QUELLES PROBLÉMATIQUES POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS À LA PRATIQUE DU JEU EN CLASSE ?

Didier FARADJI
Concepteur de jeux mathématiques
Intervenant extérieur
faradji@club-internet.fr

Catherine TAVEAU
PIUFM
IUFM de Créteil, IREM Paris 7
catherine.taveau@creteil.ium.fr

Résumé
Après avoir analysé le jeu Magix 34, en termes de notions mathématiques sous-jacentes et en termes d'usage dans une classe, les participants de l'atelier ont mené un débat sur le rôle des jeux en cours de mathématiques, et le rôle de l'enseignant. Des pistes pour l'élaboration de formation initiale et continue ont été proposées.

INTRODUCTION

Cet atelier fait suite à celui proposé par Didier Faradji au colloque de Foix en mai 2004. Lors de cet atelier Didier Faradji, concepteur des jeux Magix 34, Décadex et Multiplay[1] avait présenté le contenu de ces jeux de plateau et avait contrôlé avec les participants la validité des notions mathématiques qui y étaient sous-jacentes. Didier Faradji avait aussi donné différentes démarches possibles d'utilisation de ces jeux en classe en présentant tous les apports intéressants autour du raisonnement, du langage et de la collaboration entre les élèves.[2]

Cette année, l'objectif de l'atelier était de s'interroger sur les types de formations, initiales et continues, que nous pouvions construire pour des enseignants PE ou PLC, autour de l'usage de jeux mathématiques en classe.

Les participants de l'atelier n'étant pas les mêmes qu'au colloque de Foix, **la première séance** a été destinée à :

- présenter un jeu conçu pour des apprentissages mathématiques, il s'agit du Magix 34 ;
- analyser les notions mathématiques contenues dans ce jeu ;
- repérer les compétences qui peuvent être développées chez les élèves par la pratique de ce jeu ;

[1] Distribués par le CRDP de Franche Comté.

[2] Voir en annexe 1 le compte rendu de l'atelier de Foix.

- réfléchir à la mise en place de ce jeu dans les classes et exposer, en termes de pratiques de classes, différentes expériences déjà réalisées.

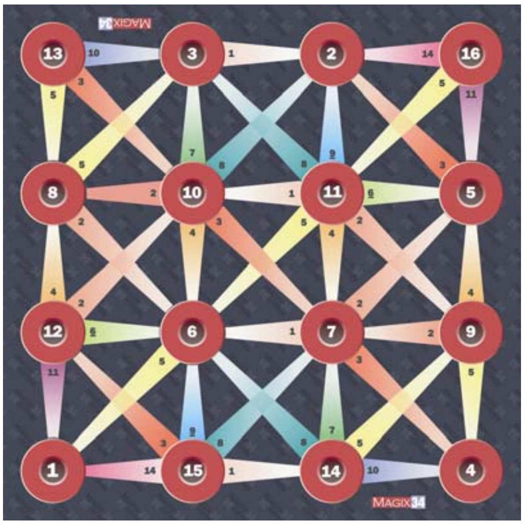
La deuxième séance de l'atelier a été consacrée à un débat de fond sur :

- Quelle place pour les jeux dans les apprentissages mathématiques à l'école ?
- Quelle formation mettre en place pour l'usage des jeux mathématiques à l'école ?

Voici le compte rendu du travail effectif de cet atelier qui pourra servir de base à la mise en place de formations pour les formateurs.

I – L'APPROPRIATION DU JEU

Autour du Magix 34



Pour une partie à deux joueurs.

Le plateau se compose de 16 cases numérotées de 1 à 16 configurées en carré magique. Chaque joueur dispose de quatre anneaux. En posant ses 4 anneaux à tour de rôle sur les cases du plateau, puis en les déplaçant d'une case à l'autre, le joueur gagnant est celui qui le premier totalise 34 points en additionnant les quatre valeurs qu'il aura sélectionnées avec ses 4 anneaux.
Il doit atteindre cet objectif tout en empêchant son adversaire d'y accéder avant lui.

Notre démarche s'est voulue proche d'une situation de formation par homologie. Les participants de l'atelier, par groupes de quatre, ont découvert le jeu en y jouant. Plusieurs parties ont été nécessaires afin de distinguer les stratégies gagnantes. À partir de cette mise en situation, un certain nombre de connaissances mathématiques ont été répertoriées et analysées par chaque groupe à l'aide d'une affiche.

Notre dispositif

- Les participants sont par groupes de quatre (deux contre deux), avec un plateau de jeu ;
- présentation des règles du jeu ;
- temps de jeu d'une durée de 10 min, ce qui représente à peu près trois parties par groupe ;
- puis énoncé de la consigne suivante :
  « *Rechercher les notions mathématiques travaillées pendant une partie de jeu.*
  Rechercher toutes les propriétés mathématiques présentes sur ce plateau

de jeu.
les réponses seront consignées sur des affiches qui serviront à la mise en commun »,

- recherche et réalisation de l'affiche (durée de 20 min.),
- mise en commun et apports complémentaires (durée de 45 min).

La mise en commun met à jour une particularité du jeu. Alors qu'on pouvait penser que le Magix 34 allait favoriser le calcul mental avec des décompositions du nombre 34 (ou le calcul des écarts à 34), les participants se sont vite rendus compte qu'une stratégie basée sur une reconnaissance des formes géométriques était bien plus efficace et rapide. Certains ont même été très décontenancés de voir l'équipe adverse gagner à chaque manche sans aucun calcul. Mais pour cela l'analyse préalable du plateau du Magix 34 avait été évidemment réalisée par cette équipe.

Le regard qui balaie le plateau du Magix 34 repère les 16 nombres et peut-être même les écarts numériques inscrits dans les liens colorés. Mais que dire sur la disposition des nombres sur le plateau ? Ont-ils été répartis de manière aléatoire ou placés selon un ordre précis ? En fournissant des indications sur le nom du jeu, on redonne à la recherche un nouveau souffle.

Il s'agit alors de découvrir les rapports existants entre le nombre 34 et les nombres inscrits sur le plateau.

On découvre immédiatement la présence de ce nombre dans la somme des cases constituant les dix alignements. Il apparaît ainsi que le plateau du Magix 34 est construit à partir d'un carré magique. Certains tenteront de trouver ce nombre dans les figures décrites par quatre cases. Après la recherche des alignements, le regard esquisse les carrés. Celui que l'on découvre en premier est disposé dans l'un des quatre coins du plateau. Une fois qu'il est découvert, on repère les trois autres carrés disposés dans les trois autres coins du carré.

Les participants ont observé qu'il était possible de construire deux carrés à partir de chacun des quatre sommets (un de quatre cases et l'autre de neuf cases) auquel il faut ajouter le grand carré et le carré central, ce qui fait un total minimal de 10 carrés gagnants.

De même, les participants ont repéré les parallélogrammes dont les sommets totalisent 34. Plusieurs approches ont été formulées durant la séance dont celle qui s'appuie sur le principe de l'égalité de deux vecteurs. En effet, il apparaît que tous les « signes inférieurs » matérialisés par un lien triangulaire coloré sont en double exemplaire et peuvent être assimilés à une flèche. De surcroît est inscrit sur chaque lien triangulaire un nombre symbolisé par une couleur. Il apparaît qu'en posant les quatre anneaux aux quatre extrémités de deux flèches identiques (même sens, même direction et même valeur) on obtient un parallélogramme totalisant 34. Une singularité supplémentaire, le centre de symétrie de ce parallélogramme coïncide à chaque fois avec le centre du plateau.

Ainsi, selon les participants, lorsque l'on dispose aléatoirement deux anneaux sur le plateau, il suffit de placer les deux autres anneaux de manière symétrique par rapport au centre pour obtenir un parallélogramme qui totalise 34. La coïncidence du centre de symétrie de la figure obtenue avec le centre du plateau n'est que la conséquence de la disposition symétrique par rapport au centre des compléments à 17.

Finalement, les propriétés géométriques se substituent beaucoup au calcul mental.

À son tour, le lecteur pourra aussi s'amuser à rechercher les nombreuses autres propriétés géométriques que comporte ce plateau de jeu.

II - DE L'ACTIVITÉ DE JEU AUX SITUATIONS D'APPRENTISSAGE

Suite à l'analyse du Magix 34, la question soulevée est la suivante : que va-t-on en faire dans les classes ?

Didier Faradji présente alors un certain nombre d'expériences qu'il a menées avec des enseignants dans les classes. Les élèves commencent à jouer à deux selon les règles du jeu. Pour aider les élèves à développer des stratégies gagnantes, on a choisi de les faire jouer par équipes de deux, donc deux contre deux. Ainsi un anneau n'est placé ou déplacé qu'avec accord du partenaire, la réflexion ayant lieu à voix haute face aux adversaires[3].

Ensuite, nous avons évoqué une démarche possible de mise en œuvre dans les classes. Le jeu collectif semble long et ne pas mobiliser tous les élèves. L'étude d'une position des anneaux pourrait être proposée au rétroprojecteur et devenir une position problème. Les élèves sont alors amenés à trouver des solutions possibles pour atteindre 34 en plaçant ou déplaçant d'autres anneaux. On pourrait appeler ces moments des « études de morceaux de situations fictives » qui permettraient un détachement du matériel de jeu.

Mais alors la question de la nature même du qualitatif de « jeu » est interrogée.

À force de décortiquer le jeu, cela reste-t-il un jeu pour les élèves ? Trop d'analyses ne tuent-elles pas le jeu ? Le jeu est associé au plaisir, si on l'arrête pour l'analyser ce n'est plus un jeu.

Certains participants se sont interrogés sur le fait de savoir si jouer à un jeu mathématique pouvait être assimilé à un travail. En jouant au Magix 34, l'enfant effectue un grand nombre de calculs ce qui n'est pas sans rappeler certaines tâches scolaires. En fait, il semblerait que ce qui distingue le jeu du travail ne tient pas dans l'activité elle-même mais dans ses conséquences pour l'enfant. Ce qui caractérise l'activité ludique est précisément qu'elle ne porte pas à conséquence, ce qui n'est pas le cas pour un travail. Dans le jeu, l'erreur est de mise alors qu'elle est repérée dans l'exercice. Cette différence est essentielle puisque qu'elle conditionne le comportement de l'enfant par rapport à ses apprentissages. Dans le jeu, la sanction se traduit par le gain ou la perte de la partie. Une partie effaçant l'autre, on ne garde pas de trace des parties jouées. De ce fait le jeu porte en lui une certaine légèreté qui va rendre possible certaines audaces. Dans le jeu, on n'attend pas de l'élève une réponse ou une solution type. Celles-ci sont toutes à

[3] Voir en annexe 1 le compte rendu de l'atelier de Foix qui présente ces différentes variantes de jeu.

construire et, pour y parvenir, il n'y pas d'autre solution que de procéder par essais et en recourant à son imagination. La liberté de choix des solutions y est essentielle. Elle favorise l'activité de recherche et la validation immédiate des réponses. L'activité dite « de travail » place souvent l'élève en situation de restitution de savoirs. Elle suppose de la part de l'enseignant moins de complaisance. La comparaison des activités de jeu et de travail questionne le principe du droit à l'erreur et du statut qu'il convient de lui reconnaître dans chaque situation.

Donc pourquoi proposer ces jeux en classe ?

On peut penser qu'en jouant, l'enfant - et non plus l'élève-, donnera du sens à un certain nombre de compétences construites en classe puisqu'il devra les mobiliser pour jouer et gagner. Il jouera donc tant qu'il en a envie et pourra s'arrêter quand il le souhaite. C'est un jeu !

On peut aussi penser que le jeu est un support ludique pour réinvestir des compétences mathématiques et, à ce titre, l'enseignant proposera des ateliers jeux mathématiques où le temps sera destiné au jeu pour lui-même. Un des objectifs de l'enseignant pouvant être alors de faire découvrir de nouveaux jeux aux élèves.

Une autre direction est possible : utiliser le jeu pour les apprentissages mathématiques. Son support va être utilisé pour construire une situation didactique et alors ce n'est plus un jeu. L'enseignant pourra demander aux élèves de remplir des fiches de jeu (lui permettant d'avoir une trace écrite de la réflexion de l'élève), proposer d'étudier plus précisément une étape du jeu (collectivement ou individuellement), proposer des exercices se référant à une règle du jeu.

De fait, selon le choix de l'enseignant, sa place dans la classe est questionnée. Quelle position doit-il avoir pendant les périodes de jeu ?
Si les élèves sont en situation de jeu, sa présence n'est plus nécessaire après l'explicitation des règles. Donc soit il régule des attitudes sociales d'élèves, soit il joue avec eux.
Si le jeu est utilisé pour des apprentissages mathématiques, alors l'enseignant reprend « sa place » en énonçant les consignes, en posant les problèmes et en observant ses élèves.

III – QUELS DISPOSITIFS DE FORMATION ?

Dans une recherche de démarches innovantes, voire motivantes pour les élèves, beaucoup d'enseignants du primaire choisissent d'introduire des jeux dans leurs séances de mathématiques. Les élèves paraissent alors motivés, actifs, et leurs enseignants sont déculpabilisés face à la mise en activité préconisée dans le cadre des mathématiques. De nombreux mémoires professionnels traitent de l'usage des jeux mathématiques en classe et de leurs attraits ludiques face à des élèves peu motivés voire en difficulté.

Quels peuvent être les objectifs d'une formation initiale ou continue ayant pour intitulé « *Quels usages des jeux mathématiques en classe ?* » ?

Dans l'atelier, nous souhaitions aborder cette question afin de donner des pistes aux formateurs. Ainsi la consigne donnée aux participants lors de cette séance a été :

« *Vous avez découvert ces jeux, ils vous semblent très intéressants. Vous voulez les faire découvrir lors de formations auprès de PE ou PLC. Essayez d'élaborer les bases d'un dispositif de formation.* »

Lors des échanges, nous n'avons pas eu le temps d'élaborer très précisément ces bases mais nous avons pensé que le déroulement de l'atelier pouvait en être une pour reconstruire une situation de formation.

Devant l'engouement des enseignants face à tout type de support nouveau, original et ludique, les formateurs de mathématiques doivent essayer de clarifier l'usage des jeux dans les séances de mathématiques.

- Une première étape serait de choisir les jeux présentés et analysés pendant ces formations. De nombreux jeux numériques, géométriques ou mixtes existent qui, tout en restant des jeux, permettent de travailler de véritables compétences mathématiques ;
- la deuxième étape consisterait en la découverte du jeu en y jouant. Ce temps ne doit pas être négligé en stage ;
- le repérage des connaissances mathématiques mises en jeu et des compétences mathématiques travaillées par les élèves, constituerait une troisième étape. On pourra y associer ensuite les compétences transversales (méthodologiques, respect des règles du jeu,…).

Pour ces deux dernières étapes, il est intéressant de présenter cinq à six jeux qui tourneront au bout de 20 min d'un groupe de stagiaires à un autre afin que, lors de la mise en commun, chacun puisse se sentir concerné.
Parmi les jeux proposés, n'oublions pas d'anciens jeux comme le Yam's, shut the box (fermer la boîte), le jeu de l'Oie, les dominos et d'autres jeux de dés qui permettent d'entretenir une culture générale.

- Après une mise en commun de l'analyse de l'ensemble de ces jeux, la quatrième étape est destinée à une réflexion liée au rôle et à la place de ces jeux dans des séances de mathématiques.

On pourra reprendre les éléments traités ci-dessus concernant soit le jeu pour jouer, soit le jeu comme support d'apprentissage, qui, alors, n'est plus un jeu.

On pourra alors explorer les jeux intéressants à mettre dans une ludothèque de classe, et réfléchir aux moments où les élèves pourraient aller y jouer. De nombreuses écoles ont instauré ce temps, le samedi matin, où les parents sont invités à venir jouer avec les enfants. L'objectif de ces écoles est alors de créer du lien social entre les parents et l'école, mais aussi de faire découvrir aux parents le plaisir de jouer avec leurs enfants.

On pourra aussi s'interroger sur la mise en œuvre des situations de jeu : présentation en grand groupe, en petit groupe (définir le nombre, le rôle de chacun),…

Pour un même jeu, il sera possible de réfléchir à des variantes aux règles, voire pour un même matériel proposer aux élèves d'inventer des règles.

On pourra aussi présenter de nombreuses situations d'apprentissage[4] prenant appui sur des jeux et permettant d'introduire des notions mathématiques ou consistant à produire des activités d'entraînement. On insistera sur le rôle des fiches de jeu (pouvant aussi être la base d'un travail de différenciation) qui fournissent à l'enseignant des indications sur le degré d'acquisition des connaissances par ses élèves.

On pourra aussi proposer aux stagiaires d'élaborer eux-mêmes des jeux permettant de travailler des compétences précises. Ces jeux pourront être mis dans la ludothèque après avoir été présentés et joués en classe. Ils deviendront de vrais jeux si les élèvent ont envie d'y jouer de façon spontanée, sinon ils resteront un support didactique pour les apprentissages.

CONCLUSION

Cet atelier a permis de réfléchir au rôle des jeux dans les séances de mathématiques à l'école. Les formations mises en place sur cette thématique devraient aboutir à mieux définir en quoi ces jeux sont de vrais supports aux apprentissages mathématiques ou bien ne restent que des jeux agréables à jouer.

Il a permis aussi de réaffirmer la nécessité de construire des ludothèques de classe ou d'école. Au même titre qu'une bibliothèque de classe, où les élèves choisissent librement des livres, la ludothèque permettrait la découverte de jeux et impulserait des temps de jeux dans la classe. Resterait à l'enseignant la sélection des jeux comme il le fait pour les albums de jeunesse ou autres ouvrages de la bibliothèque. Pour mener à bien ce projet, essayons d'impulser dans chaque site IUFM, la création d'un coin ludothèque dans les centres de ressources documentaires.

[4] Tous les ouvrages ERMEL proposent ce type de situations.

ANNEXE 1

Article élaboré à la suite de l'atelier mené au colloque de la COPIRELEM à Foix (2004).

Comment le jeu mathématique opère t-il sur les apprentissages mathématiques et sur la construction du langage argumentatif ?

Didier Faradji
Concepteur de jeux mathématiques
Intervenant extérieur en formation continue

Durant nos deux séances, nous avons été amenés à présenter trois jeux mathématiques édités par le CRDP de Franche Comté en partenariat avec la Cité des Sciences et de l'Industrie : le ***Magix 34***, le ***Décadex*** et le ***Multiplay*** (cf annexe).

Les participants se sont interrogés sur la place que pouvaient occuper ces jeux dans les apprentissages mathématiques. A cette fin, ils ont dégagé quatre grands domaines des mathématiques qu'ils se sont répartis entre eux : les champs numériques, géométriques, la construction du raisonnement logique et celle du langage argumentatif.

Durant nos deux séances, nous avons joué à chacun de ces jeux. Les participants avaient à charge d'identifier les notions rencontrées en jouant et de les relier au champ mathématique auquel elles paraissaient relever. Le débat portait alors sur l'opportunité d'utiliser le jeu pour introduire ou illustrer cette notion et sur la méthodologie à employer pour la rendre pleinement accessible et maîtrisable.

1 - LE CHAMP NUMERIQUE

Les trois jeux se caractérisent par leur dimension numérique fortement affirmée. Ce sont d'abord des outils d'entraînement au calcul mental ; ils peuvent être introduits en classe de primaire (cycles 2 pour le ***Décadex*** et cycle 3 pour le ***Magix 34*** et le ***Multiplay***) et permettre de faire le lien entre la classe de CM2 et le collège (classes de 6^{e} et 5^{e}).

Pour bâtir sa stratégie, le joueur va devoir calculer intensément.

Les participants ont considéré qu'il ne fallait pas faire immédiatement entrer les élèves dans la pratique du jeu. Il convenait, selon eux, de les amener à se familiariser préalablement avec la disposition des nombres figurant sur le plateau. Pour ce faire, il est apparu avantageux d'introduire le jeu en classe en faisant précéder la pratique proprement dite d'une phase de découverte durant laquelle on demande à l'élève de décrire le plateau et d'évoquer ce qu'il observe. Durant cette phase d'observation, l'élève s'imprègne des éléments entrant dans la composition du jeu et fait part au groupe du sens qu'il leur accorde. Les points évoqués peuvent être repris et développés par l'enseignant qui fournit à cette occasion des indications sur le but du jeu et sur les éléments constitutifs de la règle. Cette phase descriptive prépare à l'approche des premiers éléments de stratégie.

Une fois cette prise de contact avec le jeu achevée, l'enseignant peut alors distribuer la règle du jeu tout en proposant aux élèves de la lire et de commencer à jouer. Après quoi, il effectue une présentation complète du jeu tout en s'assurant que la règle a bien été comprise de tous.

La classe peut enfin jouer.

Les décompositions additives et soustractives

En jouant au ***Décadex***, l'élève (à partir du CE1) doit totaliser 10 avec ses quatre anneaux en respectant des contraintes de couleurs. Il s'initie aux décompositions additives et soustractives des nombres de 1 à 4 et se familiarise avec les compléments à dix. Il construit par lui même les différentes décompositions de 10 en quatre nombres.

En jouant, au ***Magix 34***, l'élève (à partir de Cycle 3) doit totaliser 34 avec ses quatre anneaux. Il se familiarise avec les décompositions additives de 34 pour ensuite s'ouvrir sur les techniques de la soustraction.

Ne pouvant immédiatement atteindre 34, le joueur obtiendra au départ une somme supérieure ou inférieure à ce nombre. C'est en conjuguant plusieurs déplacements successifs que le joueur parvient à totaliser 34.

Le joueur additionne lorsqu'il fait le compte des valeurs sélectionnées au moyen de ses quatre anneaux au moment de leur pose. Il additionne également lorsqu'il déplace son anneau vers une case d'une valeur plus grande que celle de départ. S'il déplace son anneau du 10 vers le 11 il ajoute 1 à son total. Il soustrait s'il déplace un anneau vers une case d'une valeur plus petite que celle d'origine. Dans le premier cas la somme des anneaux augmente, dans le second elle diminue.

Dans le déroulement du jeu, le joueur s'efforce de mémoriser son total pour n'avoir à calculer que les variations enregistrées par chaque déplacement. Ne parvenant pas à totaliser immédiatement 34, il aura systématiquement un total supérieur ou inférieur à cette somme. S'il obtient par exemple 38, le joueur cherchera à perdre 4 points : il devra réaliser « -4 » qu'il mettra en équation. Il construira ce nombre en combinant, par exemple, deux déplacements successifs de « -2 » ou en réalisant par exemple un premier déplacement de « -7 » puis un autre de « +3 » ce qui lui permettra de construire « -4 ».

La multiplication et la division

En jouant au ***Multiplay***, l'élève aborde les tables de multiplication comme un ensemble cohérent et solidaire. Pour bâtir sa stratégie, il doit créer des liens entre les nombres et examiner les relations arithmétiques qu'ils entretiennent les uns avec les autres. Dans le ***Multiplay***, le joueur doit sélectionner deux nombres et leur produit de sorte que les trois termes puissent constituer une multiplication. Lorsqu'il aborde deux nombres, il se demande systématiquement s'ils sont « premiers entre eux » ou s'ils sont les diviseurs communs d'un même nombre. Ainsi, pour atteindre l'objectif fixé par le jeu, le joueur se mettra toujours en recherche du bon produit, s'il a déjà réunit les deux facteurs ou du facteur manquant s'il détient un produit et un de ses diviseurs. Par exemple si j'ai sélectionné le « 8 », le « 24 » et le « 4 » ; trois stratégies s'offrent à moi : soit abandonner le « 8 » pour rechercher un « 6 » et réaliser 6 × 4 = 24 ; soit abandonner le « 24 » pour rechercher le « 32 » et réaliser 4 × 8 = 32 ; soit enfin abandonner le « 4 » pour rechercher le « 3 » et réaliser 3 ×8 = 24.

2 - LE CHAMP GEOMETRIQUE

Le joueur de ***Décadex*** découvre vite les différentes figures géométriques gagnantes sur le plateau. Sur les 86 possibilités différentes de décomposer quatre cases pour totaliser 10 avec quatre couleurs différentes ou deux paires de deux couleurs identiques, 80 configurations débouchent sur un quadrilatère particulier. Le joueur rencontrera les différents parallélogrammes dans les différentes situations de jeu et apprendra ainsi à les identifier. Pour construire un parallélogramme gagnant (carré, losange, rectangle…), il suffit de sélectionner avec ses quatre anneaux, deux paires de deux nombres dont la somme est 5 (par exemple 4, 1 et 3, 2 ou 3, 2, et 3, 2 ou 4, 1 et 4, 1) à condition toutefois d'avoir réuni quatre couleurs différentes ou deux ensembles de deux couleurs identiques. Un excellent travail de recherche peut consister, par exemple, à faire lister par l'enfant les carrés qui font dix avec quatre couleurs différentes (il y en a 10) de quatre format différents. Le plateau de ***Décadex*** peut également servir à illustrer certains principes de symétrie axiale. Ainsi, il apparaît que les cases de couleurs sont disposées selon un axe de symétrie verticale et les nombres selon un axe de symétrie horizontale.

Le plateau du ***Magix 34*** est construit à partir d'un carré magique d'ordre 4. Là encore, la très grande majorité des configurations gagnantes (70%) débouchent sur une figure géométrique. Parmi elles, un grand nombre de parallélogrammes offrent un centre de symétrie qui coïncide avec le centre du plateau. Pour les repérer, il convient de sélectionner deux couples de deux nombres dont la somme est 17 au moyen de quatre anneaux. On notera que ces deux nombres dont la somme est 17 sont toujours symétriques par rapport au centre du plateau. Par exemple : 1 et 16 puis 9 et 8.

Ce procédé permettra de mettre en évidence un grand nombre de parallélogrammes.

Le plateau du ***Multiplay*** donne une illustration intéressante de la construction du symétrique d'un point par rapport au centre du plateau pris comme centre de symétrie. En effet chaque case du plateau est symétrique à une autre case de même couleur et celles-ci offrent ensemble un centre de symétrie qui coïncide avec le centre du plateau.

3 - LA CONSTRUCTION DU RAISONNEMENT : LA RESOLUTION DE PROBLEMES

La pratique de chacun de ces trois jeux, va placer l'élève au devant de situations problèmes pour la résolution desquelles il va devoir s'appuyer sur des notions relevant des domaines numériques et géométriques. Devant l'infini variété et la difficulté croissante des situations auxquelles il est confronté, le joueur élabore peu à peu son approche et progresse dans sa maîtrise du jeu. Ne pouvant se satisfaire d'une stratégie limitée à un pas de raisonnement, il structure sa pensée pour construire un raisonnement qui puisse en comporter deux puis trois. Le jeune joueur apprend ainsi à contrôler les conséquences de ses décisions et fait progressivement la preuve de sa capacité à abstraire pour parvenir à l'objectif fixé par le jeu.

Le ***Décadex*** est un jeu qui permet de bien mettre en évidence l'approfondissement du raisonnement chez le joueur.

L'élève de cycle 2, s'attache à bien exécuter la double contrainte. Il se limite dans un premier temps à un examen superficiel de la situation du joueur adverse. Il est davantage préoccupé par la recherche des possibilités qui lui permettent de faire 10 au prochain coup avec quatre couleurs différentes ou deux groupes de deux couleurs.

Le ***Décadex*** est un outil qui est de nature à aider le jeune joueur à conquérir son autonomie et sa propre rationalité. La compréhension de la règle du jeu est un apprentissage en soi. En jouant, l'élève prend d'abord plaisir à rechercher les différentes façons possibles de configurer correctement une solution. Il s'applique à reproduire des schémas déjà rencontrés et à mener à bien un raisonnement qu'il prendra plaisir à justifier à chaque fois et à réemployer.

Le ***Décadex*** n'appelle pas de stratégie à très long terme. Toutefois, le joueur confirmé va rapidement se mettre en recherche de nouveaux systèmes de résolution. Tout en mettant en place un raisonnement par étape il s'attache à effectuer mentalement un grand nombre de calculs qui vont l'aider à dégager plusieurs options dont il dégagera celle qui lui parait la plus pertinente.

Peu à peu, il apprendra à évaluer le jeu de l'adversaire avant de délivrer son coup et à parer en priorité toute menace éventuelle. Il se laissera moins surprendre et fera ainsi mieux l'apprentissage de l'anticipation.

Enfin, dans une démarche plus experte, l'élève fera intervenir dans son raisonnement des éléments de géométrie qui l'aideront à pousser plus en avant ses raisonnements. Sachant par exemple que tous les quadrilatères particuliers ayant un centre de symétrie coïncidant avec le centre du plateau sont gagnants, il devient aisé de bâtir une stratégie qui aboutirait à construire une figure possédant ce type de propriété.

Cette richesse dans le jeu est rendue possible par le fait que chaque joueur peut connaître ses possibilités d'action et prévoir l'ensemble des choix des autres joueurs ce qui lui permet de disposer de toutes les informations nécessaires à la résolution de la situation à dénouer. En jouant au ***Décadex***, l'élève, du primaire au collège, apprend à construire un problème, à organiser une démarche raisonnée, à bâtir une argumentation et à contrôler ses résultats.

La stratégie employée dans le ***Magix 34*** s'appuie encore plus clairement sur le calcul mental. Le joueur doit calculer pour décrypter une situation et pour recueillir les informations à partir desquelles il bâtira sa stratégie. C'est de son aptitude à calculer juste et à mémoriser les résultats de ses opérations qu'il parvient à s'assurer de la prédictibilité de ses analyses. Dans le ***Magix 34***, l'objectif est purement arithmétique. Il demeure un support privilégié pour l'argumentation mathématique tant le raisonnement déductif qu'il appelle s'appuie sur une programmation de calculs aux conséquences aisément démontrables.

Le raisonnement utilisé dans le ***Multiplay*** s'appuie, comme nous l'avons vu, sur le mécanisme de la multiplication et le recours à la notion de diviseurs et de multiples communs. Il faut sélectionner trois nombres de sorte que le plus fort corresponde au produit des deux autres. Ce jeu s'appuie sur la relation existant entre le produit de deux nombres inférieurs à dix et leur produit. C'est en recourant à un raisonnement déductif simple que le joueur parviendra à mettre en adéquation ces trois nombres.

4 - LA CONSTRUCTION DU LANGAGE ARGUMENTATIF.

Dans le cadre de la pratique d'un jeu à deux, les élèves recourent souvent à un mode d'expression peu propice, en principe, à la bonne mise en place des éléments du langage mathématique. Afin d'inciter les joueurs à dialoguer entre eux et de les amener à s'interroger sur la démarche à mettre en œuvre, l'enseignant peut initier des pratiques du jeu en situation collaborative. Ce type de pratiques débouche sur la construction du raisonnement, sur sa verbalisation et sur la mise en commun des démarches menées par chacun des joueurs.

L'intérêt des pratiques dites collaboratives

Elles s'effectuent sous la forme d'un jeu à quatre en deux équipes de deux. Les co-équipiers sont disposés en diagonale l'un par rapport à l'autre et collaborent entre eux à voix haute. Les membres d'une même équipe ne sont pas placés l'un à côté de l'autre afin d'éviter toute communication chuchotée. Les stratégies sont donc entendues de tous les joueurs.

Pourquoi inciter l'élève à dévoiler à voix haute son plan à l'adversaire ?

Cette pratique élimine toute stratégie fondée sur l'effet de surprise ou toute victoire due à la faute d'inattention de l'adversaire. Le joueur agit en toute connaissance de cause. Il a vu le coup se préparer et il étudie donc une situation qu'il a lui même vu se construire au coup précédent. A son tour, soit il agit conformément au plan de l'adversaire et il perd la partie, soit il trouve une faille dans le jeu adverse et il lui propose un coup auquel il n'était pas préparé. Cette pratique offre l'avantage de faire évaluer à voix haute chaque coup par l'adversaire. Le joueur ne peut pas dissimuler ses intentions à son partenaire et donc à ses adversaires. Cela permet de créer des pratiques sereines au cours desquelles chacun s'enrichit des commentaires adverses sans chercher à lui tendre des pièges. Celui qui perd s'en prend généralement à lui-même ou à son manque de concertation avec son partenaire et non pas à la malice présupposée de ses adversaires.

