudiés est possible, la reconnaissance d'un même objet dans deux représentations différentes, et donc la capacité de passer d'une représentation à une autre (flèches 3 et 5 dans la figure ci-dessous), s'acquièrent par association directe avec l'expérience de l'objet (flèches 1, 2, 4). C'est l'expérience de l'objet lui-même qui assure la médiation entre des représentations dont les contenus sont différents. Dans cette situation, le rôle des représentations sémiotiques dans l'acquisition des connaissances est second puisqu'on peut toujours revenir à l'expérience pour contrôler la pertinence et le sens de ces représentations.

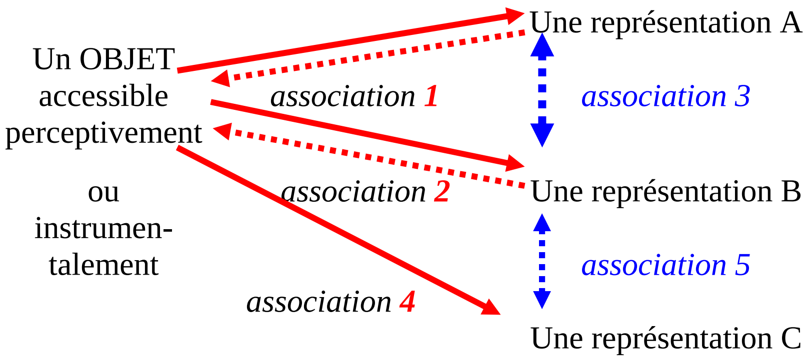


Figure 3 : Procédure associative en situation d'accessibilité directe ou instrumentale aux objets d'étude.

Il n'en va plus de même pour l'étude des objets perceptivement ou instrumentalement inaccessibles, et pour lesquels nous n'avons d'autres moyens pour les appréhender ou les utiliser que la production de représentations sémiotiques. Négligeons momentanément la question de savoir ce qui permet de penser que, dans cette situation, les représentations produites représentent bien quelque chose de « réel » et de rationnellement explorable, et focalisons-nous sur le passage d'une représentation à une autre, c'est-à-dire sur la reconnaissance d'une même dénotation. On voit alors que toute possibilité d'association d'une représentation avec l'objet représenté devient impossible. Comment dans ces conditions, établir que deux représentations différentes A et B sont bien des représentations du même objet, alors que leurs contenus sont radicalement différents ?

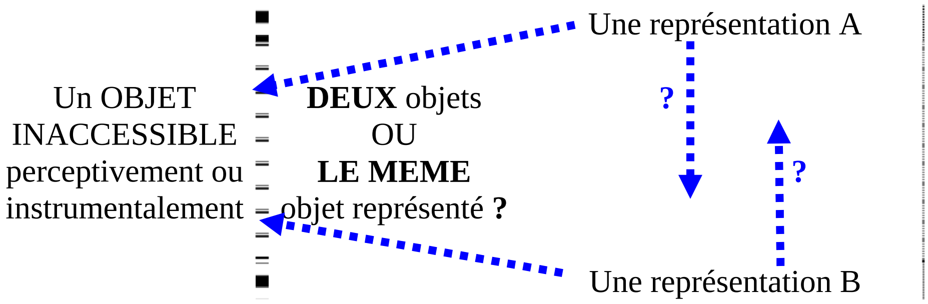


Figure 4 : Quelle reconnaissance en situation d'inaccessibilité non sémiotique ?

La juxtaposition de huit représentations possibles d'un nombre, présentée plus haut (figure 2), illustre bien la complexité de ce problème ne fût-ce qu'au plan didactique ! Quand un enfant utilise une, voire même deux, de ces représentations devient-il pour autant capable de reconnaître les nombres dans une troisième représentation ou une quatrième représentation ? On a peut-être aujourd'hui oublié la distance cognitive qui sépare la représentation associée à la tâche piagétienne et les autres représentations iconiques, ainsi que les débats et les difficultés que sa valorisation institutionnelle contre d'autres représentations, entre les années 60 et 80, a suscité ! On a ainsi opposé la construction du concept de nombre par des opérations de classification et de sériation, à l'énumération verbale d'une suite de nombres, que l'on n'hésitait pas alors à qualifier de « simple récitation d'une comptine ». Il a fallu, entre autres, les travaux de Gelman pour rappeler les principes sous-jacents à tout comptage, c'est-à-dire à toute énumération impliquant nécessairement des moyens de dénomination. La conquête des nombres par les jeunes enfants ne se fait pas par des actions sur un support de représentations iconiques ou sur un matériel équivalent, mais par la coordination d'actions concrètes sur des représentations iconiques avec des opérations sémiotiques relevant de systèmes sans rapport avec les représentations iconiques mobilisées. L'enjeu essentiel de l'enseignement est le passage des représentations iconiques, quelles qu'elles soient, aux systèmes de représentations symboliques, les énumérations verbales familières constituant une zone de transition indispensable ne serait-ce qu'en raison de leur spontanéité orale. C'est là un objectif difficile. Il arrive, comme on l'a observé dans une classe de quatrième au collège, qu'une majorité d'élèves ne réussisse pas cet exercice à trou :

$$1 + 1/2 + 1/4 + 1/5 + \ldots\ldots = 2.$$

Les enseignants l'avaient proposé dans le but de faire passer les élèves par la représentation décimale 1 + 0,50 + 0, 25 + 0, 20 + ... = 2. , ce qui, évidemment, avait été très loin de leur venir à l'esprit.

II – QUELS PROCESSUS COGNITIFS MOBILISE NÉCESSAIREMENT UNE DÉMARCHE MATHÉMATIQUE ?

Si personne ne conteste l'utilisation nécessaire de représentations sémiotiques dans les activités mathématiques, en revanche le rôle qu'elles y jouent est l'enjeu d'un débat aussi bien théorique que pratique. On admet, par la force des choses, que des représentations sémiotiques soient utilisées à la place des objets mathématiques auxquels on veut faire appel ou avec lesquels on veut travailler mais on refuse généralement que l'utilisation de représentations sémiotiques, celles mobilisées ou d'autres, puisse être intrinsèque aux processus cognitifs de la pensée, et plus spécifiquement à ceux engagés dans toute activité mathématique. En témoigne la permanence de l'opposition superficielle entre langage et pensée qui conduit à opposer les représentations sémiotiques comme étant des représentations extérieures aux représentations « mentales » asémiotiques, ou à opposer le langage à l'action et aux opérations de pensée.

A l'encontre de cette réduction des représentations sémiotiques au seul rôle de substitut des objets mathématiques, ou à celui d'expression de représentations mentales, nous allons nous arrêter sur ce qui constitue la caractéristique fondamentale de toute démarche mathématique : la **transformation** de représentations sémiotiques. **Car en mathématiques, une représentation n'est intéressante que dans la mesure où elle peut se transformer en une autre représentation.** C'est seulement dans la mesure où elles répondent à cette exigence fondamentale que les représentations sémiotiques peuvent représenter quelque chose de « réel » et de rationnellement explorable, c'est-à-dire devenir le moyen d'accès à des objets inaccessibles autrement.

On voit alors que la diversité des représentations sémiotiques, loin de constituer une variété arbitraire, constitue une extension de la capacité cognitive de la pensée, car des systèmes de représentations sémiotiques différents offrent des possibilités de transformations ou d'opérations qui sont totalement différentes. La diversité considérable des représentations des nombres, que nous avons évoquée, suffit pour le montrer. Mais parallèlement à cette diversification des possibilités de transformations que la variété des représentations sémiotiques ouvre, apparaît une deuxième exigence fondamentale pour le développement de l'activité mathématique : deux représentations différentes, avec leurs possibilités propres de transformation doivent pouvoir être mises en regard l'une de l'autre.

Pour illustrer ces deux exigences, nous allons prendre un exemple simple, celui de la représentation polygonale des nombres qui constitue l'une des représentations iconiques possibles des nombres (figure 2).

II – 1 Exemples de transformations de représentations

Rappelons tout d'abord la condition préalable pour qu'une représentation sémiotique puisse intrinsèquement donner lieu à une transformation : elle doit pouvoir être obtenue et être modifiable par une procédure de production, c'est-à-dire par une procédure qui permet de transformer une représentation que l'on se donne en une autre représentation du même genre[1]. Dans l'exemple ci-dessous, la représentation est celle d'un point ou

---

[1] Au lieu de procédure de production, on pourrait tout aussi bien parler de « règle de jeu ». Par exemple : « Prenez un entier, n; s'il est pair, vous le divisez par 2, s'il est impair vous le multipliez par 3 et vous ajoutez 1. Vous recommencez cette opération avec le résultat obtenu ». Nous préférons cependant parler de « procédure de production » plutôt que de « règle du jeu », parce que sa fonction première est de générer beaucoup de données qui vont servir de base d'observation et que cette génération de données est une étape fondamentale dans la découverte ou dans la résolution de problèmes (Duval, 2003a, 27). Ainsi la procédure de production conduit à l'observation suivante : on tombe toujours sur 1. C'est la conjecture de Syracuse (Delayae, 1998, 247). En outre cette procédure de production ne doit pas être confondue avec

d'un jeton et la procédure consiste à y ajouter d'autres points de manière à obtenir chaque fois une configuration de forme carrée.

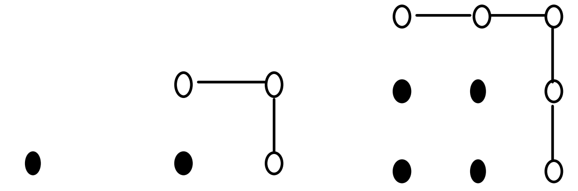
A. Une procédure de transformation d'une représentation donnée.	
B.1 **Description** de chaque représentation obtenue.	**1** **4** **9**
B.2 **Description** de la procédure de transformation.	**1** + **3** + **5**

Figure 5 : La valeur représentative d'une représentation est dans sa potentialité de transformation en d'autres représentations.

En ce qui concerne la première exigence, la procédure de transformation d'une configuration polygonale est perceptivement simple. En ce qui concerne la deuxième exigence, la mise en correspondance de chacune des configurations obtenues avec des représentations symboliques du nombre de points conduit à voir la suite des écritures numériques comme une description des transformations figurales successives.

Mais on aurait pu inverser les rôles en choisissant comme représentation de travail la représentation numérico-symbolique et dans ce cas la transformation polygonale apparaîtrait comme une illustration de la procédure de transformation numérico-symbolique. On remarquera également qu'il y a deux descriptions numériques possibles de la procédure dont les premiers pas sont présentés dans la figure 5.

Maintenant, on peut modifier la procédure de transformation précédente en effectuant un « encerclement » complet, et non plus seulement partiel, du point (ou du pion) de départ (figure 6 ci-dessous). Mais alors la description numérico-symbolique de cette procédure de transformation s'avère plus complexe à formuler, *car elle présuppose une réorganisation visuelle de la configuration polygonale obtenue, en des sous-reconfigurations appropriées.*

les règles de formation qui sont propres à chaque système de représentation (syntaxe d'une langue naturelle ou d'une langue formelle, écriture numérique de position, règles syntaxiques en algèbre...) et qui permettent de reconnaître ou d'accepter une représentation comme étant une représentation représentant quelque chose ou pouvant représenter quelque chose (Duval, 1995, 37-38).

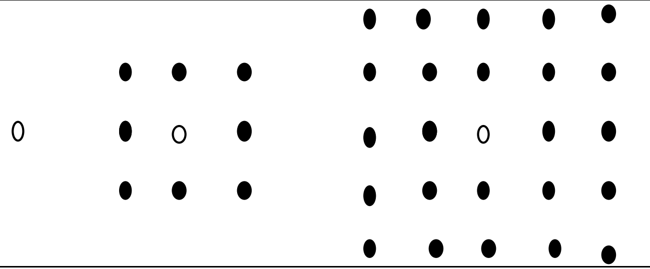
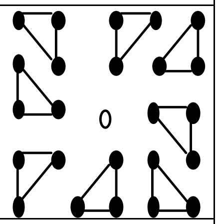
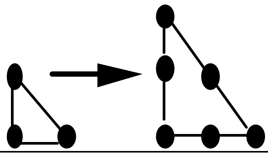
Une procédure de transformation d’une configuration par « encerclement »	
Description de la procédure de transformation.	$(1 \times 8) + 1 \longleftarrow (3 \times 8) + 1$
Sous reconfigurations triangulaires à discerner **pour la conversion en une description numérique.**	
Transformation des sous reconfigurations triangulaires à chaque nouvel « encerclement »	

Figure 6 : Transformations d’une configuration polygonale par « encerclements ».

Ce deuxième exemple met en évidence la complexité cognitive de la conversion à faire pour décrire numériquement la procédure de cette reconfiguration de contour carré. Dans l’exemple précédent, la dénomination numérico-symbolique (+3, +5, ...) de ce que produisait la procédure correspondait à l’unité figurale venant « compléter » la configuration polygonale précédente. Ici ce n’est plus le cas, la dénomination numérico-symbolique ((1 × 8), (3 × 8), (5 × 8)...) doit être mise en correspondance avec une sous-reconfiguration triangulaire, qui est différente de l’unité figurale carrée venant entourer la représentation précédente. On remarquera que cette réorganisation visuelle, des représentations ainsi obtenues, en sous-configurations triangulaires est plus facile à discerner à partir de la deuxième transformation, c’est-à-dire avec la troisième configuration.

Ces exemples de transformations de configurations polygonales de points, s’ils se révèlent vite complexes d’un point de vue cognitif, peuvent paraître très pauvres quant au contenu mathématique qu’ils peuvent représenter. Regardons donc un problème classique dont l’application à la réalité n’a rien d’un exercice inventé à des fins d’apprentissage : le pavage d’un plan par des hexagones d’aire unité minimale minimise-t-il la cire utilisée par les abeilles ? La réponse passe par le calcul du rendement d’un pavage et, pour le calculer, on regarde un pavage inscrit dans un disque. On peut ainsi montrer qu’un disque « hexagonal » de rayon **n** contient $\mathbf{3n^2 - 3n + 1}$ cellules ou hexagones et que...*etc.* (Sabatin 2004). Le type de transformation de configurations examiné d’un point de vue cognitif dans les deux exemples précédents peut-il, sans connaissances mathématiques, nous aider à trouver cette première formule ?

En supposant que chaque point représente un hexagone régulier et en partant d’un point, on a la procédure d’encerclements suivante :

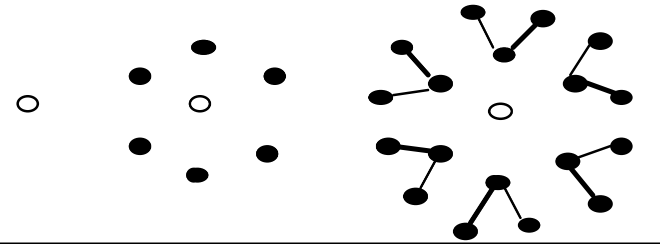
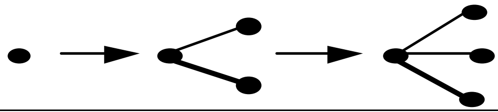
Transformations d'une configuration par « encerclements » d'hexagones réguliers.	
Chaque nouvel encerclement est obtenu par la procédure de transformation ci-contre.	

Figure 7 : Transformation d'une configuration polygonale correspondant à un pavage, par des hexagones réguliers, inscrit dans un disque.

Remarquons qu'il est plus facile, et peut-être visuellement plus pertinent, de construire cette suite de configurations polygonales que de construire une suite de disques, de rayon 1, 2, 3, chacun étant pavé par des hexagones réguliers (Sabatin, 2004, p. 75). Maintenant la question est celle de la description numérico-symbolique de cette suite de transformations polygonales. Elle s'avère encore un peu plus complexe que précédemment parce qu'il y a plus d'unités figurales différentes à prendre en compte pour les mettre en correspondance avec les dénominations numérico-symboliques. Car ici il faut distinguer le nombre de cercles circonscrits et le nombre d'hexagones ajoutés à chaque nouvel « encerclement ».