Pourquoi inciter l'élève à soumettre sa stratégie à son partenaire ?

En fait, lorsque l'élève joue dans une pratique à deux, il est faiblement incité à analyser sa stratégie. A chaque situation de jeu se présentent en principe plusieurs solutions. Il est souvent tenté de s'emparer de la première stratégie venue et de l'appliquer sans l'avoir véritablement éprouvée au préalable. Il gagnera ou il perdra la partie sans trop savoir pourquoi. Cela aura en définitive peu d'importance pour lui puisqu'il aura toujours la possibilité de refaire une nouvelle partie qui effacera le souvenir de la précédente. En demandant au joueur de communiquer son plan à son partenaire, on l'amène à conceptualiser sa stratégie et à faire l'apprentissage de l'abstraction. Il va devoir ainsi organiser sa pensée pour rendre son plan transférable à son partenaire. La nécessité de verbaliser sa pensée va immanquablement le conduire à approfondir son raisonnement et à construire son argumentation.

Pourquoi inciter l'élève à recueillir l'adhésion de son partenaire ?

Dans le ***Magix 34***, le ***Décadex*** et le ***Multiplay***, à chaque situation de jeu se présente un grand nombre de stratégies possibles. Lorsque le joueur communique sa solution à son partenaire, immanquablement ce dernier lui fait part du plan qu'il souhaiterait également voir mettre en place. Cette situation va conduire les joueurs à défendre chacun leurs positions et à mettre en avant les avantages et les inconvénients relatifs à chaque proposition. Cette mise en débat des solutions va les amener à approfondir leurs analyses, à tester leurs stratégies, à vérifier les résultats jusqu'à ce qu'une décision soit prise d'un commun accord.

Oui mais, n'y a-t-il pas un risque de voir toujours le même joueur décider à la place de l'autre ?

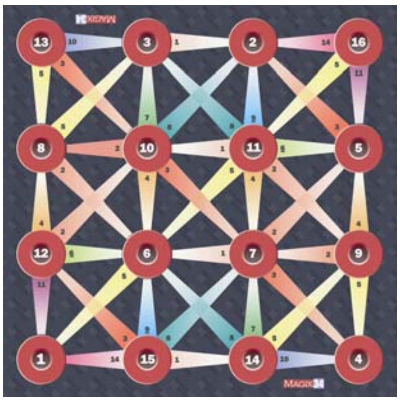
Cela peut être le cas, si les membres d'une même équipe jouent l'un à côté de l'autre. Le joueur le plus confiant peut alors décider de prendre en main la direction des opérations. Son partenaire risque alors de s'installer dans une forme de passivité. En intercalant les joueurs d'une même équipe avec ceux de l'équipe adverse, on réintroduit le dialogue dans le binôme en demandant au joueur dont c'est le tour de jouer, de décider du coup qu'il va choisir. Son partenaire ne doit alors ni jouer à sa place ni lui dicter son coup. Tout au plus il peut le conseiller. C'est donc en passant par le verbe que le joueur va devoir convaincre son partenaire du bien-fondé de sa stratégie et le cas échéant réfuter son argumentation. En jouant par équipe, l'élève apprend à communiquer et à régler paisiblement les différents points de désaccord qui peuvent surgir dans le binôme. La collaboration dans le jeu commence alors par un exposé du problème posé et par l'évocation des solutions possibles que les partenaires détaillent les unes après les autres. Dans le jeu à quatre, la distribution des rôles change à chaque tour et on devient alternativement acteur et conseiller. Celui qui remplit une mission de conseil pointe les faiblesses du coup proposé et propose une alternative en l'argumentant.

Les pratiques de jeu en situation collaborative font ainsi une place essentielle aux échanges verbaux et favorisent l'implication de tous les élèves dans la phase de recherche de solutions. L'enfant qui a appris à collaborer dans le cadre d'un jeu parviendra plus facilement à s'impliquer ensuite dans un travail en groupe.

Le rôle de l'enseignant

L'enseignant a sa part dans le succès d'un apprentissage collaboratif. Il aide les enfants à verbaliser en les interrogeant sur les objectifs à atteindre et sur les contraintes à respecter. Il intervient dans le fonctionnement d'une paire lorsqu'elle laisse un de ses membres en dehors de l'interaction ou pour tempérer les ardeurs d'un joueur trop impulsif. Dans ce cas, il va exercer son rôle de médiateur en reprenant les propos de l'enfant pour les lui faire clarifier ou expliciter. C'est à force de sollicitations de la part de son enseignant que l'enfant parvient peu à peu à entrer dans le discours et à exprimer les éléments de stratégie qu'il aurait très légitimement préférés garder pour lui.

Présentation simplifiée des règles des jeux présentés



Le MAGIX 34

Le plateau se compose de 16 cases numérotées de 1 à 16 configurées en carré magique. Chaque joueur dispose de quatre anneaux. En posant ses 4 anneaux à tour de rôle sur les cases du plateau, puis en les déplaçant d'une case à l'autre, le joueur gagnant est celui qui le premier totalise 34 points en additionnant les quatre valeurs qu'il aura sélectionnées avec ses 4 anneaux.
Il doit atteindre cet objectif tout en empêchant son adversaire d'y accéder avant lui.

Le DECADEX

Chaque joueur dispose de quatre anneaux. En posant ses anneaux à tour de rôle sur les nombres (de 1 à 4) du plateau, puis en les déplaçant d'une case à l'autre, le joueur gagnant est celui qui le premier totalise 10 en additionnant les valeurs des 4 cases qu'il a sélectionnées avec ses 4 anneaux à condition de réunir 4 couleurs différentes ou deux paires de deux couleurs identiques (deux rouges et deux bleues). Il doit atteindre cet objectif tout en empêchant son adversaire d'y accéder avant lui.

Le MULTIPLAY

Chaque joueur dispose de trois anneaux.
En posant ses anneaux à tour de rôle sur les nombres du plateau, puis en les déplaçant d'une case à l'autre, le joueur gagnant est celui qui réunit en premier, les trois termes d'une multiplication (3, 8 et 24).
Il doit atteindre cet objectif tout en empêchant son adversaire d'y accéder avant lui.

BIBLIOGRAPHIE

« *Echec et maths* », JDI mai 2005

RICHARD J., TROUILLOT E., FARDAJI D., LE BORGNE P. (2005) « *Mathématiques et jeux au collège* », Hachette.

(1998) Jeux 5 : des activités mathématiques au collège, APMEP, **119**.

(2002) Jeux 6 : des activités mathématiques pour la classe, APMEP, **144**.

(2005) Jeux 7 : des activités mathématiques pour la classe, APMEP, **169**.

DÉCOUVRIR LE MONDE AVEC LES MATHÉMATIQUES AU CYCLE 1

Dominique VALENTIN
PIUM retraitée - Bures sur Yvette

Résumé
Dominique Valentin développe dans une première partie de l'article, et à travers des exemples issus de ses ouvrages, sa conception de l'enseignement des mathématiques à l'école maternelle : la résolution de problèmes pour apprendre à chercher et à chercher pour apprendre. La seconde partie de l'article est le compte rendu incomplet des problèmes posés par les enseignants présents à l'atelier et en charge de la formation des PE sur ce sujet.

I – 30 MAI : PROPOSITIONS POUR LA CLASSE

En quoi les mathématiques peuvent-elles aider des enfants de 3-5 ans à « découvrir le monde » comme nous y invitent les IO de 2002 ?

De quelles mathématiques s'agit-il ? Quels changements d'objectifs ?

Quelles situations peut-on proposer ?

I – 1 Quelques préalables

I – 1.1 Evolution des conceptions de l'apprentissage

Je voudrais d'abord insister sur la spécificité française de « notre » école maternelle (spécificité que la table ronde internationale a bien montrée) : il s'agit bien d'une « école » et non d'un jardin d'enfant, une école qui reçoit maintenant la très grande majorité des enfants dès 3 ans, avec des Instructions Officielles fortes (même si elles sont jugées moins contraignantes que celles qui régissent l'école élémentaire), des pratiques bien assises et une renommée qui dépasse les frontières. Mais cette belle école est également pleine de contradictions qui risquent de la mettre en danger. Il me semble que c'est en précisant de façon rigoureuse sa spécificité, son importance dans l'ensemble de la scolarité des enfants d'aujourd'hui mais aussi en n'hésitant pas à la faire évoluer que nous pourrons la sauver.

Un simple regard sur les IO qui la régissent depuis sa création met en évidence des changements importants au niveau des conceptions d'apprentissage sous-jacentes. Je les résume simplement par le tableau suivant dont chaque phase peut être datée (et qui peut certainement être amélioré).

Il me semble que nous avons tout intérêt à analyser cette évolution, à en conserver les points forts et non à « jeter le bébé avec l'eau du bain… », en nous demandant pour quels apprentissages il faut absolument s'appuyer sur le vécu, pour quels autres il suffit de manipuler, *etc*.

l'enfant est invité à	Intentions du maître
Observer, répéter ↓	Transmettre des connaissances achevées
manipuler, agir ↓	rendre actif
s'appuyer sur le vécu, vivre ↓	donner du sens
jouer ↓	motiver
résoudre des problèmes, élaborer des procédures personnelles	faire construire pour faire comprendre et rendre disponible

D'autre part, si, aujourd'hui, nous pensons que la résolution de problème est un moteur de l'apprentissage, si ce mot est « pédagogiquement correct », nous devons nous demander ce que signifie « résoudre des problèmes » à la fois pour des enfants de 3 ou 4 ans et pour leurs enseignants et à quelles conditions c'est possible (voir ci-dessous).

I – 1.2 Importance du langage

Impossible de travailler avec de si jeunes enfants sans être confrontés aux problèmes de langage à au moins deux points de vue :

- Les difficultés de communication, dans les deux sens, qui rendent l'appropriation des situations au travers des consignes particulièrement délicate et demandent à l'adulte une très grande disponibilité d'écoute ;
- le développement des compétences langagières provoqué par les situations proposées, quelles qu'elles soient, même si elles n'ont pas cet objectif explicite.

Je ne développe pas ces deux points ici mais je voudrais seulement insister sur les effets très positifs des situations d'action sur les acquisitions des enfants dans le domaine de la langue. Je cite volontiers les travaux de Mireille Brigaudiot dans ce domaine, elle qui écrit[1], en particulier : « Faut-il créer des situations *ad hoc* où les enfants sont amenés à expliquer, à argumenter, à raconter ? Je dirai non pour la petite section. C'est l'intérêt qu'ils portent à une situation qui va faire qu'ils vont mettre en œuvre ou pas, leur capacité discursive. Essayons donc de les intéresser. Comment faire ? En nous intéressant à ce qu'ils disent, en les encourageant à pouvoir dire, nous n'aurons plus qu'à suivre. »

J'ajouterais encore que cette écoute attentive, accueillante, a également un effet sur la création du lien de confiance adulte-enfant si nécessaire en ce tout début de la scolarité.

---

[1] Mireille BRIGAUDIOT (1997) « Plaidoyer pour les enfants de petite section » in Cahiers Pédagogiques n° 352.

I – 1.3 «Faire des maths, c'est les faire… »

Je m'appuie sur les travaux de R. Bkouche, B. Charlot et N. Rouche[2] dans ma façon d'envisager ce que veut dire « faire faire des maths », même en ce qui concerne les enfants de 3-4 ans, en cherchant à les engager dans la construction de démarches plus qu'en les poussant à apprendre, comme nous le verrons plus loin.

Nous retrouvons également la nécessité de proposer des situations « complexes » (mais pas nécessairement « compliquées ») qui nécessitent de construire des liens entre différents savoirs, qui permettent surtout de les mettre en réseau ce qui les rend disponibles dans de nouveaux contextes[3].

I – 1.4 Evaluation et différenciation

Enfin, il me semble essentiel d'engager tous les acteurs de l'école maternelle dans une réflexion solide sur l'articulation entre l'évaluation des connaissances et compétences, la gestion des situations et, en conséquence, les différentes formes de différenciation[4]. L'école maternelle souffre aujourd'hui d'une grande incohérence entre des conceptions de l'apprentissage prônant le développement de compétences transversales, le rôle de la résolution de problèmes comme moteur de l'apprentissage et une conception de l'évaluation, visible dans les différents livrets de compétences, très proche de la PPO (Pédagogie Par Objectifs) des années 70. Il y a souvent confusion entre différenciation et remédiation, remédiation au coup par coup oubliant que les connaissances ne peuvent se construire que dans la durée (souvent supérieure à l'année, voire à un cycle), dans des itinéraires d'enseignement et d'apprentissage qui s'appuient sur un ensemble de situations et non sur une seule qu'il faudrait tirer jusqu'au bout, un bout qui serait le même pour tous.

I – 2 La résolution de problèmes : apprendre à chercher/chercher pour apprendre

I – 2.1 Apprendre à chercher

Les IO de 2002, dans lesquelles le mot « mathématiques » n'est jamais prononcé - ce qui demande tout de même d'y regarder de plus près comme nous le verrons un peu plus loin - sont par contre sans ambiguïté sur le rôle de la résolution de problème. Il s'agit aujourd'hui d'aider l'enfant à « découvrir le monde » en lui permettant de développer des compétences qui sont clairement listées à deux endroits (page 65 et 67 de l'ouvrage publié par le CDDP) dont le second s'intitule « compétences transversales ». Bien que ces « instructions » soient précises, les moyens sont laissés à l'initiative de chaque enseignant et l'on voit vite qu'il reste à celui-ci une grande marge

---

[2] R. BKOUCHE, B. CHARLOT et N. ROUCHE (1991) Faire des mathématiques, le plaisir du sens*, A. Colin*.

[3] Anne-Marie RAGOT et Richard ASSUIED (2000) « Apprendre dans des situations complexes » in L'école Valdotaine n° 48 ou sur le site de L'école Valdotaine : www.scuole.vda.it).

[4] Roland CHARNAY, Jacques DOUAIRE, Jean-Claude GUILLAUME, Dominique VALENTIN (1995) Chacun, tous, différemment… ! Différenciation en Mathématiques au cycle des apprentissages., Rencontres Pédagogiques n°34, INRP.

de manœuvre. J'ai donc personnellement fait des choix[5] qui m'amènent à envisager dès la Petite Section des objectifs assez ambitieux (mais réalistes !) en ce qui concerne l'engagement dans une vraie activité de résolution de problèmes à partir de la définition du problème donnée par Jean Brun : « Un problème est une situation initiale avec un but à atteindre demandant à un sujet d'élaborer une suite d'actions ou d'opérations pour atteindre ce but. », ces actions pouvant évidemment être entendues comme actions « mentales ». J'ai pris comme exemple une situation construite à partir d'un jouet, le Baby-jackpot (TOMY), dans lequel l'enfant doit construire cette suite d'actions pour obtenir la « levée » successive de quatre animaux en manipulant librement trois manettes. Pour un enfant de 2 ans et demi ou 3 ans, cela peut être une première occasion d'entrer dans une vraie démarche de recherche avec une situation initiale et un but à atteindre facilement identifiables (et en particulier un but « désirable ») dans laquelle il doit agir seul, sans soumission au hasard et qui a encore le mérite d'être auto-validante : l'animal se lève ou ne se lève pas...

J'ai tenté de montrer que dès cette première situation (mais ce n'est bien sûr qu'un exemple) et à condition qu'elle ne soit pas isolée, se met en place un **contrat didactique** fort, en particulier en ce qui concerne le fait qu'une solution ne s'obtient pas tout de suite, ne s'imite pas, que plusieurs essais sont possibles, que les erreurs d'action font partie de l'aventure, que le sujet est seul à déterminer s'il a ou non atteint le but qui lui a été fixé et qui lui est très accessible… C'est déjà beaucoup pour cet âge ! Si l'on ajoute qu'une telle situation amène également ces enfants à rester concentrés plus de quelques minutes, à désirer recommencer, à observer leurs camarades en train de chercher eux-mêmes, à accepter des contraintes, il me semble que cette situation, même imparfaite, peut nous servir de prototype.

Dès les premières situations proposées, il importe donc, à mon avis, que les enfants puissent observer les effets de leurs actions, qu'ils puissent donc les **choisir** et avoir conscience de leur pleine responsabilité dans ce domaine ce qui implique, en particulier, que le hasard n'intervienne pas et ne soit en aucun cas responsable d'un échec : « Je sais ce que j'ai fait, je pouvais faire autrement, j'ai réussi ou j'ai échoué… » et non : « j'ai pas eu de chance… »

On voit aussi que le cadre des situations fonctionnelles (qui sont utiles dans la vie de la classe ce qui leur donnent sens) n'est pas particulièrement propice à la construction de telles situations : les situations fonctionnelles peuvent servir de « contexte évoqué », comme le goûter de la classe peut donner du sens à une activité qui serait le goûter des poupées, situation totalement cadrée et artificielle, dont les valeurs des variables didactiques peuvent être aisément manipulées par l'enseignant.

J'ai proposé, durant l'atelier plusieurs exemples que je ne peux décrire ici : Les Bouquets variés, Parcours de boules, Les rails, Les embouteillages, Les Tours… (cf ouvrage cité). Si chacune de ces situations a bien pour premier objectif d'amener les enfants à « apprendre à chercher », elle leur permet également d'aborder certains contenus tels que des relations spatiales, des couleurs, des points de vue, *etc*.

---

[5] Dominique VALENTIN (2004) Découvrir le monde avec les mathématiques, situations pour la petite et la moyenne section, *Hatier*, (Le deuxième tome, pour la grande section est à paraître en septembre 2005).

I –3 Quels contenus ? Les couleurs, les formes, les nombres…

Les IO en vigueur qui, en principe, ne parlent pas de « mathématiques », affichent cependant des listes de compétences à acquérir en fin de cycle qui sont clairement reconnues comme mathématiques… : « Compétences dans le domaine de la structuration de l'espace », « Compétences relatives aux formes et aux grandeurs », « Compétences relatives aux quantités et aux nombres »… Ces listes, certainement utiles pour baliser ces contenus, sont cependant à double tranchant et d'autant plus qu'elles ne sont données que comme un aboutissement de fin de cycle, les enseignants ayant à charge d'en répartir leur acquisition sur les trois années.

Est-ce pour cela que l'on entend encore dire qu'en Petite Section « on fait le 1 au premier trimestre, le 2 au deuxième et le 3 au troisième » ?… quand ce n'est pas également « le carré en PS, le rond en MS et le triangle en GS » ! Hélas, je n'exagère pas, ce qui montre que tout le texte, fort et novateur, qui précède dans les IO ces fameuses listes de compétences, passe bien vite à la trappe.

La question qui se pose à nous, praticiens ou formateurs, maintenant est donc beaucoup plus difficile : comment envisager la construction des connaissances comme réponses à des problèmes ? Ou bien, comment engager les enfants à « chercher pour apprendre » ? Est-ce possible dès la Petite Section ?

J'ai choisi de répondre positivement à cette dernière question et de construire un certain nombre de situations dans ce sens, même si je n'ai pas toujours trouvé les solutions miracles pour atteindre un objectif assez ambitieux.

Je prends ici l'exemple de la prise de conscience des quantités.

Des quantités aux nombres

I – 3.1 Chercher pour apprendre

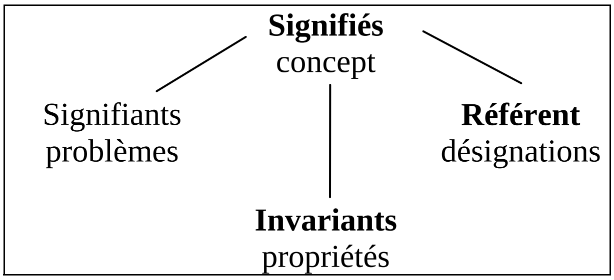
Les IO de 2002 sont les premières à faire référence de façon explicite au concept de « quantité » et pas seulement aux nombres, ce dont je me réjouis.

Grâce à des travaux dont certains sont déjà anciens comme ceux de Piaget, Gréco, Brunner, Fayol, Meljac, on sait que le concept de nombre ne se construit pas (ou pas seulement) à partir des activités de comptage, quelles qu'elles soient.

Le schéma ci-après, (issu des travaux des psycho-linguistes et repris par G. Vergnaud[6]) nous est d'une grande aide car il nous oblige à avoir plusieurs points de vue en même temps. En ce qui concerne les quantités, la question des invariants, de leur conservation, ne peut être oubliée, même si certains pensent que les travaux de Piaget, Greco… sont dépassés.

---

[6] « un concept ne peut être réduit à sa définition, du moins si l'on s'intéresse à son apprentissage et à son enseignement. C'est à travers des situations et des problèmes à résoudre qu'un concept acquiert du sens pour l'enfant » Gérard VERGNAUD.



I – 3.2 La question des invariants[7]

Après avoir rappelé une des épreuves de Piaget portant sur la conservation des quantités discrètes, j'ai pris l'exemple de l'espace occupé par une même collection de billes chinoises selon qu'elle est placée dans des boîtes cylindriques de différents diamètres (Les Paires de Boîtes). Pour l'enfant de 4 ans, il n'y a aucune hésitation : la collection placée dans la boîte de diamètre inférieur est toujours jugée plus importante que lorsque cette même collection est disposée dans la boîte dont le diamètre est supérieur, même s'il a lui-même transvasé la collection d'une boîte dans l'autre, sans enlever ou ajouter aucune bille. Que faut-il en penser ? Faut-il « attendre » simplement que l'enfant ait la possibilité de mettre en œuvre un raisonnement puissant lui permettant de dépasser l'illusion d'optique (en référence aux stades de Piaget) ou peut-on « provoquer » ce raisonnement ou, au minimum, créer le doute, en jouant sur les conditions de la situation ? J'ai cherché les conditions qui amènent les enfants de 4 ans à dépasser l'illusion d'optique et, ce faisant, à prendre conscience de certains invariants des quantités, ce qui me semble intéressant non pas tant pour la construction du concept de nombre (qui se construira toujours, finalement…) mais surtout pour le développement des capacités de raisonnement : « ben j'crois que c'est quand même pareil : on dirait qu'il y en a plus là, mais c'est parce que les billes elles ont pas beaucoup de place parce que cette boîte là elle est petite et l'autre elle est grande » Oussama, janvier d'une Moyenne Section en ZEP.

I – 3.3 La question du comptage

On pourra relire certains des articles qui composent, de façon assez hétérogène, l'ouvrage *Les Chemins du nombre* et en particulier celui d'Arthur J. Baroody[8]. J'avoue que j'ai choisi un autre point de vue : au lieu d'emmener les enfants « du comptage à la résolution de problèmes », comme le dit Fayol en sous-titre de son ouvrage *L'enfant et le Nombre*, en travaillant d'abord « les principes du comptage » ou les « savoir-faire » de ce même comptage, j'ai tenté la démarche inverse : « de la résolution de problèmes au comptage », voire au calcul.

Puisque les enfants de 3 ans rencontrent de grandes difficultés à dénombrer, pourquoi ne pas les engager à chercher des solutions à des problèmes de gestion de quantités qui ne nécessitent pas de dénombrer (mais le permettent éventuellement, bien sûr) ? Et si on

---

[7] Michel FAYOL propose une bonne revue de la question de la conservation dans son ouvrage L'enfant et le nombre, *Delachaux et Niestlé*, 1990.

[8] Arthur J. BAROODY (1991) Procédures et principes de comptage : leur développement avant l'école, in Les Chemins de Nombre, Presses Universitaires de Lille.

accepte que le dénombrement ne soit plus la sacro-sainte procédure visée en Petite Section, on trouve une certaine cohérence dans la construction des procédures pour quantifier, comparer ou construire des équipotences de collections, en fonction de la taille des collections concernées :

- approche approximative, « à la louche », de « grandes » quantités ;
- mise en correspondance terme à terme pour des collections pas trop grandes mais hors la zone de subitizing ;
- reconnaissance globale et exacte de petites quantités dans la zone de subitizing et mémorisation de patterns standards tels que les configurations des doigts, des dés ou des cartes à jouer (non parasitée par le besoin ou l'obligation de compter) ;
- approche progressive du dénombrement en Moyenne et Grande Section, dans des situations où les quantités se situent hors de la zone de subitizing.

Bien sûr, l'apprentissage du comptage (au moins celui de la mémorisation de la suite numérique) se développe en parallèle, principalement dans les familles qui n'attendent pas l'entrée à l'école de leur enfant pour lui faire compter les marches des escaliers ou les noyaux de prunes… et l'ont toujours assuré. Les enfants sont également observateurs des procédures utilisées par les adultes devant eux, parfois ostensiblement. Mais, dans cette conception, le « savoir compter » n'est plus un préalable à la résolution de problèmes numériques.

Dans les deux situations « Boîtes d'œufs » et « Le goûter des poupées » (je n'ai eu le temps de présenter que la première), les enfants sont ainsi amenés à construire une collection équipotente à une collection de référence de douze éléments. Douze, c'est « beaucoup », c'est une quantité volontairement choisie hors de leur capacité de quantification. Ils vont pouvoir approcher cette « grande » quantité progressivement et commencer une quantification en cours de route, sans pour autant être obligés d'associer une désignation, un nombre, à la quantité qu'ils peuvent finalement appréhender : 2 pour certains, 3 ou 4 pour d'autres, 6 parfois, parce que la boîte d'œufs (ou la table du goûter) est organisée en deux rangées de 6. C'est aussi parce qu'une contrainte est imposée par la situation (ne jamais prendre plus de châtaignes ou de bonbons qu'il n'y a de places encore vides) que le remplissage de la boîte amène chaque enfant à prendre conscience des quantités en jeu. C'est enfin parce que plusieurs boîtes identiques devront être ainsi successivement remplies avec les mêmes contraintes que les procédures élaborées s'améliorent et se stabilisent. Bien sûr, en Moyenne Section et en Grande Section d'autres situations doivent être proposées dans le même esprit.

Après six années d'expérimentation, je constate que les enfants qui sont maintenant en Grande Section en ayant vécu cette progression durant trois années comptent très bien, de façon très assurée et souvent au-delà des limites imposées par les IO, sans qu'un entraînement systématique ait été nécessaire pour eux. Par contre, nous n'avons pas hésité à « montrer » à ceux qui en avaient besoin comment améliorer leurs procédures de comptage un par un quand celui-ci avait pris sens, en particulier lorsqu'il s'agit d'un problème de marquage, en séparant les objets déjà comptés de ceux qui ne le sont pas encore : apprendre par la résolution de problèmes ne signifie pas s'enliser dans des difficultés techniques…

L'apprentissage des désignations peut être abordé de la même manière : les mots-nombres sont utilisés dans le désordre[9], selon les besoins des situations et les enfants sont en contact avec les écritures chiffrées qui leur permettent de gérer les « feuilles de route » de plusieurs situations à problèmes multiples ; une bande numérique individuelle et personnalisée leur permet de les décoder seuls. On retrouve ici une démarche assez proche de celles de l'apprentissage de la langue ; comme le dit parfois une enseignante (avec laquelle je travaille depuis longtemps) aux parents un peu surpris par ce manque d'ordre… : est-ce qu'il faut apprendre à dire « bonjour » avant de dire « au revoir », « papa » avant « maman » ?

Conclusion

Sans doute l'école maternelle a-t-elle toujours été ouverte aux changements, toujours en recherche de ce qui pouvait le mieux convenir aux enfants dont elle a la charge, de façon « maternelle », ce qui la rend peut-être plus vigilante à leurs besoins, leurs satisfactions, leur confort, voire leur bonheur… Il me semble qu'elle est aujourd'hui à un tournant de son histoire si elle veut conserver sa spécificité et j'espère que tous les acteurs auront à cœur de l'aider à « bien tourner » !

II – 31 MAI : QUELLE FORMATION DES ENSEIGNANTS POUR ATTEINDRE CES OBJECTIFS ?

Conséquences pour la formation initiale et continue des enseignants.

Comment éviter l'usage intensif des fiches photocopiées, des exercices formels, des rituels redondants ?

Comment engager une recherche de cohérence sur les trois niveaux ?

Comment « découper » les compétences attendues en fin de cycle pour chacune des trois années de l'école maternelle ?

Quelles actions de formation proposer ?

Nous serons amenés à confronter nos points de vue sur le sujet en fonction des différentes positions institutionnelles que nous occupons et des tâches qui en découlent : organisation d'animations pédagogiques, de stages, accueil de jeunes collègues dans les classes, *etc*.

Après un tour de table de présentation, les questions suivantes retiennent l'attention des participants :

- quelles sont les difficultés majeures pour atteindre les objectifs d'apprentissage développés la veille ?
- Quelles stratégies de formation des enseignants ?

[9] Cf Apprentissages numériques et résolution de problèmes, ERMEL 1989 et 2005.

- Le compte-rendu qui suit constitue une trace écrite incomplète des échanges entre les participants et l'animatrice.

Le premier aspect souligné par les participants est que, pour les PE2, leur connaissance de la maternelle est abstraite et leur formation est insuffisante.

Ce qui préoccupe le plus les jeunes enseignants est que les activités proposées sont limitées très souvent à un nombre restreint d'enfants et se pose alors les questions :

- que faire des autres élèves pendant ce temps ?
- Comment mettre en place des activités autonomes qui durent assez longtemps ?

II – 1 Un travail spécifique sur l'organisation de la classe de maternelle paraît indispensable

II – 1.1 État des lieux

Avant chaque conférence ou animation pédagogique, Dominique Valentin écrit au public pour demander :

- de lui envoyer une situation mathématique, mise en place depuis le début de l'année, qui a bien fonctionné ;
- de préciser les difficultés mathématiques rencontrées au cours de l'année.

Les réponses concernent essentiellement les mathématiques dans les activités rituelles et fonctionnelles. Il apparaît **peu d'idées de situations mathématiques vécues au sein d'un atelier principal** pris en charge par l'enseignant.

Comment faire des mathématiques dans le cadre d'une organisation par ateliers de la classe ? Est-ce toujours pertinent ? A quel moment ?

II – 1.2 Éléments de réponse

Il est **nécessaire de se constituer une « banque » d'activités autonomes** pour que le maître puisse se concentrer assez longtemps sur un atelier de recherche (atelier principal) avec un petit groupe d'enfants.

Dominique Valentin pense :

- qu'en **PS et MS**, il est préférable de privilégier **un travail de recherche avec un groupe restreint d'enfants** de façon à faciliter les interactions entre les enfants ;
- par contre, qu'en GS, une **recherche** est tout à fait possible **en grand groupe** et est même très intéressante du point de vue de la transition vers le CP et des possibilités d'interaction collective permettant un débat mathématique.

Exemple : le jeu « LOGIX[10] », jeu d'origine canadienne, proposé en classe entière.

Les trois quarts des élèves se sont appropriés ce jeu plutôt complexe ; il a suffit d'un atelier complémentaire pour que le reste des enfants se l'approprie.

Concernant l'**organisation** des activités mathématiques **en ateliers**, il n'y a donc **pas d'organisation pédagogique figée**. L'essentiel est que les enfants aient compris la tâche à réaliser (une tâche qui ait du sens), qu'ils s'y tiennent, qu'ils apprennent à chercher et à s'évaluer. Ceci leur permettra de cheminer vers l'autonomie.

Intervention d'un participant :
Les ateliers *tournants* que l'on rencontre souvent à la maternelle devraient fonctionner à partir de l'étayage du maître. Ils devraient pouvoir évoluer et non pas être figés à l'année avec les mêmes participants (souvent un élève reste à l'année dans l'atelier dit des « bleus »).
Les activités proposées doivent avoir du sens pour les jeunes enfants.

Réponse de Dominique Valentin :

> L'essentiel est d'être dans la différenciation (ne pas confondre avec la remédiation), chaque enfant a besoin du maître mais de façon différente.
> Il faut faire un vrai travail de formation, en direction des PE2, sur le fonctionnement des classes maternelles.

II – 2 Des tâches complexes doivent être proposées aux élèves

II – 2.1 Etat des lieux

Exemple d'un travail en formation : on analyse une situation mathématique à l'aide d'une vidéo puis on arrête le visionnement après la présentation de l'activité, on demande alors au PE2 :

- que va-t-il se passer maintenant ?
- En combien de temps les enfants vont-ils réussir cette activité ?

En général, ils évaluent le temps de réussite à 20 minutes quand 8 séances sont nécessaires. Ceci montre le décalage entre la représentativité que les PE2 se font des élèves de maternelle et la réalité.

II – 2.2 Éléments de réponse

Il est essentiel de donner aux élèves des tâches complexes (il ne faut pas avoir peur des difficultés). On peut proposer une activité de recherche sur une période relativement longue. L'apprentissage se construit sur la durée.

L'exemple de la situation «EMBOUTEILLAGE[11] » (conçue à partir d'un jeu « Rushhour , a traffic jam puzzle » distribué en France par Eveil et Jeux et Didacto) est

[10] Dominique VALENTIN (2005) Découvrir le monde avec les mathématiques (situations pour la grande section), p. 19, *HATIER*.

largement détaillé et Dominique Valentin évoque ensuite les itinéraires d'apprentissage développés dans « Chacun, tous, différemment …. » ouvrage déjà cité.

Cependant les PE2 sont devant deux discours contradictoires : celui du titulaire de la classe et celui de l'INRP ; souvent ils privilégient le premier.

II – 3 Autres points évoqués

Il n'y a pas nécessairement adéquation entre l'activité mise en place et la compétence travaillée.

Il faut donc rechercher une grande cohérence entre les activités proposées et les compétences visées et réfléchir aux tâches qui permettront de construire des connaissances. Il faut garder à l'esprit que l'évaluation doit faire partie de l'activité.

Quelle trace écrite proposer ? Cette question empoisonne l'école maternelle.
Certains IEN essaient de faire évoluer les pratiques de la fiche photocopiée en proposant des photos numériques, des descriptions d'activités faites en classe avec éventuellement la règle du jeu, les compétences travaillées, le résumé des situations mises en place…

En résumé

Que faire en formation avec les PE2 ?

- donner un questionnaire préalable ;
- donner des idées de situations de recherche ;
- analyser une situation de façon approfondie ;
- faire le lien avec les IO (analyse fine), les documents d'accompagnement des programmes ;
- proposer une frise chronologique des apprentissages par champ disciplinaire.

L'atelier a dû malheureusement prendre fin.

Pour ceux qui veulent poursuivre la réflexion, ils peuvent se procurer les ouvrages de Dominique Valentin cités en référence.

BIBLIOGRAPHIE

VALENTIN D. (2005) Découvrir le monde avec les mathématiques (situations pour la grande section), *HATIER, ISBN 22 187 46565.*

VALENTIN D. (2004) Découvrir le monde avec les mathématiques Petites et Moyennes Sections de Maternelle, *HATIER, ISBN 22 187 46557.*

[11] Cf. Dominique VALENTIN (2005) Découvrir le monde avec les mathématiques (situations pour la grande section), p. 5, *HATIER.*

LIRE ET ÉCRIRE DES ÉNONCES DE PROBLÈMES ADDITIFS (2) : LE TRAVAIL SUR LA LANGUE

Annie CAMENISCH
Maître de conférences Lettres, IUFM d'Alsace
EA 1339, Marc Bloch, Strasbourg
annie.camenisch@alsace.iufm.fr

Serge PETIT
Professeur de Mathématiques, IUFM d'Alsace
EA 1339, Marc Bloch, Strasbourg
serge.petit@alsace.iufm.fr

Résumé
Les programmes de l'école primaire 2002 prescrivent de développer la maîtrise de la langue notamment dans et à travers les disciplines. Comment peut-on réaliser des apprentissages sur la langue à partir de l'écriture d'énoncés de problèmes additifs ? Quelles démarches mettre en œuvre ? Quels outils mathématiques mettre à disposition des élèves pour améliorer leurs performances en résolution de problèmes de ce type ? Comment permettre aux élèves de s'approprier ces outils ?

Cet atelier constituait un approfondissement de l'atelier présenté lors du colloque de la COPIRELEM à Foix en 2004. Cependant, aucun participant de l'ancien atelier n'étant présent, il s'est avéré indispensable d'étoffer le simple « rappel » prévu sous forme de montage PowerPoint. Nous renvoyons pour cela aux actes du colloque de Foix (Atelier A1) dont la lecture est un préalable nécessaire.

Après une situation de production d'écrit par groupes, il s'agissait d'utiliser ces productions afin de mettre en évidence des faits de langue et de construire des séances d'observation réfléchie de la langue française.

En classe, l'enjeu d'une telle activité n'est pas seulement de réaliser des apprentissages sur la langue, mais aussi mettre en place des dispositifs qui permettent aux élèves de mieux réfléchir au sens que prennent les objets de la langue, grâce à la production d'écrits et à la manipulation, et donc, de mieux interpréter les énoncés de mathématiques qui leur sont proposés afin de mieux les résoudre.

I – PRODUIRE DES ÉNONCÉS SOUS CONTRAINTE

Une situation de production d'énoncés à partir d'un même inducteur permet de mettre en évidence des faits de langue par les transformations nécessaires opérées.

I – 1 Productions

Il s'agit à partir d'une histoire[1] de produire plusieurs énoncés de problèmes en faisant varier l'ordre d'énonciation des différentes périodes et en posant la question à la fin.

I – 1.1 Consignes

Les participants à l'atelier sont répartis en deux groupes qui doivent produire six énoncés de problèmes à partir d'une histoire donnée, en modifiant l'ordre des différentes périodes.

Consigne donnée :

- écrire, en groupes, tous les énoncés de problèmes possibles où la question est énoncée à la fin ;
- relever toutes les transformations opérées sur la langue pour passer de l'histoire à l'énoncé.

Histoire :

- Samedi soir Papy a 27 lapins. 8 lapins sont nés pendant la nuit. Dimanche matin, Papy a 35 lapins.

Il s'agit donc de produire les énoncés suivants, en reprenant le système des « drapeaux »[2], explicité dans l'atelier de Foix :

1			?
2			?
3			?
4			?
5			?
6			?

[1] Rappel : dans ce contexte, nous appelons « histoire » une suite d'événements écrits dans l'ordre chronologique.

[2] Rappel : le jeu des couleurs ou « drapeau » permet de mettre en évidence les différentes périodes d'une histoire issue d'un énoncé de problème additif à une transformation. Le bleu renvoie à la situation initiale, le blanc à la transformation et le rouge à la situation finale.

I – 1.2 Productions réalisées

Les productions de chaque groupe peuvent ainsi être globalement mises en regard :

Énoncé 1 :

Gr.A : Samedi soir Papy a 27 lapins. 8 lapins sont nés pendant la nuit. Combien en a-t-il dimanche matin ?

Gr.B : Samedi soir papy avait 27 lapins. 8 lapins sont nés dans la nuit. Combien a-t-il de lapins dimanche matin ?

Énoncé 2 :

Gr.A : Samedi soir Papy a 27 lapins. Dimanche matin il en a 35. Combien de lapins sont nés pendant la nuit ?

Gr.B : Samedi soir papy avait 27 lapins. Dimanche matin il en a 35. Combien de lapins sont nés pendant la nuit ?

Énoncé 3 :

Gr.A : Pendant la nuit de samedi à dimanche, 8 lapins sont nés chez Papy. Or samedi soir, Papy en avait 27. Combien en a-t-il dimanche matin ?

Gr.B : 8 lapins sont nés pendant la nuit de samedi à dimanche. Samedi soir papy avait 27 lapins. Combien papy en a-t-il dimanche ?

Énoncé 4 :

Gr.A : Pendant la nuit de samedi à dimanche, 8 lapins sont nés chez Papy. Dimanche matin, Papy a 35 lapins. Combien de lapins papy avait-il samedi soir ?

Gr.B : 8 lapins sont nés pendant la nuit de samedi à dimanche. Au matin papy a 35 lapins. Combien en avait-il le soir précédent ?

Énoncé 5 :

Gr.A : Dimanche matin, Papy a 35 lapins. 8 lapins sont nés pendant la nuit précédente. Combien en avait-il samedi soir ?

Gr.B : Dimanche matin, papy a 35 lapins. 8 lapins sont nés pendant la nuit précédente. Combien Papy avait-il de lapins samedi soir ?

Énoncé 6 :

Gr.A : Dimanche matin, Papy a 35 lapins. Samedi soir, il en avait 27. Combien de lapins sont-ils (sic) nés pendant la nuit ?

Gr.B : Dimanche matin papy a 35 lapins. Samedi soir il en avait 27. Combien de lapins sont nés pendant la nuit ?

I – 1.3 Commentaire des productions

L'ensemble de ces productions conduit à une série de commentaires plus ou moins développés selon les énoncés. On remarque tout d'abord la variété de phrases obtenues à partir d'une même histoire, mais aussi pour un même énoncé.

Le groupe B a choisi d'écrire « papy » avec une minuscule, en se démarquant de l'orthographe donnée. En effet, le groupe a considéré qu'il s'agissait d'un nom commun qui ne nécessitait pas l'usage d'une majuscule. Ce choix mérite certes débat, mais n'appelle pas ici de commentaire particulier.

Une certaine présentation des résultats a été proposée pour faciliter le repérage des transformations : ces dernières ont été notées en regard de chaque phrase des deux énoncés produits. Chaque énoncé a ainsi pu être analysé et commenté par les participants de l'atelier. Les tableaux ci-dessous reprennent strictement leurs commentaires et leurs annotations.

Énoncé 1

Histoire	Samedi soir Papy a 27 lapins.	8 lapins sont nés pendant la nuit.	Dimanche matin, Papy a 35 lapins.
A	Samedi soir Papy a 27 lapins.	8 lapins sont nés pendant la nuit.	Combien en a-t-il dimanche matin ?
B	Samedi soir papy avait 27 lapins.	8 lapins sont nés pendant la nuit.	Combien a-t-il de lapins dimanche matin ?
Transformations	B : temps du verbe		Forme interrogative. Pronom « il » A : position dans la phrase de « dimanche matin » B : rajout de « combien » ; du point d'interrogation, suppression de « papy », inversion du sujet.

Dans la première phrase, le groupe B a mis le verbe à l'imparfait, marquant ainsi l'antériorité par une marque temporelle ainsi plus explicite.

La transformation de la phrase déclarative à une phrase interrogative entraîne une série de modifications dans la dernière phrase. Certaines sont directement liées au type interrogatif : le point d'interrogation, le mot « combien », l'inversion du sujet ou du complément de temps… D'autres sont davantage liées à la dynamique du texte : pronominalisation de papy par « il » ou de « de lapins » par « en ».

Énoncé 2

Histoire	Samedi soir Papy a 27 lapins.	Dimanche matin, Papy a 35 lapins.	8 lapins sont nés pendant la nuit.
A	Samedi soir Papy a 27 lapins.	Dimanche matin il en a 35.	Combien de lapins sont nés pendant la nuit ?
B	Samedi soir papy avait 27 lapins.	Dimanche matin il en a 35.	Combien de lapins sont nés pendant la nuit ?
Transformations	B : temps du verbe	Pronom pour « lapins » « Papy » remplacé par pronom	Forme interrogative. B : rajout de « combien » ; du point d'interrogation.

Hormis la première phrase, les productions sont identiques. La pronominalisation a semblé nécessaire aux deux groupes dans la seconde phrase pour rendre le texte plus harmonieux.

Les modifications entraînées par la transformation en phrase interrogative n'ont plus été spécifiées à ce stade.

Énoncé 3

Histoire	8 lapins sont nés pendant la nuit.	Samedi soir Papy a 27 lapins.	Dimanche matin, Papy a 35 lapins.
A	Pendant la nuit de samedi à dimanche, 8 lapins sont nés chez Papy.	Or, samedi soir Papy en avait 27.	Combien en a-t-il dimanche matin ?
B	8 lapins sont nés pendant la nuit de samedi à dimanche.	Samedi soir papy avait 27 lapins.	Combien papy en a-t-il dimanche ?
Transformations	Marque temporelle développée. A : Déplacement de la marque temporelle, précision du lieu.	Temps du verbe.	Forme interrogative. Pronoms « en » et « il ».

L'inversion des périodes 1 et 2 de l'histoire entraîne la nécessité, ressentie par les deux groupes, de transformations importantes dans les deux premières phrases. En effet, l'indication « pendant la nuit » devient insuffisante, puisque l'on ne peut savoir de quelle nuit il s'agit. Un des groupes a aussi voulu, dès la première phrase indiquer le contexte dans lequel se passe l'action (« chez Papy »). Selon ce groupe, une absence de précision ne permet pas forcément de savoir s'il s'agit des mêmes lapins dans la deuxième phrase.

Par ailleurs, l'antériorité du samedi soir doit être nécessairement marquée par le temps du verbe, afin de respecter la cohérence temporelle du texte. Un groupe a estimé utile de rajouter le connecteur « or » dans l'intention de marquer l'importance de cette nouvelle donnée, en corrélation avec la précédente[3].

Énoncé 4

Histoire	8 lapins sont nés pendant la nuit.	Dimanche matin, Papy a 35 lapins.	Samedi soir Papy a 27 lapins.
A	Pendant la nuit de samedi à dimanche, 8 lapins sont nés chez Papy.	Dimanche matin, Papy a 35 lapins.	Combien de lapins Papy avait-il samedi soir ?
B	8 lapins sont nés pendant la nuit de samedi à dimanche.	Au matin papy a 35 lapins.	Combien en avait-il le soir précédent ?
Transformations	Marque temporelle développée. A : Déplacement de la marque temporelle, précision du lieu.	B : Indication temporelle.	Forme interrogative. Temps du verbe. A : Ajout de « il » B : Indication temporelle différente, pronominalisation, inversion du sujet.

Dans une volonté de complexification de l'énonciation, le groupe B a estimé que l'indication « au matin » de la deuxième phrase suffisait pour marquer la suite chronologique avec la phrase précédente, et que la précision « dimanche » était devenue superflue. De même, la marque d'antériorité dans la troisième phrase est devenue « le

3 La conjonction de coordination *or* « introduit une nouvelle donnée qui va se révéler décisive pour la suite des événements ». RIEGEL, PELLAT, RIOUL, *Grammaire méthodique du français*, PUF, 1994, p. 527.

soir précédent », ce qui nécessite, de la part du lecteur, un travail d'inférence, puisqu'il faut comprendre que le soir précédant le matin de dimanche, est samedi, alors que la formulation d'origine donne d'emblée l'information.

Le groupe A a introduit une autre façon de formuler la question, en gardant le sujet « papy » au lieu de le pronominaliser. Mais cela oblige d'utiliser le pronom « il » de reprise dans la phrase interrogative (« papy avait-il »).

L'usage de l'imparfait dans la troisième phrase a été jugé indispensable pour marquer l'antériorité.

Énoncé 5

Histoire	Dimanche matin, Papy a 35 lapins.	8 lapins sont nés pendant la nuit.	Samedi soir Papy a 27 lapins.
A	Dimanche matin, Papy a 35 lapins.	8 lapins sont nés pendant la nuit précédente.	Combien en avait-il samedi soir ?
B	Dimanche matin, papy a 35 lapins.	8 lapins sont nés pendant la nuit précédente.	Combien papy avait-il de lapins samedi soir ?
Transformations		Ajout d'un élément temporel.	Forme interrogative. Temps du verbe. A : Pronominalisation, inversion du sujet. B : Ajout de « il » et inversion.

Dans la phrase 2, il s'est avéré nécessaire d'ajouter le terme « précédent » afin de marquer l'antériorité de l'événement. Sans cette précision, l'expression « pendant la nuit » concernerait la nuit suivante, c'est-à-dire la nuit de dimanche à lundi.

Énoncé 6

Histoire	Dimanche matin, Papy a 35 lapins.	Samedi soir Papy a 27 lapins.	8 lapins sont nés pendant la nuit.
A	Dimanche matin, Papy a 35 lapins.	Samedi soir, il en avait 27.	Combien de lapins sont-ils nés pendant la nuit ?
B	Dimanche matin, Papy a 35 lapins.	Samedi soir il en avait 27.	Combien de lapins sont nés pendant la nuit ?
Transformations		Pronominalisation de *Papy* et de *lapins*. Temps du verbe.	Forme interrogative. A : Ajout de « ils » avec inversion.

Sans l'avoir noté, le groupe A a ajouté une virgule après le marqueur de temps dans la seconde phrase, sans doute par imitation avec la phrase précédente où « dimanche matin » est suivi d'une virgule.

Le groupe A s'est heurté à une difficulté dans la phrase interrogative, ajoutant « ils » en s'inspirant de la structure de la phrase interrogative précédente « papy en avait-il »… avec une hésitation quant à la correction d'une telle expression.

Les commentaires précédents ont donc été énoncés au fil des propositions. Ils ont permis de mettre en relief un certain fonctionnement de la langue et soulèvent des questions qui restent en suspens.

I – 2 Faits de langue marquants

Parmi toutes les transformations relevées, sont apparus certains faits de langues récurrents. Ils concernent d'une part le texte, c'est-à-dire la cohérence entre les différentes phrases avec les modifications des marqueurs temporels et l'utilisation de la pronominalisation, à dessein non employée dans l'histoire de départ. D'autre part, les faits de langue interviennent aussi au niveau de la phrase dans toutes les transformations opérées en passant d'une phrase déclarative à une phrase interrogative.

Tous ces phénomènes apparaissent simultanément, mais on peut tenter de les distinguer les uns des autres pour les identifier précisément.

Les productions réalisées sont donc à nouveau examinées suivant les interrogations qu'ils suscitent, interrogations auxquelles les énoncés produits ne permettent pas toujours de répondre.

I – 2.1 Marqueurs temporels

Il s'avère essentiel de se situer d'abord au niveau textuel et non au niveau de la phrase. En effet, la nécessité du changement des marqueurs dépasse le cadre strict de la phrase et ne se justifie que si l'on tient compte de l'énoncé entier.

Ajout

Pourquoi faut-il modifier des marqueurs temporels en ajoutant des précisions ?

La modification des marqueurs temporels est notamment une conséquence du bouleversement de l'ordre chronologique. Puisque l'ordre des phrases étant différent de l'ordre chronologique, il faut que la langue marque l'antériorité ou la postériorité d'une autre manière.

En effet, tant que le texte commence par la période 1 (en « bleu »), le marquage de l'antériorité ne semble pas forcément nécessaire, même si un groupe estime que cela est plus explicite ainsi (voir énoncés 1 et 2). Cependant, dès que la période 1 (en « bleu ») est énoncée après une autre période, il devient nécessaire de modifier le temps du verbe (voir énoncés 3 à 6).

De même, l'inversion des périodes 2 et 3 (en « blanc » et « rouge ») entraîne des ajouts de marqueurs temporels divers, selon la place des phrases dans le texte. En tête de texte, la période 2 (en « blanc ») nécessite l'ajout d'un complément à *nuit* (voir énoncés 3 et 4). En milieu de texte, un autre complément est nécessaire (voir énoncé 5).

On peut remarquer que les phrases correspondant à la période 3 (en « rouge »), ne sont pas affectées par les ajouts de marqueurs temporels.

Forme

Quels sont les moyens linguistiques pour marquer le temps, c'est-à-dire les moments où les actions se déroulent les unes par rapport aux autres ?

Deux moyens sont essentiellement utilisés pour marquer le temps dans un énoncé : l'un est porté par le verbe, l'autre est indiqué par un complément de phrase.

Dans le verbe

L'imparfait est ici le moyen employé de marquer l'antériorité de la période 1 sur les autres. Il n'affecte ici que les verbes des phrases de la période 1 (en « bleu »).

Peut-on utiliser d'autres temps verbaux pour marquer les différentes périodes des phrases ?

Dans le complément de phrase [4]

Un autre moyen de marquer la temporalité s'effectue à l'intérieur du complément de phrase par l'ajout d'une précision.

Histoire : Samedi soir Papy a 27 lapins. 8 lapins sont nés pendant la nuit. Dimanche matin, Papy a 35 lapins.

Énoncé 3B : 8 lapins sont nés pendant la nuit de samedi à dimanche. Samedi soir papy avait 27 lapins. Combien papy en a-t-il dimanche ?

Énoncé 5A : Dimanche matin, Papy a 35 lapins. 8 lapins sont nés pendant la nuit précédente. Combien en avait-il samedi soir ?

Les éléments rajoutés sont des expansions au nom *nuit* : le complément du nom *de samedi à dimanche*, ou l'adjectif « épithète » *précédente*.

Place dans la phrase

Où se situe le marqueur temporel ? Peut-on le déplacer à l'intérieur d'une phrase ?

On peut constater que les marqueurs temporels qui portent sur le complément de phrase sont situés soit en début de phrase :

Dimanche matin, Papy a 35 lapins. (dans les premières et deuxièmes phrases de tous les énoncés)

Samedi soir, il en avait 27. (dans les premières et deuxièmes phrases de tous les énoncés)

Pendant la nuit de samedi à dimanche, 8 lapins sont nés chez Papy. (énoncés 3 et 4 A)

soit en fin de phrase :

8 lapins sont nés pendant la nuit. (premières et deuxièmes phrases des autres énoncés)

8 lapins sont nés pendant la nuit précédente. (énoncé 5)

---

[4] Un complément de phrase est un élément « facultatif » de la phrase : on peut le déplacer ou le supprimer sans nuire à la grammaticalité de la phrase. Cependant, au niveau du texte, on ne peut les supprimer sans nuire à la compréhension, et le déplacement peut avoir des effets particuliers au niveau de l'énonciation. **Il est donc essentiel de se situer constamment au niveau du texte et de ne pas se contenter d'isoler une phrase de son contexte d'énonciation qui est celui d'un énoncé de problème**.

8 lapins sont nés pendant la nuit de samedi à dimanche. (énoncé 3 et 4 B)

Combien a-t-il de lapins dimanche matin ? (dans toutes les phrases interrogatives quelle que soit la période concernée)

Le déplacement du marqueur temporel en tête ou en fin de phrase est toujours possible, même dans les phrases interrogatives. Cependant, dans certains cas, l'expression, si elle reste française, semble moins naturelle, ou marque un effet particulier d'insistance.

Dimanche matin, combien a-t-il de lapins ?

Dans toutes les phrases interrogatives, les marqueurs temporels ont été « naturellement » placés en fin de phrase.

I – 2.2 Pronominalisation

Substitution

Quand utiliser un pronom ? Quel groupe nominal remplace un pronom[5] ?

Dans l'ensemble des énoncés produits, deux types de pronominalisation ont été utilisés :

Histoire : Samedi soir Papy a 27 lapins. 8 lapins sont nés pendant la nuit. Dimanche matin, Papy a 35 lapins.

Énoncé 1B : Samedi soir papy avait 27 lapins. 8 lapins sont nés dans la nuit. Combien a-t-il de lapins dimanche matin ?

Énoncé 3A : Pendant la nuit de samedi à dimanche, 8 lapins sont nés chez Papy. Or samedi soir, Papy en avait 27. Combien en a-t-il dimanche matin ?

On peut d'abord constater que la substitution n'intervient qu'à partir des deuxièmes phrases des énoncés et qu'elle n'est pas systématique. Elle est cependant possible et permet d'éviter une répétition. En comparant les phrases de l'histoire aux mêmes phrases des énoncés, on peut mettre en évidence les substitutions qui ont eu lieu. Ainsi, « il » représente « Papy », et « en » remplace « lapins ». Cependant, c'est dans le même énoncé, dans une phrase précédente, qu'il faut chercher le référent du pronom utilisé. Les élèves éprouvent parfois des difficultés à réaliser cette opération, notamment lorsque ce pronom est peu connu comme « en ».

Forme

Quels pronoms utiliser ? Pourquoi ?

Le travail sur la substitution a déjà permis d'identifier deux formes de pronoms. Il reste à s'interroger sur les variantes possibles et sur la raison de ces différents emplois. Le corpus utilisé ne permet pas de donner toutes les réponses à ces questions, simplement de soulever des hypothèses : « il » est un pronom sujet variable en genre et en nombre ; « en » est un pronom complément invariable.

---

[5] Phrase à comprendre dans les deux sens…

Place dans la phrase

Où sont placés les pronoms ?

En examinant les énoncés produits, on remarque que les pronoms ont des places diverses selon le type de pronom et selon le type de phrase.

Énoncé 2B : Samedi soir papy avait 27 lapins. Dimanche matin il en a 35. Combien de lapins sont nés pendant la nuit ?

Énoncé 3A : Pendant la nuit de samedi à dimanche, 8 lapins sont nés chez Papy. Or samedi soir, Papy en avait 27. Combien en a-t-il dimanche matin ?

Énoncé 4B : 8 lapins sont nés pendant la nuit de samedi à dimanche. Au matin papy a 35 lapins. Combien en avait-il le soir précédent ?

Ainsi le pronom « il » est placé avant le verbe dans toutes les phrases déclaratives, et après le verbe dans toutes les phrases interrogatives. Par contre, le pronom « en » est toujours placé juste avant le verbe, quel que soit le type de phrase, s'intercalant entre le pronom « il » et le verbe dans les phrases déclaratives.

I – 2.3 Phrase interrogative

Le travail de formulation d'un énoncé motive l'élève à travailler sur le passage d'une phrase déclarative en une phrase de type interrogatif[6].

Ajout

Histoire : Dimanche matin, Papy a 35 lapins.

Question (énoncé 1) : Combien a-t-il de lapins dimanche matin ?

Histoire : Samedi soir, Papy a 27 lapins.

Question (énoncé 4) : Combien de lapins Papy avait-il samedi soir ?

En comparant la phrase déclarative avec des phrases interrogatives, on peut constater que dans certains cas, on a ajouté un « t » entre deux tirets.

Par ailleurs, en plus du sujet exprimé « Papy » apparaît un pronom « il » dans la phrase interrogative. La suppression de ce pronom n'est pas possible :

*Combien de lapins Papy avait samedi soir ?[7]

L'usage de ce pronom n'apparaissait pas comme évident aux participants de l'atelier, ce qui a conduit à une hésitation quant à l'emploi de « ils », comme cela a été le cas pour l'énoncé 6 :

Histoire : 8 lapins sont nés pendant la nuit.

---

[6] Il s'agit d'une phrase interrogative dite « partielle » (par opposition à la phrase interrogative « totale »), utilisant un mot interrogatif sur lequel porte l'objet de la question, et nécessitant une réponse autre que « oui » ou « non ».

[7] L'astérisque indique que la phrase n'est pas grammaticalement correcte.

A : *Combien de lapins sont-ils nés pendant la nuit ?

B : Combien de lapins sont nés pendant la nuit ?

Quand et pourquoi utiliser ce « t » ? ce « il(s) » ?

Substitution

Quel mot remplace « combien » dans la phrase déclarative ?

Les participants au stage ont indiqué que lorsqu'on passe à une phrase interrogative, on ajoute le mot interrogatif « combien ». Or lorsque l'on compare histoire et énoncé, on constate qu'il s'agit moins d'un ajout que d'une substitution.

Histoire : Samedi soir, Papy a 37 lapins.

Énoncé 4A : Combien de lapins Papy avait-il samedi soir ?

En repérant les mots communs aux deux phrases, on peut objectivement remarquer que « combien de » et « 37 » sont placés avant le mot « lapins » et en conclure que le nombre recherché est remplacé par « combien de ».

Place dans la phrase

Où sont placés les mots dans la phrase interrogative ? Quels mots changent de place par rapport à la phrase déclarative ?

Énoncé 6A : Samedi soir, il en avait 27.

Énoncé 5A : Combien en avait-il samedi soir ?

On peut remarquer que « combien » est placé en tête de phrase et que le pronom sujet « il » se trouve après le verbe. Enfin, le marqueur temporel « samedi soir » se retrouve en fin de phrase. Dans un registre de langue familier on peut pourtant trouver les variantes suivantes[8], rétablissant l'organisation de la phrase déclarative :

Il en avait combien samedi soir ?

ou

Combien il en avait samedi soir ?

Ces dernières productions appartiennent au langage oral, souvent utilisé par les élèves à l'écrit. Un des apprentissages consiste donc justement à différencier ce langage oral du langage spécifiquement écrit qui utilise des tournures particulières.

---

[8] Certaines productions sont néanmoins exclues, comme par exemple : *En avait-il combien samedi soir ?

I – 3 Analyse de productions

L'examen attentif des productions vise donc à soulever un questionnement sur la langue, à commencer à chercher des éléments de réponse, ou à soulever des problèmes qui ne peuvent pas être immédiatement résolus.

I – 3.1 Intérêts

Cette activité d'analyse de productions, qui fait partie intégrante d'une démarche de production d'écrits, révèle plusieurs intérêts.

Ainsi, elle favorise la **mise en évidence de faits grammaticaux** et centre l'attention sur la langue.

Elle fait émerger une série de **questions qui concernent la langue** et son fonctionnement et contribue à éveiller la curiosité des élèves à ce sujet. Ces questions peuvent apparaître *a priori* mais aussi *a posteriori* après examen des productions.

Elle révèle **les compétences des élèves**, de manière différenciée, par la confrontation de leurs productions, mais aussi et surtout de leurs manques et leurs difficultés tant au niveau des savoirs sur la langue, que des savoir-faire dans l'activité d'écriture. Le dispositif révèle ce que les élèves ignorent et ce qu'ils ne maîtrisent pas encore complètement. Il s'agit donc d'une évaluation diagnostique de leurs compétences.

I – 3.2 Moyens

Pour être efficace, l'analyse doit s'appuyer sur la comparaison des différentes productions des élèves entre elles, et avec les phrases de l'histoire. Ceci permet à la fois de comparer les transformations opérées en passant de l'histoire à l'énoncé, que de comparer différentes formulations, correctes ou non. Pour l'instant, il ne s'agit pas de valider encore moins d'évaluer les productions réalisées par les élèves, mais de soulever des problèmes liés à l'usage de la langue par confrontation entre les productions.

Il n'est pas nécessaire de retenir toutes les productions mais il convient plutôt de faire un choix qui rende la comparaison pertinente en fonction du fait grammatical à mettre en évidence. **Certaines erreurs des productions doivent alors être neutralisées afin de ne pas parasiter les faits linguistiques essentiels,** par exemple l'orthographe…

Pour que cet apprentissage porte ses fruits au niveau de la lecture et de la compréhension des énoncés de problème, il faut cibler des faits de langue caractéristiques de ce type d'écrit qui risquent de former un obstacle à la compréhension. En fait, c'est en explicitant au maximum le fonctionnement de la langue, que les élèves peuvent être à même de mieux comprendre la langue et sa portée sur la construction du sens.

Il s'agit donc de porter l'attention sur des faits de langue, marquants et de s'intéresser à un aspect ciblé concernant la langue, ce qui équivaut à isoler le fonctionnement d'un seul niveau, même s'il interfère avec d'autres niveaux et sans pour autant les séparer artificiellement.

Ainsi, le point de vue adopté portera soit sur :

- le sens (ou sémantique) ;
- le fonctionnement dans la phrase ou les groupes syntaxiques (ou syntaxe) ;
- la forme des mots (ou morphologie) ;
- les chaînes d'accords (ou morphosyntaxe).

Enfin, la façon d'observer la langue s'inspire directement des prescriptions des programmes 2002 pour l'observation réfléchie de la langue. En effet, il s'agit d'observer les transformations opérées en passant de l'histoire à l'énoncé en se focalisant sur :

- les ajouts ou retraits ;
- les substitutions ;
- les déplacements dans la phrase.