Nombre de cercles circonscrits.	Nombre d'hexagones ajoutés par chaque nouvel « encerclement » de l'hexagone central.
1	**+ 0**
2	**+ (1** $\times$ 6**)**
3	**+ (2** $\times$ 6**)**
4	**+ (3** $\times$ 6**)**
n	**+** (**(n-1)** $\times$ 6)
	Et pour décrire la somme des nombres d'hexagones ainsi ajoutés, on reprend la formule $(n^2 + n)/2$: $$\mathbf{((n-1)^2 \times 6) + 6\,(n-1))/2}$$ *c'est-à-dire* **:** $$\mathbf{3n^2 - 3n}$$ ***e**t en comptant l'hexagone central :* $$\mathbf{3n^2 - 3n + 1}$$

Figure 8 : Description des transformations de la configuration polygonale correspondant à un pavage par des hexagones.

La description numérico-symbolique de la procédure de transformation peut elle même à son tour être décrite de manière littérale, ce qui implique le passage à un tout autre type de représentation des nombres et de leurs relations. Là on semble devoir tricher un peu, puisqu'il faut faire appel à la formule $\mathbf{(n^2 + n)/2.}$ Mais ce n'est là qu'un raccourci de présentation rédactionnelle, car cette formule peut elle-même être trouvée de la manière décrite dans la figure 10 (voir ci-après).

II – 2 Les deux types de processus cognitifs sous-jacents à toute démarche mathématique

Il y a évidemment deux points de vue différents pour analyser les exemples précédents. Le point de vue mathématique et le point de vue cognitif.

D'un point de vue mathématique on peut se demander si le travail de transformations de représentations s'effectue dans un cadre numérique, ou dans un cadre géométrique ou même dans un cadre algébrique. En fait ici il est difficile de décider car ils se recouvrent en partie.

D'un point de vue cognitif, la situation est plus nette. **Il y a deux types de transformations qui sont toujours sémiotiquement disjoints et dont les fonctionnements cognitifs sont hétérogènes et indépendants.** Toute démarche mathématique les mobilise simultanément ou alternativement, explicitement ou implicitement. Peu importe la manière dont ces deux types de transformations sont mobilisés, l'essentiel pour une analyse cognitive de l'activité mathématique est de bien les identifier et de bien les séparer.

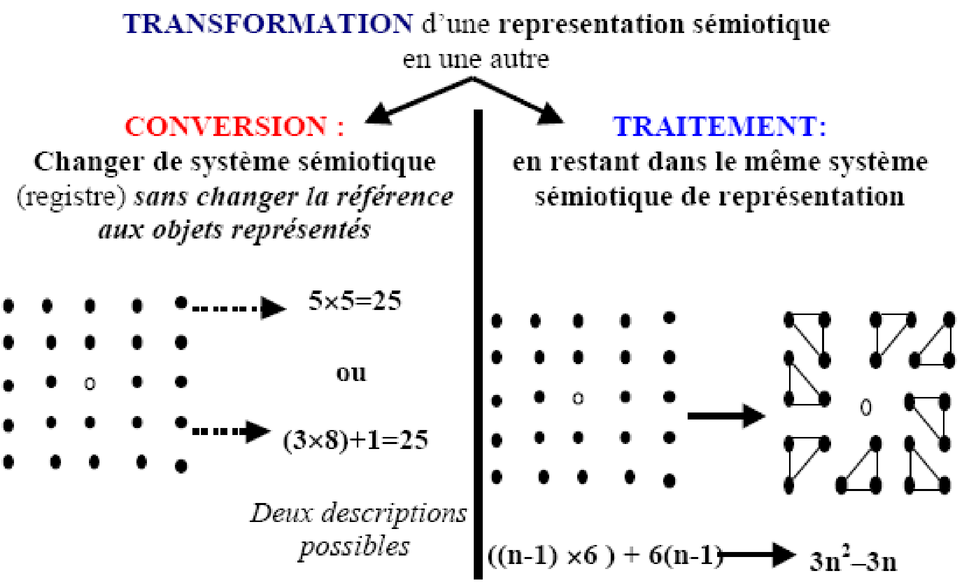


Figure 9 : Deux types de transformations des représentations, cognitivement hétérogènes.

Même si le choix d'une conversion à faire est mathématiquement commandé par le traitement que l'on veut effectuer, la conversion est une transformation dont le fonctionnement cognitif est hétérogène et indépendant de celui des traitements. **Et c'est ce type de transformation qui se révèle être le plus difficile et le plus complexe dans l'apprentissage des activités mathématiques.**

II – 2.1 Complexité cognitive de la conversion des représentations

L'importance et la complexité des transformations de représentations du type conversion sont trop souvent méconnues parce qu'on les assimile à de simples phénomènes de traduction ou de codage, et donc à des phénomènes de surface par rapport à ce qui serait un véritable travail de conceptualisation. Mais une telle assimilation revient à réduire la conversion aux seules transformations du type *langage* $\rightarrow$ *écriture symbolique*, et à laisser de côté toutes les autres comme celles de type configuration $\rightarrow$ écriture symbolique (décimale) comme dans les exemples ci-dessus (figures 5, 6, 8, 9). On remarquera que pour ces conversions il s'agit davantage d'une **description** que d'un codage ou d'une traduction. Et si nous inversions le sens de ces conversions, il serait encore inexact de parler de traduction ou de codage. La conversion de représentations d'un registre A vers un registre B présente deux caractéristiques cognitives qui empêchent de la subordonner à une conceptualisation non sémiotique.

1. Elle est **orientée** et **non réversible**. Ce qui veut dire que la conversion directe et la conversion inverse sont souvent de nature différente et soulèvent des difficultés et des obstacles qui n'on rien de commun. Ainsi, pour en rester aux exemples de la représentation polygonale des nombres, la conversion directe *écriture numérico-symbolique* $\rightarrow$ *configuration polygonale* représente un saut représentationnel qui n'a rien de commun avec la conversion, laquelle consiste en une description.

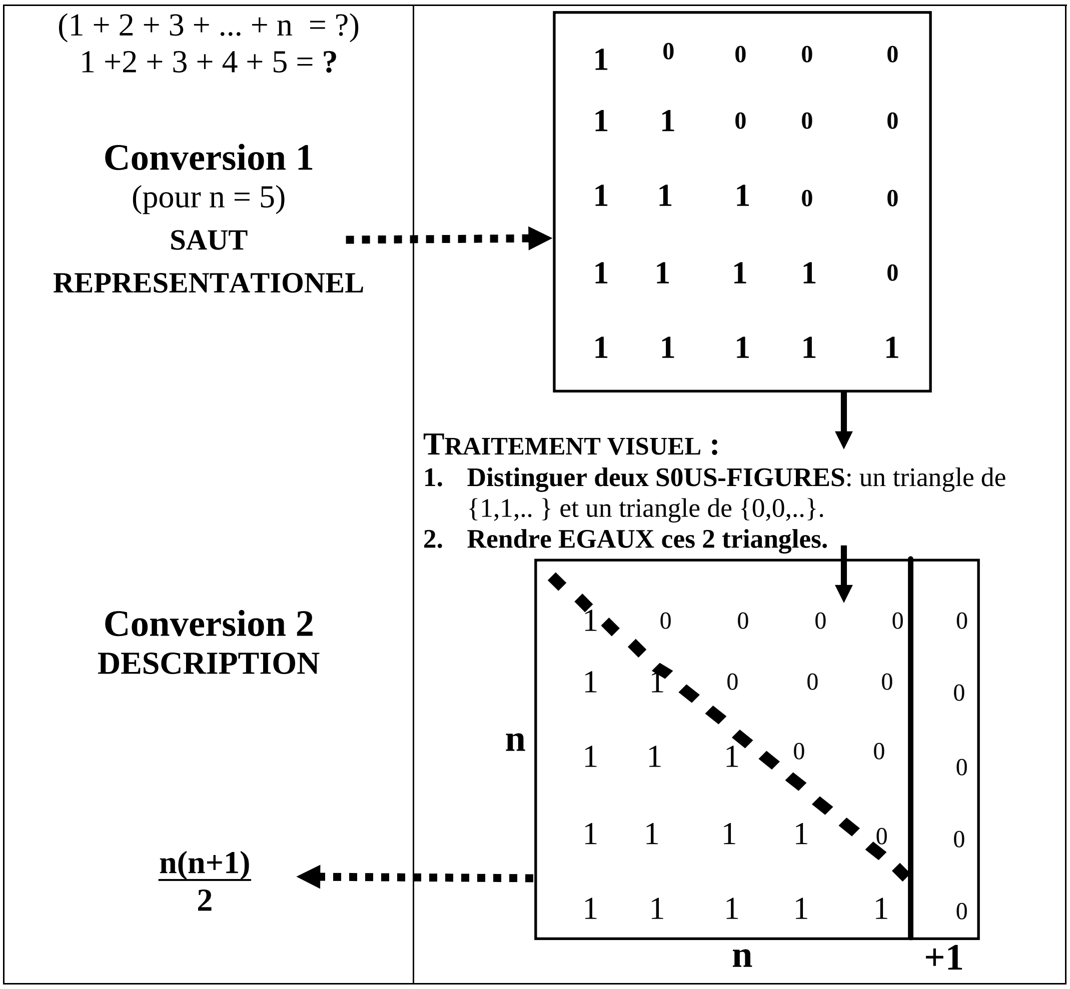


Figure 10 : Conversion directe et conversion inverse.

Le passage d'une représentation discursive (verbale ou numérico-symbolique) à une représentation non discursive représente très souvent un saut représentationnel important. Ici le saut repose dans le choix et l'apport de la disposition spatiale des points pour représenter une suite de nombres. Dans cette conversion le marquage explicite de l'opération numérique disparaît. La conversion inverse consiste à faire réapparaître une opération numérique. Et dans cette conversion inverse, la multiplication paraît aussi congruente que l'addition, mais elle doit prendre en compte des places vides que la conversion directe a en quelque sorte créées.

De manière plus générale, à partir d'une représentation d'arrivée, on ne retrouve pas nécessairement la représentation de départ et les opérations pour revenir à l'une des représentations de départ possibles ne sont pas les mêmes que celles ayant permis la conversion directe. Le point le plus important pour notre propos est que l'on peut étudier de manière expérimentale les facteurs qui rendent visibles ou qui au contraire occultent les conversions à faire dans une démarche de résolution de problèmes. On peut également proposer aux élèves des activités pour prendre conscience de ce jeu complexe et spécifique aux mathématiques et leur permettre ainsi de se l'approprier.

2. La mise en correspondance entre *la représentation de départ* et *celle d'arrivée*, se fait en fonction des unités pertinentes de leurs contenus respectifs et non pas en fonction de l'objet représenté par les deux représentations. La reconnaissance du même objet représenté, c'est-à-dire de l'invariance référentielle, **RÉSULTE de cette mise en correspondance discriminative entre unités constitutives des contenus.** Elle ne la commande pas. Ainsi dans le pavage hexagonal d'un cercle (figures 7 et 8) il faut discriminer respectivement :

- dans le contenu visuel, les cercles circonscrits et les « couronnes » successivement ajoutées ;
- dans le contenu de la formule littérale descriptive, (avant sa transformation par traitement) la dénomination « n » et la dénomination « (n-1) ».

Le saut représentationnel qu'est la conversion devient un problème cognitif crucial pour les apprentissages en situation épistémologique d'inaccessibilité des objets représentés. Il peut être si important que l'on recourt parfois à *une troisième représentation*, qui servira transitoirement de représentation intermédiaire, *pour expliciter comment se fait la mise en correspondance* entre le contenu de la représentation de départ et celui de la représentation d'arrivée. Cela apparaît dès que le langage ordinaire est mobilisé comme registre de départ. Ce qui est le cas avec tous les problèmes se référant à une situation de la vie quotidienne (Duval 2003 a).

II – 2.2 Type de traitement et de registre de représentation mobilisé

Les traitements dépendent des possibilités de transformation propres au registre de représentation utilisé. Ainsi les différents registres de représentation n'offrent pas les mêmes possibilités de traitement :

- soit du point de vue de la puissance de traitement. Les possibilités de calcul ne sont pas du tout du même ordre avec les représentations symboliques des nombres et avec les représentations iconiques ! Celles-ci présentent vite des limitations insurmontables, non seulement concernant la « grandeur » des nombres ou la nature des nombres, mais également la nature des opérations. Les représentations iconiques ne permettent guère que les opérations additives ;

- soit du point de vue heuristique. Dans l'exemple que nous venons de voir (figure 10), le traitement relève d'une réorganisation visuelle de la configuration qui a été obtenue au terme de la première conversion.

Mais derrière cela, qui est évident, il y a un point essentiel concernant les «signes» et plus généralement toute activité sémiotique : **il n'y a pas de signes en dehors d'un système sémiotique**. On peut illustrer cela en revenant aux représentations des nombres et en comparant, par exemple, la liaison collective (| | | |) et l'écriture décimale « **4** ».

Un système sémiotique est constitué :

a) De règles organisatrices pour combiner ou regrouper des éléments en unités significatives, c'est à dire des expressions ou des unités figurales élémentaires ;

b) D'éléments prenant une valeur de sens qu'en opposition de choix par rapport à d'autres éléments (par exemple, les chiffres d'une base d'un système de numération), leur utilisation selon les règles organisatrices permettant de désigner des objets.

Les systèmes décimaux, binaires, *etc.* de représentation des nombres sont les systèmes sémiotiques les plus simples, les plus purs et les plus puissants que l'on puisse trouver. Ainsi ils ont une règle organisatrice (un déplacement de position vers la gauche correspond à une opération d'une élévation à la puissance) et leurs éléments sont définis par la base, laquelle comprend ce signe « 0 » qui ne peut désigner aucun objet. Les traitements numériques, effectués dans ces systèmes, doivent respecter ces règles et contraintes organisatrices internes au système, car ce sont elles qui leur donnent non seulement une capacité de représentation illimitée mais également leur puissance opératoire pour toutes les opérations arithmétiques. Ils représentent un pas important dans le développement des mathématiques.

Par rapport à cela, les représentations iconiques, à commencer par les liaisons collectives (| | | |), ne sont pas des signes mais des **pseudo-objets**. Elles n'ont pas de règles organisatrices qui déterminent leur emploi ou leurs combinaisons. Les opérations que l'on peut faire sur ces pseudo-objets sont externes et isomorphes à celles que l'on peut faire sur des objets matériels, comme le montrent bien les tâches proposées dans les épreuves piagétiennes. Ces représentations iconiques des nombres peuvent servir :

- soit de support visuel pour des manipulations de reconfiguration perceptive (regroupement, mise en correspondance), comme on a pu le voir dans les exemples précédents dans lesquels il y avait toutefois une procédure de transformation ;
- soit de support matériel pour des comptages comme on peut l'observer dans la résolution de problèmes de dénombrement (Duval, 2003, p. 22-25).

Mais elles ne peuvent pas constituer à elles seules un moyen de traitement. Leur utilisation mathématique requiert au moins une première articulation avec un système de représentation sémiotique, ne serait-ce que pour permettre les opérations de comptage.

En ce qui concerne **les registres communs** à tous les domaines de connaissance (la langue et les représentations figurales), *les mathématiques ne font pas appel aux mêmes possibilités de transformation* que celles que l'on utilise communément en dehors des mathématiques. Pour le langage ordinaire, cela peut être observé de façon spectaculaire avec la première des opérations discursives, la désignation des objets (Duval, 2003b, p. 26-27 ; Duval, 1995, p. 98-110). Pour la visualisation, c'est-à-dire pour tout ce qui se rapporte à la production instrumentée ou à l'analyse de «figures géométriques », cela peut être observé avec les différentes pratiques de décomposition et de recomposition des formes qui sont le degré zéro de toute activité géométrique (Duval, 2005). Or dans ce recours nécessaire à ces registres communs, on fait comme si on les utilisait en mathématiques de la même manière qu'en dehors des mathématiques. Ce qui est une source profonde de malentendus entre l'enseignant et les élèves.

II – 3 Vue d'ensemble des processus cognitifs sous-jacents aux démarches mathématiques

En présentant ces exemples, mon but était de mettre en évidence les deux types de transformations que l'activité mathématique mobilise simultanément ou en alternance. Ils correspondent à deux types de processus cognitifs hétérogènes et indépendants l'un de l'autre. Cela, évidemment, laisse entière la question du caractère fondamental et général de ces deux processus. Il faut donc regarder la variété des registres de représentation dans lesquels, ou entre lesquels, ces deux types de transformations sont effectués. La classification ci-dessous en donne un premier aperçu et permet d'avoir une vue d'ensemble des processus cognitifs sous-jacents aux démarches mathématiques.

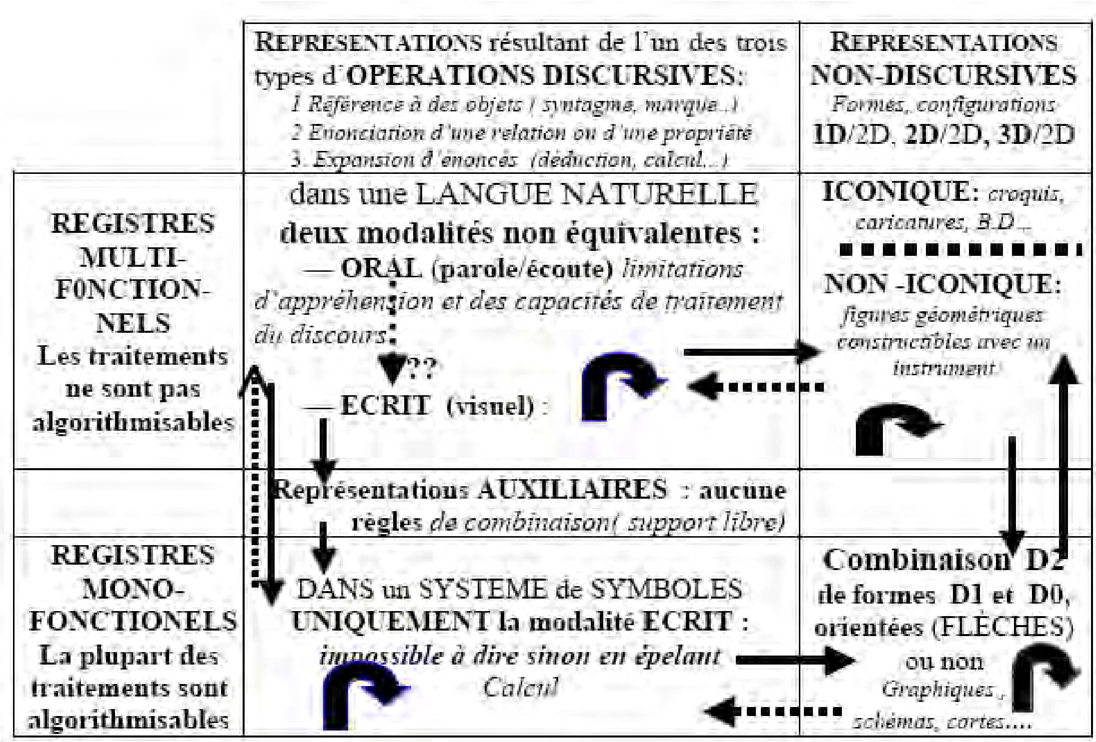


Figure 11 : Les processus cognitifs pouvant ou devant être mobilisés dans une démarche mathématique.

Le jeu cognitif des transformations de représentations sémiotiques, mobilisant simultanément ou en alternance conversions ((les flèches rectilignes) et traitements (les flèches larges recourbées), est schématisé sur le fond d'une classification des registres de représentations sémiotiques en quatre grands types. Les conversions directes et inverses sont distinguées par des traits pleins et des traits en pointillés. Enfin on remarquera que la modification modale importante que constitue le passage de l'oral à l'écrit est propre au registre des langues naturelles et qu'elle ne peut donc pas être considérée comme un traitement ou comme une conversion.

On peut voir ainsi que, d'un point de vue cognitif, la géométrie repose sur l'articulation des deux registres multifonctionnels (au niveau de l'enseignement primaire) et que le fonctionnement cognitif permettant cette articulation exige la mobilisation, simultanée ou en alternance, de conversions directes et inverses ainsi que des traitements spécifiques à chacun de ces deux registres (Duval, 2005). Exigence qui n'a rien de naturel, qu'on ne retrouve pas de cette manière dans les autres domaines de connaissance et qui demande donc des apprentissages spécifiques (Godin & Duval, 2005). On remarquera aussi que le passage des registres de langue naturelle aux registres monofonctionnels discursifs requiert souvent le recours à des représentations auxiliaires, comme on peut le voir, par exemple avec la compréhension des énoncés de problèmes dès l'enseignement primaire (figure 12).

Signalons enfin, que les différentes conversions (flèches rectilignes) constituent chacune des variables cognitives indépendantes à prendre en compte dans l'analyse des apprentissages. Concrètement cela nous renvoie à la question : les élèves peuvent-ils mettre en œuvre d'eux-mêmes chacune de ces différentes conversions, ou cela ne requiert-il pas, au contraire, un travail spécifique de coordination entre deux registres et une prise de conscience du fonctionnement spécifique à chacun des registres ? Car c'est leur fonctionnement en synergie qui constitue les démarches de pensée en mathématiques.

III – ÉCLAIRAGES SUR LES PROBLÉMATIQUES D'APPRENTISSAGES

III – 1 Un principe méthodologique d'analyse pour la recherche comme pour des diagnostics

Il faut commencer par **SÉPARER COMPLÈTEMENT** ces deux types de transformation que sont les conversions et les traitements. Cela aussi bien pour faire une analyse a priori des tâches, y compris de celles impliquées par la résolution d'un problème, que pour faire une analyse des productions d'élèves. Car, répétons le, d'un point de vue cognitif ces deux types de transformations de représentation sémiotique dépendent de processus qui n'ont rien de commun. Ce sont deux sources indépendantes de difficultés dans l'apprentissage. Et la toute première source de difficulté est d'abord dans les changements de registre de représentation. La conversion est **ce seuil de compréhension** qui apparaît souvent aux élèves comme un tour de magie, qui ne peut être ni appris ni enseigné.

Cette séparation va à l'encontre de la pratique courante qui considère conversion et traitement comme un tout inséparable dans la résolution de problème. Mais pour comprendre les difficultés récurrentes des étudiants face à un problème, on ne peut pas les dissoudre dans une analyse menée du seul point de vue mathématique. Car ce que l'on considère comme simple et premier d'un point de vue mathématique présuppose pour devenir accessible aux élèves une synergie cognitive de différents registres de représentation. Or cette synergie :

1) n'est ni sollicitée ni requise dans la plupart des autres domaines de connaissances, en raison de l'accessibilité non sémiotique aux objets ou phénomènes étudiés (figure 3) ;
2) exige un long travail, non de construction conceptuelle, mais de construction de «l'architecture» des différents systèmes producteurs de représentations, sémiotiques et non sémiotiques qui constituent le «sujet épistémique».

On objecte généralement que, dans la résolution d'un problème, ce sont les traitements qui sont importants mathématiquement et non point les conversions, car c'est le traitement à faire qui permet de choisir la conversion utile ou pertinente. Ce qui est vrai mais cela n'affaiblit pas la nécessité de séparer les conversions et les traitements pour l'analyse des tâches et des productions dans l'organisation des apprentissages. Bien au contraire, cela montre que la capacité à changer de registre constitue la compétence primordiale pour pouvoir chercher des problèmes en mathématiques.

Revenons au problème de la somme de la suite des entiers (figure 10). C'est le traitement visuel à faire, celui qui montre comment un traitement additif se transforme en traitement multiplicatif, qui permet de choisir la représentation polygonale pertinente. Mais pour faire ce choix, encore faut-il être en mesure de le faire, c'est-à-dire d'effectuer de soi-même un changement de registre, d'explorer les différentes possibilités qu'il offre et de contrôler l'apport pour le problème à résoudre. Ce que nous pourrions appeler, pour reprendre un mot slogan, une « compétence » cognitive de choix représentationnel ! Or une telle compétence n'est pas liée à un contenu mathématique particulier - contenu que l'on analyse généralement en termes de « concepts » **- elle est au contraire transversale à des contenus mathématiques très différents et elle constitue le dynamisme interne des démarches mathématiques.**

III – 2 Une approche cognitive des processus de compréhension

La compréhension commence **avec l'articulation,** pour le sujet, **de deux registres de représentation.** Autrement dit**, on ne peut jamais considérer qu'un type de représentation est meilleur qu'un autre si l'individu** n'est pas capable de contrôler, par lui-même et **dans les deux sens,** la conversion d'un type de représentation mis en avant par l'enseignement avec un autre type de représentation. Autrement dit, il ne faut pas se focaliser sur les représentations utilisées mais sur leur articulation avec un autre registre de représentation. Pour illustrer cela très rapidement, nous pouvons évoquer rapidement deux pratiques didactiques communes visant à «donner du sens» en privilégiant le « concret » ou des situations « réelles ».

Pour proposer des activités mathématiques (numériques ou géométriques) on cherche généralement des supports matériels qui permettent d'« agir » c'est-à-dire d'effectuer des manipulations et de résoudre des problèmes. Ce qui revient à privilégier les représentations iconiques. Or cette pratique, nécessaire, ne se révélera efficace pour des acquisitions profondes à long terme que si une importance égale est attachée à la production d'une **description** des représentations iconiques qui ont été privilégiées didactiquement. Trop souvent, on se limite à la réussite en surface dans l'utilisation d'un type de représentations comme si les transferts allaient s'ensuivre normalement. Et j'insiste sur le terme description que l'oppose aux termes habituellement employés d' « explication », de « justification », d'« argumentation » qui eux mettent l'accent sur la validation de ce qui a été fait (Duval, 2003a). Ainsi dans les exemples présentés plus haut, en supposant que les représentations polygonales de points soit matérialisées par des pions sur des cases, la description des transformations faites est aussi importante que le jeu que l'on peut faire pour gagner.

La deuxième pratique didactique commune est le recours à des **représentations auxiliaires** pour aider les élèves dans la résolution des **problèmes** élémentaires d'application d'un traitement mathématique à une situation de la vie « réelle », les problèmes additifs et les problèmes de proportionnalité en étant les exemples typiques. Or, quand on regarde la diversité des représentations auxiliaires mises en avant *selon les types de traitement mathématiques mis en problèmes*, on voit que l'utilisation de représentations auxiliaires n'a rien d'évident. On ne peut pas les utiliser sérieusement dans l'enseignement sans s'être posé les questions suivantes :

(1) Quelles représentations ? Lesquelles devraient le mieux marcher et pourquoi ?

(2) Avec quoi s'articulent-elles ?

(3) Comment les introduire ?

Or si l'on se pose habituellement les questions (1) et (3), on ne pose pratiquement jamais la question (2) qui est pourtant la plus importante quand il s'agit de représentations auxiliaires.

Rappelons qu'il n'y a pas de problème sans un **énoncé** et que les énoncés de problèmes d'application combinent toujours deux descriptions **:** celle de la situation «concrète» que l'on évoque, et celle des données nécessaires pour l'application des opérations arithmétiques à effectuer. L'une des grandes difficultés qui apparaissent concernent ce qu'on a appelé la sélection des «informations pertinentes». Or une telle sélection coïncide avec une phase de conversion des expressions linguistiques concernant la description des données nécessaires au choix et à l'application des opérations à effectuer.

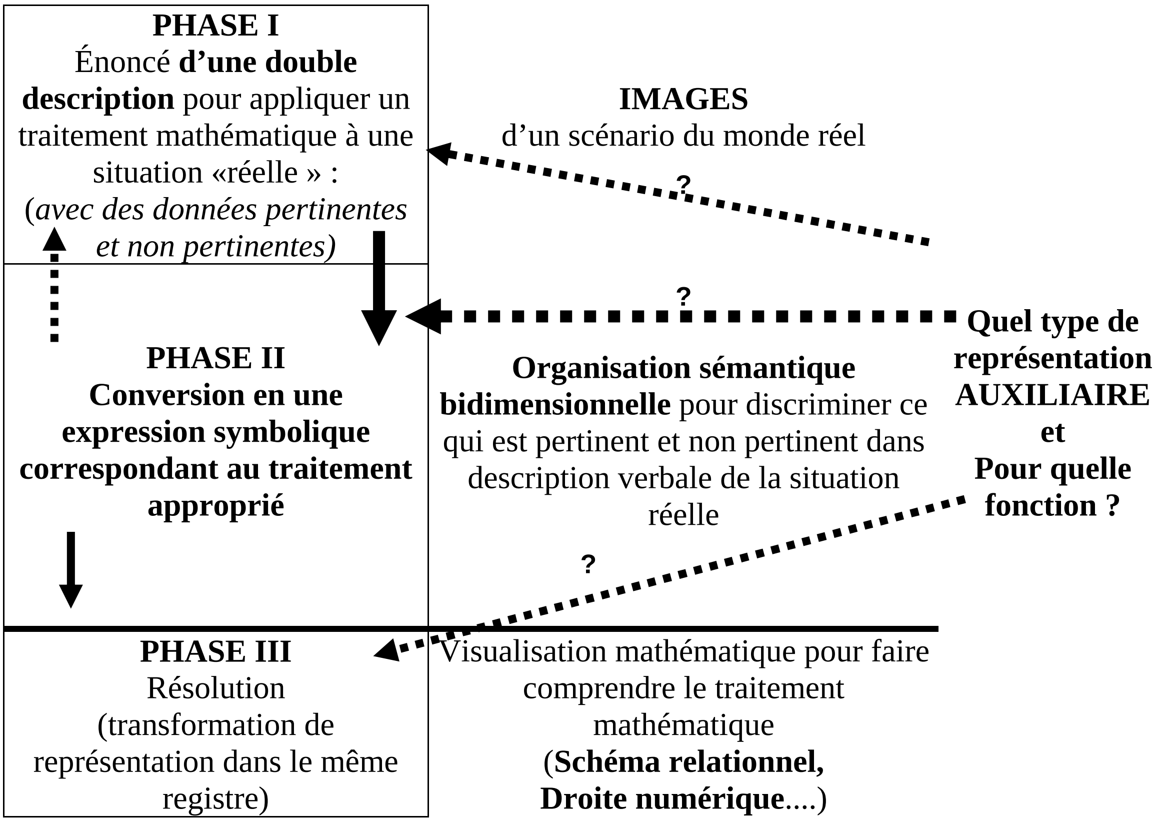


Figure 12 : Équivocité fonctionnelle des représentations auxiliaires.

L’inefficacité, souvent constatée, des représentations auxiliaires introduites ou promues dans les documents pédagogiques, ne tiendrait-elle pas au fait que les représentations auxiliaires introduites concernent la phase III, ou parfois la phase I, et non pas la phase II (Duval, à paraître).

III – 3 Un problème crucial pour tous les modèles cognitifs : quel rapport entre les représentations sémiotiques et les représentations « mentales » ?

On pourrait croire que nous soulevons un problème que ne se pose pas, puisqu’il semble évident d’opposer les représentations sémiotiques aux représentations mentales comme des représentations externes à des représentations internes ! Ce qui conduit à penser qu’il faudrait mobiliser des représentations mentales pour comprendre ce que les représentations sémiotiques représentent, comme si ce qu’elles représentent ne pouvait pas être une autre représentation sémiotique dans un autre registre.

Or, avec cette opposition, on méconnaît deux choses. D’une part toute représentation dépend d’un système spécifique permettant de la produire, et d’autre part, toute production d’une **représentation consciente** combine deux aspects indépendants l’un de l’autre :

- les **systèmes producteurs de représentations,** *lesquels peuvent être non sémiotiques ou sémiotiques* ;

- **les modes phénoménologiques de production *qui peuvent être externes ou internes*.**

Ainsi toute production d'un discours peut se faire selon trois modes phénoménologiques différents : « mentalement », « oralement », « visuellement » (par un code graphique). C'est d'ailleurs cette distinction des trois modes phénoménologiques de production « langagière » qui joue un rôle fondamental dans les analyses de Vytgoski (1985).