Ce qui donne le tableau récapitulatif suivant concernant les faits de langue observés :

	Marqueurs temporels	**Pronominalisation**	**Phrase interrogative**
Sémantique	**Ajout :** Pourquoi ajouter ou modifier des marqueurs temporels ?	**Substitution** : Quand utiliser un pronom ? Quel GN remplace un pronom ?	**Substitution** : Quel est le sens de combien » ?
Syntaxe	**Place :** Où se situe le marqueur temporel ? Peut-on le déplacer ?	**Place :** Où sont placés les pronoms ?	**Place** : où sont placés les mots dans la phrase ? **Ajout** : Quand ajoute-t-on « il » ou « -t- » ?
Morphologie	Quels sont les moyens pour marquer le temps ?	Quels pronoms utiliser ?	
Morphosyntaxe			

Les cases concernant la morphosyntaxe sont restées libres, car il n'y a eu aucune observation à ce sujet, mais les problèmes d'accords pourraient fort bien apparaître dans des productions d'élèves, concernant les accords des pronoms dans la phrase ou le texte, des accords spécifiques à l'usage de « combien »…

Cette analyse de productions permet donc de retenir un certain nombre d'objectifs d'apprentissage dans le domaine de la langue.

I – 3.3 Limites

Cette pratique d'analyse de production a des limites en ce qui concerne son utilisation en vue d'une observation réfléchie de la langue. En effet, contrairement aux productions des participants au stage, celles des élèves contiendront des erreurs, reflets de leurs difficultés ou de leurs manques. Par ailleurs, les productions risquent d'être « pauvres », sans variété au niveau des types de phrases.

Les participants à l'atelier ont remarqué que la formulation choisie dans l'histoire pouvait fort bien inhiber les compétences des élèves et notamment l'emploi de la pronominalisation. Comme cette dernière n'apparaît pas dans les phrases de départ, les élèves seraient tentés de ne pas l'employer (effet de type « contrat didactique »), alors que dans une autre situation de production ils l'auraient peut-être employée spontanément.

Les limites de cette analyse de production conduisent tout naturellement à un autre dispositif, apte à construire des savoirs sur la langue, susceptibles de devenir des compétences d'écriture et de lecture.

Il convient donc de confronter les productions des élèves, en particulier celles qui contiennent des erreurs ou un niveau de langue inadapté, à des énoncés plus « académiques » tels qu'on peut les trouver dans les manuels scolaires.

II – OBSERVER LE FONCTIONNEMENT DE LA LANGUE

La démarche globale consiste à proposer un corpus de textes dits « d'experts », produits par l'enseignant ou récoltés dans des manuels, à observer de manière active et de :

- comparer en classant des phrases, des textes ;
- constater des transformations en manipulant la langue par ajouts, déplacements, substitutions.

> « L'observation réfléchie de la langue française conduit les élèves à examiner des productions écrites comme des objets qu'on peut décrire, et dont on peut définir les caractéristiques. Ils comparent des éléments linguistiques divers (textes, phrases, mots, sons, graphies...) pour en dégager de façon précise les ressemblances et les différences.[…]
> Les connaissances acquises dans les séquences consacrées à la grammaire sont essentiellement réinvesties dans les projets d'écriture (quel que soit l'enseignement concerné). Ceux-ci peuvent servir de supports à de nouvelles observations des phénomènes lexicaux, morphosyntaxiques, syntaxiques ou orthographiques. La familiarisation acquise avec les structures de la langue permet aussi de résoudre certains problèmes de compréhension face à des textes plus complexes.
> Pour faciliter cette observation, quelques techniques d'exploration du langage doivent être régulièrement utilisées :
> - classer (des textes, des phrases, des mots, des graphies) en justifiant les classements réalisés par des indices précis,
> - manipuler des unités linguistiques (mots, phrases, textes), c'est-à-dire savoir effectuer certaines opérations de déplacement, remplacement, expansion, réduction d'où apparaîtront des ressemblances et différences entre les objets étudiés. »
> *Programmes de l'école primaire*, cycle 3, BO hors série n°1 du 14 février 2002, p.74-75.

Afin d'illustrer cette démarche, l'atelier s'est poursuivi avec le double objectif de cerner mieux le type de phrase interrogative que l'élève aurait à produire et de cibler des apprentissages à mener.

II – 1 Proposer un nouveau corpus

Le corpus proposé aux élèves pour observer le fonctionnement de la langue doit être composé de textes connus des élèves afin qu'ils ne soient pas confrontés à des difficultés de lecture inattendues et qu'ils puissent concentrer leur attention sur la langue.

Il s'agit donc d'énoncés déjà rencontrés en classe, résolus collectivement ou individuellement dans une autre situation ou avec des données numériques différentes.

Puisque l'objectif annoncé est de travailler les types de phrases interrogatives dans les énoncés de problème, il convient de choisir les énoncés en fonction des objectifs d'apprentissage fixés.

A.	Dans l'après-midi de jeudi, la température extérieure était de 19 degrés. La température a augmenté de 7 degrés entre le matin et l'après-midi de ce jour. Quelle température faisait-il ce jeudi matin ?
B.	Pierre sort de l'ascenseur au 27e étage après être monté de 14 étages. A quel étage a-t-il pris l'ascenseur ?
C.	La voiture de papa a consommé 18 litres d'essence pendant un trajet. Avant de partir, papa avait 35 litres d'essence dans son réservoir. Combien de litres a-t-il à la fin du trajet ?
D.	Après avoir fait ses petits gâteaux, mamy a 7 œufs. Elle avait 24 œufs avant de faire la pâtisserie. Combien en a-t-elle utilisés pour faire les petits gâteaux ?
E.	Pendant la nuit de lundi à mardi, la température dans la cour de l'école a baissé de 5 degrés. Mardi matin, la température est de 12 degrés. Quelle était la température lundi soir ?
F.	78 coureurs sont présents à l'arrivée de la course. 25 coureurs ont abandonnés. Combien y avait-il de coureurs au départ de la course ?
G.	Pendant la récréation, Carole a joué aux billes et a perdu 7 billes. Avant la récréation, elle avait 15 billes. Combien a-t-elle de billes après la récréation ?
H.	A l'arrêt de la Mairie, 5 personnes descendent d'un bus. Après l'arrêt le même bus transporte 12 personnes. Combien de personnes le bus transportait-il avant l'arrêt ?
I.	Papa avait 46 €. Maintenant il en a 28. Combien a-t-il dépensé ?

Même s'il ne s'agit que de travailler sur les phrases interrogatives, il est essentiel de prendre en compte des énoncés authentiques, c'est-à-dire qui ont été ou peuvent être résolus, qu'ils soient tirés d'un manuel ou fabriqués par le maître, et **entiers**, afin de tenir compte des phénomènes liés au texte.

II – 2 Classer des phrases

Dans un premier temps, il est nécessaire d'isoler les phrases interrogatives et de centrer l'attention sur un fait de langue particulier. Pour faire cela, nous avons proposé à chaque groupe de recopier chaque phrase interrogative de ces énoncés sur une feuille A4.

Des avantages de la copie dans la classe : une telle activité d'écriture préalable est nécessaire parce qu'elle oblige les élèves à mobiliser des compétences de lecture active et de définir d'emblée un critère pour reconnaître la phrase interrogative. Enfin, un objectif secondaire réside dans l'activité de copie, trop souvent négligée en classe, qui contraint l'élève à soigner son écriture afin d'être lisible, d'adapter l'outil scripteur au support, et de respecter l'orthographe du modèle, ce qui doit être une exigence exprimée, et vérifiée par tous les membres du groupe dans un souci permanent d'attention à l'orthographe.

Un classement des phrases ainsi obtenues doit mettre en évidence un fait de langue susceptible de permettre un apprentissage ciblé sur la langue.

Consigne :

- classer ces phrases par ressemblance en précisant le critère de classement.

Plusieurs classements apparaissent ainsi selon le point de vue choisi.

Exemple 1 :

Présence de -t-	Absence de -t-
A quel étage a-t-il pris l'ascenseur ? Combien de litres a-t-il à la fin du trajet ? Combien en a-t-elle utilisés pour faire les petits gâteaux ? Combien a-t-elle de billes après la récréation ? Combien a-t-il dépensé ?	Quelle température faisait-il ce jeudi matin ? Quelle était la température lundi soir ? Combien y avait-il de coureurs au départ de la course ? Combien de personnes le bus transportait-il avant l'arrêt ?

Exemple 2 :

Combien	Quel, quelle…
Combien de litres a-t-il à la fin du trajet ? Combien en a-t-elle utilisés pour faire les petits gâteaux ? Combien a-t-elle de billes après la récréation ? Combien y avait-il de coureurs au départ de la course ? Combien de personnes le bus transportait-il avant l'arrêt ? Combien a-t-il dépensé ?	A quel étage a-t-il pris l'ascenseur ? Quelle température faisait-il ce jeudi matin ? Quelle était la température lundi soir ?

Ces classements permettent d'observer et de comparer les similitudes dans le fonctionnement de la langue.

Ainsi, dans l'exemple 1, on peut, en observant l'entourage de « -t- » comprendre l'usage et l'orthographe (entre deux tirets) de ce « t » dit euphonique.

L'exemple 2 permet plutôt d'isoler deux types de phrases interrogatives, très courantes dans les énoncés de problèmes, à savoir les phrases qui commencent par « combien » et celles dont le mot interrogatif est formé de « quel ». On peut à ce niveau avancer une hypothèse orthographique, à savoir que « combien » est un mot invariable, et « quel » un mot variable, c'est-à-dire qui change de forme selon le genre et le nombre.

Suivant l'objectif d'apprentissage, l'observation se fera selon un autre point de vue et le classement peut s'affiner jusqu'à ce que l'on puisse en tirer une régularité de fonctionnement, éclairant l'orthographe ou la compréhension.

Si l'on reprend l'exemple 2, on peut, par exemple, poursuivre l'observation en se focalisant sur la morphologie de « quel », et donc sur son orthographe, puis sur les règles d'accord qui régissent les différentes formes.

On peut aussi s'interroger sur la syntaxe et se demander comment on peut construire des phrases avec « quel ».

Exemple 3

« Quel » suivi d'un nom	« Quel » suivi d'un verbe…
A quel étage a-t-il pris l'ascenseur ? Quelle température faisait-il ce jeudi matin ?	Quelle était la température lundi soir ?

Un tel classement peut s'avérer intéressant non seulement du point de vue purement syntaxique et grammatical, mais aussi par la réflexion sur le sens qu'il induit.

Le même type de classement a été proposé pour « combien ». Mais on se heurte alors à une difficulté de classement pour certaines phrases :

Exemple 4

« combien » suivi de nom	« combien » suivi de verbe	cas particulier
Combien de litres a-t-il à la fin du trajet ? Combien de personnes le bus transportait-il avant l'arrêt ?	Combien a-t-elle de billes après la récréation ? Combien a-t-il dépensé ?	Combien en a-t-elle utilisés pour faire les petits gâteaux ? Combien y avait-il de coureurs au départ de la course ?

L'activité de classement montre ici ses limites car elle ne permet pas de trouver une caractéristique commune aux phrases de la dernière colonne. Une autre « technique opératoire » est donc utilisée pour affiner l'observation de la langue.

II – 3 Manipuler des phrases

La manipulation consiste à regrouper, déplacer, remplacer des groupes syntaxiques afin de pouvoir classer les phrases commençant par « combien ».

Consigne :

- Découpez les phrases interrogatives des énoncés C, D, F, G, H, I en groupes syntaxiques.

Le repérage des « groupes syntaxiques » est une compétence mise en œuvre dès le cycle 2 :

« Il faut aussi que le lecteur construire des représentations successives de ce qu'il lit et les articule entre elles. cela suppose que l'on découpe dans le texte des ensembles cohérents d'information […] » *Programmes d'enseignement de l'école primaire*, 2002, BO N°1 du 14 février 2002, p. 47.

Mais cette compétence est toujours travaillée au cycle 3 :

« En ce qui concerne la reconnaissance des structures syntaxiques des phrases lues, la première difficulté, pour le lecteur, est de bien segmenter la phrase et de retrouver les grandes unités fonctionnelles de celle-ci. Cela ne passa pas par une analyse grammaticale explicite, mais suppose une conscience de la phrase, longue à acquérir. […] La conscience de la cohésion du groupe syntaxique est le ressort de ce travail. On peut utilement appeler l'attention de l'élève sur l'impossibilité de certains regroupements (si « le train », « le train roule » sont des groupements possibles, « le train roule dans » n'en est pas un ; à l'inverse « dans la nuit » est un groupement possible). On peut faire effectuer ces segmentations en lecture silencieuse en demandant de trouver un trait après chaque « paquet de mots qui vont ensemble » ou en lecture oralisée. Plusieurs solutions sont chaque fois possibles (les empans de lecture sont plus ou moins grands selon la difficulté du texte). L'objectif est de consolider le sentiment de cohésion syntaxique et non de retrouver les constituants immédiats de la phrase. » Documents d'application des programmes, *Littérature, Cycle 3*, « Ateliers de lecture », p. 62.

Le découpage effectif des phrases en groupes syntaxiques contraint à des choix et permet des manipulations réelles des groupes syntaxiques dans la phrase, pour une comparaison plus fine des phrases.

Ainsi, les découpages suivants sont proposés par les groupes :

Combien de litres a-t-il à la fin du trajet ?

Combien de personnes le bus transportait-il avant l'arrêt ?

Combien a-t-elle de billes après la récréation ?

Combien a-t-il dépensé ?

Combien y avait-il de coureurs au départ de la course ?

Deux propositions sont données pour la phrase suivante :

Combien en a-t-elle utilisés pour faire les petits gâteaux ? Ou

Combien en a-t-elle utilisés pour faire les petits gâteaux ?

Plusieurs problèmes peuvent être abordés grâce à ces découpages :

Ainsi, le « y » est identifié comme faisant partie de « y avait-il » où l'on peut retrouver le présentatif « il y a » à l'imparfait.

Le cas du « en » a été objet de discussion. En classe, il est souvent difficile d'identifier le rôle de pronom de ce mot. Revenir au corpus de productions d'élèves permet de trouver une solution. Ainsi, nous l'avons vu, la comparaison entre les deux phrases interrogatives de l'énoncé 4, permet de trouver que « en » remplace « de lapins ».

Le texte de l'énoncé du second corpus montre que « en » représente des « œufs » :

Après avoir fait ses petits gâteaux, mamy a 7 œufs. Elle avait 24 œufs avant de faire la pâtisserie. Combien en a-t-elle utilisés pour faire les petits gâteaux ?

Il est donc possible de réaliser la substitution suivante :

Combien en a-t-elle utilisés ?

Combien d'œufs a-t-elle utilisés ?

A ce stade, certains participants au stage remarquent que l'on peut déplacer le groupe « d'œufs » :

Combien a-t-elle utilisé d'œufs ?

Ce constat conduit à réexaminer le corpus pour voir si ce groupe est toujours déplaçable. Le matériel étant affiché au tableau, le déplacement se réalise facilement :

1. Combien de billes a-t-elle après la récréation ?
2. Combien de coureurs y avait-il au départ de la course ?
3. Combien a-t-il de litres à la fin du trajet ?
4. Combien le bus transportait-il de personnes avant l'arrêt ?

Ces manipulations constituent un pas vers l'abstraction, parce que sous tous ces exemples, on peut retenir une structure commune avec un élément déplaçable avant ou après le groupe constitué par le verbe et le sujet.

Combien de [variable] [verbe/sujet] [marqueur temporel] ?

Combien [verbe/sujet] de [variable] [marqueur temporel] ?

Si l'on rajoute la pronominalisation, on peut donc retenir trois formulations possibles pour une même phrase, par remplacement ou déplacement d'éléments. Ce constat est essentiel, pour plusieurs raisons :

- il évite d'enfermer les élèves dans des automatismes simplistes du type « suivi de nom », « suivi de verbe » qui n'est que partiellement opérant, mais il les contraint à mener une véritable activité réflexive et à analyser finement le fonctionnement de la langue ;

- il donne aux élèves des moyens de rédaction différents avec une place variable du groupe qui complète « combien » ou l'utilisation du pronom « en » ;

- il permet aux élèves de mieux relier le mot « combien » à son complément, qui correspond justement au nombre qui est recherché en mathématiques. En effet, s'il est relativement facile de le trouver s'il suit directement « combien », il devient déjà plus difficilement repérable s'il en est séparé par le groupe sujet/verbe, d'autant plus si celui-ci est composé d'un groupe nominal comme dans la phrase 4 ci-dessus.

Une seule phrase se démarque, qui ne contient aucune expression qui complète « combien ».

Combien a-t-il dépensé ?

Une autre série d'observations, que nous n'avons pas eu le temps de mener, avec un corpus plus étendu, permettrait de découvrir cette autre structure de phrase commençant par « combien ».

II – 4 Réaliser des apprentissages

Tous ces classements et ces manipulations conduisent à des apprentissages portant sur la langue ou, de manière plus indirecte, sur les mathématiques.

II – 4.1 Des apprentissages sur la langue

Un objectif linguistique pourrait être de distinguer deux fonctionnements différents du même mot « combien ». En poursuivant l'analyse, notamment en mettant en regard les phrases interrogatives et déclaratives correspondantes, on peut mettre en relation le fonctionnement de « combien » avec celui des déterminants d'une part, celui des pronoms de l'autre.

Combien de lapins a-t-il dimanche matin ?

Dimanche matin, Papy a 35 lapins.

Papy a des lapins.

Papy a mes lapins.

En procédant par substitution, on peut remarquer que « 35 » répond à la question « combien de ». « 35 » peut lui-même être remplacé par un autre déterminant. Ils fonctionnent donc de la même façon[9].

« Combien de » peut être considéré comme un « déterminant interrogatif » au même titre que « quel »
Il entre en correspondance avec un « déterminant quantifiant ».
« Le déterminant quantifiant donne
- devant un nom comptable, une indication de nombre ;
- devant un nom non comptable, une indication de mesure. »

Eric GENEVAY, *Ouvrir la grammaire*, Éditions LEP, 1994.

Combien a-t-il dépensé ?

Il a dépensé 18 euros.

* Il a dépensé 18.

* Il a dépensé des.

Il a dépensé des euros.

Il a dépensé de l'argent.

La substitution permet aussi de comprendre que c'est « 18 euros » et non « 18 » tout seul qui répond à la question « combien », qu'il est nécessaire de préciser. « 18 euros » ne peut être remplacé par un déterminant, mais par un groupe nominal. « combien » fonctionne donc comme un GN, et s'assimile alors au fonctionnement d'un pronom.

II – 4.2 Des apprentissages sur les mathématiques

Les apprentissages ne portent pas directement sur les objets mathématiques, mais sur les compétences de lecture mises en œuvre dans la compréhension d'un énoncé de problème. Nous pensons en effet que toutes ces manipulations sont propices à une véritable réflexion de l'élève sur la nature de ce qu'il doit chercher dans un tel type d'énoncés. Elles contribuent aussi à fournir des pistes sur la manière de chercher (par exemple sur le rétablissement de la chronologie) Il s'agit pour l'élève de ne plus se laisser piéger par la structure de surface de la langue, mais d'en extraire le sens profond.

III – UTILISER UN OUTIL MATHÉMATIQUE

Comme il est indiqué plus haut, la phase de rappel concernant la mise en place de ce dispositif de travail en classes et le travail réalisé à Foix a été plus longue que prévu, ne laissant guère de place à un retour vers les mathématiques.

Le travail réalisé au niveau de la langue, notamment celui portant sur l'expression de la chronologie, que l'énonciation ne suit pas nécessairement, semble permettre aux élèves de mieux rétablir celle-ci à partir d'un énoncé quelconque ; condition nécessaire à une bonne représentation du problème et donc à sa résolution correcte.

[9] Dans ce travail par substitution qui porte sur l'axe dit « paradigmatique », on s'intéresse à la grammaticalité de la phrase produite pour mettre en évidence un fonctionnement commun aux éléments substitués.

Un outil mathématique concernant un type de représentation possible a été mis au point et expérimenté en classes. Ce point devait être abordé pendant l'atelier. Il ne l'a pas été mais le sera peut-être lors d'une communication ultérieure.

Des situations d'écriture d'énoncés de problèmes peuvent ainsi devenir propices à des apprentissages portant à la fois sur l'écriture et sur la langue. Les démarches actives mises en œuvre visent à développer une véritable réflexion sur la langue par l'intermédiaire des classements et des manipulations. Une hypothèse reste cependant à vérifier : la prise de conscience des normes particulières du type d'écrit « énoncé de problème » permet-elle effectivement de mieux en maîtriser la lecture et la compréhension afin d'entrer dans un domaine exclusivement mathématique ?

BIBLIOGRAPHIE

CAMENISCH A., PETIT S. (2004) *Lire et écrire des énoncés de problème*, in Actes du XXXIe Colloque COPIRELEM, IREM de Toulouse.

CAMENISCH A., PETIT S. (2005) *Lire et écrire des énoncés de problème*, Bulletin de l'APMEP, **456**, 7-20.

TRAVAILLER LE RAISONNEMENT, L'ARGUMENTATION ET LA PREUVE EN PLAÇANT LES ÉLÈVES EN SITUATION DE RECHERCHE

Virginie DELOUSTAL-JORRAND
Maître de conférences, IUFM d'Alsace
Équipe CNAM, Laboratoire Leibniz, Grenoble
ERTé Maths à Modeler
virginie.deloustal-jorrand@alsace.iufm.fr

Résumé
Nous proposons, dans cet atelier, une réflexion basée sur des séances de recherche qui ont été testées dans des classes de cycle 3 (et de collège). Nous voulons montrer comment en manipulant des objets simples et faciles d'accès, on peut travailler le raisonnement et la preuve. Les débats entre les groupes et l'apprentissage d'un « esprit critique scientifique » permettant de faire évoluer les conceptions des élèves sur la preuve. L'atelier s'appuie sur une *Situation-Recherche* de pavages de polyminos, d'autres *Situations-Recherche* ont été proposées aux participants en fin d'atelier.

Cet atelier s'appuie sur une recherche menée depuis de nombreuses années au sein de l'équipe CNAM du laboratoire Leibniz de Grenoble. L'ERTé (Equipe Recherche Technologie éducation) *Maths à Modeler* a d'ailleurs été montée autour de l'équipe CNAM et du projet des *Situations-Recherche*. Ce type de situations, étudié théoriquement par cette ERTé fonctionnait déjà depuis longtemps dans les ateliers MATh en JEANS (Audin & Duchet, 1992).

L'équipe CNAM du laboratoire Leibniz regroupe à la fois des chercheurs en didactique des mathématiques et des chercheurs en mathématiques discrètes. Cette double compétence nous permet de concevoir des situations issues de la recherche en mathématiques discrètes, mettant en jeu des notions faciles d'accès comme les pavages par exemple et qui permettent l'apprentissage de savoirs mathématiques « transversaux » tels que les conjectures, l'expérimentation, les contre-exemples, la modélisation, la définition, l'implication, l'argumentation, la preuve…

Il s'agit, dans cet atelier, de présenter comment l'utilisation de ces *Situations-Recherche* en formation des professeurs des écoles peut permettre dans un premier temps, l'apprentissage ou au moins la consolidation de ces savoirs mathématiques « transversaux » par les professeurs, avant de leur montrer, dans un deuxième temps, comment utiliser ces situations dans leur propre classe.

Pour cela, les participants ont été confrontés à la situation de pavage des polyminos avant que l'animatrice ne présente ses résultats et les difficultés auxquelles elle est confrontée en formation initiale ou continue des professeurs des écoles.

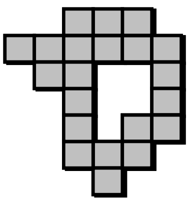
I – LA SITUATION « PAVAGES DE POLYMINOS »

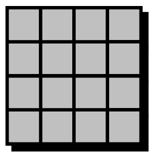
Nous présentons ici la situation donnée lors de l'atelier et que nous utilisons fréquemment en formation des PE et des PLC. Cette situation est ancienne et a été présentée plusieurs fois, on pourra notamment se référer aux textes de Grenier & Payan (2002 et 1998). Cependant, cette situation nous paraît particulièrement bien appropriée à la formation des professeurs car elle permet, en un temps relativement court, d'avoir une vue d'ensemble de ce qui peut se passer dans une classe de primaire ou de collège. Cette situation permet d'obtenir des résultats nombreux et variés dans un temps raisonnable (entre 1h et 2h) contrairement à d'autres situations qui demandent plus de temps.

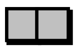
I – 1 Présentation

Voici quelques définitions que nous donnons aux professeurs des écoles en débutant la séance tout en insistant bien sur le fait qu'elles ne sont pas imposées aux élèves de primaire qui travaillent, eux, au moins au début, sur des jeux matériels.

Un *polymino* est un assemblage connexe (c'est-à-dire se touchant par une arête) de cases carrées dans le plan :

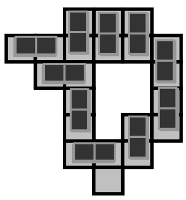




Un *domino* est un polymino à deux cases : 

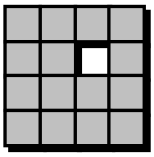
Paver un polymino par des dominos, c'est le recouvrir entièrement et sans chevauchement avec des dominos. On obtient ainsi des polyminos *pavables* et des polyminos *non pavables*.

Exemple de polyminos non pavables :



La « caractérisation » des polyminos pavables par des dominos est un problème non résolu par la recherche actuelle en mathématiques. Nous restreindrons donc ce problème à une classe particulière de polyminos, les polyminos carrés à un trou. Nous nous intéressons donc au problème suivant :

Quels sont les polyminos carrés tronqués d'une case qui sont pavables par des dominos ?



Une fois le problème compris par tous les PE, nous leur demandons de se mettre en groupe de 3 ou 4 élèves pour essayer de répondre à cette question. Il n'est pas inutile de faire reformuler le problème par un PE, certains étudiants pensant que la question porte sur le polymino carré représenté au tableau et non pas sur la classe des polyminos carrés tronqués d'une case.

I – 2 Quelques stratégies de résolution

Nous présentons ici quelques stratégies de résolution parmi celles émergeant le plus souvent. Il faut noter que les preuves habituellement proposées par les élèves de primaire sont les mêmes que celles proposées par les PE ou par les PLC même si les mots pour les exprimer varient parfois. Nous décrivons ci-dessous les résultats amenés par la situation, ils font autant référence à ce qui a eu lieu pendant l'atelier qu'à ce qui se passe ordinairement dans une classe de formation de PE ou dans une classe de primaire. Par souci de concision, nous ne détaillons pas les démonstrations et ne donnons qu'une idée générale de celles-ci.

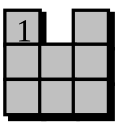
I – 2.1 Premiers résultats

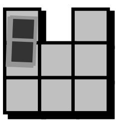
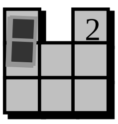
Le premier résultat qui apparaît le plus souvent est l'impossibilité du pavage par des dominos des carrés de côté pair tronqués d'une case. Le problème est donc restreint à la classe des polyminos carrés de côté impair tronqué d'une case.

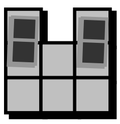
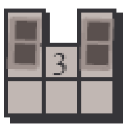
Il apparaît alors que parmi ceux-ci, certains sont pavables et d'autres pas, suivant la position du trou dans le carré. Ceci est montré sur des polyminos de petite taille : côté 3 ou 5 le plus souvent.

Enfin, dans les cas des carrés de côté 3, 5 ou 7 cases, les PE trouvent les cases que l'on peut enlever pour obtenir un polymino pavable : ils exhibent le pavage obtenu. Dans le carré de côté 3, ils utilisent le plus souvent une preuve par forçage (condition nécessaire) pour montrer que certaines cases enlevées rendent le polymino non pavable.

Exemple de preuve par « forçage » :



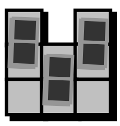
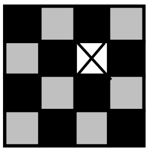


Schéma 1 schéma 2 schéma 3 schéma 4 schéma 5 schéma 6

Pour que la case 1 soit pavée, il faut nécessairement poser un domino comme sur le schéma 2. Puis, pour que la case 2 soit pavée, il est nécessaire de poser un domino comme sur le schéma 4. Enfin, pour paver la case 3, il ne reste alors qu'une possibilité :

poser un domino comme sur le schéma 6. Il reste alors à paver deux cases non voisines, ce qui n'est pas possible. En conclusion, ce polymino n'est pas pavable.

Pour les carrés de côté 5 ou 7, ils se contentent généralement de montrer qu'un ou deux pavages ne sont pas possibles pour en déduire qu'une certaine case ne peut être enlevée, ils ne s'assurent pas qu'aucun pavage n'est possible. Il s'agit donc d'éclaircir ceci avec eux.



I – 2.2 Conjectures

A la suite de cela, émerge le plus souvent une conjecture :

> Si on colorie le carré en damier comme ci-dessus, lorsqu'on enlève une case noire, le polymino tronqué obtenu est pavable et réciproquement, lorsqu'on enlève une case blanche, le polymino tronqué obtenu n'est pas pavable.

I – 2.3 Preuves par découpages (implication directe)

Il existe de nombreux types de découpages qui permettent de démontrer qu'un polymino est pavable : on découpe le polymino de départ en polyminos plus petits dont on sait qu'ils sont pavables. Ces preuves sont basées sur la propriété :

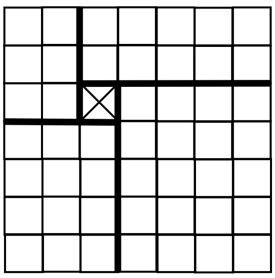
> « Un polymino rectangulaire dont au moins un des côtés est pair est pavable par des dominos ».

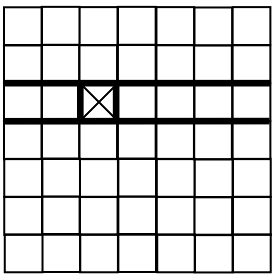
Il s'agit donc de découper le carré tronqué d'une case en différents rectangles dont on démontre qu'ils ont un côté pair. Il faut auparavant avoir repéré la place des cases que l'on peut enlever :

> « Elles sont en position (pair, pair) ou en position (impair, impair) ».

Le plus souvent il faut un découpage différent selon la position de la case (p, p) ou (i, i).

Voici deux exemples de découpages pour la position (impair, impair) sachant qu'on peut les « adapter à » pour la position (pair, pair) :





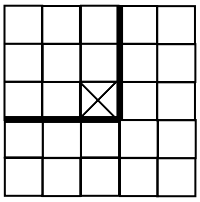
Les preuves par découpages apparaissent aussi très souvent comme des démonstrations de résultats intermédiaires comme par exemple « si on enlève la case du coin, le polymino est pavable ».

Ces preuves sont les plus convaincantes pour les PE, le découpage dessiné étant validé sans aucune difficulté. Il reste alors à leur faire accepter que l'on puisse bien reconnaître ces arguments comme une preuve mathématique.

I – 2.4 Preuves par induction (implication directe)

Ces preuves utilisent le résultat démontré sur un carré de côté 3 pour « grossir » le polymino petit à petit.

La case barrée ci-dessous peut-être enlevée pour que le polymino soit pavable : en effet, l'intérieur du carré de côté 3 dessiné est pavable (cf. résultat sur le carré de côté 3) et le « L » restant est aussi pavable (2 rectangles de côtés pairs). On peut démontrer que toutes les autres cases colorées en noir (dans la coloration en damier) peuvent être enlevées, il suffit pour cela de déplacer le carré de côté 3.



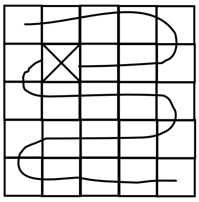
On a donc démontré l'ensemble des cases que l'on peut enlever sur un carré de côté 5.

A partir de ce résultat, on peut, de la même façon, démontrer quelles sont les cases qui peuvent être enlevées dans le carré de côté 7. On généralise ensuite la démonstration pour le carré de côté n.

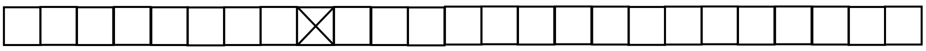
I – 2.5 Preuve par chemin (implication directe)

Pour démontrer qu'une case noire peut-être enlevée, on déroule le polymino en « chemin » et l'on montre que, de part et d'autre de la case enlevée, les deux « morceaux de chemin » ont un nombre de cases pair et peuvent donc être pavés.

Le carré à paver :



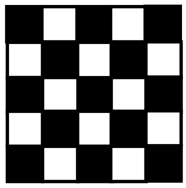
devient :



I – 2.6 Preuve par coloration (implication réciproque)

Après avoir vu apparaître différentes stratégies pour montrer que les cases noires peuvent être enlevées, il reste à démontrer que réciproquement, si on enlève une case blanche on ne peut pas paver le polymino obtenu. L'argument de coloration utilisé dans la démonstration suivante apparaît plus rarement de façon naturelle, il peut être plus ou moins « amené » par l'enseignant à l'aide de questions si cela est nécessaire.

Prenons un polymino carré, colorions-le en damier de la façon suivante :

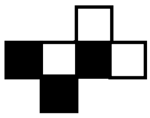


On démontre qu'il y toujours deux cases noires de plus que de cases blanches. (Si n est le nombre de cases blanches, il y a n+2 cases noires).

Or, quelle que soit la position dans laquelle on pose un domino, il recouvre forcément une case noire et une case blanche. Pour que le polymino soit pavable par des dominos, il faut donc qu'il ait autant de cases blanches que de cases noires (1).

C'est-à-dire que, dans le cas du carré tronqué d'une case, si on enlève une case blanche le polymino n'est pas pavable (nombre de cases blanches et noires différent !).

Il n'est pas rare que les PE (ou élèves) associent alors la validité de l'affirmation (1) à la validité de sa réciproque : « si un polymino a autant de cases blanches que de cases noires alors il est pavable » ou encore « si on enlève une case noire, il est pavable ». Cette réciproque est évidemment fausse, comme le montre le contre-exemple ci-dessous (autant de cases blanches que de cases noires mais non pavable) :



I – 3 Connaissances mises en jeu dans cette situation

Voici une liste non exhaustive des connaissances mathématiques mises en œuvre dans cette *Situation-Recherche*.

- tri des solutions, essais sur des « petits cas » ;
- démonstration par condition nécessaire (ou par forçage) ;
- recherche et formulation de conjectures ;
- contre-exemples ;
- modélisation ;
- preuve et argumentation (condition nécessaire / condition suffisante…) ;
- raisonnement par induction ;
- connaissances arithmétiques (parité…).

II – LES SITUATIONS-RECHERCHE EN CLASSE

II – 1 Motivation et caractéristiques

La motivation première pour l'introduction des *Situations-Recherche* en classe (primaire, collège ou plus tard) est de permettre aux élèves de prendre la place d'un « chercheur qui cherche à résoudre un problème qui s'offre à lui ». Un problème étant posé (il faut parfois définir plus précisément le questionnement), l'élève cherche à y répondre en utilisant tous les moyens qui s'offrent à lui sans qu'aucun savoir de la classe de mathématiques soit mis en avant.

Il apparaît alors que ce qui est au centre de l'activité est l'organisation de la recherche, les formulations de conjectures, la construction d'un raisonnement et la validation ou non d'une preuve. Ces « savoirs transversaux », au centre de l'activité mathématique, prennent ici tout leur sens dans la recherche d'une réponse à un questionnement. C'est donc pour leur donner une place d'importance que nous proposons des *Situations-Recherche* en classe.

Voici quelques caractéristiques que ces situations doivent remplir pour permettre ceci.

- Domaine et question facilement compréhensibles ;

> Même s'il n'est pas familier le domaine conceptuel dans lequel se trouve le problème est d'un accès facile afin que l'on puisse facilement « prendre possession » de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution. [Karine Godot].

- aspect ludique (pour assurer la dévolution du problème plus facilement) ;
- plusieurs approches mathématiques possibles ;
- pré-requis scolaires les plus réduits possibles ;
- l'intérêt réside dans la découverte des moyens pour atteindre la solution et dans la justification de ces moyens et non pas dans la solution elle-même ;
- travail en groupes et débats : convaincre ses pairs et pas seulement le professeur ;
- la situation fait référence à un problème général ouvert pour la communauté mathématique, c'est-à-dire non encore résolu par elle. Il en résulte, entre autres, qu'il n'existe pas (ou du moins pas encore) de « fin », il n'y a que des résultats partiels qui renvoient à d'autres questions.

II – 2 Utilisation dans les classes

II – 2.1 Dans les programmes

Voici quelques extraits des programmes de mathématiques de cycle 3 (2002) qui montrent bien la place que peuvent occuper les *Situations-Recherche* en classe.

> Les situations sur lesquelles portent les problèmes proposés peuvent être issues de la vie de la classe, de la vie courante, de jeux etc. Elles sont présentées sous des formes variées […]
>
> Au travers de ces activités, le développement des capacités à chercher, abstraire, raisonner, prouver, amorcé au cycle 2, se poursuit. Pour cela il est nécessaire de prendre en compte les démarches mises en œuvre par les élèves, les solutions personnelles qu'ils élaborent, leurs erreurs,

leurs méthodes de travail et de les exploiter dans les moments de débats. Au cycle 3, les élèves apprennent progressivement à formuler de manière plus rigoureuse leurs raisonnements, s'essaient à l'argumentation et à l'exercice de la preuve.

II – 2.2 Organisation pratique

Le travail de la classe sur une *Situation-Recherche* s'étale sur plusieurs semaines à raison, en général, d'une heure par semaine. Les séances sont menées par l'enseignant, un chercheur ou les deux à la fois. Les élèves sont en groupes de 3 à 5 élèves.

Lors de la première séance le problème peut leur être présenté sous forme de jeux matériels (plateaux et dominos en bois par exemple) pour que les élèves puissent se l'approprier en échappant à la suite de définitions préalables (cf. I-1). Ces jeux devront, cependant, être enlevés après deux ou trois séances afin que les élèves ne restent pas sur la manipulation d'objets et la collection de résultats mais passent à la résolution d'un problème général.

Pour garder une trace de ce qui a été fait aux séances précédentes, les groupes peuvent remplir une "feuille bilan" sur laquelle ils noteront les résultats, les fausses pistes, et tout ce qui leur semblera important (savoir tenir une "feuille bilan" de façon efficace pour la recherche devient alors aussi un apprentissage).

L'enseignant et/ou le chercheur passe dans les groupes. Il choisit des moments adéquats de la recherche pour faire des mises en commun. Celles-ci peuvent avoir lieu pour préciser un aspect du problème, arrêter une fausse piste dans un groupe, confronter des stratégies différentes, valider des résultats… Cependant, l'enseignant et/ou le chercheur reste en retrait, son rôle étant de guider le débat et non pas de valider un résultat. Certains élèves passent au tableau pour expliquer leur recherche. Ces moments obligent à argumenter et à développer un esprit critique face à des preuves valides ou non.

On peut éventuellement profiter d'une fête d'école pour demander aux élèves de présenter un poster ou de préparer une présentation devant les parents. Outre le fait que ce soit gratifiant pour eux, il est alors plus évident pour les élèves qu'ils doivent utiliser des arguments clairs. Les parents n'ayant pas participé à la recherche, il faut leur présenter les phases les plus importantes de cette recherche sans utiliser de sous-entendus, avec des arguments les plus compréhensibles et les plus pertinents possibles.

II – 2.3 Quelques critères d'évaluations

Les *Situations-Recherche* ne sont pas, a priori, mises en place pour être évaluées. L'évaluation ne devrait probablement prendre place que si ce type de travail devient assez habituel dans la classe. Voici quelques critères d'évaluation que je propose aux PE, pour certains ils ne sont pas associés uniquement aux *Situations-Recherche* et peuvent être réutilisés dans d'autres conditions.

Activité dans le groupe

- Le groupe travaille-t-il en autonomie ?
- E participe-t-il à la réflexion du groupe ?
- E est-il capable de s'exprimer face à l'observateur ?

- E est-il à l'écoute des autres ?
- E sait-il se faire écouter / comprendre par les autres ?

Présentation écrite / orale

- savoir transcrire ses résultats par écrit ;
- clarté et pertinence de la feuille bilan ;
- au tableau (écrit / oral) ;
- poster, Présentation orale (devant les parents, fête de l'école par exemple).

La recherche

Il s'agit bien ici d'évaluer les moyens de la recherche et non la solution elle-même.

- savoir différencier : question / hypothèse / conjecture / théorème ;
- utiliser exemple et contre-exemple ;
- comprendre ce qu'on a fait, prendre du recul ;
- organiser sa recherche ;
- modéliser ;
- généraliser un résultat ;
- argumentation, notion de preuve ;
- connaissances sur les concepts en jeu (parité…).

III – LES SITUATIONS-RECHERCHE DANS LA FORMATION DES PE

Mes motivations sont à deux niveaux. En plus de l'intérêt que je vois à l'utilisation de ces situations dans les classes de primaire, les présenter en formation des professeurs des écoles permet aussi de travailler des concepts fondamentaux en mathématiques tels que la preuve, les conditions nécessaires et suffisantes, les exemples et contre-exemples…, concepts qui sont très souvent loin d'être maîtrisés par les PE. Plus j'utilise ces *Situations-Recherche* et plus je suis convaincue de leur grand intérêt pour l'apprentissage des mathématiques, que ce soit pour les élèves de primaire ou pour la formation des professeurs des écoles.

III – 1 Pour leur futur d'enseignant

- Éviter le « tout fichier »

Lors de visites de classe, je vois souvent les mathématiques réduites à un ensemble d'exercices tirés de fichier. Certains cahiers de mathématiques sont un ensemble de pages photocopiées sur lesquelles l'élève n'a plus qu'à écrire un nombre ou une réponse réduite à « oui » ou « non ». Il me paraît important d'insister sur le fait, entre autres, que les erreurs, le tâtonnement et le cahier de brouillon doivent avoir leur place dans l'apprentissage des mathématiques.

- Autre façon de voir/faire des mathématiques

Dans le même ordre d'idées, il me paraît important de montrer que les mathématiques ne sont pas réduites au calcul ou à la géométrie. Il ne s'agit pas non plus uniquement d'apprendre des formules ou des techniques. Les mathématiques doivent être des outils nous permettant de répondre à certaines questions. Dans ces Situations-Recherche, faire des mathématiques, c'est avant tout mettre en place des raisonnements et des preuves sans pour autant utiliser des « formules connues ».

- Former des citoyens

L'école affirme comme but la formation de citoyens. Il me semble que ce n'est pas par le biais des fichiers que les mathématiques peuvent y participer. Les Situations-Recherche, en permettant le débat, la contradiction, l'argumentation face à ses pairs favorisent l'apprentissage d'un esprit critique scientifique.

III – 2 Quelques difficultés en mathématiques des PE

De nombreux PE ont de grosses lacunes en mathématiques, en particulier en ce qui concerne l'argumentation et la preuve. Dans ce type de situation, ces difficultés ressortent de façon encore plus évidente. On voit aussi apparaître des « conceptions » sur les mathématiques, issues souvent d'années de mathématiques scolaires « mal vécues », très éloignées de ce qu'est réellement l'activité mathématique dans les *Situations-Recherche*. Les mettre face à ces *Situations-Recherche* permet alors de travailler avec eux de nombreux savoirs « transversaux » en mathématiques (notion de contre-exemple, démonstration…). Voici quelques exemples des difficultés rencontrées par les PE qui méritent d'être « éclairées mathématiquement » en formation.

- Démotivation très rapide

Il ne semblerait pas, a priori, que la démotivation soit une difficulté mathématique, cependant je crois que les raisons de celle-ci sont très liées à leur relation aux mathématiques. Alors que les élèves de cycle 3, pour la plupart, s'approprient le problème facilement et cherchent avec engouement, certains groupes de PE ne parviennent pas à entamer une recherche « satisfaisante ».

Je fais l'hypothèse qu'une des raisons de cela est due à leur rapport « douloureux » aux mathématiques dans leur parcours scolaire. Ayant le sentiment d'être « mauvais » en mathématiques, certains PE n'osent pas formuler une conjecture, n'accordent aucune légitimité à leurs propres idées et n'osent pas faire preuve d'esprit critique.

- Les maths sont des « formules »

Pour beaucoup de PE, les mathématiques se réduisent à l'utilisation des « bonnes » formules au « bon » moment, les formules devant contenir plusieurs inconnues de préférence. Certains PE proposent une démonstration (parfois fausse) d'une page avec plusieurs inconnues pour affirmer qu'un carré tronqué d'une case de côté pair a un nombre total de cases impair. Devant mon étonnement, ils expliquent alors qu'ils ont fait un effort pour l'écrire « en langage mathématique ». Pour eux, le rôle du langage mathématique n'est pas de clarifier un propos mais tout simplement de le symboliser.

- Quelques essais qui ne marchent pas suffisent pour conclure

On peut conclure qu'un polymino est pavable si on exhibe un pavage, alors qu'on ne peut pas conclure qu'un polymino n'est pas pavable simplement en exhibant un pavage impossible.

Dans le cas du carré de côté 5 par exemple, pour prouver que certaines cases ne peuvent être enlevées, il faut soit utiliser un argument général (coloration) soit montrer qu'aucun pavage ne peut convenir (ce qui est assez long et fastidieux). Pour beaucoup de PE, pour prouver qu'une case ne peut être enlevée, il suffit d'exhiber un pavage qui ne convient pas.

La dissymétrie entre la démonstration de l'affirmation et de la négation d'une proposition existentiellement quantifiée (il existe un pavage quand j'enlève cette case) n'est pas perçue facilement par les PE.

- Un carré de côté 13 est un polymino plus « quelconque » qu'un carré de côté 3

Pour certains PE, montrer qu'une propriété est vraie sur un exemple suffit à la démontrer. D'autres savent que cela ne suffit pas, ils cherchent alors à démontrer que la propriété est vraie pour un élément générique (ou quelconque) et c'est le choix de cet élément générique qui pose problème.

De nombreux PE commencent directement à travailler sur un polymino carré de côté assez grand (9, 11, 13…). Ils expliquent qu'ils évitent ainsi de travailler sur un polymino particulier comme le carré de côté 3 par exemple. Cependant, ils utilisent bien les propriétés du polymino de grande taille dessiné et ne s'en servent pas du tout comme de la représentation d'un élément quelconque. Il s'agit donc de mettre en évidence le fait qu'un polymino carré de côté 13 est un polymino particulier au même titre qu'un polymino de côté 3.

- Pas de distinction entre CN et CS

Au cours de cette recherche, on est amené maintes fois à distinguer *Condition Nécessaire* et *Condition Suffisante*, en particulier parce que les deux sens de l'équivalence « avoir un trou à la place d'une case noire $\Leftrightarrow$ être pavable » nécessitent deux types de démonstration distincts.

Après avoir trouvé un argument valide pour les « cases qui marchent », les PE essaient le plus souvent d'utiliser ce même argument pour les « cases qui ne marchent pas ». Il faut alors mettre ceci en débat jusqu'à arriver à trouver un contre-exemple.

- Généralisation naturelle : c'est logique, on déduit !

Après avoir trouvé les cases que l'on peut enlever sur un carré de côté 3 et sur un carré de côté 5, de nombreux PE énoncent la conjecture « pour que le polymino soit pavable il faut enlever une case noire » et arrêtent leur recherche tenant cette conjecture pour un fait mathématique établi. Ils justifient leur affirmation par des arguments du type : « c'est *logique* ! », « puisque ça marche pour 3 et 5 *on en déduit* que ça va marcher tout le temps ».

On voit là qu'ils essaient d'utiliser des arguments et un vocabulaire qu'ils associent à l'activité mathématique comme « logique », « déduire », très peu d'entre eux affirment simplement « on voit bien que » puisqu'ils ont pour la plupart intégré le fait que « ça ne suffit pas en mathématiques ». Ils ont ainsi le sentiment d'avancer un argument totalement valide mathématiquement. Il faut donc renégocier la définition d'un « vrai » argument mathématique qui permette la généralisation d'une propriété et la démonstration d'une conjecture.

- Difficultés à reconnaître une preuve

Les mathématiques étant associées pour beaucoup à des formules, une démonstration non valide mais « d'apparence mathématique » est souvent mieux acceptée qu'une démonstration valide présentée en langage courant. D'autre part, comme pour la plupart des élèves, un contre-exemple n'est pas toujours convaincant et ce n'est pas parce qu'un contre-exemple a été trouvé à telle propriété qu'on ne réutilisera pas celle-ci un peu plus tard.

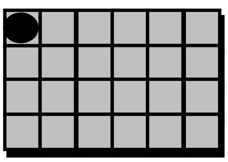
Il faut donc, au cours des débats, permettre aux PE l'apprentissage d'un « esprit critique mathématique ».

IV – D'AUTRES SITUATIONS-RECHERCHE

IV – 1 Le jeu du chocolat

Voici une Situation-Recherche que je propose parfois en 15 à 30 minutes à la fin d'une formation mais qui peut être développée sur un plus long temps en élargissant la question. Elle est présentée sous forme de jeu et il s'agit de trouver une stratégie gagnante, c'est-à-dire une stratégie qui permette de gagner *quelle que soit l'action de l'adversaire*. Ne pas oublier, avant de laisser les PE face au problème, de bien redéfinir une stratégie gagnante, il ne s'agit pas de décider de ce que doit jouer l'adversaire ! De nombreux PE donnent une solution du type : « il faut que l'adversaire joue comme ça et alors je gagne », mais seules nos actions dans le jeu peuvent avoir une incidence sur les actions de l'adversaire.

> Voici une tablette de chocolat rectangulaire avec une bulle de savon dans le coin en haut à gauche. Il s'agit de manger le chocolat sans manger la bulle de savon. Deux adversaires se partagent la tablette, chacun leur tour en la coupant le long des lignes horizontales ou verticales. Celui qui est obligé de manger la bulle de savon a perdu.
>
> Que doit-on faire pour être sûr de gagner ?



On peut facilement prolonger le problème à une tablette de chocolat à une ligne (puis deux) avec la bulle de savon qui peut être placée n'importe où.

IV – 2 La roue aux couleurs

Cette Situation-Recherche demande un peu plus de temps pour trouver des résultats significatifs. En formation PE, elle m'a paru moins appropriée, compte tenu de la durée des séances, cependant elle a donné des résultats très intéressants dans une expérimentation sur plusieurs semaines en primaire (cycle 3). Cette situation est présentée et analysée en détail dans la thèse de Karine Godot. Voici le texte du problème :

> Un forain propose un jeu constitué de deux disques de tailles différentes (la table tournante), disposés de façon concentrique. Sur le plus grand disque, il pose un certain nombre de pions, tous de couleurs différentes.
>
> Le joueur doit placer sur le petit disque le même nombre de pions que sur le grand disque. Ces pions peuvent être de une, deux, trois, quatre couleurs ou plus choisies parmi les couleurs disposées sur le grand disque par le forain.
>
> On fait ensuite tourner le petit disque, cran par cran. Le joueur gagne si, dans chaque position du petit disque, un et un seul de ses pions est de la même couleur que celui qui lui correspond sur le grand disque. Comment le joueur doit-il choisir et disposer ses pions pour gagner ?

IV – 3 Des lieux

Pour en savoir un peu plus sur les *Situations-Recherche*, des compléments dans le site de l'ERTé *Maths à modeler* :

`http://www.mathsamodeler.net/`

Pour avoir un aperçu d'autres *Situations-Recherche* et jouer en ligne (attention ça ne fonctionne pas encore très bien avec tous les navigateurs…), le site *La Valise* :

`http://www-leibniz.imag.fr/LAVALISE`

Pour voir des *Situations-Recherche* mises en place avec des chercheurs dans les classes du secondaire, le site de l'association Math en JEANS :

`http://www.mjc-andre.org/pages/amej/accueil.htm`

V – CONCLUSION

J'ai voulu présenter dans cet atelier une *Situation-Recherche* qui permet de travailler des concepts fondamentaux en mathématiques tels que les contre-exemples, les conjectures, les conditions nécessaires et suffisantes, l'argumentation, la preuve… Pour moi, ces *savoirs transversaux* « fondent » les mathématiques et me paraissent plus importants à maîtriser que n'importe quel autre savoir mathématique. Pourtant, ces savoirs sont les plus difficiles à travailler pendant la scolarité et les PE arrivent souvent à l'IUFM (ou en formation continue) avec de grosses lacunes. Plus encore, certains PE n'ont aucune idée des insuffisances qu'ils ont sur ces *savoirs transversaux*, les mathématiques se résumant pour eux à des formules et des techniques.

Utiliser ces *Situations-Recherche* en formation des professeurs des écoles, me permet donc, d'une part, de leur proposer des situations pour leur classe et, d'autre part, de (re) travailler avec eux les « fondements » des mathématiques.

Cette tâche n'est pas toujours facile. D'une part, ne mesurant souvent pas bien l'importance de ces *savoirs transversaux* en mathématiques (puisque qu'ils ne les connaissent pas toujours !), les PE ne voient pas bien l'intérêt de ces situations pour leur classe. Il me faut donc beaucoup de persuasion pour valoriser ces situations à leurs yeux. D'autre part, lorsque les PE ont des difficultés à mener leur recherche, ils concluent aussitôt que « ce sera trop difficile pour les élèves ». Or pour moi, leurs difficultés viennent en grande partie d'une relation avec les mathématiques difficile et d'un sentiment d'échec présent parfois depuis le collège. Bien des groupes d'élèves de cycle 3 trouvent (dans un temps parfois plus long) de meilleurs résultats que certains PE, mais eux n'ont pas encore cette relation aux mathématiques (et ne savent même pas qu'ils font des mathématiques !). Enfin, de nombreux PE ne se « sentent » pas capables d'assurer l'encadrement de ce type de recherche dans leur classe. Cela est normal, mais il ne faudrait pas que les mathématiques de l'école élémentaire soient restreintes à un ensemble de techniques (mieux maîtrisées par les PE). On pourrait donc peut-être imaginer que, dans une école, un professeur plus à l'aise en mathématiques, travaille sur des *situations-recherche* avec tous les cycles 3, se faisant remplacer dans sa classe par le collègue dont il prend la classe en charge. On pourrait aussi imaginer, au niveau des primaires, une organisation à l'image de Math en JEANS dans le secondaire, avec des chercheurs qui viennent dans la classe (cela est fait en partie par l'équipe CNAM sur la région grenobloise).

S'il n'est pas toujours facile de valoriser ces *Situations-Recherche* devant les PE, j'espère quand même à chaque fois « poser une graine » qui germera peut-être un jour, au grès de leur évolution par rapport à l'enseignement des mathématiques.

BIBLIOGRAPHIE

AUDIN P. & DUCHET P. (1992) *La recherche à l'école : Math en Jeans*, Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique, Grenoble I, **121**, 107-131.

DELOUSTAL-JORRAND V. (2004) *L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique. Étude sous trois points de vue : raisonnement déductif, logique formelle et théorie des ensembles. Construction d'une situation didactique qui problématise l'implication*, thèse, Grenoble I.

GODOT K. (2005) *Situation recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation*, thèse, Grenoble I.

GRENIER D. & PAYAN C. (1998) *Spéficités de la preuve et de la modélisation en Mathématiques Discrètes*, Recherches en Didactique des Mathématiques, **18.2**, 59-100.

GRENIER D. & PAYAN C. (2002) *Situations de recherche en « classe ». Essai de caractérisation et proposition de modélisation*, 189-203, in Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques, Paris VII.

UTILISATION DE LA THÉORIE ANTHROPOLOGIQUE DU DIDACTIQUE EN FORMATION PE1 ET PE2

Yves MATHERON
Maître de conférences, IUFM Midi-Pyrénées
GRIDIFE ERTe 46 & UMR ADEF
yves.matheron@toulouse.iufm.fr

Annie NOIRFALISE
Retraitée. IREM de Clermont Ferrand
Université B. Pascal
Annie.Noirfalise@math.univ-bpclermont.fr

Résumé
L’approche anthropologique en didactique constitue un outil intéressant pour l’analyse des organisations mathématiques et didactiques effectives, et donc des différents matériaux mis à la disposition des professeurs d’écoles.
Après la présentation de certains concepts de la théorie anthropologique et de leur usage possible en formation PE, les participants ont été invités à les faire fonctionner dans deux situations différentes.

On trouvera ci-dessous, dans le paragraphe I, la présentation des concepts utilisés, (paragraphes I – 1 et 1 – 2), suivis, pour chaque partie de cet apport, d’un exemple illustrant son usage dans le cadre d’une formation de professeurs d’école. Dans les paragraphes suivants, (paragraphe II et paragraphe III), un compte rendu est fait du travail avec les participants sur les deux situations qui leur ont été soumises.

I – DEUX CONCEPTS DE L’APPROCHE ANTHROPOLOGIQUE

Dans cet atelier, nous souhaitons montrer que l’approche anthropologique en didactique constitue un excellent outil pour les futurs professeurs d’écoles : elle permet, d’une part, de préciser et d’enrichir les réponses aux questions posées au CRPE, d’autre part, de conduire un travail d’analyse sur lequel peut s’appuyer l’évaluation et le développement de la pratique enseignante.

Nous utiliserons deux notions fondamentales, qui seront présentées et exemplifiées ci-dessous, les notions d’organisation mathématique et d’organisation didactique.

I – 1 Organisation mathématique

I – 1.1 Notion de « praxéologie » mathématique ou d’« Organisation mathématique »

Un premier examen des épreuves du CRPE (jusqu’en 2005) permet de les décrire en les termes suivants :

<table>
<tr>
<td>

1) La seconde partie du premier volet : **analyse de productions d’élèves**. (sur 4 points)

Des productions d’élèves sont proposées, portant sur une notion enseignée à l’école primaire. Il pourra s’agir :

- de préciser la notion étudiée,
- de préciser le niveau auquel se situe l’étude,
- de préciser les procédures utilisées par les différents élèves pour accomplir le travail demandé,
- de repérer les erreurs ou les difficultés rencontrées, les compétences mises en œuvre.

</td>
<td>

Notion mathématique étudiée

Procédures

</td>
</tr>
<tr>
<td>

2) Le second volet : **étude de documents**. (Sur 8 points)

Des extraits d’ouvrages scolaires, des documents présentant des séquences ou des comportements d’enfants sont fournis aux candidats, portant sur une notion enseignée à l’école primaire. Il pourra s’agir de :

- repérer la notion étudiée,
- faire des hypothèses sur les raisons ayant guidé les choix faits en matière de contenus et de gestion de la classe,
- apprécier la pertinence de ces choix,
- procéder à une analyse et une interprétation des productions d’élèves,
- imaginer une suite à la séquence présentées, voire faire sur certains points une proposition alternative

</td>
<td>

Notion mathématique étudiée

et

Organisation de l’étude

Analyse de séquence

Evaluation de séquence

Développement de séquence

</td>
</tr>
</table>

La plupart des questions posées portent sur « la notion mathématique étudiée » dans les documents fournis et sur « les compétences mises en œuvre », or, en général, ceci est difficile à déterminer sans ambiguïté, comme nous allons l'illustrer ci-dessous.

Considérant que l'activité mathématique est une activité humaine comme les autres, qu'il s'agit d'étudier, la théorie anthropologique du didactique, (TAD), nous offrira des outils pour décrire certains aspects de cette complexité.

Différents visages d'une même notion

Imaginons que vous rentriez dans des classes d'une école primaire et que vous voyiez au tableau **:**

- dans la première classe **:**

13 + 13 = 26

26 + 13 = 39

…

143 + 13 = 156

156 + 13 = 169

162 – 156 = 6

Chaque enfant recevra 12 bonbons et il en restera 6.

- dans la seconde classe :

Part de chaque élève	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Nombre de bonbons distribués	13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169

162 – 156 = 6

Chaque enfant recevra 12 bonbons et il en restera 6.

- dans la troisième classe **:**

162	13
- 130	10
032	+ 2
- 26	12
06	

ou :

162	13
32	12
6	

162 = 12 x 13 + 6

Chaque enfant recevra 12 bonbons et il en restera 6.

Vous pourriez aussi rentrer dans une classe de grande section de maternelle et voir des enfants devant un gros tas de bonbons (la maîtresse nous dit qu'il y en a 162, nombre qu'ils ne connaissent pas), avec comme consigne : combien les 13 enfants de la section auront de bonbons, si on en donne la même chose à chacun, et combien il en restera pour la maîtresse.

Sans familiarité avec l'enseignement primaire et les mathématiques, en première approche, vous seriez tenté de dire que, la conclusion mise à part, ce qui se passe dans ces quatre classes est bien différent d'une classe à l'autre : la disposition des calculs, les opérations mobilisées sur les trois tableaux, la nature des activités dans les trois premières et dans la dernière,… ne sont pas du tout les mêmes.

Après un minimum d'explications, ou si vous êtes par exemple un « matheux », vous reconnaîtrez, sans doute, que les quatre classes traitent de la même notion mathématique, à partir d'un même problème de partage : la division euclidienne.

Si vous êtes professeur d'école, vous y verrez sûrement des activités très différentes, pratiquées dans des cycles différents, nécessitant des pré-requis différents,… mais traitant toutes de la même notion : la division de nombres entiers avec reste.

<u>Mais alors qu'est-ce que c'est que « La notion de division euclidienne » ?</u>

On pourrait évoquer de nombreuses autres situations où on pense rencontrer « la division euclidienne » . Ce que nous allons trouver ce n'est jamais l'objet lui-même, mais des pratiques humaines où est mis en jeu cet objet avec d'autres objets.

On trouvera des déclarations sur la division que l'on rangera sous la rubrique définition : « on appelle division de l'entier a par l'entier b … », déclaration qui est une activité consistant à donner une définition. On pourra calculer, d'une façon ou d'une autre, le reste et le quotient d'un entier par un autre, étudier ou utiliser les propriétés du reste et du quotient. Mais on ne « mettra jamais la main sur l'objet lui-même ». Tout seul il n'existe pas, il n'existe qu'inséré dans des activités. Ce que nous appellerons division est, en fait, l'ensemble de toutes ces pratiques, dont on ne saurait, toutefois, faire un répertoire exhaustif.

L'étude d'une notion mathématique se fera donc à l'aide de différents types d'activités associées à cette notion, au cours desquelles on se conduira de différentes façons ; nous dirons différents types de tâches accomplies avec différents types de techniques.

Dans l'exemple précédent, on a à accomplir une tâche du type : dans une situation de partage équitable d'une quantité donnée en un nombre de parts données, trouver la valeur de chaque part et ce qu'il reste. Pour accomplir cette tâche on est amené à déterminer le quotient et le reste de la division de 162 par 13. En GS, on utilise une technique de distribution effective du gros tas de bonbons dans 13 boîtes, par exemple, jusqu'à ce qu'on ne puisse plus le faire, et l'on compte ce qu'il y a dans chaque boîte et ce qu'il reste. Dans les trois autres classes, on utilise une technique numérique, mais différente d'une classe à l'autre : additions successives dans la première, multiplications successives dans la seconde, division posée avec la potence dans la troisième (technique dite « experte »).