On obtient donc les distinctions suivantes :

		MODE PHÉNOMÉNOLOGIQUE DE PRODUCTION		
		MENTAL	**EXTERNE / MATERIEL**	
			ORAL	**VISUEL**
NATURE du SYSTEME de Production	**SEMIOTIQUE : production intentionnelle *:*** *relation de référence*	VERBALISATION NON VOCALISÉE ***Fonctions d'objectivation et de traitement (limité)***	PAROLE ***Fonction de communication***	ÉCRITURE, DESSIN ***Fonction de traitement, d'objectivation ou de communication***
	PHYSIQUE : production automatique : *relation de causalité*	IMAGE MENTALE (MÉMOIRE) ***Fonction d'objectivation***		IMAGE REFLET, PHOTOS ***Fonctions de matériau ou de données enregistrées***

Figure 13 : Classification des différents types de représentations conscientes.

Pour classer toutes les représentations conscientes possibles, sémiotiques et non sémiotiques, il est important de ne pas confondre la nature du système spécifique qui les produit et le mode phénoménologique selon lequel la représentation est explicitée. Ce sont là deux dimensions cognitives complètement indépendantes (Duval, 1999, p. 42-48). L'aspect le plus important est évidement la nature du système de production.

Il y a deux différences importantes entre les deux types de systèmes quant à la production des représentations. La première tient au fait que la production d'une représentation sémiotique est nécessairement intentionnelle, tandis que la production d'une représentation non sémiotique est souvent automatique. La seconde tient à la nature de la relation entre le contenu de la représentation produite et l'objet représenté. Dans une représentation non sémiotique, la relation entre l'objet représenté et le contenu de la représentation est une relation de causalité via le système physique ou neurophysiologique mobilisé. Dans une représentation sémiotique, il n'y a aucune relation de causalité, car chacun des éléments formant le contenu de la représentation relève d'un choix de celui qui la produit. La relation est soit simplement une relation de ressemblance ou une relation de référence. Ainsi, dans un dessin, c'est une relation de référence tandis que dans une photo c'est une relation de causalité. Il est essentiel de ne pas confondre la nature du système de production et le mode phénoménologique de production.

Il apparaît donc que les représentations sémiotiques ne sont ni mentales, ni matérielles, ni internes, ni externes. Ces oppositions renvoient aux modes phénoménologiques de production des représentations et non pas à la nature des systèmes qui produisent les représentations. En d'autres termes, les représentations sémiotiques sont neutres par rapport à ces modes phénoménologiques, même si chaque mode ne remplit pas exactement les mêmes fonctions cognitives dans la production de représentations comme on peut le voir dans le tableau (figure 13).

III – CONCLUSION

A travers les exemples présentés au cours de cet exposé, j'ai cherché à mettre en évidence deux données fondamentales concernant les processus cognitifs de la pensée en mathématiques.

(1) Les transformations de représentations sémiotiques sont intrinsèques aux démarches mathématiques ;

(2) Il est nécessaire, dans une analyse cognitive des démarches mathématiques, de séparer deux types de transformation de représentations sémiotiques qui, d'un point de vue mathématique, fusionnent en quelque sorte.

Naturellement je m'en suis tenu à un point de vue cognitif sur l'enseignement des mathématiques. Et la question rebondit : pourquoi un point de vue cognitif serait-il aussi important que le point de vue mathématique pour l'enseignement des mathématiques ? Merveilleuse question puisqu'elle nous ramène au problème soulevé en introduisant le sujet de cet exposé. Les processus cognitifs sous-jacents à l'activité mathématique sont-ils les mêmes que ceux mobilisés dans les autres domaines de connaissance ou, au contraire, sont-ils propres aux démarches mathématiques parce que plus complexes ?

La double juxtaposition, que la photographie de Kosuth met en scène, montre le paradoxe qui est au coeur de toute l'activité cognitive, quelle que soit son degré de complexité. Et nous avons vu qu'elle conduit, pour l'acquisition des connaissances, à distinguer deux situations épistémologiques fondamentales. L'une de ces deux situations, celle justement des mathématiques, soulève un problème cognitif spécifique que l'on rencontre à chaque pas, si j'ose dire, dans n'importe quel problème mathématique et dans n'importe quelle explication mathématique. C'est cette situation épistémologique particulière des connaissances mathématiques qui explique que les transformations de représentations sémiotiques soient intrinsèques aux démarches mathématiques. Cela peut-il être ignoré ou marginalisé dans l'organisation des apprentissages en mathématiques et dans l'analyse des incompréhensions auxquelles beaucoup d'élèves se heurtent ?

Regarder les problèmes d'apprentissages du point de vue cognitif, et pas seulement du point de vue mathématique, comporte un enjeu sur les objectifs de formation que l'on poursuit dans l'organisation de l'enseignement des mathématiques et de séquences d'activités. L'objectif le plus souvent mis en avant, concerne le développement, chez les élèves, de démarches d'explication, d'argumentation et de preuve, qui sont évidemment essentielles dans toute élaboration d'une connaissance scientifique. La prise en compte du point de vue cognitif met en évidence un autre objectif : comprendre non pas d'abord pour devenir capable de valider mais pour apprendre à comprendre, c'est-à-dire pour être ensuite capable de se poser de nouvelles questions, de trouver des moyens de les explorer et par suite de contrôler la pertinence de ses explorations et de ses interprétations. Ce qui est l'autonomie par excellence.

BIBLIOGRAPHIE

DELAHAYE J.P. (1998) La *conjecture de Syracuse*, Pour la Science, **247**, 100-105.

DUVAL R. (1995) Sémiosis et pensée humaine, *Peter Lang, Bern.*

DUVAL R. (Ed.) (1999) Conversion et articulation des représentations analogiques. *Séminaire I.U.F.M. Nord Pas-de-Calais, **1**, Villeneuve d'Ascq.*

DUVAL R. (2003a) *Décrire, visualiser, raisonner : quels « apprentissages premiers » de l'activité mathématique ?* Annales De Didactique Et De Sciences Cognitives, **8**, 13-62.

DUVAL R. (2003b) *Langage(s) et représentation(s) dans l'enseignement des mathématiques : deux pratiques et une troisième*, in Actes du 3ème Colloque en Didactiques des mathématiques, Rethymon, Crète, 13-33.

GODIN M. & DUVAL R. (2005) *Les changements de regard nécessaires sur les figures.* Grand N, **76**, 7-27.

SABATIN A. (2004) *L'âme de géomètre des abeilles,* Les formes de la vie, Dossier pour la Science, **44**, 72-77.

VYGOTSKI L.S. (1985) Pensée et langage, *Éditions sociales, Paris.*

COMMUNICATIONS

La gestion d'une situation « ouverte » en mathématiques : questions d'expérience et de rapport au savoir

Magali HERSANT
Maître de conférences, IUFM des Pays de la Loire
CREN
magali.hersant@paysdelaloire.iufm.fr

Cette communication qui est issue d'un travail dans le cadre d'une recherche INRP concerne l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire et se situe dans le cadre de la didactique des mathématiques. Son objet est de comparer la gestion effective d'une même situation ouverte par deux enseignants d'expérience inégale : un instituteur maître formateur et un professeur des écoles stagiaire. L'étude comparative s'effectue selon plusieurs axes relatifs à la menée de la séance par les deux enseignants : problème mathématique posé, organisation du travail dans la classe, situation mathématique réellement proposée aux élèves et traitement des propositions des élèves, gestion du tableau. Elle permet finalement de questionner le rôle de l'expérience et celui du rapport au savoir dans l'organisation du débat dans la classe.

Exploitations possibles

Pour les formateurs qui s'intéressent à la didactique des mathématiques enseignées à l'école primaire et particulièrement aux pratiques enseignantes (rôle et fonctions du maître dans la classe).

Mots-clés

Situation « ouverte » - théorie des situations - contrat didactique - construction du savoir - potentialités adidactiques - pratiques langagières - interactions didactiques.

UTILISATION, EN FORMATION DES PE, DU DVD «ENSEIGNER LES MATHÉMATIQUES AU CYCLE 2. DEUX SITUATIONS D'APPRENTISSAGE EN IMAGES»

Muriel FENICHEL
PIUFM, IUFM de Créteil
muriel.fenichel@creteil.iufm.fr

Catherine TAVEAU
PIUFM, IUFM de Créteil, IREM Paris 7
catherine.taveau@creteil.iufm.fr

Cette communication a pour objectif de présenter le contenu d'un outil multimédia conçu pour la formation des enseignants du premier degré. Des pistes pour son utilisation dans le cadre de la formation initiale et continue des Professeurs des Écoles sont exposées.

La démarche d'élaboration de ce DVD, complété par un Cdrom, a pour ambition d'illustrer :

- d'une part certains concepts didactiques et pédagogiques à partir de situations de classe ;
- d'autre part de fournir aux formateurs tous les outils pour la compréhension de la situation et aux enseignants tous les outils pour la mise en œuvre dans les classes.

Les deux séquences d'apprentissage présentées dans le DVD concernent respectivement un travail autour de la numération dans une classe de CP/CE1 et un autre autour de l'introduction du cercle au CE1.

Exploitations possibles

Découverte du DVD. Exemple d'utilisation possible de celui-ci dans le cadre de la formation des professeurs d'école.

Mots-clés

Supports vidéo - formation professionnelle des PE - numération - cercle – cycle 2.

L'ÉTAYAGE DU MAÎTRE DANS LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES AU CE1

Jean-François FAVRAT
Maître de conférences, IUFM, site de Nîmes
LIRDEF, IUFM de Montpellier
favrat.jf@wanadoo.fr

Cette communication prend appui sur des extraits de deux séances de résolution de problèmes au CE1, enregistrés chez deux maîtres, à propos du même énoncé soustractif. Ces maîtres sont à la fois proches – ils assument les présupposés didactiques des documents d'accompagnement – et différents dans leur manière de concevoir l'étayage du maître. Le but est de comparer leur gestion contrastée de deux phases (appropriation de l'énoncé par la classe, discussion sur les solutions) et d'analyser les interactions orales dans la classe (place des échanges entre les élèves, contenus explicites, *etc*.).

Ce faisant nous pensons pouvoir contribuer à l'analyse tout à la fois des pratiques professionnelles réelles des enseignants et des conduites langagières de jeunes élèves en mathématiques.

Exploitations possibles

Pour les formateurs qui travaillent sur l'analyse de pratiques, les deux exemples présentés peuvent permettre d'intéressantes comparaisons de pratiques professionnelles réelles. Ils permettent aussi grâce à la transcription de certains dialogues, de travailler sur les conduites langagières de jeunes élèves en mathématiques.

Mots-clés

Résolution de problèmes - débat - oral - étayage - début de cours.

USAGE DE POLYDRONS POUR UNE INITIATION À LA GÉOMETRIE EN MATERNELLE

Anne BERTOTTO
PEMF, école maternelle du Pileu-Massy (91)
IUFM d'Étiolles (91)
Anne.bertotto@ac-versailles.fr

Cette communication présente un travail issu d'une recherche-action menée avec une équipe se composant d'une PEMF, un PIUMF, une IEN, une CPC. Elle avait pour objectif de réfléchir sur la possibilité d'initier les élèves à la géométrie dès l'école maternelle (en moyenne et grande section). Le développement des connaissances en géométrie est conçu à partir de situations s'appuyant sur « la manipulation problématisée » de « Polydron », un matériel qui se compose de polygones pouvant s'articuler pour réaliser des polyèdres.

C'est tout d'abord la problématique de l'initiation à la géométrie en école maternelle qui est présentée en référence aux recherches et aux indications du nouveau programme de mathématiques à l'école primaire dans ce domaine. Ensuite c'est le parcours proposé aux enfants dans la géométrie sous forme de problèmes « à rebondissements » s'appuyant sur la manipulation et l'expérimentation qui fait l'objet d'une présentation précise. Les observations rapportées témoignent des connaissances développées par les enfants tant dans le domaine du raisonnement que dans le domaine des notions en jeu.

Exploitations possibles

Penser l'enseignement de la géométrie dès l'école maternelle semble possible si cela s'inscrit dans une dynamique didactique appropriée et clairement définie : c'est ce qui se dessine dans cette communication. Le but affichée alors est « que ce travail puisse servir de support pour les formateurs d'IUFM et de terrain dans les formations initiales et continues et soit un prétexte à échanges constructifs avec les autres acteurs ou chercheurs ».

Mots-clés

Géométrie - école maternelle - polyèdres - assembler - construire - chercher.

ENGAGER LES PE DANS UNE PRATIQUE DE CLASSE INTERDISCIPLINAIRE EPS/MATHS : DISCUSSION AUTOUR D'UN DISPOSITIF DE FORMATION CONTINUE

Aline BLANCHOIN
PIUFM EPS, IUFM de Créteil
Aline.blanchoin@creteil.iufm.fr

Nathalie PFAFF
PIUFM Mathématiques, IUFM de Créteil
Nathalie.pfaff@creteil.iufm.fr

Le texte présente les résultats d'une recherche concernant la formation des professeurs des écoles en vue d'une pratique d'enseignement interdisciplinaire associant mathématiques et EPS.

Après avoir replacé l'interdisciplinarité dans la polyvalence du professeur des écoles, l'exposé propose une méthodologie d'articulation entre mathématiques et EPS, comprenant des suggestions de liens puis il présente, en apportant les éléments d'analyse utiles, les modalités d'une formation des professeurs des écoles en vue d'une pratique d'enseignement interdisciplinaire Maths/EPS.

Enfin, le document expose un compte-rendu de la mise en œuvre, par un professeur des écoles, d'un projet d'enseignement visant à établir des liens entre Maths et EPS. Une collaboration des formatrices et du professeur des écoles avant, pendant et après la réalisation du projet a permis de recueillir les éléments alimentant ce compte-rendu.

Exploitations possibles

Le texte constitue une ressource utile aux formateurs de professeurs des écoles pour aborder la question de la polyvalence du maître sous l'angle d'une pratique d'enseignement visant à privilégier l'interdisciplinarité.

Il présente de manière concrète un exemple de pratique d'articulation Maths/EPS, en étudie les conditions de « faisabilité » et analyse les modalités d'un travail sur ce thème en formation continue.

Il constitue un appui très complet pour tout formateur qui envisage de proposer, en formation initiale et continué, un travail sur la conception d'un enseignement cohérent reposant sur des liens entre l'apprentissage des Mathématiques et l'Education Physique et Sportive.

Mots-clés

Polyvalence - formation des maîtres - interdisciplinarité - résolution de problèmes.

LES TIC DANS LA FORMATION ET L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE PRIMAIRE

Richard CABASSUT
Formateur en mathématiques, IUFM d'Alsace
Didirem, Paris 7
richard.cabassut@alsace.iufm.fr

Pascal RIMLINGER
Professeur des écoles, Ecole du Ziegelwasser, Strasbourg

Marc TRESTINI
Chargé de mission TICE, IUFM d'Alsace
LISEC, ULP Strasbourg 1
marc.trestini@alsace.iufm.fr

Dans cette communication Richard Cabassut, Pascal Rimlinger et Marc Trestini rendent compte de deux dispositifs d'enseignement impliquant les TIC dans l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire à partir d'un dispositif d'une formation continue à distance pour des professeurs d'école et des observations réalisées lors de la mise en oeuvre dans une classe de CM1 d'une séance sur le cercle avec le logiciel de géométrie dynamique Déclic.

L'orientation de se texte est caractérisée par une volonté forte d'apporter un éclairage de ces situations par un cadre théorique issu des sciences de l'éducation et de la communication avec une approche instrumentale. Les questions ainsi formulées donnent lieu à des conjectures que les auteurs espèrent valider comme réponses.

La communication s'est articulée en 4 points :

- Le contexte institutionnel national constitué du (C2i)® niveau 2 « enseignant » ; le B2i et les programmes de mathématiques ;
- un exemple de formation continue à distance à l'utilisation des TICE dans l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire, et les conditions de l'expérimentation ;
- l'observation d'une séance en classe ;
- le cadre théorique avec deux questions clés :Pourquoi introduire des artefacts dans un dispositif d'enseignement ?" et "Comment utiliser un artefact ?"

Mots-clés

Formation à distance - FOAD - TICE - apprentissage collaboratif - enseignement des Mathématiques.