<u>Mais alors qu'est-ce que c'est que connaître « La division euclidienne » ou être « compétent en division euclidienne » ?</u>

Si j'observe quelqu'un en train de repasser du linge, je peux être conduit à dire qu' « il s'y connaît en repassage, ou qu'il est compétent en repassage », ou qu' « il ne s'y connaît pas » : c'est en ce sens que nous parlerons de connaissance, qu'en est-il en matière de division euclidienne ? En fait, la pratique sociale observée, dans une institution donnée, met en jeu certains objets, matériels ou immatériels, visibles ou invisibles, et le fait de « s'y connaître » revient à entretenir avec ces objets des rapports conformes à ce que l'institution attend. Donc « s'y connaître » dans une pratique donnée dépend de l'institution dans laquelle on se trouve.

Pour « s'y connaître » dans la pratique observée, y a-t-il quelque chose à savoir, des compétences à mettre en œuvre ? Ou pour le dire autrement : l'exercice réussi de cette pratique suppose-t-il des savoirs, des savoirs pertinents au regard de la pratique *sociale considérée ? Y a-t-il quelque chose à savoir pour pousser une brouette ? Pour repasser du linge ? Pour faire la vaisselle ? Pour faire la cuisine ? Quels sont les savoirs nécessaires aux élèves pour faire une division ?*

Les réponses à de telles questions sont diverses, et elles dépendent bien sûr de l'institution dans laquelle on la pose. Si on admet en général que pour pousser une brouette il n'y a rien à savoir, encore que !, et qu'il suffit de le faire, s'il en est peut-être de même, de nos jours, pour la vaisselle ou le repassage, pour la cuisine, les professionnels reconnaissent depuis longtemps le besoin en savoirs, mais on peut très bien savoir faire la cuisine chez « Trois Gros » et ne pas savoir la faire à la cantine du lycée.

On peut dire que dans des conditions données (en G.S., en CE2, en CM2, en DEUG math, …), connaître telle notion mathématique, c'est, au moins, savoir accomplir un certain type de tâches avec une technique ou une procédure reconnue comme pertinente dans ces conditions, on parlera de savoir-faire.

Si on se trouve en préparation au CRPE, connaître la division euclidienne, c'est connaître les différents types de tâches de division et pouvoir les accomplir avec les différentes procédures mises en œuvre tout au cours de la scolarité primaire, mais c'est aussi savoir expliquer comment ces procédures marchent, pourquoi elles sont pertinentes, c'est aussi savoir que le couple (q, r) tel que $a = b\,q + r$, est unique dans certaines conditions, et quelles sont les théories qui rendent ces procédures légitimes.

Compte tenu de ce qui précède, on voit déjà que la définition d'une « notion mathématique » recouvre de multiples éléments dont la nature dépend du lieu où l'on se trouve. Pour rendre compte de cette complexité, nous allons parler d'organisation mathématique et distinguer **quatre éléments constitutifs** de chaque organisation mathématique que nous serons amenés à étudier :

1^er^ élément

Toute activité humaine peut être repérée comme correspondant à une *tâche* ou un *type de tâches*. Dans la plupart des cas, une tâche (et le type de tâches auquel elle appartient), s'expriment par un verbe d'action : *balayer* la pièce, *monter* l'escalier, « *déterminer* le montant de chaque part ou le nombre de parts dans des situations de partage ou de distribution équitables », « *calculer* le quotient et le reste de la division euclidienne d'un nombre entier (d'au plus 4 chiffres) par un nombre entier (d'au plus 2 chiffres),… par un calcul posé ».

Remarque : une tâche, ou plutôt un type de tâches, suppose un objet relativement précis : « calculer », « dessiner », « démontrer », *etc*., sont des genres de tâches qui demandent à être précisées pour être étudiées.

2^ème^ élément

Une activité suppose une manière d'accomplir, de réaliser la tâche ou le type de tâches, à cette manière de faire on donne le nom de *technique*. Contrairement à ce que beaucoup croient, une technique ne se réduit pas nécessairement à un algorithme, bien que l'existence éventuelle d'un algorithme pour un type de tâches donné simplifie considérablement sa réalisation. Le terme de technique renvoie directement à la notion de *technè*, d'où il tire son étymologie. Pour les Anciens Grecs, elle désignait l'ingéniosité du sens pratique, évoquait l'art, l'habileté, la compétence impliquée dans la production délibérée de quelque chose ; contrairement à ce qui dérive purement et simplement de la nature ou du hasard. Ainsi, dira-t-on encore de nos jours d'un artiste qui maîtrise son art, qu'il « maîtrise sa technique » ; ce qui est loin de signifier qu'il se contente de la mise en œuvre d'algorithmes pour les tâches de son domaine. Dans les textes officiels qui utilisent à la place de « technique », et trop souvent le terme de *procédure* (« *procédure experte* », « *procédure personnelle* »), beaucoup moins pertinent pour rendre compte de l'activité mathématique, ce sens est perdu. On peut à juste raison se demander pourquoi le terme de « procédure », directement issu du droit, est mentionné pour désigner la réalisation d'une tâche ***mathématique*** ; dans un sens courant, une procédure désigne encore un ensemble de règles d'organisation à suivre, et a donné naissance au terme, plutôt péjoratif, de « procédurier ». Un certain type de tâches et une technique, c'est-à-dire une certaine manière de faire, d'accomplir les tâches de ce type, constituent ce que l'on nomme couramment un *savoir-faire*.

Remarques :

- une technique ne réussit, en général, que sur une partie des tâches du type auquel elle est relative, partie qui délimite la *portée de la technique*. Une technique peut être supérieure à une autre car couvrant un ensemble plus important de tâches d'un type donné, (avec la technique de partage évoquée en G. S., on ne réussirait pas à partager les gains du loto entre les parieurs gagnants) ;
- une technique, à propos d'un type de tâches donné, dépend de l'institution dans laquelle se déroule la pratique. Dans une institution donnée, il existe en général une seule ou un petit nombre de techniques institutionnellement reconnues pour accomplir un type de tâches, d'autres techniques peuvent exister dans d'autres institutions et seront considérées comme étranges voire contestables ou inacceptables par les sujets de cette institution (il existe plusieurs techniques de division posées).

3ème élément

Dans une institution donnée on va généralement tenir un discours rationnel sur la technique : description de celle-ci, justification du fait qu'elle permet bien d'accomplir les tâches du type concerné. Ce discours est appelé *discours technologique*. La fonction de la technologie est aussi d'expliquer, de rendre intelligible, d'éclairer la technique, et de la produire.

Remarques :

- dans toutes les institutions, pour un type de tâches institutionnellement reconnu, il y au moins un embryon de technologie, bien souvent intégré à la technique : par exemple quand on dit « Si 8 sucettes coûtent 10 francs, 24 sucettes soit 3 fois 8 sucettes coûteront *3 fois plus*, soit 3 fois 10 francs. », le discours tenu permet à la fois de trouver le résultat demandé (fonction technique) et de justifier que c'est bien là le résultat attendu. Mais comme souvent les techniques utilisées sont naturalisées dans les institutions où on les utilise la justification disparaît, la technique est la « bonne manière de faire » ;
- au-delà de s'assurer que la technique donne bien ce qu'on attend, la technologie doit permettre de préciser pourquoi il en est bien ainsi. En mathématiques, l'exigence démonstrative entraîne souvent à ce que la fonction de justification l'emporte sur la fonction d'explication ; c'est un reproche que tant Descartes que Pascal adressaient déjà à Euclide.

4ème élément

Au-delà, en général, une *théorie* permet de justifier la technologie : si le discours théorique est majoritaire dans un enseignement universitaire, il est très peu présent dans l'enseignement secondaire, et totalement absent dans l'enseignement primaire. A propos d'un certain type de tâches, le bloc technologie – théorie est souvent nommé un *savoir*.

Remarques :

- en général une même théorie justifie plusieurs technologies, dont chacune à son tour justifie et rend intelligibles plusieurs techniques correspondant à autant de type de tâches. Ceci conduit souvent à minorer les savoir-faire (plus ponctuel) par rapport aux savoirs (plus globaux) ;
- une *organisation mathématique* construite autour d'un type de tâches est constituée des quatre éléments décrits précédemment : type de tâches, technique, technologie, théorie. En général certains de ces éléments sont absents et cette absence correspond à des questions à étudier : tâches nouvelles, problématiques, à la recherche de techniques pour les accomplir ; tâches anciennes pour lesquelles les techniques classiques paraissent obsolètes ; tâches routinières, correspondant à des techniques parfaitement adaptées pour lesquelles le bloc théorique est complètement ignoré…

I – 1.2 Utilisation de la modélisation précédente à propos d'un sujet de CRPE

On trouvera en **ANNEXE 1** le texte du sujet de la deuxième épreuve du volet 1 du CRPE Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice – mai 2000, sur lequel porte le travail de ce paragraphe.

Le candidat au CRPE doit, à travers cet énoncé et comme c'est très souvent le cas pour d'autres sujets du CRPE, se livrer tout d'abord à un travail d'identification, afin d'être précis et complet dans ses réponses et éviter les contresens. Tentons de suivre en quoi le modèle didactique précédemment exposé peut l'aider dans cette tâche.

Le candidat rencontre tout d'abord la question formulée en ces termes : « Quelle compétence, en termes de connaissance des nombres, est mise en jeu ? »

Les compétences citées ici se construisent pour une large part à travers la résolution de problèmes et les types de tâches qu'ils contiennent. Il s'agit donc de décrire (éventuellement d'évaluer) le rapport aux nombres dont on est raisonnablement en droit d'attendre l'établissement pour des élèves du CE2 ; donc le rapport institutionnel « aux pratiques à nombres ». Pour plus de précision, il faut donc retourner à la consultation des programmes des cycles 2 et 3, puisque le CE2 est la première classe du cycle 3.

Le terme de « connaissances » semble beaucoup plus flou et difficile à définir, même si en philosophie et en didactique des mathématiques de langue française (car la distinction n'existe pas en anglais, ce qui pose divers problèmes), il adopte un sens très précis : les connaissances sont essentiellement attachées aux personnes (rapports personnels), éventuellement aux groupes, mais ne peuvent être facilement détachées des personnes et des contextes, à l'inverse des savoirs (rapports institutionnels). Dans des expressions comme « les connaissances des élèves », « connaissances maîtrisées ou non maîtrisées » le terme de « connaissances » semble plutôt renvoyer à un savoir-faire, donc à un couple (type de tâches, technique), que l'élève possèderait ou non en propre.

Mais en même temps, on ne peut s’empêcher d’y voir certains éléments technologiques, comme c’est le cas dans l’expression « connaissance d’une notion ». Ainsi lorsque cette dernière expression est accolée à, par exemple, décimal, fraction, proportionnalité, l’expression renvoie-t-elle sans doute aux décimaux, aux fractions, à la proportionnalité qui sont certes des « notions » rencontrées à travers l’accomplissement d’activités, mais aussi grâce à des définitions et des propriétés ; c’est-à-dire grâce à des éléments technologiques. Le terme de « connaissance » utilisé dans ce genre d’énoncé est donc particulièrement riche de confusions.

La deuxième question demande : « Classez ces productions en fonction de la procédure utilisée… »

Le terme « productions » renvoie sans doute à ce qui est donné à voir lorsque a eu lieu l’accomplissement d’une ou plusieurs tâches d’un type donné. Mais lorsqu’elles sont qualifiées « d’expertes » ou de « rudimentaires », ce terme contient sans doute un sens qui renvoie à la prise en compte de la technique utilisée par l’élève pour accomplir la tâche. Quant aux termes de « procédures » ou de « démarches », ils peuvent sans doute être associés aux techniques.

Comme on l’a déjà mentionné, le terme de « procédure », qui vient de procéder (en latin *pro cedere* qui signifie « s’avancer »), est issu du droit. Ce terme juridique apparaît vers le milieu du XIVe siècle. Il est associé aux termes de « formalités » à remplir, ou de « règles d’organisation judiciaire » à suivre. On voit donc qu’il est déjà particulièrement mal adapté pour la description d’une pratique relevant d’un savoir, comme le sont les mathématiques. Importé du droit par la psychologie, le terme de « procédure » a ensuite été exporté sans plus de réflexion vers l’enseignement… Il ne permet de rendre compte, ni de la complexité d’un savoir telle qu’elle a été décrite en termes d’organisation praxéologique, ni de la réalisation des tâches relevant de ce savoir par quiconque, et notamment par les élèves.

Voici par exemple ce que l’on trouve dans un glossaire de psychologie de l’Université Pierre Mendès-France de Grenoble : « Les activités de résolution de problème relèvent d’un niveau de contrôle plus élevé de l’activité, celui nécessité par l’élaboration de procédures. Elles sont dirigées par une stratégie, grâce à la mise en œuvre des méta-opérations d’élaboration d’une procédure ». Tout le problème, qui demeure entier depuis la psychologie parce qu’elle ne s’intéresse ni aux savoirs, ni aux institutions au sein desquelles on les rencontre, est de parvenir à décrire le bien mystérieux « méta »…

Ce même glossaire fournit une définition du terme de procédure : « Suite organisée d’actions permettant de réaliser un but. Dans l’analyse des procédures, il est opportun d’envisager deux distinctions. La première oppose une procédure en voie de constitution (il s’agit alors d’une situation de résolution de problème) à une procédure déjà constituée, ou savoir-faire (on parle alors de connaissances procédurales). L’organisation interne et la gestion de l’exécution varient avec le degré d'apprentissage. La seconde concerne la description que fait un individu de la procédure qu’il emploie et la réalisation effective de celle-ci... » (Grand Dictionnaire de Psychologie, Larousse). Dans ce deuxième cas encore, la description de la procédure ne peut être envisagée que relativement à l’individu qui la suit. On oublie ainsi qu’elle est portée d’une part par les communautés historiques qui ont conçu le savoir mathématique, d’autre part par la communauté sociale qui s’est chargée de sa transposition au niveau du cursus considéré, et enfin par la « communauté-classe » à laquelle appartient l’élève et où se déploient les pratiques relatives au savoir. C’est son plus ou moins grand assujettissement au contrat didactique qui garantit la mise en œuvre d'un technique plus ou moins idoine à ce que l'on attend de lui.

On voit donc que l'entrée par le *logos* d'où vient le terme de « technologie », et qui est le discours raisonné qui, dans une institution donnée, justifie, rend compréhensible et produit les « procédures », est absent de cette définition venue de la psychologie, alors qu'il constitue le cœur de l'activité mathématique. Cette activité est un construit humain chargé d'histoire, et non une activité propre à un sujet indépendamment des institutions qui lui ont fait rencontrer cette pratique sociale ; institutions au premier titre desquelles se trouve l'École. Et il en est de même de bien d'autres activités intellectuelles, et / ou scolaires, qui sont, elles aussi et avant toutes choses, des pratiques sociales dans lesquelles l'élève est convié d'entrer.

Ce détour technologique étant accompli, on pourrait donc croire que le terme de « procédure » renvoie en général, et comme on l'a déjà mentionné, au terme de « technique » utilisé en didactique des mathématiques. Ici cependant il faut discriminer plus finement car, pour s'engager dans la technique de groupement que les élèves utilisent tous, les élèves recourent à des systèmes de signes (systèmes sémiotiques) différents. Certains de ces systèmes sont de nature « strictement mathématique », d'autres relèvent de systèmes de représentation sémiotique sans doute rencontrés dans les classes précédentes, mais qui ne font pas partie de la panoplie des écritures mathématiques canoniques.

Ainsi, le terme de « procédure » utilisé dans ce sujet de CRPE doit-il encore être compris, dans ce contexte, comme signifiant « outil » ; ce qui est tout autre chose que le sens donné par la définition psychologique de « procédure » en tant que « suite organisée d'actions ». C'est effectivement grâce à des outils que l'on peut s'engager dans l'accomplissement de techniques. Ainsi, au type de tâches non mathématique consistant à « verser dans un verre le contenu d'une bouteille fermée par une capsule », est traditionnellement associée la technique consistant à commencer par la décapsuler ! L'engagement dans cette technique requiert l'usage d'outils qui peuvent être très divers : du décapsuleur lorsqu'on en a un, en passant par le tournevis, le choc sur le bord d'une table, *etc*.,… en allant pour certains jusqu'aux dents, lorsqu'ils ne disposent de rien d'autre ! On voit donc que l'engagement dans une seule et même technique qui, précisons-le une fois de plus, est loin d'être un algorithme !, peut se faire grâce à une multitude d'objets qui deviennent alors, pour le coup, des outils. Si c'est le cas dans cet exemple trivial, c'est aussi le cas en mathématiques, comme c'est encore le cas des mains du sculpteur qui « maîtrise sa technique ».

Il en est ainsi, par exemple, si l'on envisage le type de tâches contenu dans l'énoncé du problème suivant : « Sachant que 4 carambars coûtent 1,48 €, combien coûtent 7 carambars ? ». On peut, pour réaliser ce type de tâches, recourir à la technique dite du « retour à l'unité », en supposant que les prix et les nombres de carambars sont proportionnels. Pour mettre en œuvre cette technique, on dispose de plusieurs outils ; on en retiendra trois, sans prétendre pour autant qu'ils aillent du « rudimentaire » au « sophistiqué »,… sans parler de « l'expert ».

Le premier outil utilisé peut être, par exemple, le « tableau de proportionnalité » accompagné de divers autres signes ostensifs (flèches, symboles opératoires, *etc*.). On l'utilise ainsi :

÷ 4 × 7

Nombre de carambars	4	1	7
Prix des carambars	1,48	0,37	2,59

÷ 4 × 7

Le second outil est la « petite comptine » que l'on apprenait autrefois à l'école élémentaire, et sa récitation appropriée aux données du problème :

« Si 4 carambars coûtent 1,48 €, alors 1 carambar, soit 4 fois moins, coûtera 4 fois moins cher, soit 1,48 € divisé par 4, et 7 carambars, soit 7 fois plus, coûteront 7 fois plus cher, soit finalement 1,48 ¤ divisé par 4 multiplié par 7 qui font 2,59 € »

Le troisième outil est celui que fournit l'écriture fonctionnelle *f* d'une application linéaire modélisant une situation de proportionnalité :

Ainsi :

$$f(7)=f(7\times1)=7\times f(1)=7\times f(\frac{4}{4})=7\times f(4\times\frac{1}{4})=7\times\frac{1}{4}\times f(4)=\frac{7}{4}\times1{,}48=2{,}59.$$

On laisse chacun libre de juger de quel qualificatif, entre « rudimentaire » et « expert », on peut affubler les outils mobilisés dans ces trois exemples. Tout simplement, l'usage de certains outils existe à certaines époques et à certains niveaux dans le système éducatif, puis peut disparaître ; de même que d'autres usages et les outils qui leur sont associés ne vivent jamais, *etc*. Enfin, certains outils sont considérés comme plus ou moins performants que d'autres, plus ou moins ergonomiques, rapides pour l'accomplissement de la technique, *etc.* ; ce qui explique que le progrès en termes d'outils occasionne la substitution de certains outils par d'autres jugés plus efficaces, même si leur maniement est plus délicat. La transposition didactique et les choix faits au sein de la noosphère se chargent de les faire vivre ou non à certains niveaux du cursus scolaire.

Revenant à la solution du problème posé et à la question « Rangez leurs productions de la plus rudimentaire vers la plus experte », les termes de « rudimentaires » et « expertes », pour qualifier les « productions », c'est-à-dire les écrits des élèves, renvoient ici à ce qui a été dit dans la question précédente relativement aux systèmes sémiotiques dont l'écrit conserve la trace. Sans doute certains élèves ne sont-ils pas encore suffisamment à l'aise avec les systèmes sémiotiques étudiés dans des périodes récentes, dans des classes proches du niveau du CE2 ou en CE2. Aussi usent-ils des systèmes qui étaient en vigueur dans certaines classes antérieures, ou qui étaient admis « au brouillon », *etc*., en se référant, pour légitimer cet usage, à des clauses du contrat didactique qui stipulent que ce qui a été validé par l'enseignant une fois, dans le système éducatif, est valable ultérieurement, avec d'autres enseignants. Peut-être un jour, un enseignant leur fera-t-il entendre que certains usages « font bébé », que l'on attend d'eux qu'ils deviennent « grands » désormais, en adoptant l'usage en vigueur dans la classe où ils se trouvent maintenant ; c'est-à-dire qu'ils se plient à certains des termes du nouveau contrat didactique. Ces qualificatifs de « rudimentaire et experte » accolés à « production » renvoient donc à la distance au rapport institutionnel généralement attendu au CE2.

Ayant « décodé » l'énoncé, le candidat peut se lancer dans la résolution du problème,… et rencontrer peut-être alors l'incompréhension du correcteur qui ne dispose quasiment jamais de ce moyen d'analyse ! Ce qui pose le problème, non négligeable, de l'équité devant le concours et sa correction ; problème dont un début de réponse devrait passer par l'écriture de sujets rédigés dans un langage compréhensible par des candidats, au-delà du niveau de subjectivité du rédacteur de l'énoncé, c'est-à-dire un langage qui soit sous-tendu par la recherche minimale d'une certaine rigueur didactique.

I – 2 Organisation didactique

I – 2.1 Notion d'organisation didactique

Dans ce qui suit, on présente la modélisation en termes de moments didactiques, apportée par le didacticien des mathématiques Yves Chevallard. Si elle semble actuellement ignorée d'un certain nombre d'institutions qui forment à l'enseignement des mathématiques ou prescrivent, elle pourrait néanmoins devenir un outil utile pour les enseignants afin de concevoir, analyser, évaluer et développer l'enseignement des mathématiques dans leurs propres classes.

La question de départ est la suivante. Soit un type de tâches dont l'étude est programmée. Par exemple : « Compléter une figure par symétrie axiale en utilisant des techniques telles que pliage, papier calque, miroir » ou « Tracer, sur papier quadrillé, la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite donnée », deux types de tâches qui figurent explicitement au programme du cycle III. Comment faire pour motiver ce ou ces types de tâches ? Par « motiver », il ne faut pas entendre un vague concept qui aurait à voir avec la « motivation de l'élève », dont régulièrement les enseignants se plaignent de la faiblesse, voire de l'absence ! Il s'agit plutôt de faire rencontrer comme une nécessité, pour l'accomplissement d'une tâche problématique donnée, des raisons qui motivent le type de tâches dont l'enseignement est visé. On voit par là qu'en se préoccupant des raisons d'être de la notion mathématique à enseigner, et en les faisant vivre, à leur niveau, par les élèves d'une classe, on a ainsi de plus grandes chances de rencontrer… la motivation des élèves.

Cette question est centrale, car c'est d'elle que découlera en grande partie la qualité de l'enseignement et de l'apprentissage. C'est sans doute la question fondamentale que devrait se poser tout professionnel de l'enseignement. C'est en tout cas la problématique derrière laquelle se rangent les travaux d'« ingénierie didactique » depuis leur inauguration par Guy Brousseau.

Pour répondre à cette question, il va falloir faire rencontrer par les élèves l'une au moins des raisons d'être de ce type de tâches ; puis se bâtira, comme une nécessité, l'organisation mathématique à enseigner. Sinon l'enseignement est purement gratuit, dénué de sens, et un savoir immotivé ne résiste guère que le temps que les élèves veulent bien consacrer, par gentillesse ou soumission, à son étude. C'est-à-dire qu'il est rapidement perçu comme inutile une fois sorti de l'école. C'est ce qu'on peut relever à travers des questions telles que : « les mathématiques, ça sert à quoi au juste ? » Remarquons que ce qui est dit pour les mathématiques se transpose très facilement à d'autres disciplines scolaires : sciences, histoire, géographie, français dans toutes les déclinaisons de cette discipline (poésie, lecture expliquée, rédaction, dictée, *etc.*), éducation physique, *etc*., également menacées par une absence de visibilité des élèves des raisons d'être de ces savoirs enseignés.

Le schéma général permettant cette motivation est le suivant : on choisit une tâche d'un type familier à l'élève, mais dont l'accomplissement selon une certaine technique conduit ce dernier à rencontrer une difficulté déterminée, une tâche problématique que l'accomplissement d'une nouvelle tâche permettrait de dépasser. C'est par exemple le cas des situations désormais célèbres et élaborées par Guy Brousseau : mesurer l'épaisseur d'une feuille de papier, agrandir un puzzle, *etc*.

Le type de tâches apparaît ainsi comme permettant d'accomplir les tâches du type qui le motivent, et dont il apparaît alors comme une raison d'être. Dans l'exemple de la symétrie axiale, il est donc nécessaire de trouver une tâche qui paraît familière aux élèves, mais dont l'accomplissement nécessite de disposer d'une technique qui demeure encore problématique à ce moment.

La levée de cette problématicité amènera le savoir dont on vise l'enseignement. Néanmoins, il ne faut pas perdre de vue que se retrouver face à une situation problématique est toujours déstabilisant pour la personne, que le dépassement de cette problématicité nécessite un grand effort, personnel ou collectif, que la situation de déconcertation cognitive est coûteuse. On a alors sans doute intérêt à faire en sorte que cette recherche s'appuie sur la mobilisation de toutes les forces et les ressources disponibles dans le « collectif classe ». Pour s'engager dans cet effort, on comprend qu'il soit donc nécessaire qu'existe une forte motivation à la résolution de cette tâche problématique. Une tâche immotivée ne résiste pas à cette première épreuve : les élèves s'ennuient rapidement ou se découragent devant l'ampleur de la tâche, négligent de s'affronter à l'effort, attendent plus ou moins que le professeur, ou l'un des bons élèves, proposent la solution, *etc*.

Face à ces situations, les motivations sont alors parfois trouvées par l'enseignant ailleurs que dans le savoir mathématique proprement dit : bonbons, bons points, gratifications par des remarques encourageantes, *etc*. Cette remarque ne signifie pas que ces « techniques » soient à proscrire ! Le premier travail du professeur, peut-être un des plus difficiles, consiste donc à trouver une bonne raison de motiver le tracé d'une figure symétrique d'une figure donnée, de compléter une figure par symétrie, de déterminer si une figure possède ou non un ou des axes de symétrie. Précisons que trouver une bonne raison porte sur le savoir mais est dirigé évidemment vers l'élève : car il est nécessaire que les élèves trouvent, eux, une bonne raison de s'engager dans une activité problématique. C'est dire que le professeur a pour tâche de trouver une situation réellement motivante pour les élèves !

Il y a donc ainsi, quelle que soit l'organisation didactique adoptée (motivante et motivée, ou non), un moment où, par exemple, les élèves vont rencontrer tel ou tel type de problèmes pour la première fois. Et encore un moment où le professeur va conduire l'institutionnalisation des ingrédients techniques, technologiques et théoriques (s'ils existent) de l'organisation mathématique dans laquelle les élèves devront être entrés ; car sans cela l'apprentissage est fortement compromis. On peut ainsi distinguer six moments de l'étude :

- le moment de ***la première rencontre*** avec le type de tâches, qui doit conduire à l'émergence d'un *embryon* de technique ;

- le moment de ***l'exploration du type de tâches mathématiques*** (à l'aide d'un corpus adéquat de spécimens de ces tâches), et de l'élaboration d'une technique relative à ce type de tâches ;
- le moment de ***l'élaboration de l'environnement technologico-théorique*** de la technique ; c'est le moment où l'on va s'intéresser aux raisons pour lesquelles la technique que l'on a ébauchée « fonctionne ». Ces raisons seront, évidemment, de natures différentes, selon le niveau scolaire auquel on se place ;
- le moment du ***travail de la technique***, qui doit permettre à la fois de « faire travailler » la technique de manière à étendre sa portée, à accroître sa fiabilité, *etc.*, et de faire que les élèves puissent travailler leur maîtrise de cette technique ;
- le moment de ***l'évaluatio****n* où l'on évalue la maîtrise que l'on acquise de l'organisation mathématique ;
- le moment de ***l'institutionnalisation de l'organisation mathématique*** ainsi élaborée.

La notion de moment ne renvoie qu'en apparence à la structure temporelle du processus d'étude. Un moment, au sens donné à ce mot ici, est une dimension dans un espace multidimensionnel ; on voit donc qu'il n'y a pas, de façon abstraite et hors enseignement, d'ordre total à rechercher dans l'ensemble des moments. Bien entendu, une saine gestion de l'étude exige que chacun des moments didactiques se réalise au bon moment, ou, plus exactement, aux bons moments : car un moment de l'étude se réalise généralement en plusieurs fois, sous la forme d'une multiplicité d'épisodes éclatés dans le temps.

Ainsi, si l'on cherche à classifier ces divers moments, on arrive au schéma suivant :

Groupe I (Activités d'étude et de recherche [AER])

1. Moment ***de la (première) rencontre*** avec le type de tâches ;

2. Moment de l'***exploration*** du type de tâches et ***de l'émergence de la technique*** associée ;

3. Moment de la construction ***du bloc technologico-théorique***.

Groupe II (Synthèses)

4. Moment ***de l'institutionnalisation*** de l'organisation mathématique qui a émergé de l'activité.

Groupe III (Exercices & problèmes)

5. Moment ***du travail*** de l'organisation mathématique (et en particulier ***de la technique***).

Groupe IV (Contrôles)

6. Moment de l'évaluation.

I – 2.2 Utilisation de la modélisation précédente à propos d'un sujet de CRPE

On trouvera en **ANNEXE 2** le texte du sujet de CRPE de Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Nantes, Orléans-Tours, Poitiers, La Réunion**,** 2000, sur lequel porte ce paragraphe, ainsi qu'une reproduction d'un chapitre de l'ouvrage d'où est extrait le document sur lequel s'appuie l'ensemble des questions de cette épreuve, (extrait du livre du maître et extrait du livre de l'élève, « Pour comprendre les mathématiques », CM1, éd Hachette)**.**

L'analyse des organisations didactique et mathématique sera d'abord faite à partir des éléments mis à la disposition des candidats lors de l'épreuve, puis à partir de la fiche élève, (p. 60), et des éléments de mise en œuvre de la séquence donnés dans le guide pédagogique correspondant, (p. 82 et 83 pour cette leçon). On se centre essentiellement sur la description d'un moment de première rencontre d'une organisation mathématique.

Analyse à partir des documents donnés aux candidats

La première question porte sur l'organisation mathématique, les questions 2, 3 et 4 portent essentiellement sur l'organisation didactique.

L'étude évoque, pour trois activités sur quatre, des tâches du type : (1) dans une situation où on répartit une quantité totale connue, en tas identiques de valeur connue, déterminer le nombre de tas et ce qu'il reste après répartition. Pour l'exercice 3, il s'agit d'une tâche du type : (2) dans une situation où on répartit une quantité totale connue, en un nombre connu de tas identiques, déterminer la valeur de chaque tas et ce qu'il reste après répartition.

L'extrait que l'on a du livre élève débute par un paragraphe « Piste de recherche », contenant une narration : on évoque une tâche accomplie ailleurs, par des acteurs auxquels les élèves de la classe peuvent s'identifier – Cyril, Dorothée et Éric -, et on donne des traces de la technique utilisée par ces acteurs pour accomplir cette tâche, (représentation effective de la collection (peut-être par lignes de 10, on ne sait pas comment la représentation graphique est élaborée), et de la répartition ; soustractions réitérée ; multiplications réitérées). Ce type de tâches et les techniques évoquées ne sont pas des nouveautés à ce niveau, en revanche ce qui est certainement nouveau, c'est ce que l'on trouve dans les cinq dernières lignes du §1 de la piste de recherche et le contenu de l'encadré correspondant. Ici une nouvelle tâche est évoquée : « diviser 47 par 11 ». On peut faire l'hypothèse qu'il s'agit donc, dans ce §1, d'une première rencontre avec la division ; le vocabulaire utilisé : « *Quand on divise 47 par 11, le quotient est 4, le reste est 3* » « *dividende, diviseur, quotient, reste* » et l'écriture numérique correspondante : « *47 = (11 x 4) + 3* », sont introduits. Toutefois comment l'élève rencontre-t-il ici une tâche du type « diviser un entier par un autre » et une technique pour accomplir ce type de tâches : quand et comment sait-il que le travail fait permet d'accomplir la tâche : « diviser 47 par 11 » ? Il est écrit « *Quand on divise 47 par 11, le quotient est 4, le reste est 3* » , mais que signifie « diviser », on a ici une tâche qui est évoquée et le résultat final une fois la tâche accomplie qui est donné, qu'y avait-il précisément à faire et qu'en est-il du moyen pour arriver au résultat ? Si faire la division de 47 par 11 c'est trouver deux nombres, q et r, tels que 47 = 11 x q + r, ce que laisse supposer le texte mais n'est pas dit dans ce qui est à notre disposition, seule la technique d'Eric est réellement appropriée pour accomplir une tâche ainsi spécifiée, (éventuellement celle de Cyril), la technique de Dorothée ne permet pas de justifier simplement que 47 c’est 11 fois 4 plus 3.