ARGUMENTATION EN MATHÉMATIQUES ET DANS D'AUTRES DISCIPLINES : PRÉSENTATION DE RÉSULTATS DE RECHERCHES RÉCENTES

Jacques DOUAIRE
PIUFM, IUFM de Versailles
Chercheur associé à l'INRP, équipe ERMEL
jacques.douaire@wanadoo.fr

Cette communication commence par rappeler la place croissante qui est accordée par les programmes aux interactions orales (en particulier lors des débats collectifs) pour favoriser les apprentissages à l'école primaire. Dans ce cadre, elle souligne le rôle important de l'argumentation, notamment dans les phases de validation. L'essentiel de son propos est alors de présenter certains résultats de plusieurs recherches récentes conduites à l'INRP qui abordent cette question principalement au cycle 3 en mathématiques. Des analyses sur les compétences des élèves et les fonctions de l'argumentation, en mathématiques et dans d'autres disciplines, sont ainsi rapportées. Elle aborde aussi des questions posées par la gestion des phases de débat par les enseignants. Leur gestion suppose des « ingénieries didactiques » qui impliquent, de la part des enseignants, des compétences tant disciplinaires que professionnelles et dès lors une formation de ceux-ci dès le début de leur carrière.

Plan de l'article

1- Problématiques ;
2- L'argumentation dans le domaine numérique ;
3- L'argumentation en géométrie :
   - les limites de la validation pratique,
   - les difficultés de formulation et de critique des procédures de résolution,
   - l'émergence de nouveaux critères de validation.
4- L'argumentation dans différentes disciplines ;
5- La gestion des mises en commun par les enseignants ;
6- Conclusion.

Exploitations possibles

L'article et les renvois bibliographiques permettent aux formateurs de connaître des activités à proposer en classe (surtout au cycle 3) pour apprendre aux élèves « à prouver » en mathématiques.

Mots-clés

Argumentation - preuve - interactions langagières - validation - formation (des enseignants) - gestion des mises en commun.

LA DIMENSION PERSONNELLE DES PROFESSEURS EN FORMATION

Nathalie SAYAC
Maître de conférences, IUFM de Créteil
Didirem
nsayac@5miranda.com

Cette communication présente d'abord un travail récent de thèse (2003) sur les pratiques des professeurs de mathématiques enseignant en lycée, en particulier les résultats concernant la composante personnelle de leurs pratiques puis la typologie élaborée (4 types de professeurs). Une deuxième partie aborde un essai de transposition dans le premier degré de la problématique avec les questions suivantes : a-t-on des pratiques d'enseignement différentes à l'école selon qu'on soit homme ou femme ? Quelles sont les conséquences, en formation et dans les pratiques, des études suivies par les PE ? Les PE2 issus d'un cursus scientifique sont-ils *a priori* plus aptes à enseigner les mathématiques à l'école ? Quelle est l'incidence de l'âge sur les pratiques des PE et instituteurs ?…*etc*. Deux questionnaires complètent cet article, l'un à destination des formateurs et l'autre à destination des instituteurs et professeurs d'école.

Exploitations possibles

Cette communication peut alimenter la réflexion personnelle et professionnelle d'un formateur d'enseignants de mathématiques en vue d'une prise en compte des caractéristiques individuelles de son public pour une différenciation de sa formation.

Mots-clés

Pratiques - 1er degré - formation en mathématiques - cursus - dimension personnelle - questionnaires.

DE L'ANALYSE DE PRATIQUES EFFECTIVES DE PROFESSEURS D'ÉCOLE DÉBUTANTS NOMMÉS EN ZEP/REP À DES STRATÉGIES DE FORMATION

Pascale MASSELOT
Maître de conférences, DIDIREM Paris 7
IUFM de Versailles et de Créteil
PMasselot@aol.com

Monique PEZARD
Maître de conférences, DIDIREM Paris 7
IUFM de Versailles et de Créteil
Monique.Charles@creteil.iufm.fr

Après une présentation du cadre théorique pour l'analyse des pratiques, de ce que l'équipe sait des pratiques des professeurs d'école débutants en ZEP/REP, de questions de formations soulevées par des recherches, l'équipe propose des pistes de formations :

- entrer en résonance avec la logique du futur enseignant ;
- proposer des alternatives cognitives adaptées au public ZEP/REP ;
- prendre davantage en compte les questions relatives au médiatif par une observation de gestes professionnels experts, une résolution de problèmes professionnels restreints, une mise en œuvre de gestes professionnels contextualisés, marqués par des contenus mathématiques et permettant de réaliser un projet d'enseignement proche de ceux exposés en formation, une analyse réflexive, partagée avec des pairs, fondée sur un dispositif audiovisuel, des passages obligés ;
- prendre en compte les aspects institutionnels ;
- travailler sur la durée : accompagner les premières années d'exercice.

La recherche actuelle de l'équipe porte sur l'accompagnement de néo-titulaires affectés en ZEP/REP : situation d'information et de questionnement, adaptation de situations et de programmations en calcul mental, géométrie et résolution de problèmes classiques, travailler sur les gestes professionnels, informer sur les contraintes spécifiques aux ZEP, situation de compagnonnage, situation d'échanges visant une mutualisation des pratiques, situation d'information, d'échange et de questionnement plus contextualisée, mieux comprendre la formation des pratiques enseignantes.

Mots-clés

Mathématiques en ZEP/REP - stratégies de formation - accompagnement - analyses de pratiques.

DIRE OU ÉCRIRE ?
ACTIVITÉS D'ÉCRITURES RÉFLEXIVES DANS UNE SITUATION DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES DE PROPORTIONS EN CYCLE 3

Jean-Claude RAUSCHER
Maître de conférences, IUFM d'ALSACE
LISEC ULP Strasbourg
IREM de Strasbourg
Jean-Claude.Rauscher@Alsace.iufm.fr

Quelle contribution peut apporter le recours à la production « d'écrits réflexifs » par les élèves au développement de leurs connaissances ? C'est la question qui est envisagée ici dans le cadre d'une expérimentation menée en fin d'école primaire à propos de la résolution de problèmes relevant de la notion de proportionnalité. Les problèmes considérés sont des problèmes de comparaison de mélanges inspirés de Noelting (1980). Inspirées par les travaux de Duval (1998), les observations repèrent un obstacle dans l'exploitation des écrits des élèves en classe pour passer d'une situation de formulation à une situation de validation : une « pratique orale » de l'écrit par les élèves. Spontanément, les élèves écrivent comme ils parlent, sans retour sur ce qu'ils écrivent. Le dispositif élaboré et mis à l'épreuve a alors le but d'initier les élèves à une « pratique écrite » par l'objectivation de leurs écrits. L'analyse précise dans quelle mesure cette initiation est réussie et quelles sont ses conséquences, d'une part sur la nature des validations possibles par les élèves, et d'autre part sur le développement de leurs connaissances.

Exploitations possibles

La réflexion étayée par une recherche qui est présentée dans cette communication propose un support intéressant pour une formation sur la place et le rôle de l'écrit dans l'apprentissage des mathématiques au premier degré.

Mots-clés

Résolution de problèmes - proportionnalité - écrits réflexifs - dire - écrire - valider.

ACTIVITÉS DE CLASSIFICATION ET CONSTRUCTION DE DÉFINITIONS À L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

Cécile OUVRIER-BUFFET
ATER, IUFM de Grenoble
Laboratoire Leibniz
cecile.ob@wanadoo.fr

Les programmes de l'école élémentaire insistent, en géométrie, sur les activités de comparaison, reproduction, description, construction, et représentation : aucune mention n'est actuellement faite des activités de classification, alors que celles-ci amènent les élèves à dégager ou à préciser des critères de classement, ces critères pouvant ainsi être associés aux propriétés mathématiques caractérisant les objets d'une même classe. Le but est ici de s'interroger sur les connaissances et compétences en jeu dans les situations de classification, l'objectif étant de les faire vivre en classe. Cette communication propose ainsi une nouvelle lecture des activités de classification : celle de la construction de définitions.

Une étude épistémologique de processus de construction de définitions permet en particulier de faire une analyse des situations en termes de dialectique entre construction de définitions et formation de concepts, mais aussi de caractériser la gestion par l'enseignant de ces mêmes situations.

Exploitations possibles

Cet article est très utile en formation des maîtres, notamment pour montrer l'intérêt de donner un véritable enjeu mathématique aux habituelles activités de classification, voire de vocabulaire en géométrie.

Type de contenu

Cet article de type «communication de recherche» revisite les activités de classification en géométrie, resitue leur importance dans la construction des mathématiques en les reliant à l'élaboration de définitions. Il apporte des éléments de réflexion utiles pour la compréhension du processus de construction des mathématiques théoriques et de leur enseignement, à l'école primaire et au-delà.

Mots-clés

Classification - définitions - propriétés - géométrie - convexe.

PENSER LA FORMATION AVEC DES CONCEPTS ISSUS DE LA DIDACTIQUE

Annie PEIX
Professeur de mathématiques, IUFM de Lyon
annie.peix@wanadoo.fr

Claude TISSERON
Maître de conférences, UCB LYON1
LIRDHIST-Lyon 1
tisseron@univ-lyon1.fr

Cette communication rend compte d'une recherche menée à l'IUFM de Lyon pour intégrer dans la formation des professeurs d'école la demande institutionnelle relative à la conduite de problèmes de recherche en mathématiques dans les classes.

L'observation de classes montre que la gestion de telles situations est extrêmement complexe. En effet, la mise en œuvre et la conduite de situations de classe permettant aux élèves d'exercer une activité autonome de production de savoirs par une recherche et des échanges argumentés entre pairs est pour l'enseignant et les élèves un lieu de négociation et d'élaboration de divers types de répartition des rôles, responsabilités et modalités de fonctionnement et d'utilisation du savoir. Pour nous, la conduite de ces situations est pour l'enseignant un lieu d'expérimentation, de mise en œuvre et d'approfondissement de compétences nombreuses et variées qui lui sont utiles dans l'ensemble de son activité professionnelle. Cette utilité est liée aux nombreuses dimensions (psychoaffective, relationnelle, pédagogique, didactique…) qu'il doit gérer simultanément dans l'action.

L'objectif a été de construire une situation de formation à la conduite de problèmes de recherche qui soit aussi une formation à des gestes et attitudes professionnels "génériques". Après une analyse de formations existantes sur ce thème, le repérage de leurs manques par rapport aux besoins exprimés par les enseignants, et un détour par une analyse didactique du dispositif de formation permettant de le repenser, la recherche a permis l'élaboration d'une ingénierie de formation qui sera présentée. Celle-ci permet l'expérimentation réflexive contextualisée de gestes appropriés avec comme référence une théorie du "problème de recherche" construite par les stagiaires eux-mêmes dans la formation.

Exploitations possibles

Pour organiser une formation professionnelle à la conduite de problèmes pour chercher dans les classes. La méthodologie utilisée pour la conception du dispositif utilise des concepts de la théorie des situations, mais en les repensant dans le contexte de la formation des maîtres. Son intérêt vient de ce que le questionnement et les outils qu'elle propose semblent pertinents pour d'autres disciplines que les mathématiques.

Mots-clés

Problème ouvert - théorie des situations - problème de recherche - formation professionnelle.

L'USAGE DES TICE PAR LES STAGIAIRES IUFM : HORS LA CLASSE ET/OU DANS LA CLASSE ?

Maha ABBOUD-BLANCHARD
Maître de conférences, IUFM D'ARRAS
Equipe DIDIREM, Paris 7
maha.blanchard@math.jussieu.fr

L'objet de cette communication porte sur :

- Quels rapports entretiennent les stagiaires IUFM (PE et PLC) avec les TICE ?
- Comment ces rapports interviennent et évoluent au cours de la formation et des premiers temps d'exercice du métier ?

Maha Abboud-Blanchard y présente les résultats d'une étude portant sur ces rapports et sur les usages professionnels qui y sont associés dans trois cadres différents :

- le cadre personnel ;
- le cadre de la préparation de la classe ;
- Le cadre de la classe.

Pour cette étude l'équipe a utilisé d'une part les ressources que constitue les questionnaires sur les pratiques d'usage des TICE déclarées des PE2 et PLC2 de 4 IUFM, d'autre part un échantillon de 28 mémoires professionnels de PE2 et PLC2 étudiés d'un point de vue qualitatif qui complète une étude quantitative de 582 mémoires disponibles en ligne sur les sites des IUFM.

Plan de la communication

- Hypothèses de l'étude sur l'usage des TICE par les stagiaires IUFM : hors et/ou dans la classe ;
- méthodologies et résultats ;
  - les questionnaires,
    - l'équipement personnel,
    - les usages personnels,
    - les usages pour la préparation de la classe,
    - les usages dans la classe,
  - l'étude de mémoires professionnels,
- conclusions et perspectives.

Mots-clés

TICE - usages - pratiques enseignantes - enseignants débutants.

D'UN CONCOURS DE MATHÉMATIQUES PAR CLASSES À LA FORMATION DES MAÎTRES

Lucia GRUGNETTI
Unité de recherche en didactique des mathématiques de l'Université de Parma
lucia.grugnetti@unipr.it

François JAQUET
Ancien chercheur à l'Institut romand de recherche et documentation pédagogique (IRDP)
Rédacteur de la revue *Math-École*
fr.jaquet@wanadoo.fr

Le Rallye mathématique transalpin (RMT) est un concours de mathématiques sur la résolution de problèmes par classes entières dont l'un des objectifs est d'apporter des résultats et des éléments de réflexion utiles dans le cadre de la formation des maîtres.

Après quelques rappels sur les buts et les principes du RMT, l'article décrit les différentes phases d'élaboration des problèmes, comprenant l'énoncé et une analyse a priori, et les critères de choix qui concernent le contenu mathématique, la tâche de résolution et le contexte, illustrés par trois exemples d'évolution d'une première version à celle qui est retenue pour l'épreuve. Dans une seconde partie, l'article présente quelques analyses de procédures relevées pour quatre problèmes. On met en évidence, pour chacune d'elles, les savoirs effectivement mis en œuvre par les élèves, tels qu'ils apparaissent à la lecture de leurs explications.

Les retombées pour la formation des maîtres de ce travail d'élaboration et d'analyse paraissent fructueuses, elles sont suggérées par quelques questions ou commentaires, à propos de chaque exemple traité.

Exploitations possibles

Le RMT peut offrir aux maîtres une formation complémentaire sur le choix de problèmes et l'adaptation de leurs énoncés par un regard plus affiné sur les contenus mathématiques, les contextes et la tâche de l'élève lors de l'analyse a priori. Les maîtres peuvent reprendre certains problèmes avec leurs élèves sous différentes modalités, individuellement ou collectivement, les exploiter ou les intégrer dans la progression de leur classe. De nombreux formateurs peuvent profiter de ces travaux dans le cadre de leur enseignement en institut de formation. Les questions soulevées en didactique sont importantes et les analyses très instructives.

Mots-clés

Résolution de problèmes - formation (des enseignants) - procédures de résolution - analyse a priori - énoncés (de problèmes).

L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE PRIMAIRE EN ALLEMAGNE ET EN FRANCE

Yves SCHUBNEL
Professeur de mathématiques, IUFM de Franche-Comté
Responsable du Centre local de Belfort
yves.schubnel@fcomte.iufm.fr

La première partie de la communication éclaire quelques différences entre les écoles française et allemande. La deuxième partie est consacrée à une comparaison de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire en Allemagne et en France, tant du point de vue des contenus que des méthodes. La troisième partie s'intéresse plus particulièrement au thème de la résolution de problèmes de part et d'autre du Rhin, en soulignant quelques spécificités culturelles. Dans la quatrième partie, après une présentation succincte et une analyse critique de l'enseignement bilingue en général et de celui des mathématiques en particulier, des éléments sont proposés pour la mise en œuvre d'un enseignement bilingue des mathématiques. L'exposé se termine par quelques pistes de travail pour la formation des maîtres souhaitant s'investir dans l'enseignement bilingue des mathématiques.

Mots-clés

École allemande - comparaison des enseignements français et allemand - enseignement bilingue des mathématiques - résolution de problèmes.