En ce qui concerne la gestion de ce moment, on ne sait pas comment les élèves prennent connaissance de cette narration : individuellement, en lecture silencieuse ? , leur dévolue-t-on le problème résolu par les trois enfants fictifs avant de leur demander de prendre connaissance de ce qui est écrit sur le livret ? On peut penser que les cinq dernières lignes du §1 de la piste de recherche et le contenu de l’encadré correspondant, est le résumé d’un discours du maître tenu à la suite de la prise de connaissance de cette narration par les élèves et d’un échange collectif, mais on ne sait rien du contenu de cet éventuel échange, donc de ce qui est dit de la division au cours du travail correspondant au §1. Dans les paragraphes 2 et 3 on va proposer aux élèves d’accomplir des tâches du même type (1) et très proches de celle accomplie par les enfants fictifs. Dans ce que nous avons à notre disposition, il n’est pas question de division : on ne demande pas d’accomplir la division de 49 par 11 ou de 49 par 15, peut-être le vocabulaire et l’écriture numérique correspondante sont-ils apportés lors d’une phase collective de correction, mais il n’en n’est pas fait état.

Les éléments qui se trouvent dans le 1° paragraphe de la piste de recherche sont des éléments technologiques pouvant participer à l’élaboration d’une technique pour effectuer la division de deux entiers, on trouve aussi trace de ce qui peut être une institutionnalisation partielle, à la fin de ce paragraphe, mais la tâche et la technique ne sont pas explicitement précisés dans le document mis à disposition.

Dans les trois exercices du paragraphe « Applications » qui suit, on demande aux élèves d’accomplir des tâches du type (1) puis (2). Il n’est pas question de division ici non plus, toutefois dans les exercices 2 et 3 on demande d’écrire le résultat sous la forme emblématique a = b x q + r. On ne peut pas considérer que ces moment permettent de poursuivre l’élaboration de la technique de calcul du quotient et du reste, ou de l’entraîner puisque la tâche elle-même n’est pas évoquée.

Analyse à partir des extraits du livret élève et du guide pédagogique

La lecture des documents correspondants, montre que :

- dans l’épreuve du CRPE, seule la première page du livre élève a été reproduite, sans le titre : « Division (1) » ;

- le document élève, reproduit dans l’épreuve, correspond à la « première journée » consacrée à cette leçon, décrite dans le guide pédagogique ;

- d’après les auteurs, il s’agit de : « *reconnaître une situation de division* » et de « *Calculer empiriquement le quotient et le reste* » ;

- l’organisation didactique proposée par le guide pédagogique introduit des éléments dont on ne trouve pas trace dans le document du CRPE, que nous préciserons ci-dessous.

Les auteurs de l'ouvrage annoncent donc bien un travail participant à l'étude de la division.

La gestion de la première activité est précisée : avant de prendre connaissance du contenu du §1 de la piste de recherche, le problème, « En avant la musique », ou un problème analogue, est confié aux élèves de la classe répartis en groupes, une restitution du travail de chaque groupe est faite par un rapporteur, différentes techniques pour accomplir la tâche sont attendues, les auteurs précisent que *« l'écriture de la réponse devra être examiné collectivement. La formulation 47 = (11 x 4) + 3 peut être utilisée dans tout les cas. L'enseignant précise le vocabulaire : diviseur, quotient, reste.* »

Ceci nous permet de donner un sens à ce que les auteurs entendent par : « Calculer empiriquement le quotient et le reste ». D'après le Larousse, est empirique « ce qui ne s'appuie que sur l'expérience, l'observation », on pourrait donc comprendre qu'à travers l'activité d'introduction proposée, les élèves fictifs ou réels, vont réaliser des calculs permettant d'accomplir la tâche qui leur est explicitement dévolue (chercher combien de groupes seront formés et combien d'enfants recevront un tambourin), et qui leur est familière. Ce travail fait, ils seront amenés sous la conduite du maître, à observer les résultats comme étant le quotient et le reste de ce que l'on appellera division. Il s'agit de la rencontre d'un premier exemplaire de quotient et de reste que le professeur montre et nomme, ceci à l'occasion de la résolution d'un problème de répartition en tas identiques. Que l'ont délègue ou non aux élèves réels de la classe la résolution du problème de chorale, ils seront observateurs de ce que le maître leur montre concernant la division.

L'activité « En avant la musique » est suivie d'une autre activité, une nouvelle tâche de type (1) est confiée aux élèves, là encore, la tâche accomplie, les résultats seront observés sous la conduite du maître, en particulier pour constater que le reste est plus petit que l'effectif d'un groupe, sinon « on peut encore faire un groupe ». Le maître fera remarquer aux élèves qu'il s'agit d'une propriété générale du diviseur et du reste : « *Le reste est toujours plus petit que le diviseur* ». Cette remarque sera institutionnalisée en fin de leçon, (en bas de la page 61 du livre élève). C'est sans doute elle qui permettra d'élaborer une technique, (non explicitée, du reste), pour retrouver le quotient et le reste dans une égalité numérique du type a = (b x q) + r ou disqualifier des couples de nombres comme quotient et reste de deux entiers donnés dans les exercices 4 et 5 qui suivent.

On débute, de cette façon, une étude qui sera poursuivie dans d'autres leçons, et même au-delà du primaire, sur la division euclidienne. La division euclidienne de deux nombres entiers, la recherche du quotient et du reste par la technique de la division posée, sont explicitement au programme du cycle 3. Toutefois, l'étude de la division euclidienne est, au niveau primaire liée de façon forte à l'étude des situations qui pourront se résoudre, et ceci pas nécessairement en primaire, à l'aide d'une division euclidienne : les élèves traitent, à ce niveau les situations dites de division, sans utiliser la division, et bien avant qu'ils n'entendent parler de la division et la division reste, tout au cours du primaire, une technique parmi d'autres pour accomplir ce type de tâches, comme le confirment les instructions officielles : *« A l'école primaire, les situations dites de « division » sont traitées par des procédures diverses selon la représentation que s'en fait l'élève : addition ou soustraction réitérée, …, suite de multiplications, divisions. L'étude de cette opération étant programmée sur plusieurs années, cet apprentissage se poursuit donc en sixième, le recours directe à la division devant* *devenir plus systématique.* », (extrait du document d'accompagnement des nouveaux programmes de l'école primaire : « Articulation école collège »).

Néanmoins, la division d'un nombre par un autre est un type de tâche qui devra prendre son indépendance ne serait-ce que pour élaborer une technique s'appuyant sur les propriétés des nombres et des autres opérations, (une technique de la division posée, par exemple), comme le préconisent les textes officiels. Il sera indispensable, tôt ou tard, de considérer la division comme une opération qui à deux nombres fait correspondre deux autres nombres. Quand cet objet mathématique sera-t-il présenté de cette façon ? Dans l'ouvrage de référence, dans les exercices 4 et 5, p. 61 du livret, la tâche à accomplir porte sur des nombres entiers et non sur des répartitions en tas identiques, mais ici la technique à mettre en œuvre n'est pas une technique de division mais une technique élaborée à partir de l'égalité numérique associée à la division et le résultat concernant le reste et le diviseur.

Enfin, il est étonnant de voir figurer parmi les objectifs des auteurs de l'ouvrage : « *Reconnaître une situation de division* », alors même que les élèves n'ont pas abordé l'étude de la division.

II – TRAVAIL EN ATELIER SUR LE THÈME DU CALCUL RÉFLÉCHI

II – 1 Présentation de la situation

Les étudiants de PE2, au cours de leurs stages, se trouvent en général contraints d'utiliser le fichier de la classe où ils sont nommés, et ceci à l'endroit où le maître titulaire s'est arrêté. Cette situation pose de nombreux problèmes aux débutants et nous pensons que les apports précédents peuvent leur permettre de rassembler, sur le matériel qui est à leur disposition, des informations pouvant faciliter les prises de décisions nécessaires.

Nous avons donc proposé aux participants de cet atelier, à partir d'une fiche élève et de la fiche maître correspondante, extraites d'un ouvrage de C.P., (« Place aux Maths », édition Bordas, fiche n° 38), de faire une analyse de ces documents à l'aide des outils théoriques proposés. On trouvera en **ANNEXE 3** une reproduction des documents correspondants.

Le but du travail est de voir quels types de connaissances ces outils théoriques permettent de produire, et à partir de là, quelles questions peuvent être induites et quelles décisions peuvent être prises.

II – 2 Éléments de l'analyse faite

Dans ce paragraphe, nous avons rassemblé des éléments qui participe à l'analyse, sans tenir compte de la chronologie de l'atelier.

Dans cette fiche, intitulée « Calcul réfléchi » (1) il s'agit de participer à l'étude du thème « *organiser et traiter, mentalement ou avec l'aide de l'écrit, des calculs additifs, …, en s'appuyant sur des résultats mémorisés et en utilisant de façon implicite les propriétés des nombres et des opérations* ».

Quand les élèves abordent la fiche 38 de cet ouvrage, où en sont-ils, en terme de techniques, pour accomplir une tâche du type : « organiser et traiter, mentalement ou avec l'aide de l'écrit, des calculs additifs » ?

RAPPEL RAPIDE DU CONTENU DES FICHES PRECEDENTES

Dans les leçons précédentes l'addition a été introduite et la somme de deux nombres a été présentée comme étant le nombre d'objets de la collection obtenue par réunion de deux collections ayant ces nombres comme cardinal. Jusqu'à la fiche 38, les <u>techniques pour trouver la somme de deux nombres</u> sont les suivantes :

- <u>dénombrer un à un, en récitant la comptine numérique</u>, les objets de la collection réunion, quand effectivement on a les collections de départ ou une représentation de celles-ci ;
- <u>utiliser la file numérique</u> quand on a les deux nombres : on repère le premier et on avance d'un nombre de cases égal au second, cases que l'on pointe une à une.

Ces deux techniques semblent introduites dès la première leçon sur le signe + et le signe =, (fiche 11), mais les informations apportées par le fichier élève et le livre du maître dans le domaine des techniques utilisées sont peu explicites. La seconde est reprise explicitement dans la fiche 25, pour des nombres inférieurs à 10, et des sommes de deux ou trois chiffres.

Parallèlement à ces leçons, on trouve 5 leçons intitulées « <u>Décomposer les nombres</u> », (entre la fiche 12 et la fiche 27). Les premières travaillent sur les décompositions additives des nombres de 1 à 9, à partir de situations de répartition en deux tas, voire trois, d'une collection dont on connaît le nombre d'objets. A cette occasion l'attention des enfants est attirée sur la commutativité de l'addition, on écrit dans un tableau les décompositions, (aucun modèle de tel tableau n'est donné), que l'on a effectuées des nombres de 1 à 9. Les <u>techniques</u> utilisées <u>pour trouver les nombres intervenant dans la décomposition d'un autre nombre</u> sont là aussi peu explicitées par les auteurs, toutefois en plus et sans doute avec les techniques évoquées précédemment, on utilise, dès la fiche 12, <u>les boîtes à compter</u>, (boîtes avec, à droite 10 cases pour mettre des jetons et à gauche un espace pouvant recevoir jusqu'à 10 barres, cet espace est pour le moment masqué par un couvercle), pour représenter les collections totales et décomposer celles-ci en sous-collections. Ensuite on travaille sur les décompositions de 10, la boîte à compter étant ici un outil privilégié ; de nombreuses activités conduisent à trouver des compléments à 10, les décompositions additives de 10 sont écrites dans le tableau évoqué précédemment. La décomposition des nombres de 11 à 19 est amorcée par des décompositions utilisant 10, le travail s'appuyant semble-t-il sur les boîtes à compter, (on utilise deux boîtes), puis sur la file numérique et les tableaux de décompositions élaborés dans les leçons précédentes. A cette occasion l'attention est attirée sur l'écriture en chiffres de nombres comme 17, 18 et 19, leur décomposition additive utilisant 10 et leur écriture en lettres ou leur expression orale. Les activités proposées conduisent à la fois à décomposer les nombres jusqu'à 19 et à trouver le résultat de sommes de 2, 3 voire 4 chiffres, « en faisant prendre conscience de l'utilité du passage par dix chaque fois que c'est possible », (les nombres choisis facilitent ce passage par 10 : les additions à effectuer sont du type : 9 + 1 + 3 + 5 = où on fait d'abord 9 + 1, les décompositions proposées sont du type : décomposer 18 en trois nombres dont un est 8, …). Entre la fiche 27, (« Décomposer les nombres (5) »), et la fiche 38 le travail numérique porte sur les nombres de 1 à 50 : échanges un contre 10, les dizaines successives sur la file numérique, comprendre l'écriture chiffrée et le nom des nombres.

ANALYSE DU TRAVAIL CORRESPONDANT À LA FICHE 38

Le travail correspondant à la fiche 38 débute par un jeu dont le support est une file numérique, (« Le cache-nombre », phase 1, première séance), au cours duquel les élèves doivent, pour gagner, effectuer correctement le plus possible de calculs de la somme de deux entiers inférieurs à 10, tâches du type sur lequel porte l'étude. Le choix de la technique semble laissé aux élèves qui, dans cette phase, ont, à leur disposition deux boîtes à compter et la file numérique sur laquelle ils posent des jetons. Précédemment la bande numérique a été utilisée pour faire des calculs de somme, (fiche 25), mais, si les boîtes à compter ont été utilisées, (dès la fiche 12), pour faire des décompositions additives de nombres, elles n'ont pas été explicitement utilisées pour faire des calculs de sommes, les élèves ne sont pas nécessairement très performants dans un tel jeu. La synthèse doit « *mettre en évidence l'intérêt d'avoir mémorisé ces différents calculs pour retrouver l'écriture canonique d'un nombre* ». On peut donc comprendre que cette activité vise à motiver comme technique pour faire rapidement la somme de deux entiers inférieurs à 10, la mémorisation d'un maximum de décompositions.

Dans la phase 2, première séance, un seul calcul est à effectuer : 9 + 8 avec pour consigne d'utiliser deux boîtes à compter, d'utiliser le passage par 10 et de traduire sur l'ardoise les étapes du calcul. Les enfants ont des jetons à leur disposition, on peut penser que, par exemple, ils comptent 9 jetons pour faire un premier tas, puis 8 pour faire un second tas, ils remplissent une première boîte avec les 9 jetons, il reste une place, ils comblent cette place avec un jeton du tas de 8, puis logent les jetons restant dans la deuxième boite, ils comptent alors dans cette deuxième boite 7 jetons et en déduisent que ça fait 10 + 7 donc 17. Ils doivent alors, sur leur ardoise, écrire les étapes de ce calcul. On peut penser que ce qui est attendu sont des écritures du type : 9 + 8 = 9 + 1 + 7 = 10 + 7 = 17. L'exploitation collective ne donne aucun exemple d'écriture valorisée, « *toutes les procédures mises en place par les élèves sont exposées* », toutefois on relève que, au cours de ce moment, le maître doit « *faire apparaître notamment ce qui manque à 9 pour faire 10, et donc ce qu'on prend à 8 pour le donner à 9* ». On a ici un morceau de discours technologique sur la technique dont l'étude sera poursuivie dans la seconde séance correspondant à cette fiche, mais cette technique n'est pas décrite, (elle pourrait être décrite de la façon suivante : quand on a la somme de deux nombres inférieurs à 10 à calculer, on cherche ce qu'il faut ajouter au premier pour avoir 10, (le complément à 10 du premier), on retire du second cette quantité et on ajoute ce qui reste du second à 10). En fait, on fait deux sous tâches successivement : chercher un complément à 10, puis décomposer additivement un nombre en deux, un des deux nombres étant imposé.

La seconde séance débute par l'activité du fichier intitulée « *Je cherche* ». En groupe les élèves doivent relier Max ou Lola ou Maya et leurs boîtes à compter respectives, (chaque groupe se centre sur un personnage), à un arbre représentant le calcul fait par ce personnage avec ses boîtes à compter, puis finir de remplir le graphe. Pour chaque personnage des boîtes à compter sont représentées, l'une avec 9 l'autre avec 8 jetons, des flèches indiquent des mouvements de jetons de l'une à l'autre, voire de ces deux boîtes vers une troisième. En dessous trois arbres sont débutés : la première ligne est identique (9 + 8) ; dans les trois, la seconde ligne est partiellement remplie (quand il y a décomposition de 8 ou/et de 9 un seul des deux chiffres est donné, les emplacements sont prévus, ainsi que les signes +) ; dans les deux lignes suivantes, seuls les signes et les emplacements sont prévus, toutes les branches des arbres sont données. La tâche à accomplir dans chaque groupe est de :

- comprendre ce que le personnage dont il s’occupe a fait avec ses boîtes à compter, (ceci devrait être familier aux enfants) ;
- trouver dans les trois arbres celui qui correspond aux manipulations de jetons ;
- compléter la deuxième ligne du graphe ;
- remplir les deux dernières lignes du graphe.

Cela suppose, pour les trois dernières sous tâches, que les élèves comprennent comment fonctionnent les arbres. C’est, semble-t-il la première fois que les élèves rencontrent une telle représentation des opérations et on imagine mal donner un tel exercice en laissant les enfants chercher en groupe et en temps limité, sans montrer au préalable comment ça fonctionne. Pour choisir le graphe correspondant au travail de leur personnage, on ne voit pas comment les élèves peuvent faire sans cette compréhension et une certaine familiarisation avec ce mode d’organisation.

La synthèse portant sur cet exercice ne prévoit rien sur la représentation en graphe mais la reprise des « *différentes façons de décomposer un calcul en sous calculs plus abordables* », sans que d’autres détails sur la description de ces « façons » ne soient donnés. On peut donc penser que, pour les auteurs, c’est à l’occasion de cette activité que se poursuit l’élaboration de la ou les techniques à étudier. Ce sont des extensions de la technique étudiée dans la phase 2 de la séance précédente, (par exemple : quand on a la somme de deux nombres dont un est supérieur à 10 à calculer, on décompose celui-ci en 10 plus les unités, on cherche ce qu’il faut ajouter aux unités pour avoir 10, (le complément à 10 des unités), on retire de l’autre nombre cette quantité et on ajoute ce qui reste du second à 10 plus 10). Ici aussi on a dans tous les cas envisagés deux sous tâches à faire successivement : soit chercher le complément à 10 d’un des deux nombres, puis décomposer additivement un nombre en deux, un des deux nombres étant imposé, (ce qui a été fait dans la phase 2 de la première séance), soit faire la décomposition additive des deux nombres en faisant apparaître un même nombre, puis calculer le double et la somme des deux restes. On reviendra sur ces phases « d’élaboration » des techniques.

Dans la phase 2 de cette deuxième séance, deux exercices sont proposés. Dans le premier exercice, dans chaque item, l’un des deux nombres dont on doit calculer la somme est un nombre déjà utilisé dans l’activité précédente, certes à une place différente dans la somme à calculer, mais les élèves peuvent utiliser soit le complément à 10 soit une décomposition déjà utilisée précédemment. La place est prévue pour faire un arbre ou dessiner des boîtes à compter, le recours à la mémoire voire aux tableaux de décomposition n’est pas exclu puisque la méthode est laissée au choix de l’élève. Une correction collective est prévue, mais on ne sait pas si l’enseignant doit insister sur certains points. Pour le second, on ne sait pas si c’est un travail totalement individuel, rien n’est dit de la méthode attendue, seule la place du résultat est laissée ; dans le choix fait des nombres à additionner on retrouve 9 ou 8 sauf dans un des items.

Dans la fiche intitulée « Pause 7 » qui suit et clôt le travail sur les fiches de 37 à 42, on trouve un paragraphe « *Je retiens* » où le calcul du résultat de 8 + 7, sous forme d’arbres, avec trois décompositions différentes est effectué, il n’y a aucun commentaire verbal.

QUELQUES QUESTIONS À LA SUITE DE CETTE ANALYSE

Nous avions fait l'hypothèse qu'il s'agissait de participer à l'étude du thème « *organiser et traiter, mentalement ou avec l'aide de l'écrit, des calculs additifs, …, en s'appuyant sur des résultats mémorisés et en utilisant de façon implicite les propriétés des nombres et des opérations* »

On travaille bien sur l'organisation et le traitement de calculs additifs, à effectuer mentalement ou à l'aide de l'écrit, dans le champ numérique limité aux sommes de deux nombres dont l'un est inférieur à 20 et l'autre à 10.

Les techniques dont l'apprentissage semble visé sont les suivantes :

- quand on a la somme de deux nombres inférieurs à 10 à calculer, on cherche ce qu'il faut ajouter au premier pour avoir 10, (le complément à 10 du premier), on retire du second cette quantité et on ajoute ce qui reste du second à 10 ;
- quand on a la somme d'un nombre compris entre 10 et 20 et d'un nombre inférieur à 10 à calculer, on décompose le premier nombre en dizaines et unités, on pratique avec le nombre des unités du premier nombre et le second nombre comme précédemment, enfin on ajoute 10 au résultat obtenu ;
- quand on a la somme d'un nombre compris entre 10 et 20 et d'un nombre inférieur à 10 à calculer, on décompose le plus grand nombre en dizaines et unités, on décompose additivement le second en la somme de deux nombres l'un étant ce nombre des unités, on calcule le double des unités, on ajoute 10 puis ce qui reste dans le second ;
- quand on a la somme d'un nombre compris entre 10 et 20 et d'un nombre inférieur à 10 à calculer, on cherche la quantité qu'il faut ajouter au premier pour aller à 20, on décompose le second additivement en la somme de deux nombres l'un étant cette quantité et on additionne 20 et ce qui reste dans le second.

Les éléments technologiques sur lesquels on s'appuie sont les boîtes à compter qui rendent visible le rôle de 10 (le complément à 10 apparaît en cases vides dans une boîte quand on y a rangé le premier tas, et ce qu'il reste au second quand on a retiré ce complément est ce qu'il reste de jetons dans le deuxième tas quand on a rempli ces cases vides), la connaissance de certains résultats additifs. On évoque à plusieurs moments l'intérêt d'avoir mémorisé certains résultats, mais on ne sait pas précisément à ces moments quels sont les résultats dont il est question. Les résultats numériques sur lesquels s'appuient les techniques étudiées sont : les compléments à 10 puis à 20, les doubles des nombres de 1 à 9, les décompositions additives des nombres de 2 à 9 puis les décompositions additives de 10 et les décompositions des nombres de 1 à 20 en unités et dizaine. En dehors de la dernière décomposition, on ne voit pas dans cet ouvrage d'injonction à retenir tel ou tel type de résultats, on peut penser que la fréquentation et l'utilisation de ces résultats conduit progressivement à leur mémorisation. Les résultats mémorisés sont, à ce moment de l'étude, nécessairement lacunaires et les élèves doivent avoir un technique fiable pour les retrouver. Les tableaux de décomposition des nombres de 2 à 10, élaborés progressivement, ne sont pas décrits précisément : permettent-ils, connaissant un nombre de trouver simplement le deuxième nombre de sa décomposition additive faisant intervenir un nombre donné ? Les élèves se sont-ils entraînés à les utiliser ainsi ?

Plus généralement on a noté précédemment plusieurs lacunes en ce qui concerne la description des techniques utilisées, attendues ou dont on vise l'apprentissage. Les éléments technologiques sont aussi peu présents. Non seulement il n'existe pas de moments d'institutionnalisation, mais dans ce que l'on peut repérer comme moment d'élaboration des techniques la gestion didactique est telle qu'il y a grand risque que les élèves ni ne participent à l'élaboration ni ne voient les techniques en cours d'élaboration.

Revenons, par exemple, sur la phase où les auteurs introduisent des arbres dans la seconde séance correspondant à la fiche 38 : certes les arbres montrent, comme les dessins des boîtes avec des flèches dans les bulles, la technique utilisée par Théo, Lola et Max, la chronologie des gestes ou des calculs est traduite par la direction des flèches ou la succession des différentes lignes mais ce que l'on veut que les enfants voient, c'est pourquoi ces calculs sont faits dans cet ordre, en quoi ils rendent plus accessibles des calculs de sommes difficiles en s'appuyant sur des résultats qu'ils connaissent ou auxquels ils ont accès. On peut faire l'hypothèse que le manque de familiarité avec les arbres fera que, dans cette activité la plupart des enfants se laisseront guider par la structure qui leur est proposée (voire imposée), et qui est partiellement informée, sans possibilité d'attitude réflexive sur ce qui vient d'être fait, (comme quand on découvre un lieu étranger sous la conduite d'une personne d'autorité). Rien n'assure que, dans l'exercice 1 de la partie « Je m'exerce », la technique étudiée soit travaillée ni même que cet exercice participe à son élaboration. Quand à l'exercice 2, on ne sait pas comment il est prévu de le gérer. On peut se demander si la plupart des enfants ne vont travailler sur ces deux fiches en ne voyant rien des techniques visées.

On a noté plus haut que les nouveautés introduites sont complexes et multiples : il y a plusieurs sous tâches à accomplir pour accomplir chaque tâche et à chaque leçon on introduit plusieurs techniques. C'est peut-être ceci qui justifie l'introduction des graphes : leur structure, donnée aux élèves prenne en charge l'organisation des calculs.

QUELQUES PISTES DE DÉVELOPPEMENT

Il serait possible de préparer le travail sur cette fiche par un certain nombre d'activités :

- travail sur le complément à 10 : le travail sur les décompositions additives de 10 peut se prolonger par un travail de calcul sur des expressions du type 4 + 3 + 5 + 6 + 2 + 7 + 3 pour lesquelles on apprendra à rapprocher 4 de 6, 3 de 7, 5 et 3 de 2 pour trouver le résultat. Ce type de calcul pourra donner l'occasion d'utiliser des arbres à deux lignes, des plateaux ou simplement d'entourer et relier entre eux les termes à rapprocher afin de montrer l'organisation du calcul fait. L'attention des élèves peut être attirée sur le fait que dans l'addition on a le droit de déplacer les nombres et de les associer comme on veut afin de simplifier les calculs. La référence aux réunions de plusieurs ensembles pourra permettre de légitimer ceci ;

- travail sur les décompositions : ce travail peut lui aussi donner l'occasion d'utiliser des arbres à une ligne ;

- dans la conduite des activités d'introduction (le jeux du « mistinombre » et le « cache-nombre »), on pourra insister sur le fait que l'on va apprendre une technique permettant de faire de nombreux calculs en mémorisant un nombre limité de résultats de sommes de deux nombres.

A propos du travail sur les fiches elles mêmes :

- l'élaboration de la (ou les) technique(s) dont l'étude est visée peut être faite explicitement sans être « cachée » par l'utilisation imposée de graphe. Il peut être beaucoup plus clair, (au sens de visible), de montrer sur un exemple le fonctionnement de la technique en commentant ce que l'on fait, plutôt que d'amener les enfants à finir de remplir un graphe dont les éléments fondamentaux sont déjà donnés. Au fur et à mesure de l'avancement de la technique sous les yeux des enfants, on peut motiver et décrire ce que l'on fait, donner des éléments le rendant légitime. Il s'agit alors d'ostension assumée ;
- même si les graphes ont été travaillés précédemment, on pourra leur associer l'écriture en ligne du calcul, mais on pourra aussi, pour mettre en évidence les différentes étapes du calcul faire successivement plusieurs graphes à deux lignes, voire utiliser des parenthèses. Les graphes utilisés comme ils le sont ici ne vivent pas dans l'enseignement français, alors que les parenthèses seront utilisées pour structurer les calculs numériques et littéraux dans le secondaire ;
- les boîtes à compter ne sont que des échafaudages permettant de construire et/ou légitimer les connaissances visées, il faudra les abandonner, donc même si certains enfants en ont encore besoin il faudra les habituer à utiliser des calculs en lignes en rapprochant des nombres, (ce n'est pas automatiquement transposable) ;
- la (les) technique(s) étudiée(s) peu(ven)t être clairement repérée(s) dans un moment d'institutionnalisation ;
- les exercices d'entraînement peuvent être plus nombreux et organisés de façon à permettre de donner des précisions sur la(les) technique(s) aux enfants qui en ont besoin ;
- une évaluation peut être prévue.

III – TRAVAIL EN ATELIER SUR LE THÈME DE LA SYMÉTRIE AXIALE

Documents de référence en **ANNEXE 4**.

III – 1 Présentation de la situation

Dans le temps de l'atelier un extrait du second volet du CRPE des académies d'Orléans-Tours et de Poitiers 2003 (annexe IV) est donné à une partie des participants. Le thème est celui de la symétrie axiale et on ne s'intéresse, dans l'atelier, qu'aux questions relatives au « document B » du sujet. Il s'agit pour les participants, de répondre aux questions du sujet que l'on peut rapprocher de questions didactiques, en s'aidant pour cela des outils d'analyse de l'organisation didactique précédemment donnés.

III – 2 Éléments de l'analyse faite

On peut faire tout d'abord une remarque générale à propos du document B. Contrairement au document A, et à l'exception de l'exercice 4 dans l'annexe 8, tous les types de tâches demandés se rapportent à des figures dessinées sur papier quadrillé. Avant toute chose, pour pouvoir se lancer dans l'analyse de l'organisation didactique, il est au préalable nécessaire d'analyser l'organisation mathématique.

Annexe 7 du sujet

Au cours de l’activité 1, les élèves s’engagent pas à pas dans l’accomplissement du type de tâche consistant à « dessiner la symétrique d’une figure par rapport à une droite ». La technique pour son accomplissement est décrite au cours des quatre phases qui en constituent son découpage. Elle s’appuie sur le calque de la figure et le retournement du calque par son pliage le long de l’axe ; ce qu’indique la flèche du cadre c. La technologie justifiant cette technique est en grande partie implicite. Si on peut la trouver en mathématiques dans le théorème énonçant que, « dans l’espace orienté, une rotation d’axe donné et d’angle ± 180° est une symétrie orthogonale d’axe cette droite », cette assertion ne peut s’appuyer au CE2 que sur la familiarité culturelle présupposée avec des pratiques en relevant (demi-tour d’une porte autour de son axe, de la couverture d’un livre autour de sa tranche, *etc.*). Ainsi, les pratiques de pliage, qui ont sans doute été antérieurement enseignées, s’appuient-elles sur ce théorème (même s’il n’est évidemment pas mentionné, ni à plus forte raison énoncé, à ce niveau !). Un deuxième élément technologique relève de la vérification demandée dans le cadre d. En effectuant le pliage de la feuille sur laquelle sont dessinées ces deux figures, on constate qu’elles se superposent effectivement ; ceci constitue alors une preuve justifiant que la technique mise en œuvre est la bonne, c’est-à-dire un élément technologique, qui retrouve le fait qu’une symétrie axiale est une isométrie.