LES MATHÉMATIQUES DE LA NATURE ET DE LA VIE : UNE CONCEPTION POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES. PRÉSENTATION D'UN EXEMPLE EXTRAIT DE LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

Charalambos LEMONIDIS
Professeur de didactique des mathématiques
Université de la Macédoine de l'Ouest-Florina, Grèce
`lemonidi@eled-fl.auth.gr`

Cette communication présente une conception de l'enseignement des mathématiques, appelée « Mathématiques de la nature et de la vie », et qui accorde une grande importance aux situations et aux problèmes de la réalité pouvant être utilisés dans l'enseignement. Cette conception est développée par les professeurs de didactique des mathématiques de l'Université de Macédoine de l'Ouest. Ces professeurs considèrent qu'établir un lien entre les mathématiques, la vie quotidienne des élèves et leurs expériences augmente leur intérêt et crée une attitude positive envers les mathématiques.

Cet article présente les quatre principes d'enseignement relatifs aux activités et aux scénarios mathématiques qui peuvent être utilisés dans l'enseignement. Ces principes déterminent aussi les compétences que doivent acquérir les enseignants. Il insiste sur le fait que pour les futurs enseignants, la liaison des notions mathématiques et des situations quotidiennes ne va pas de soi. Une intervention explicite est donc nécessaire auprès des futurs enseignants pour qu'ils deviennent capables d'utiliser des activités de la vie quotidienne plus riches et essentielles pour leur enseignement. Cette intervention est réalisée dans le cadre de la formation au sein du Laboratoire Digital de Didactique des Mathématiques de Florina en Grèce.

Exploitations possibles

Pour avoir des pistes de formation des enseignants sur une problématique de l'enseignement des mathématiques concrètes.

Mots-clés

Mathématiques concrètes - formation des enseignants.

ATELIERS

QUELLES PROBLÉMATIQUES POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS À LA PRATIQUE DU JEU EN CLASSE ?

Didier FARADJI
Concepteur de jeux mathématiques
Intervenant extérieur
faradji@club-internet.fr

Catherine TAVEAU
PIUFM
IUFM de Créteil, IREM Paris 7
catherine.taveau@creteil.ium.fr

L'article décrit le contenu et le déroulement de l'atelier qui a permis de réfléchir collectivement sur la place et le rôle des jeux mathématiques en classe :

Après avoir analysé le jeu Magix 34[1], en termes de notions mathématiques sous-jacentes et d'utilisations possibles dans une classe, les participants à l'atelier ont débattu sur le rôle des jeux en cours de mathématiques et la place de l'enseignant dans leur mise en œuvre.

Ils ont aussi proposé plusieurs pistes pour l'élaboration et la mise en œuvre de formations, initiales et/ou continues, autour de l'utilisation des jeux mathématiques à l'école.

Cet atelier fait suite à celui qui, lors du colloque de Foix (mai 2004), avait étudié les différents apprentissages mathématiques permis par l'utilisation en classe des jeux Magix 34, Décadex et Multiplay[2] : on trouvera en annexe l'intégralité du compte-rendu de l'atelier de Foix.

Exploitations possibles

Documentation et réflexions fondamentales pour mémoire professionnel sur les jeux (mathématiques) ; conception de formations d'enseignants sur ce même thème.

Mots-clés

Jeux mathématiques - formation.

---

[1] Jeu conçu par D. Faradji, distribué par le CRDP de Franche Comté.

[2] Idem (les 3 jeux sont dans un même coffret).

DÉCOUVRIR LE MONDE AVEC LES MATHÉMATIQUES AU CYCLE 1

Dominique VALENTIN
PIUFM Retraitée - Bures sur Yvette

Cet atelier est animé par Dominique Valentin, collègue retraitée, ayant longtemps travaillé au sein des équipes INRP.

Il s'appuie sur six années d'expérimentations d'activités mathématiques proposées à des élèves de la petite section à la grande section de l'école maternelle. Ces travaux ont fait l'objet d'une publication d'ouvrages à destination des enseignants chargés de classes de cycle 1.

Dans une première partie, Dominique Valentin développe sa conception de l'apprentissage par la résolution de problèmes à travers des propositions d'activités que le lecteur pourra facilement retrouver.

Dans une seconde partie, il est possible de trouver quelques pistes de réflexion qui alimenteront la réflexion des formateurs de maîtres chargés d'organiser la formation initiale et continue des enseignants de ce niveau.

Exploitations possibles

Par les formateurs qui doivent préparer une intervention concernant l'enseignement des mathématiques au cycle 1 et qui voudraient exploiter les ouvrages de Dominique Valentin.

Par les formateurs qui doivent assurer une formation spécifique des professeurs des écoles stagiaires aux mathématiques en cycle 1.

Mots-clés

Mathématiques au cycle 1 - résolution de problèmes - quantités - comptage - formation des enseignants.

LIRE ET ÉCRIRE DES ÉNONCÉS DE PROBLÈMES ADDITIFS (2) : LE TRAVAIL SUR LA LANGUE

Annie CAMENISCH
Maître de conférences Lettres, IUFM d'Alsace
EA 1339 Marc Bloch, Strasbourg
annie.camenisch@alsace.iufm.fr

Serge PETIT
Professeur de Mathématiques, IUFM d'Alsace
EA 1339 Marc Bloch, Strasbourg
serge.petit@alsace.iufm.fr

Cet article se propose de répondre aux questions suivantes : comment peut-on réaliser des apprentissages sur la langue à partir de l'écriture d'énoncés de problèmes additifs ? Quelles démarches mettre en œuvre ?

Le développement s'appuie sur les programmes de l'école primaire 2002 qui prescrivent de développer la maîtrise de la langue dans et à travers les disciplines, mais aussi sur de solides connaissances linguistiques. Ainsi les deux phrases déclaratives et la phrase interrogative d'un énoncé de problème sont décortiquées, bouleversée, modifiées et analysées avec soin. Les questions qui concernent la langue et son fonctionnement trouvent une réponse dans cet article, qui met également en évidence les faits grammaticaux liés à la langue française.

Les activités proposées : productions d'énoncés sous contraintes ou classements de phrases peuvent être mises en œuvre dans des classes de cycle 3.

Exploitations possibles

Pour les formateurs qui s'intéressent à la maîtrise de la langue française utilisée en mathématiques dans les énoncés de problèmes simples : variété de phrases pour une même histoire, mais aussi pour un même énoncé. Les marqueurs temporels, la pronominalisation, la phrase interrogative sont étudiés très finement au travers d'analyse de productions. Ce travail peut être exploité en classe de cycle 3. Il peut influer les pratiques enseignantes par la prise en compte des difficultés potentielles des élèves.

Mots-clés

Histoire/énoncé - phrase - déclarative/phrase interrogative - marqueurs temporels - pronominalisation - syntaxe - morphologie - morphosyntaxe.

TRAVAILLER LE RAISONNEMENT, L'ARGUMENTATION ET LA PREUVE EN PLAÇANT LES ÉLÈVES EN SITUATION DE RECHERCHE

Virginie DELOUSTAL-JORRAND
Maître de conférences, IUFM d'Alsace
Équipe CNAM, Laboratoire Leibniz, Grenoble
ERTé Maths à Modeler
virginie.deloustal-jorrand@alsace.iufm.fr

Cet atelier propose une réflexion basée sur des séances de recherche qui ont été testées dans des classes de cycle 3 (et de collège). Il veut montrer comment en manipulant des objets simples et faciles d'accès, on peut travailler le raisonnement et la preuve. Les débats entre les groupes et l'apprentissage d'un « esprit critique scientifique » permettant de faire évoluer les conceptions sur la preuve qu'il s'agisse des élèves de l'école ou des PE en formation. L'atelier s'appuie sur une *Situation-Recherche* de pavages de polyminos, d'autres *Situations-Recherche* ont été proposées aux participants en fin d'atelier.

Mots-clés
Situations-Recherche - raisonnement - preuve.

UTILISATION DE LA THÉORIE ANTHROPOLOGIQUE DU DIDACTIQUE EN FORMATION PE 1 ET PE 2

Annie NOIRFALISE
Retraitée, IREM de Clermont Ferrand
Université B. Pascal
Annie.Noirfalise@math.univ-bpclermont.fr

Yves MATHERON
Maître de conférences, IUFM Midi-Pyrénées
GRIDIFE ERTe 46 & UMR ADEF
yves.matheron@toulouse.iufm.fr

Il s'agit dans le cadre d'un atelier, et dans un premier temps, d'une présentation de certains concepts de la théorie anthropologique du didactique et de leur usage possible en formation PE. L'illustration de ce travail prend notamment appui sur deux sujets de CRPE :

- l'un portant sur l'étude du système décimal de position (analyse de productions d'élèves, CRPE d'Aix-Marseille, …, mai 2000) ;
- l'autre portant sur l'étude de la division euclidienne (deuxième volet, CRPE de Bordeaux, …, 2000).

Dans un second temps, le travail en atelier a consisté en la mise en œuvre des outils présentés précédemment, à propos de deux situations :

- l'une impliquant le calcul réfléchi en C.P. (analyse d'extrait d'un ouvrage scolaire) ;
- l'autre portant sur la symétrie axiale (volet pédagogique du sujet de CRPE d'Orléans-Tours, …, 2003).

Exploitations possibles

Les exemples développés montrent en quoi les concepts issus de la théorie anthropologique du didactique permettent d'analyser et de répondre aux questions des sujets de CRPE. Mais au-delà, et dans le cadre plus large de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire, ils contribuent à l'analyse et à l'évaluation de situations d'enseignement auxquelles peuvent se livrer professeurs des écoles et formateurs IUFM : tant pour ce qui concerne les préparations, les propositions des manuels, les situations en classe ou les productions d'élèves. Pour les lecteurs qui voudraient approfondir les concepts utilisés et leur usage pour l'enseignement des mathématiques, la bibliographie renvoie à des parties assez consistantes des actes d'une Université d'été édités par l'IREM de Clermont-Ferrand.

Mots-clés

Théorie anthropologique du didactique - organisation mathématique - organisation didactique - types de tâches - technique - technologie - théorie - moments de l'étude.

MATÉRIEL ET MANIPULATION COMME AIDE À LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Lucia GRUGNETTI
Unité de recherche en didactique des mathématiques de l'Université de Parma
lucia.grugnetti@unipr.it

François Jaquet
Ancien chercheur à l'Institut romand de recherche et documentation pédagogique (IRDP)
Rédacteur de la revue *Math-École*
fr.jaquet@wanadoo.fr

Le texte présente une réflexion sur des problèmes posés à partir d'un matériel et dont la résolution s'appuie sur la manipulation de ce matériel. Les problèmes présentés ainsi que les matériels associés ont été largement expérimentés dans le cadre du Rallye mathématique transalpin (RMT) qui est un concours de mathématiques sur la résolution de problèmes auxquels participent des élèves par classes entières.

L'article vise à apporter des éléments de réponse à la question : « Le recours à un matériel et sa manipulation peuvent-ils faciliter la tâche de résolution d'un problème et ainsi, favoriser l'acquisition de savoirs mathématiques ? ».

Pour chacune des situations évoquées, les auteurs présentent d'abord le matériel en jeu et le problème posé en rapport avec ce matériel. Puis ils proposent une analyse de la tâche et apportent quelques éléments du contenu mathématique que chaque problème fait rencontrer.

Pour l'une des situations, une analyse plus complète est fournie, comprenant des informations sur les stratégies relevées chez les élèves et des indications sur la gestion de l'activité par le maître, en particulier des suggestions d'exploitation possible en classe, dans une perpective d'articulation avec un travail « papier-crayon ».

Exploitations possibles

La description des activités assortie d'éléments d'analyse fournit aux maîtres des situations « prêtes à l'emploi » pour des ateliers de résolution de problèmes à divers niveaux de l'école. Les formateurs intervenant dans la formation des maîtres en mathématique y trouveront matière pour alimenter leur propre réflexion ou pour mettre sur pied des formations sur la résolution de problèmes en général et plus spécifiquement de problèmes faisant appel à un certain type de matériel « mathématiquement organisé ».

Mots-clés
Manipulation - matériel - problème - résolution de problèmes - situation - validation.

COMMENT UTILISER MATHENPOCHE EN CM2 ?

Ghislaine GUEUDET
Maître de Conférences, IUFM de Bretagne
IREM de Rennes

Typhaine LE MÉHAUTÉ
Prag, IUFM de Basse-Normandie

L'objectif de l'atelier était de proposer aux participants de réfléchir aux scenarii d'usage de la base de problèmes « Mathenpoche », en particulier pour ce qui concerne l'enseignement de la proportionnalité au niveau de la liaison CM2-6ème. Des scenarii testés en classe de CM2 pour la base d'exercices «Mathenpoche» au cours d'une recherche INRP ont constitué le point de départ de la réflexion puis les participants ont été amené à travailler à partir de la consigne suivante :

« *Vous êtes enseignant en CM2, votre classe comporte 25 élèves et vous disposez de 14 postes informatiques reliés à Internet. Vous avez décidé d'utiliser la série Proportionnalité / Liaison CM2-6ème de Mathenpoche. Proposez une mise en œuvre possible en classe, en présentant un scénario d'usage adapté* ».

L'atelier a débouché sur des interrogations relatives à la place de telles ressources dans la formation.

Exploitations possibles

La classification des problèmes de proportionnalité proposée en annexe peut être à la fois utilisée pour des PE1 ou des PE2.

Des scénarii d'utilisation du logiciel sont proposés.

Cet atelier permet de poser des questions quant à l'utilisation du logiciel dans les classes et peut nourrir des réflexions pour une formation des PE.

Type de contenu

Une partie de l'article relate une recherche INRP, une autre partie reprend la réflexion de l'atelier sur l'utilisation de Mathenpoche au niveau CM2 pour l'enseignement de la proportionnalité.

Mots-clés

Proportionnalité - liaison CM2-6ème - exercices de mathématiques en ligne - ressources Internet - scénario.

UN NOUVEAU LOGICIEL POUR ENSEIGNER LES MATHÉMATIQUES EN PRIMAIRE ET AU COLLÈGE : L'APPRENTI GÉOMÈTRE

Nicolas ROUCHE
CREM, Nivelles
rouche@math.ucl.ac.be

avec la collaboration de

Philippe SKILBECQ
CREM, Nivelles
phskilbecq@cfwb.be

Cet article est publié dans ces actes grâce à l'aimable autorisation de l'APMEP qui l'a fait paraître dans ses propres publications (Bulletin vert et revue PLOT).

Il présente un nouveau logiciel de géométrie : « l'Apprenti Géomètre » émanant du CREM (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, 5 Rue Emile Vandervelde, B-1400 Nivelles, Belgique) qui se compose de deux champs d'expérimentation distincts :

- le *kit standard* qui amène à l'écran trois familles de figures (famille du carré, du triangle équilatéral et du pentagone régulier) de formes et de dimensions invariables, sur lesquelles il est possible d'appliquer de façon très simple trois sortes de mouvements (glisser, tourner, retourner) pour composer divers assemblages par juxtaposition et ajustement. On peut aussi diviser les figures et travailler sur les fractions d'aire.
  Il constitue un champ d'expérimentation particulièrement ordonné et intelligible. C'est un univers artificiel, accordé à la géométrie métrique. Il est accessible aux élèves du cycle 2 ;
- le *kit libre* qui amène à l'écran des figures prédéterminées variées et déformables continûment. Il permet de réaliser des isométries de figures. Il conduit à réaliser ce qui a été appelé des fichiers dynamiques. Il met à la disposition de l'utilisateur des trames de points inspirées du géoplan.

Le choix a été fait, dans chacun des deux champs d'expérimentation, de n'offrir aucune mesure, non plus qu'aucun instrument de mesure, afin de permettre un accès aux grandeurs non encore mesurées.

Ce logiciel est accompagné d'une brochure facilitant son utilisation qui est téléchargeable sur le site : http://www.enseignement.be/geometre

Mots-clés

Géométrie dynamique - figures - opérations - mouvement - expérimentation - transformation de figures.

PROBLÈMES ET ACTIVITÉS FINALISÉES DANS L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE À L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

Jean-François FAVRAT
Maître de conférences, IUFM, site de Nîmes
favrat.jf@wanadoo.fr

Sylvie MULLER - Béatrice BARBERO
Professeurs des écoles, Montpellier

Nicole BELLARD
IREM de Montpellier

Ce compte rendu d'atelier présente le travail du groupe IREM 1er degré de Montpellier qui s'est donné comme buts de mettre au point des séquences d'enseignement de la géométrie laissant une place importante à la résolution de problèmes et d'établir des continuités entre les divers cycles de l'école élémentaire. Il rend compte de la démarche suivie :

La 1ère étape a consisté à proposer des tâches aux élèves, sans enseignement particulier préalable, pour recueillir leurs démarches. Ces tâches ont permis d'expliciter quelques enjeux importants de l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire (coordination des analyses locale et globale d'une figure, articulation des connaissances géométriques et de la maîtrise des instruments).

La 2ème étape propose cinq séquences d'enseignement : pliages (cycle 2), alignement (cycle 2), constructions de deux solides (cycle 3), rédaction de messages (cycle 3) faisant suite aux situations de la première étape.

Ces présentations sont assorties de plusieurs remarques émanant du déroulement de l'atelier.

Exploitations possibles

En Formation Continue ou en Formation Initiale de Professeurs d'école, en enrichissant les tâches proposées aux élèves lors de la première étape de productions effectives d'élèves, il est possible de développer une analyse enrichissante à partir des difficultés rencontrées par les élèves et d'imaginer des séquences d'apprentissage dans le même esprit que celles proposées lors de la deuxième étape.

Mots-clés

Géométrie - instruments - alignement - situation/problème - projet.

PARALLÉLISME AU CYCLE 3

Marie-Paule DUSSUC
Formateur, IUFM de Lyon Centre de Bourg-en-Bresse
Équipe ERMEL - INRP
mpdussuc@wanadoo.fr

Gérard GERDIL-MARGUERON
Formateur, IUFM de Grenoble
Équipe ERMEL - INRP
gerard.gerdil-margueron@wanadoo.fr

Michel MANTE
Formateur, IUFM de Lyon
Professeur, Collège C. MAROT, Lyon
Équipe ERMEL - INRP
michelmante@free.fr

Dans le cadre de la recherche INRP « Rôle de l'argumentation dans les phases de validation en géométrie au cycle 3 », l'équipe ERMEL a analysé les articulations entre savoirs et problèmes spatiaux et géométriques, expérimenté des dispositifs complets d'enseignement fondés sur la résolution de problèmes, s'appuyant sur une continuité dans l'étude des relations géométriques et une évolution des procédures de résolution et de validation.

Ce texte présente le travail mené sur le thème du parallélisme et donne ainsi à voir des éléments de l'ouvrage de l'équipe ERMEL à paraître sur la géométrie.

Exploitations possibles

Cet article fournit aux formateurs des situations riches visant des apprentissages géométriques (en particulier le parallélisme) et une première analyse des procédures des élèves. Il met en avant divers choix didactiques et leurs justifications.

Mots-clés

Géométrie - parallélisme - conceptions - connaissances spatiales.

LE LOGICIEL MATHENPOCHE À LA LIAISON CYCLE 3/6ème

Sébastien HACHE
Professeur de Mathématiques, Collège Villars, DENAIN (59)
Président de l'association Sésamath
sebastien.hache@sesamath.net

Katia HACHE
Professeur de Mathématiques, Collège Voltaire, LOURCHES (59)
Katia.hache@sesamath.net

Cet article rend compte d'un atelier de présentation des ressources exploitables du logiciel « MathenPoche » à l'articulation entre école et collège. En effet, le logiciel Mathenpoche connaît actuellement un déploiement très rapide dans les collèges et suscite beaucoup d'attentes chez les professeurs des écoles. L'objet de l'atelier était de mieux comprendre le fonctionnement du logiciel, ses forces, ses faiblesses, mais aussi ses perspectives de développement pour voir comment des partenariats peuvent se construire pour la réalisation d'un Mathenpoche cycle 3.

Pendant l'atelier après une présentation technique, les participants ont pu s'interroger sur l'évolution et l'adaptabilité au cycle 3. C'est un point de départ pour une réflexion à affiner avec l'intégration des TICE à l'école primaire.

Plan de l'article

Le logiciel Mathenpoche à la liaison cycle 3/6ème

Exploitations possibles

Il s'agit d'un éclairage sur un outil qui se développe et qui parce qu'il suscite de l'intérêt et des questions doit être finalisé en tant qu'instrument.

Mots-clés

Intégration des TICE - logiciel - exerciseur - liaison C3/sixième.

CRÉATION D'UN ATELIER DE DÉCOUVERTE MATHÉMATIQUE SUR LE THÈME DES PONTS DE KOENIGSBERG

Bénédicte AUTIER
Professeur, Collège Kleber, Strasbourg
autiernegrier.benedicte@wanadoo.fr

Muriel CRON
Professeur des écoles, École primaire d'Andlau
cron@wanadoo.fr

Anne-Céline MITTELBRONN
Professeur, La Providence, Strasbourg
anne-ce@noos.fr

Nathalie WACH
Maître de conférences, Département de mathématiques
Université Louis Pasteur, Strasbourg
wach@math.u-strasbg.fr

Marc WAMBST
Maître de conférences, Département de mathématiques
Université Louis Pasteur, Strasbourg
wambst@math.u-strasbg.fr

Sur un thème important tant par son aspect historique que mathématique (les ponts de Koenigsberg et les graphes), il s'agit de réfléchir à la conception d'une activité de vulgarisation scientifique destinée à des enfants de huit à douze ans, de préférence en intégrant une partie ou tout d'un théorème avec sa démonstration.

Le compte rendu de cet atelier présente le problème historique des ponts de Koenigsberg, sa résolution mathématique à l'aide des graphes et relate les discussions des participants de l'atelier pour l'élaboration de cette activité.

Exploitations possibles

Des pistes sont données pour l'élaboration de l'activité souhaitée ; il reste à la finaliser et à la mener avec des élèves pour mieux analyser les obstacles rencontrés.

On peut trouver dans la bibliographie de cet article les références de trois autres activités conçues par le groupe "atelier mathématique" de l'IREM de Strasbourg. Ces activités effectivement mises en oeuvre et analysées sont d'une grande richesse et traitent du problème crucial de la modélisation mathématique. Les thèmes de ces activités reposent sur des problèmes historiques et favorisent ainsi le développement de la culture scientifique.

Mots-clés

Modélisation - situation « ouverte » - graphes.

DE LA LECTURE D'ÉNONCÉS AU SENS DES OPÉRATIONS

Michèle MUNIGLIA - Philippe LOMBARD

Texte non communiqué.

À PROPOS DE L'ENSEIGNEMENT DES SOLIDES : QUELLES MATHÉMATIQUES FAIRE VIVRE À L'ÉCOLE ? QUELS OUTILS POUR LA FORMATION DES MAÎTRES ?

Jean-Claude AUBERTIN

Yves GIRMENS

Claude MAURIN

Louis ROYE
Formateurs en IUFM, membres de la Copirelem

Cet atelier prolonge la réflexion de la Copirelem sur les finalités de l'enseignement des mathématiques à l'école qui s'est concrétisée par un atelier proposé lors du XXXI^{e} colloque COPIRELEM de Foix.
Ce premier travail avait permis de dégager trois orientations autour desquelles s'organise l'enseignement des mathématiques : rationalité et raisonnement, culture, intégration sociale et citoyenne.
Cette fois-ci, l'atelier a pour objectif d'étudier comment il est possible d'intégrer ces orientations dans les actions de formation des maîtres afin qu'elles participent à la construction de leur rapport aux mathématiques. La réflexion s'appuie sur deux situations de formation concernant les solides qui peuvent être transposées en cycle 3.
Dans une première partie, après une description de deux situations de l'enseignement des solides - le solide caché et le cube soma – l'article relate leur déroulement tel qu'il a effectivement eu lieu dans le groupe des participants de l'atelier.

Dans une seconde partie, il fait état de l'analyse, des réflexions et des questionnements qu'en ont fait les participants, quant à leur exploitation en formation des enseignants compte tenu de la problématique de l'atelier.

Exploitations possibles

- Les deux situations constituent des supports didactiques intéressants (les scénarios, précis, sont fournis en annexe) ;
- approfondissement pour le formateur des différentes stratégies de formation, en particulier la stratégie d'homologie ;
- repérer, au-delà des contenus mathématiques, les finalités de l'enseignement de cette discipline.

Mots-clés

Homologie - rationalité - argumentation - référent culturel - modèle - transposition.

LES ANALYSES DE VIDÉOS : OUTILS DE RECHERCHE ET MOYENS DE FORMATION

Éric RODITI
Maître de conférences, IUFM Nord Pas-de-Calais
Équipe DIDIREM de l'Université Paris 7
eric.roditi@free.fr

À partir d'un extrait de vidéo tournée en classe, l'atelier a présenté diverses analyses qui ont été confrontées. Il a ainsi été montré comment la vidéo sert d'outil de recherche pour analyser les pratiques d'enseignement, et comment la même vidéo peut être utilisée en formation d'enseignants.

L'article présente d'abord différents résultats de recherche en didactique des mathématiques qui servent de référence aux formations présentées et discutées pendant l'atelier : ces recherches se centrent sur l'analyse les pratiques des enseignants en classe en relation avec les activités mathématiques des élèves, et s'intéressent donc aussi aux déterminants de ces pratiques (que ce soient les contraintes extérieures, fixées par l'institution ou liées à l'exercice du métier, ou les conceptions personnelles des mathématiques et de leur enseignement).

Il explicite ensuite le lien entre ces recherches et les objectifs visés par les dispositifs de formation utilisant les mêmes vidéos : d'une part permettre aux enseignants (et aux formateurs) d'analyser, même sommairement, les activités des élèves à partir de ce que provoque le professeur, et d'autre part, leur donner les moyens d'aborder les alternatives à ces pratiques.

Exploitations possibles

Pour une formation personnelle des formateurs et/ou la formation initiale et continue des enseignants, cet article présente des résultats de recherche récents et intéressants concernant les pratiques enseignantes, propose des pistes d'utilisation en formation et soulève des questions essentielles sur les liens recherche / formation / pratique.

Mots-clés

Formation (des enseignants) - pratiques enseignantes - recherche - didactique des mathématiques.

PARTICIPANTS

ADJIAGE Robert (Strasbourg)
AMIOT Michelle (Clermont-Ferrand)
ANGELI Brigitte (Fontain)
ARCHER Monique (Lyon)
ARHEL Danièle (Versailles)
ARIBERT Bernadette (Marseille)
AUBERTIN Jean-Claude (Besançon)
AURAND Catherine (Versailles)
AUTIER Bénédicte (Strasbourg)
BARBERO Béatrice (Montpellier)
BATLLO Valérie (Cergy)
BELIAEVA Tatiana (Strasbourg)
BELLARD Nicole (Montpellier)
BERTOTTO Anne (Massy)
BLANCHARD-ABBOUD Maha (Arras)
BLANCHOUIN Aline (Livry-Gargan)
BLOCHS Bernard (Belfort)
BOCHEUX Dominique (Paris)
BOHN Myriam (Rouen)
BONNET Nicole (Dijon)
BOPP Nicole (Strasbourg)
BORATTO Marie-Françoise (Marseille)
BOULEAU Nivôse (Fort-de-France)
BREGEON Jean-Luc (Moulins)
CABASSUT Richard (Strasbourg)
CALBRIX Tanguy (Rouen)
CAMENISCH Annie (Colmar)
CANDELORO Audrey (Strasbourg)
CANIVENC Bruno (Aix-en-Provence)
CHABAULT Dominique (Cergy)
CHAMBRIS Christine (Étiolles)
CHEVALIER Claudine (Melun)
CHOLLET Jean (Auxerre)
COMBY Hélène (Cergy)
COSTE Rémy (Étiolles)
COUSSON Bernadette (Besançon)
DAHAN Maurice André (Angers)
DE KOCKER Nicolas (Maxéville)
DELOUSTAL-JORRAND Virginie (Brest)
DENISOT Joël (Marseille)
DONCK Élisabeth (Aix-en-Provence)
DOUAIRE Jacques (Antony)
DUBUT Annie (Mont-St-Aignan)
DUPLAY Jean-Paul (Lyon)
DUSSUC Marie Paule (Bourg-en-Bresse)
DUVAL Raymond (Dunkerque)
EYSSERIC Pierre (Aix-en-Provence)
FARADJI Didier (Paris)
FAVRAT Jean-François (Nîmes)
FÉNICE Jean-Claude (Troyes)
FENICHEL Muriel (Livry-Gargan)
FRÉMIN Marianne (Antony)
GALISSON Marie-Pierre (Cergy)
GAUDEUL Alain (Haubourdin)
GAUDEUL Claire (Lille)
GEIGER-JAILLET Anémone (Strasbourg)
GERDIL-MARGUERON Gérard (Grenoble)
GIRMENS Yves (Perpignan)
GODEL Françoise (Évreux)
GODINAT Françoise (Auxerre)
GREWIS Annie (Strasbourg)
GRUGNETTI Lucia (Parme-Italie)
GUDERIAN Dietmar (Freiburg im Breisgau-Allemagne)
GUEUDET Ghislaine (Rennes)
HACHE Katia (Lourches)
HACHE Sébastien (Denain)
HERSANT Magali (Nantes)
HOUDEMENT Catherine (Mont-St-Aignan)
IMBERT Jean-Louis (Tarbes)
JAECK-LORBER Corinne (Strasbourg)
JAQUET François (Neuchâtel-Suisse)
KOSKAS Joël-Meyer (Étiolles)
KRIVINE Danielle (Évreux)
KUZNIAK Alain (Orléans)
LACORRE Gerard (Bonneville)
LAMARRE Michel (Bonneville)
LAROSE Valerie (Étiolles)
LAURENCOT-SORGIUS Isabelle (Toulouse)
LE BORGNE Philippe (Besançon)
LE MEHAUTE Typhaine (St Lô)
LE NOST Marie-Hélène (Versailles)
LE POCHE Gabriel (Rennes)
LEBRETON Jean-Claude (Blois)
LEJEUNE Michèle (Bonneuil-Sur-Marne)
LEMONIDIS Charalambos (Florina-Grèce)
LEVAILLANT Pascale (Saint-Germain-en-Laye)
LOMBARD Philippe (Vandoeuvre les Nancy)
MADEC Gwenola (Villetaneuse)
MAGENDIE Laurence (Montauban)

MALECKI Sophie (Maxéville)
MANTE Michel (Villeurbanne)
MASSELOT Pascale (Étiolles)
MATHERON Yves (Toulouse)
MAURIN Claude (Avignon)
MICHON Florence (Chamonix)
MILOCHEVITCH Sylvie (Paris)
MITTELBRONN Anne-Céline (Strasbourg)
MOLINES Jean-Paul (Haguenau)
MORIZOT-DELBREIL Brigitte (Mont-St-Aignan)
MULLER-BERBERICH Sylvie (Montpellier)
MUNIGLIA Michèle (Metz)
NICOLAS-LORRAIN Brigitte (Montigny Les Metz)
NICOLAZO CRACH Paul (Carcassonne)
NOIRFALISE Annie (Clermont-Ferrand)
NOVACOVA Zdravka (Sofia-Bulgarie)
NURDIN Walter (Maxéville)
OUVRIER-BUFFET Cécile (Grenoble)
PEGON Gilbert (Strasbourg)
PEIX Annie (Bourg-en-Bresse)
PELTIER Marie-Lise (Mont-St-Aignan)
PETIT Serge (Colmar)
PEZARD-CHARLES Monique (Melun)
PFAFF Nathalie (Livry-Gargan)
PLUVINAGE François (Strasbourg)
POIRET-LOILIER Dominique (St Jean le Blanc)
POUJADE Brigitte (Dammartin)
PREBET Hubert (La Seyne sur Mer)
PRESSIAT André (Blois)
RANC Geneviève (Massy)
RAOULT Jean-Pierre (Champs-sur-Marne)
RAUSCHER Jean-Claude (Strasbourg)
ROCHA Isabelle (Leiria-Portugal)
RODITI Éric (Arras)
RODRIGUEZ Ruben (Caen)
ROUCHE Nicolas (Nivelles-Belgique)
ROUSSEL Brigitte (Nîmes)
ROYE Louis (Villeneuve d'Ascq)
SAYAC Nathalie (Livry-Gargan)
SCHEIER Danielle (Paris)
SCHLOSSER Fabien (Livry-Gargan)
SCHMITT Marie-Josèphe (Cluses)
SCHUBNEL Yves (Belfort)
SEGUIN Ghislaine (La Seyne sur Mer)
SEGUIN Jacques (La Seyne sur Mer)
SIMARD Arnaud (Besançon)
SKILBECQ Philippe (Nivelles-Belgique)
SOSSA Liliane (Melun)
SOUMAN Denis (Montigny-lès-Metz)
TAVEAU Catherine (Bonneuil)
TEYSSIER Loïc (Strasbourg)
TOROMANOFF Jean (Orléans)
TREMEJE Joëlle (Draguignan)
TRESTINI Marc (Strasbourg)
VALENTIN Dominique (Antony)
VERBAERE Odile (Lille)
VERCKEN Dominique (Saint-Germain en Laye)
VERDENNE Dominique (Châteauroux)
WACH Nathalie (Strasbourg)
WAMBST Marc (Strasbourg)
WINDER Claire (Draguignan)
WINGHARDT Marie-France (Versailles)
ZARAGOSA Serge (Bonneuil)
ZIN Isabelle (Étiolles)

ÉLÉMENTS BIBLIOGRAPHIQUES POUR UNE CULTURE DE BASE

Par la COPIRELEM

Résumé
Cette année, de nombreux ateliers et communications abordent deux domaines mathématiques en formation des maîtres : la géométrie et la résolution de problèmes.
La COPIRELEM propose des éléments bibliographiques **pour une culture minimum du formateur** sur ces deux domaines. Ces listes seront utilement complétées par les bibliographies dans les articles cités.

N.B. : certains ouvrages ayant été réédités, les références des pages peuvent être différentes.

CONCERNANT L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

Les ouvrages qui suivent sont répartis en 3 parties selon leur dominante : articles de réflexion sur l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie, propositions de situations de formation des maîtres, propositions de situations pour la classe.

Articles à caractère théorique

APMEP (1983) Aides pédagogiques de l'A.P.M.E.P pour le CM : Géométrie.

ASSUDE T., GRUGEON B.(2003) *Intégration des logiciels de géométrie dynamique à l'école primaire*, 227-253, in Actes du XXIX^{e} colloque COPIRELEM de la Roche sur Yon, IREM Pays de Loire.

BERTHELOT R., SALIN M-H. (1994) *L'enseignement de la géométrie à l'école primaire*, Grand N, **53**, 39-56.

BERTHELOT R., SALIN M-H. (1995) *Un processus d'enseignement des angles au cycle 3*, Grand N, **56**, 69-116.

BERTHELOT R., SALIN M-H. (1999) *L'enseignement de l'espace à l'école primaire*, Grand N, **65**, 37-61.

BERTHELOT R., SALIN M-H. (2001) *L'enseignement de la géométrie au début du collège*, Petit x, **56**, 5-34.

GROUPE ÉLÉMENTAIRE (1996) Instruments géométriques cycle II et cycle III, *Brochure de l'IREM de Besançon*.

BETTINELLI B. (2001) Géoplans à l'école et au collège, *Presses Universitaires de Franche Comté*, (1996) *Brochure de l'IREM de Besançon*.

BOULE F. (2001) Questions sur la géométrie et son enseignement, *Éditions Nathan Pédagogie*.

BOULEAU N.(2001) *Reproduction et géométrie en cycles 1 et 2*, Grand N, **67**, 15-32.

DUCEL Y., PELTIER M-L. (1986) Géométrie : une approche par le dessin, *Brochure de l'IREM de Rouen*.

DUVAL R. (1994) *Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique*, Repères-IREM, **17**, 121-138.

DUVAL R., GODIN M. (2005) *Les changements de regard nécessaires sur la figure*, Grand N, **76**, 7-27.

GOBERT S. (2004) *Questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire*, 189-198, in Actes du Colloque XXX^e^ COPIRELEM d'Avignon, IREM de Marseille.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (1999) *Réflexion sur l'enseignement de la géométrie*, Grand N, **64**, 65-78.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (2003*) Quand deux droites sont à peu près parallèles ou le versant géométrique du presque égal*, Petit x, **61**, 61-75.

KAHANE J-P. dir (2002) L'enseignement des sciences mathématiques, *Odile Jacob, Paris*.

MATHE A-C. (2004*) Analyse d'une situation d'argumentation en géométrie des solides en CM1-CM2*, Grand N, **74**, 33-51.

PIERRARD A. (2004) *Des écrits pour présenter des dessins géométriques*, Grand N, **74**, 7-32.

REYMONET C. (2004*) Un cadre expérimental pour l'étude de la géométrie au cycle 3 : le cas du parallélisme*, Grand N, **73**, 33-48.

VERGNAUD G.et al. (1997) Le Moniteur de Mathématiques : Géométrie, Fichier pédagogique cycle 3, *Nathan, Paris*.

Exemples de situations de formation pour professeurs des écoles (en formation ou en exercice) dans les publications de la COPIRELEM

COPIRELEM (2003) Concertum. Dix ans de formation de professeurs des écoles en mathématiques, *Éditions ARPEME*, Contact www.arpeme.com.

Y figurent **des situations de formation par homologie :** ce qui permet au formateur simultanément de revoir avec les PE des notions géométriques, de travailler sur leur rapport à la géométrie, de développer des scénarii pour la classe, de donner du sens à des concepts didactiques.

BONNET N., GIRMENS Y., MAURIN J-C., ROYE L. (2002*) Approche de la géométrie en formation initiale. Témoignages de pratiques*, 14-50, in Les cahiers du formateur Tome 5, IREM de Paris 7.

JORE F. (2002) *Les PE1 et la médiatrice : étude de cas*, 59-72, in Actes du colloque COPIRELEM de la Roche sur Yon, IREM Pays de Loire.

KUZNIAK A., RAUSCHER J-C. (2002) *Autour de quelques situations de formation en géométrie pour les professeurs des écoles*, 271-290, in Actes du XXIX^e^ colloque COPIRELEM de la Roche sur Yon, IREM Pays de Loire.

KUZNIAK A., RAUSCHER J-C. (2004) *Processus de formation de PE1 et anamnèse géométrique*, 231-248, in Actes du XXX^e^ Colloque COPIRELEM d'Avignon, IREM de Marseille.

PARZYSZ B. (2002) *Perception et déduction dans l'argumentation en géométrie des PE1, dans l'environnement papier crayon et Cabri- géomètre*, 85-92, in Actes du XXIXe colloque COPIRELEM de la Roche sur Yon, IREM Pays de Loire.

DUBOIS C., FENICHEL M., PAUVERT M. (1993) Se former pour enseigner les mathématiques, Tome 1, *Armand Colin, Paris*.

Exemples de situations géométriques pour les classes (écrits pour les professeurs des écoles)

DUBUT A., POULAIN B. (1994) Géométrie en 6ème : un nouveau départ avec des élèves en difficulté, *Brochure de l'IREM de Rouen*.

CRDP DE NICE (1990) 2002 Géométrie pratique. Surfaces et lignes.

E.R.M.E.L. (1977) 99-112 et 236-250, Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire, cycle préparatoire, *Éditions Hatier, Paris*.

E.R.M.E.L. (1978) 47-68 et 140-170, Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire, cycle élémentaire, tome 1, « Géométrie », *Éditions Hatier, Paris*.

E.R.M.E.L. (1982) 133-272, Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire, cycle moyen, tome 3, « Géométrie », *Éditions Hatier, Paris,*.

FENICHEL M., PAUVERT M., PFAFF N. (2004) Donner du sens aux mathématiques, Tome 1, *Bordas pédagogie*.

HELAYEL J. et al (1998) Enseigner la géométrie cycle 2 (1996, *Éditions Bordas*) et cycle 3, *Éditions Bordas*.

IREM de Lille (2000*)* Travaux géométriques : apprendre à résoudre des problèmes au cycle 3, *CRDP du Nord Pas de Calais*.

KUZNIAK A., TAVEAU C. (1998) Travaux géométriques en 6ème, Édition *Nathan pédagogie*.

LACHAUSSEE D. (1991) Géométrie à l'école élémentaire 2 tomes cycle 2, cycle 3, *CRDP de l'Aisne*.

HAMEAU C. (1996) La géométrie par le dessin au cycle III, *Éditions Nathan pédagogie*.

MICHON F. (2003) *Il était une fois...la boîte du pâtissier*, Grand N, **72**, 19-32.

PELTIER M-L. (2001) *Le napperon*, Grand N, **68**, 17-28.

SAYAC N. (2002) *De l'exploration du quartier à la structuration de l'espace en GS*, Grand N, **69**, 7-18.

VERNET-MASSELIN B. (2000) *Reproduction de figures au cycle 3*, Grand N, **65**, 15-34.

CONCERNANT LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Voici une liste d'ouvrages ou CD classés selon leur dominante : articles de réflexions de fond ou exemples de situations problématiques pour les élèves, visant des apprentissages notionnels ou le développement de l'aptitude à chercher ; enfin une référence incontournable (*Concertum*) pour la formation des maîtres.

Articles à caractère théorique

BALMES R. M., COPPÉ S. (1999) *Les activités dans la résolution de problèmes au cycle 3*, Grand N, **63**, 39-58.

BRIAND J., LOUBET M., SALIN M-H. (2004) Apprentissages mathématiques en maternelle : Situations et analyses, *CD-Rom*, *Hatier Pédagogie*.

BUTLEN D., PEZARD M. (1996) *Rapports entre habileté calculatoire et "prise de sens" dans la résolution de problèmes numériques….. impact d'une pratique régulière de calcul mental sur les procédures et performances des élèves de l'école élémentaire.* Cahier DIDIREM, **27**, IREM de Paris 7.

CHARNAY R. (1993) *Problème ouvert, problème pour chercher,* Grand N, **51**, 77-84.

COPPÉ S., HOUDEMENT C. (2002*) Sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire*, Grand N, **69**, 53-62.

DESCAVES A. (1992) Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes, *Hachette Éducation*.

E.R.M.E.L. (1999) Vrai ? Faux ? On en débat ! De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3, *INRP Didactiques des disciplines*.

FAYOL M. (1990) *La résolution des problèmes additifs et sa genèse*, 149-184, in L'enfant et le nombre*, Éditions Delachaux et Niestlé, Neuchâtel*.

HOUDEMENT C. (1999) *Le choix des problèmes pour " la résolution de problèmes "*, Grand N, **63**, 59-76.

HOUDEMENT C. (2003) *La résolution de problèmes en question*, Grand N, **71**, 7-23.

INRP (2005) Argumentation et disciplines scolaires*, Éditions INRP*, *Paris*.

JACQUET F. (1997*) La résolution de problèmes par classe (considérations suisses sur les rallyes),* Grand N, **61**, 61-70.

JULO J. (1995) Représentation des problèmes et réussite en mathématiques, *Presses Universitaires de Rennes*.

JULO J. (2002) *Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes*, Grand N, **69**, 31-52.

LÉPINE L. (1996) *Tout problème ouvert n'engage pas nécessairement une bonne recherche*, Grand N, **60**, 43-56.

MONNIER N. (2003) *Les schémas dans les activités de résolution de problèmes*, Grand N, **71**, 25-47.

PELTIER-LECULLÉE I., SAYAC N. (2005) *Questionner l'énoncé pour résoudre le problème*, Grand N, **74**, 53-66.

PEROZ P (2000) *Des problèmes dans les énoncés*, Grand N, **66**, 55-70.

VERGNAUD G. dir (1997) Le Moniteur de mathématiques cycle 3. Résolution de problèmes*, Fichier pédagogique, Éditions Nathan, Paris*.

Exemples de situations pour les classes (écrits pour les professeurs des écoles)

BRIAND J., LOUBET M., SALIN M-H. (2004) Apprentissages mathématiques en maternelle. Situations et analyses, *CD-Rom, Hatier Pédagogie*.

E.R.M.E.L. (1991 à 1999) Apprentissages numériques et résolution de problèmes : CP 1991, pages 74 à 111 ; CE1 1993 pages 39 à 96 ; CE2 1995 pages 35 à 88 ; CM1 1997 pages 43 et suivantes ; CM2 1999 pages. Première partie et « Des problèmes pour apprendre à chercher. », *Éditions Hatier, Paris*.

E.R.M.E.L. (1999) Vrai ? Faux ? On en débat ! De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3, *INRP Didactiques des disciplines*.

GRAND N (2003) *Spécial Points de départ. Activités et problèmes pour les élèves de cycle 3 et de collège*, IREM de Grenoble.

IREM de Lille (2000) Travaux géométriques : apprendre à résoudre des problèmes au cycle 3, *CRDP du Nord Pas de Calais*.

PEAULT H. (1992) Un rallye pour débattre des mathématiques 89-93, *CRDP des Pays de Loire*.

VALENTIN D. (2002) *Des crêpes pour contexte dans une classe de CE1*, Grand N, **70**, 35-48.

Voir aussi

COPIRELEM (2003) Concertum. Dix ans de formation de professeurs des écoles en mathématiques, *Éditions ARPEME*, Contact www.arpeme.com

Y figurent **des situations de formation par homologie à partir de problèmes :** ce qui permet au formateur simultanément de revoir avec les PE des notions mathématiques (par exemple éléments de géométrie, aires, division), de travailler sur leur rapport aux mathématiques, de développer des scénarii pour la classe, de donner du sens à des concepts didactiques**.**

Par ailleurs, nous rappelons les documents ministériels en lien avec les programmes de 2002

Les documents émanant du **Ministère de L'Éducation Nationale** pour les mathématiques de l'école primaire 2005 sont les suivants :

- DESCO (2002) Qu'apprend-on à l'école maternelle ? et Qu'apprend-on à l'école élémentaire ? *Paris : CNDP XO. Ou BO Hors Série N°1 du 14 février 2002* ;
- DESCO (2002) Documents d'application, mathématiques cycle 2 et cycle 3, *Paris : SCEREN-CNDP ;*
- DESCO (2002 à 2004) Documents d'accompagnement, mathématiques, *Paris : SCEREN-CNDP*.

Neuf thèmes y sont traités : Calculatrices / Calcul mental / Calcul posé / Articulation école collège / Maternelle : vers des mathématiques en maternelle / **Résolution de problèmes et apprentissage** / **Problèmes pour chercher** / **Espace et géométrie au cycle 2** / Grandeurs et mesure.

Titre :	Actes du **XXXII^{e} Colloque COPIRELEM** Strasbourg 30-31 mai et 1er juin 2005. *Enseigner les mathématiques en France, en Europe et ailleurs.*
Auteurs :	Conférenciers et orateurs du colloque, animateurs d'ateliers, COPIRELEM.
Rédacteur en chef :	Jean-Claude Rauscher pour la COPIRELEM.
Mots-clés :	Didactique des mathématiques – enseignement et apprentissage – formation des maîtres – écoles maternelle et élémentaire – Europe – systèmes d'enseignement – systèmes de formation.
Date :	Mai 2006.
Nombre de pages :	164 pages A4 + CD-ROM.
Éditeur :	IREM de Strasbourg (**S. 192**). http://irem.u-strasbg.fr Pour les brochures : Courriel : bibirem@math.u-strasbg.fr - Tél. : 03 90 24 01 61.
ISBN :	2-911446-27-5.
Public concerné :	Professeurs et formateurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres, professeurs des écoles et des collèges.
Résumé :	Cette brochure contient les textes des conférences et de la table ronde ainsi que les résumés des ateliers et des communications du XXXII^{e} colloque de la COPIRELEM. Le CD-ROM joint contient ces textes ainsi que les comptes-rendus des ateliers et les rédactions détaillées des communications. Une partie de ces articles permet de confronter des dispositifs de formation et d'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire dans différents pays et contextes.
Prix :	12 € (+ 3,50 € de frais d'envoi).