L’exercice 1 engage dans le même type de tâches que l’activité précédente. Cependant, on peut se demander si la technique associée qui est attendue est, ou non, la même. En effet, le texte de l’énoncé de l’exercice indique simplement « en te servant du quadrillage, trace la figure symétrique… ». Or, plusieurs techniques recourant au quadrillage permettent de réaliser ce type de tâches. Existe évidemment la première, indiquée dans l’activité, et qui nécessite aussi l’utilisation de papier calque. Mais l’on peut aussi utiliser le quadrillage sans recourir au calque. Il suffit pour cela d’utiliser les lignes horizontales perpendiculaires à l’axe et les carreaux comme unités de longueur, afin de s’appuyer sur la définition de l’axe de symétrie comme médiatrice du segment d’extrémités les points symétriques. C’est un élément technologique officiellement donné en 6^{e}, mais qui peut d’ores et déjà constituer des connaissances pratiques et empiriques d’élèves, même si manque le vocabulaire pour l’évoquer ; d’ailleurs, ce théorème est énoncé en filigrane, à travers le codage de la figure relative à « l’axe de symétrie » dans la partie du manuel intitulée « je retiens bien », et qui figure à la suite du document B.

Annexe 8 du sujet

L’exercice 2 demande deux types de tâches : T_1 : « rechercher des lettres ayant un axe de symétrie » et T_2 : « dessiner des lettres ayant un axe de symétrie ainsi que l’axe de symétrie ». À la seule lecture du manuel, on ne peut guère dire davantage sur la technique associée, si ce n’est que la perception visuelle à laquelle recourt le programme (« Percevoir qu’une figure possède un ou plusieurs axes de symétrie ») peut désormais s’aider des lignes du quadrillage.

Dans l’exercice 3, c’est le type de tâches déjà rencontré dans l’activité 1 et l’exercice 2 que l’on retrouve à travers deux tâches du type. La technique permettant l’accomplissement de ces tâches est sans doute à rapprocher de celle utilisée dans l’exercice 2 puisque, dans ce cas encore, il s’agit d’une figure dessinée sur quadrillage, et on peut donc s’en aider.

Dans l’exercice 4, le type de tâche consiste à déterminer l’axe de symétrie d’une figure. La technique pour cela est mentionnée en filigrane dans l’énoncé, sous une forme semialgorithmisée. Il reste à l'élève à l'exécuter en bon ordre : décalquer, percevoir l'axe de symétrie, plier autour de lui et enfin vérifier que les deux parties de la figure se superposent alors convenablement l'une sur l'autre.

Dans l'exercice 5, c'est encore la recherche du symétrique d'une figure et son dessin qui constituent le type de tâches demandé. Pour cette tâche, la technique est donc la même que celles rencontrées dans les exercices 1 et 3. Cependant, dans le cas de cet exercice, l'accent est mis sur l'orientation de la figure ; sans doute parce qu'elle change dans une symétrie axiale. Pour cela, un nouveau type de tâches est demandé aux élèves : « coder un chemin ». Le code qui illustre le chemin initial contient sa technique. Néanmoins, on peut se demander si sa lecture et sa compréhension seront aisées pour des élèves de CE2.

Enfin, l'encadré « je retiens bien » a pour fonction d'institutionnaliser certains objets de savoir rencontrés au cours de ce chapitre. Il a donc une fonction didactique évidente puisque c'est, comme son titre l'indique, ce qui doit être retenu de l'ensemble du travail mené. On peut noter à ce propos, que dans la figure de gauche, les distances d'un point et de son symétrique à l'axe sont notées ; mais d'une manière un peu curieuse (est-ce pour rappeler le mouvement du pliage ?). Ce point relatif aux distances n'est apparu explicitement dans aucun des exercices proposés, ni dans l'activité ; il faut donc en déduire que le professeur aura veillé à ce qu'il soit énoncé oralement pendant ce travail sous peine d'une rupture non assumée du contrat didactique. C'est donc un élément technologique qui est ainsi montré : le fait que l'axe de symétrie est la médiatrice du segment d'extrémités deux points symétriques. Dans la figure de droite, une partie de la figure est passée en couleur ; sans doute pour montrer qu'elle est symétrique de l'autre.

On voit donc que divers signes (des ***ostensifs*** non mathématiques), dont la signification reste à préciser, sont utilisés au long des travaux proposés dans ces pages de manuel. C'est un risque d'erreurs, d'interprétations erronées, que l'on fait ainsi courir aux élèves.

Cette analyse ayant été faite, on peut alors répondre plus facilement aux questions de ce volet 2. Les compétences exigées en fin de cycle III ont déjà été indiquées. On les rappelle ici :

« – Percevoir qu'une figure possède un ou plusieurs axes de symétrie.

Vérifier, en utilisant différentes techniques (pliage, papier calque, miroir) qu'une droite est axe de symétrie d'une figure.

Compléter une figure par symétrie axiale en utilisant des techniques telles que pliage, papier calque, miroir.

Tracer, sur papier quadrillé, la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite donnée.

Utiliser à bon escient le vocabulaire suivant : points alignés, droite, droites perpendiculaires, droites parallèles, segment, milieu, angle, figure symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite, axe de symétrie. »

On demande ensuite quelles propriétés de la symétrie axiale sont utilisées dans chacun des documents. Rappelons qu'en bonne logique, une propriété, tout comme une définition ou un théorème, est un élément technologique. Les analyses des organisations mathématiques faites auparavant sont alors utiles pour répondre à la question.

Il est évident qu'à travers l'usage du calque, demandé tant dans le document A que dans le B, c'est la propriété pour une symétrie axiale d'être une isométrie qui est utilisée. Les élèves rencontrent donc, en acte, cette propriété. Le pliage, utilisé lui aussi dans chacun des deux documents, équivaut à une rotation de ±180° autour d'un axe ; celui qui sert de pli. C'est donc une deuxième propriété, ou élément technologique, rencontrée dans ces deux documents mais quant à elle de manière tout à fait implicite. Enfin, on rencontre l'élément technologique : « l'axe de symétrie est la médiatrice du segment d'extrémités deux points symétriques. » On peut noter qu'il est davantage présent dans le document B que dans le A, et qu'il est plus ou moins explicité à travers la mention de l'égalité des distances dans le cadre « je retiens bien ». Par contre, la mention de l'orthogonalité n'est pas explicitement faite. Elle est cependant présente, de manière implicite, dans l'utilisation du quadrillage qui suit, évidemment, des directions orthogonales.

Question 2.a.

Étapes de la démarche

L'analyse de l'organisation mathématique, qui a été faite précédemment, est d'un grand secours pour répondre à cette question et l'on en reprend ci-dessous les grandes lignes ; il s'agit en fait de décrire les parties de ces organisations mathématiques relevant des savoir-faire, c'est-à-dire des couples (type de tâches ; technique), et d'identifier les problèmes qui peuvent apparaître lors de la mise en œuvre de ces savoir-faire.

Au cours de l'activité 1, les élèves s'engagent pas à pas dans l'accomplissement du type de tâche consistant à « dessiner la symétrique d'une figure par rapport à une droite ». Pour cela, il leur est déjà nécessaire de reproduire à l'identique la figure dessinée : un quadrilatère non convexe et une droite, en respectant la position des sommets du quadrilatère, et de la droite, sur le quadrillage. La technique pour la suite du travail est plus explicite, et son accomplissement est décrit au cours des quatre phases qui en constituent son découpage. Elle s'appuie sur le calque de la figure et le retournement du calque par son pliage le long de l'axe ; ce qu'indique la flèche du cadre c. Enfin, les élèves ont à vérifier en pliant la feuille que les deux figures se superposent effectivement.

Difficultés prévisibles : est-il si facile de reproduire cette figure sur quadrillage en veillant au respect de la disposition des sommets et de la droite ? Si l'adhésif n'est pas exactement collé le long de l'axe, la symétrie ne s'effectuera pas par rapport à cet axe : est-ce si facile de coller exactement l'adhésif le long de l'axe dessiné pour un élève de CE2 ?

Question 2.c.

Une fois de plus, dans cet énoncé de CRPE, la formulation de la question relève d'une grande maladresse et demande une interprétation. Que sont des « étapes » ? De quelle découverte s'agit-il dans la mesure où l'on a vu que l'enseignement s'appuie sur des connaissances culturelles et sociales antérieures ? Qu'est-ce qu'une « notion » ? Pourra-t-on dire qu'on l'a découverte quand on en aura vu quelques-unes des bribes d'organisations mathématiques dont elle émerge ? Il ne s'agit pas, à travers ces questions, de « couper les cheveux en quatre », mais de souligner que l'indigence de la culture didactique des rédacteurs de tels sujets ne facilite pas la tâche des candidats qui, s'ils disposent d'un vocabulaire rigoureux car ils ont éprouvé les problèmes que l'imprécision engendre, en sont réduits à interpréter entre les lignes ce que le rédacteur du sujet a voulu dire !

Reprenons. En fait, ce que les rédacteurs de la question demandent n'est ni plus ni moins que la description succincte des divers « temps » par lesquels devrait passer un cours sur la symétrie axiale en CE2. Il est traditionnellement admis que deux grandes phases doivent être réalisées : une activité (de découverte, comme la désigne « Le nouvel objectif calcul »), mais qui serait sans doute de plus grand rendement à l'apprentissage si elle engageait réellement les élèves dans l'étude et la recherche, et des exercices et problèmes. Toute la question est : « pourquoi cela ? » et « est-ce si simple ? ». Des éléments de réponse ont été donnés dans la partie « I – 2.1 Notion d'organisation didactique » qui précède, et nous n'y revenons pas.

Si l'on retourne à la question du sujet du CRPE, et en guise de réponse, il est sans doute nécessaire de :

- ménager une première période d'activité d'étude et de recherche par les élèves, qui consiste à rencontrer une tâche problématique du type de ce que l'on souhaite enseigner (réalisation de figures symétriques, détermination d'axes de symétrie, *etc*.) ;
- laisser du temps pour l'exploration de ce type de tâches et la proposition de techniques par les élèves, sous la direction du professeur, afin de trouver un moyen de résoudre la tâche problématique (plier, décalquer, découper, superposer, *etc*.) ;
- les techniques ayant émergé, de s'engager dans une phase où l'on va tenter de comprendre pourquoi elles permettent de résoudre la tâche (discussion et détermination d'un accord satisfaisant sur la compréhension du pourquoi de ce que l'on fait, sous le contrôle du professeur évidemment) ;
- ce premier temps étant écoulé, de faire le point sur ce que l'on a trouvé, de laisser de côté ce qui paraît après-coup secondaire ou faux, bref, d'institutionnaliser l'essentiel du travail mené et que l'on aura à retenir (répondre à la question : « qu'est-ce qui est important dans ce que l'on vient de trouver ? ») ;
- de poursuivre le travail de l'organisation mathématique, ce qui passe par un certain entraînement à travers des exercices. A cette occasion, on devra répondre à des questions telles que : « la technique est-elle fiable et quelle est sa portée ? », « ai-je exploré toutes les tâches du type, ou bien certaines restent-elles encore à la marge, non travaillées ? », « ai-je acquis une bonne maîtrise de la technique ou dois-je encore la travailler ? »

On peut relever que ces moments se conjuguent pour chacun d'eux à des moments d'évaluation. C'est aussi en cela qu'ils ne correspondent pas à un cloisonnement étanche, l'un par rapport à l'autre, induit par une certaine chronologie, mais qu'il faut les traiter dans leur réalité fonctionnelle. C'est-à-dire se poser des questions telles que : « à quoi servent-ils ? » et « que risque-t-il de se produire en termes d'étude et d'apprentissage, si un moment n'est pas réalisé, ou encore seulement de manière incomplète ? »

Question 3.a.

On a déjà répondu partiellement à cette question lors de l'analyse de l'organisation mathématique.

Dans l'exercice 4, le type de tâche consiste à déterminer l'axe de symétrie d'une figure. La technique pour cela est mentionnée en filigrane dans l'énoncé. Il reste à l'élève à l'exécuter en bon ordre : décalquer, percevoir l'axe de symétrie, plier autour de lui et enfin vérifier que les deux parties de la figure se superposent alors convenablement l'une sur l'autre. On peut noter que deux difficultés risquent d'apparaître, que l'on peut facilement identifier relativement aux savoir-faire (c'est-à-dire aux couples (type de tâches, technique)) enseignés jusqu'en ce point aux élèves qui auraient suivi le document B :

- dans tous les exercices et activités, les axes de symétrie étaient parallèles aux bords de la feuille, c'est-à-dire suivaient les directions privilégiées de l'horizontale et la verticale ; or dans cet exercice l'axe de symétrie ne l'est pas, ce qui induit une adaptation de la technique préalablement enseignée et qui reste à la charge de l'élève ;

- par ailleurs, tous les autres exercices et activités étaient réalisés sur papier quadrillé et celui-ci ne l'est pas ; dans ce cas encore, la technique recourant au quadrillage (suivi des perpendiculaires à l'axe, comptage des carreaux) devient caduque et c'est à l'élève de mettre en œuvre une technique (décalque, pliage) dont les grandes lignes sont explicites dans la question, mais qu'il n'a jamais auparavant accomplie.

Question 3.b.

Une fois de plus, une question très discutable dans ce sujet ! Tout dépend de ce que l'on a choisi d'enseigner et de comment on a choisi de l'enseigner, puisque les exercices permettent de réaliser le plus souvent un moment de travail de la technique, et de l'organisation mathématique, que l'on étudie. Donc d'une organisation de savoir qui se rapporte à un type de tâches donné. Pour répondre à cette question, il faudrait savoir comment est organisée la première rencontre des élèves avec le savoir en jeu, mais surtout, avoir défini au préalable quel est le savoir, ou plutôt les savoir-faire en jeu ! Or, manifestement ces deux documents se rapportent à des organisations mathématiques différentes.

En effet, dans le document A, auquel le lecteur voudra bien se reporter dans le texte complet du sujet absent de ces actes, les types de tâches autour desquels s'organise le savoir sont essentiellement les suivants : « déterminer si une figure présente, ou non, un ou des axes de symétrie » et « réaliser par pliage une figure admettant des axes de symétrie, le choix de la figure étant libre » (c'est l'exercice 1). Tandis que dans le document B présent dans ces actes, ce sont essentiellement les types de tâches « dessiner la symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite » et « rechercher des axes de symétrie de figures données » grâce au quadrillage, qui prédominent. Les types de tâches diffèrent donc très sensiblement. Comme indiqué auparavant, de plus les techniques pour ces types de tâches diffèrent fortement, car elles varient selon que le papier est uni ou quadrillé. Les savoir-faire sont donc différents, et demander de choisir trois exercices parmi les neuf proposés n'a pas grand sens si l'on ne s'est pas posé les questions précédentes au préalable.

BIBLIOGRAPHIE

CHEVALLARD Y. (1998) *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique, in* Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, in Actes de l'Université d'été 4–11 juillet 1998 La Rochelle, Édition coordonnée par Robert Noirfalise – IREM de Clermont-Ferrand, 89-120.

ARTAUD M., CIRADE J., JULLIEN M., MATHERON Y., TONNELLE J. (1998) *TD associés aux cours d'Y. Chevallard, in* Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, Actes de l'Université d'été 4–11 juillet 1998 La Rochelle, Édition coordonnée par Robert Noirfalise – IREM de Clermont-Ferrand, 121-250.

Atelier A5
Annexe 1 - document 1

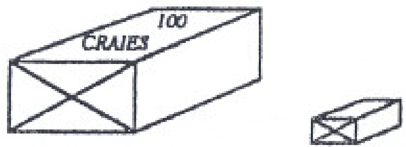
Sujet de l'Académie de Marseille
année 2000 1er Volet 2e partie -

Dans cet exercice, vous trouverez en annexe les productions de 9 élèves de CE2, en réponse au problème suivant proposé avant tout travail sur la division.

Un fabricant vend des craies par étuis de 10 et par boîtes de 100. Le magasinier doit préparer les boîtes et les étuis pour les livraisons.

Calcule combien d'étuis et combien de boîtes il doit préparer pour chaque client.

- *M. Aubin : 800 craies*
- *M. Elias : 78 craies*
- *M. Durand : 60 craies*
- *M. Créon : 254 craies*
- *M. Béal : 430 craies*
- *M. Fustier : 305 craies*



1. Quelle compétence, en terme de connaissance des nombres, est mise en jeu ?

2. Classez ces productions en fonction de la procédure utilisée, tout en faisant très brièvement les remarques importantes sur chaque production.

3. Six enfants ont trouvé la bonne réponse. Rangez leurs productions de la plus rudimentaire vers la plus experte, en montrant brièvement l'évolution de chaque procédé par rapport au précédent.

m Aubin 800 = 8 boites
m Elias 78 = 7 étuis et 8 craies danc 8 étuis
m Durand 60 = 6 étuis
m Créon = 254 = 2 boites 5 étuis et 4 craies dans
2 boites et 6 étui
m Béal = 430 = 4 boites et 3 étuis
m Fustier 305 = 3 boites et 5 étuis.

adile

m Aubin □ □ □ □ □ □ □ □ 8 boites
m Elias ▯▯▯▯▯▯▯ |||||||| 7 étuis et 8 craies
m Durand ▯▯▯▯▯▯ 6 étuis
m Créon □ □ ▯▯▯▯▯ |||| 2 boites 5 étuis et 4 craies
m Béal □ □ □ □ ▯▯▯ 4 3 boites et 3 étuis
m.

Benoit

M Aubin 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 = 8 boites
M Elia 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 8 8 étuis
M Durand 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 6 étuis
M Créon 100 + 100 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 4 2 boites et 6 étuis
M Béal 100 + 100 + 100 + 100 + 10 + 10 + 10 4 boites et 3 étuis
M Fustier 100 + 100 + 100 + 5 3 boites et 1 étui

Isabelle

m Aubin 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 = 800
8 boites
m Elias
m Durand 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 60 6 étuis
m Créon
m Béal 100 + 100 + 100 + 100 + 10 + 10 + 10 = 430
4 boites et 6 étuis

Elise

8 × 100 = 800 8 boites
7 × 100 = 70 + 8 8 étuis
6 × 10 = 60 6 étuis
2 × 100 = 200 + 5 × 10 = 250 + 4 2 boites et 5 étuis
1 étuis
4 × 100 = 400 + 3 × 10 4 boites et 3 étuis
3 × 100 = 300 + 5 3 boites et 1 étui

Claire

m Aubin 800 = 8 c 8 boites
m Elias 78 = 7 d 8 u 7 étuis et 1 étui + 8
m Durand 60 = 6 d 6 étuis
m Créon 254 = 2 c 5 d 4 u 2 boites 5 étuis et 1 étui
m Béal 430 = 4 c et 3 d 4 boites et 3 étuis
m Fustier 305 = 3 c et 5 u 3 boites et 1 étui

Alain

M Aubin □ □ □ □ □ □ □ □ 8 boites
M Elias ▯▯▯▯▯▯▯ |||||||| 7 étuis et 1 étui =
M Durand ▯▯▯▯▯▯ 6 étuis
M Créon □ □ ▯▯▯▯▯ |||| 2 boites et 6 étui
M Béal □ □ □ □ ▯▯▯ 4 boites et 3 étuis
M Fustier □ □ □ |||| 3 boites et 1 étuis

Mickaël

Charles.

M Aubin : 8 boites : 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 = 800

M Elias :

M Durand : 6 étuis : 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 60

M. Béal : 4 boites et 3 étuis

M Créon :

Alice

c	d	u	
8	0	0	8 boites
	7	8	8 étuis
	6	0	6 étuis
2	5	4	2 boites et 6 étuis
4	3	0	4 boites et 3 étuis
3	0	5	3 boites et 1 étui

CRPE Bordeaux ... mai 2000

Second volet
(8 points)

Se référer à l'annexe 2 : extrait du manuel *Pour comprendre les mathématiques*, CM1 de chez Hachette.

Questions

1. On s'intéresse à l'ensemble de l'extrait.

a) Quel est le contenu mathématique sous-jacent ?

b) Quels sont les objectifs visés ?

2. On s'intéresse à la « piste de recherche » : « En avant la musique ».

a) Quelle est la part de l'activité de l'élève ?

b) Analyser les trois procédures respectivement attribuées à Cyril, Dorothée et Éric. Sont-ce des procédures que des élèves de CM1 confrontés au problème proposeraient spontanément ?

c) Pourrait-on, à partir de la même situation de départ (animateur de chorale cherchant à constituer des groupes), envisager une autre démarche pédagogique ?

3. On s'intéresse aux « Applications » (numéros ❶, ❷ et ❸).

a) Quelle évolution du niveau de difficulté peut-on observer entre l'application ❶ et l'application ❷ ?

b) L'application ❸ présente-t-elle une difficulté particulière pour un élève de CM1 ? Si oui, laquelle ?

4. On s'intéresse à de possibles prolongements.

a) Proposer un exercice ou problème qui aiderait les enfants à prendre conscience des valeurs possibles pour le reste lors d'une division euclidienne.

b) Proposer un exercice ou problème qui permette de vérifier jusqu'à quel point les élèves ont compris l'égalité de la division.

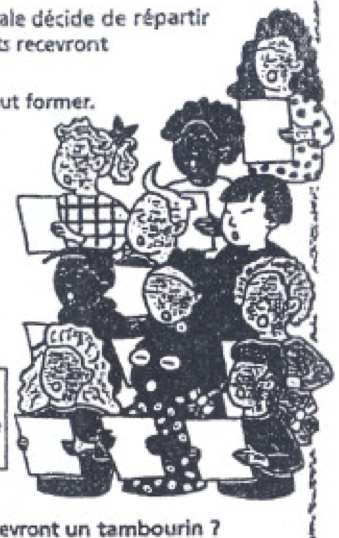
c) Si une trace écrite (cahier du jour, affiche...) devait résumer ce qui a été établi en travaillant la piste de recherche, les applications et des exercices, que pourrait-on proposer ?

Piste de recherche

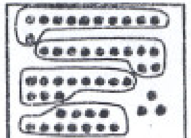
En avant la musique !

1. Pour diriger les répétitions de chant, l'animateur de la chorale décide de répartir les 47 enfants en groupes de 11 chanteurs. Les enfants restants recevront un tambourin pour marquer le rythme.

Cyril, Dorothée et Éric ont cherché combien de groupes on peut former.



Cyril



4 groupes et 3 joueurs de tambourin

Dorothée

$47 - 11 = 36$ 1 gr.
$36 - 11 = 25$ 2 gr.
$25 - 11 = 14$ 3 gr.
$14 - 11 = 3$ 4 gr.

4 groupes de 11 chanteurs et il reste 3 joueurs de tambourin.

Éric

$1 \times 11 = 11$
$2 \times 11 = 22$
$3 \times 11 = 33$
$4 \times 11 = 44$
$5 \times 11 = 55$ $55 > 47$

$47 - 44 = 3$
$47 = (11 \times 4) + 3$

Avec 47 chanteurs, on peut former 4 groupes de 11 chanteurs, et il reste 3 enfants au tambourin.
Quand on divise 47 par 11, le quotient est 4, le reste est 3.

$$\underbrace{47}_{\text{dividende}} = (\underbrace{11}_{\text{diviseur}} \times \underbrace{4}_{\text{quotient}}) + \underbrace{3}_{\text{reste}}$$

2. Deux nouveaux enfants s'inscrivent à la chorale.
Combien de groupes peut-on former ? Combien d'enfants recevront un tambourin ?

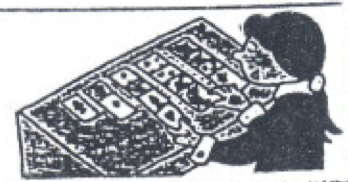
3. Le jour suivant, les 49 enfants de la chorale répètent un autre chant.
L'animateur décide de les répartir en groupes de 15.
Combien de groupes peut-il former ? Combien d'enfants auront un tambourin ?

Applications

❶ La station-service d'un centre commercial offre des points en échange d'un plein d'essence.
6 points permettent d'obtenir une tasse.
Combien de tasses obtient-on avec 50 points ?

❷ Combien peut-il y avoir de semaines entières dans un mois de 31 jours ?
Écris la réponse sur ton cahier sous la forme d'une égalité :
$31 = (7 \times \ldots) + \ldots$

❸ Un jeu de 52 cartes comprend le même nombre de piques, de cœurs, de carreaux et de trèfles.
Combien y a-t-il de cartes de chaque sorte ?
Écris cette répartition sous la forme d'une égalité :
$52 = (4 \times \ldots) + \ldots$



Extrait de l'ouvrage "Pour comprendre les Mathématiques

22 La division (1) CM1

- Reconnaître une situation de division
- Calculer empiriquement le quotient et le reste

Prolongements

▸ exercices p. 74 - n° 1 à 4
▸ problème p. 76 - n° 6

Calcul rapide

Somme de nombres de deux chiffres
28 + 35 = 63

● Un **multiple** de 10 est-il un **multiple** de 5 ?

Piste de recherche

En avant la musique !

1. L'animateur de la chorale répartit les 47 enfants en groupes de 11 chanteurs. Les enfants restants jouent du tambourin.
Cyril, Dorothée et Éric ont cherché le nombre de groupes.

Cyril

4 groupes et 3 joueurs de tambourin

Dorothée

47 – 11 = 36 1 gr.
36 – 11 = 25 2 gr.
25 – 11 = 14 3 gr.
14 – 11 = 3 4 gr.

4 groupes de 11 chanteurs et il reste 3 joueurs de tambourin

Éric

1 × 11 = 11
2 × 11 = 22
3 × 11 = 33
4 × 11 = 44
5 × 11 = 55 55 > 47

47 – 44 = 3
47 = (11 × 4) + 3

Avec 47 chanteurs, on peut former 4 groupes de 11 chanteurs, et il reste 3 enfants au tambourin.
Quand on divise 47 par 11, le quotient est 4, le reste est 3.

$$47 = (\underbrace{11}_{\text{diviseur}} \times \underbrace{4}_{\text{quotient}}) + \underbrace{3}_{\text{reste}}$$

47 : dividende

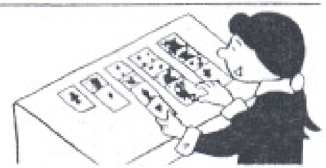
2. Deux nouveaux enfants s'inscrivent à la chorale.
Combien de groupes peut-on former ? Combien d'enfants recevront un tambourin ?

Applications

1 La station-service d'un centre commercial offre des points en échange d'un plein d'essence.
6 points permettent d'obtenir une tasse.
Combien de tasses obtient-on avec 50 points ?

2 Combien peut-il y avoir de semaines entières dans un mois de 31 jours ?
Écris la réponse sur ton cahier sous la forme d'une égalité :
31 = (7 × ....) + ...

3 Un jeu de 52 cartes comprend le même nombre de piques, de cœurs, de carreaux et de trèfles.
Combien y a-t-il de cartes de chaque sorte ?
Écris cette répartition sous la forme d'une égalité :
52 = (4 × ....) + ...



Exercices

Écrire la forme canonique. Étudier le reste.

4 Observe, reproduis et complète le tableau.

Ex. 41 = (7 × 5) + 6
dividende, diviseur, quotient, reste

dividende	diviseur	quotient	reste
41	7	5	6
62	10	6	....
72	8	....	....
60	7	....	....
115	5	....	....
....	15	8	6
....	50	12	0

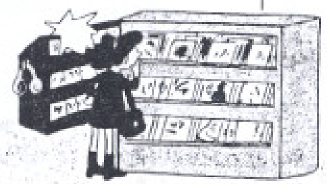
5 Chaque ligne du tableau ci-dessous correspond à une division.
Deux d'entre elles contiennent des erreurs. Trouve-les.

	dividende	diviseur	quotient	reste
A	124	10	10	24
B	72	6	12	0
C	72	6	11	6
D	94	5	18	4

6 Avec un billet de 100 €, Romane achète le plus grand nombre possible de CD à 18 €.
Cette situation peut s'écrire sous la forme d'une égalité :

100 = (18 × 5) + 10

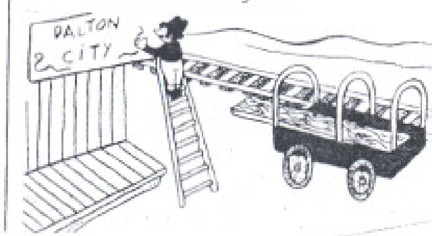
a. Combien de CD a-t-elle achetés ?
b. Combien lui a-t-on rendu ?



Problèmes

7 Ondine passe le brevet du 400 m nage libre ; sa grande sœur Muriel passe le brevet du 1 000 m.
Le bassin a 25 mètres de long.
Combien de longueurs de bassin chacune doit-elle parcourir ?

8 Pour construire la gare de Dalton-City, on transporte des poutres de 100 kg avec un chariot qui peut supporter une charge de 1 500 kg.
a. Combien de poutres peut-on transporter à chaque voyage ?
b. Combien de voyages devra-t-on faire pour transporter les 90 poutres nécessaires à la construction de la gare ?



9 Un équipage de pirates a trouvé un trésor de 82 pièces d'or.
Le chef dit à ses 30 marins :
« Partagez-vous équitablement toutes ces pièces. Je me contenterai de celles qui restent. »
a. Aura-t-il plus ou moins de pièces que ses marins ?
b. Si le trésor contenait 90 pièces, ferait-il la même proposition ?

$$\underbrace{41}_{\text{dividende}} = (\underbrace{7}_{\text{diviseur}} \times \underbrace{5}_{\text{quotient}}) + \underbrace{6}_{\text{reste}}$$

Le reste est toujours **plus petit** que le diviseur

LE COIN DU CHERCHEUR

Adrien est le fils de la fille de mon grand-père.
C'est mon .... ou mon ....

La division (1)

(livre élève pages 60 - 61)

OBJECTIFS :
- Reconnaître une situation de division.
- Calculer empiriquement le quotient et le reste.

RAPPEL DU PROGRAMME
L'élève devra maîtriser les techniques opératoires : [...] **division euclidienne de deux entiers** (avec quotient et reste) [...].

OBSERVATIONS PRÉLIMINAIRES
Au CE, les élèves ont abordé les situations de distribution, de partage qu'ils ont le plus souvent résolues de manière empirique. Cette première leçon a pour objectif initial de leur permettre d'identifier ces situations, de rechercher différentes techniques de résolution et de maîtriser une formulation mathématique adaptée. Les enfants ne parviendront pas à reconnaître toutes les situations de division, même en fin de CM1.
Cet extrait des «Commentaires des programmes de mathématiques : articulation école-collège» nous invite à la patience et à la persévérance :
«La division pose un problème particulier. Sa maîtrise, tant du point de vue de l'algorithme que du point de vue du "sens" est loin d'être assurée en fin d'école primaire. [...] L'étude de cette opération est en effet programmée sur plusieurs années, à l'école primaire et au collège. [...] Le travail sur le sens des situations dites "de division" reste un objectif important à l'école primaire, celles-ci sont résolues par des procédures diverses selon la représentation que s'en fait l'élève (additions ou soustractions réitérées, essais de produits, suite de multiples, division).
L'apprentissage systématique de l'algorithme de la division sera abordé au cours des leçons suivantes, quand cette technique sera ressentie comme utile et «économique».

PREMIÈRE JOURNÉE

CALCUL RAPIDE
Sommes de nombres de deux chiffres
Le maître dit « 28 + 35 ». L'élève écrit 63 sur son ardoise.
43 + 15 ; 26 + 16 ; 34 + 23 ; 18 + 44 ; 55 + 17 ; 68 + 12 ; 14 + 37 ; 54 + 63 ; 77 + 16 ; 36 + 64.

TRAVAIL COLLECTIF

■ ACTIVITÉ : PISTE DE RECHERCHE « EN AVANT LA MUSIQUE ! »
a) L'enseignant a écrit au tableau la situation-problème de la piste de recherche ou une situation équivalente qui peut se poser dans la vie de la classe. Exemples :
«Les 58 élèves des CE et CM organisent un tournoi de football par équipes de 11. Combien d'équipes pourront-ils former ?»
«On range 62 fiches dans des pochettes de 8. Combien de pochettes faudra-t-il ?»
L'enseignant demande aux enfants, regroupés par 3 ou 4, de lire la situation écrite au tableau, d'en chercher la solution et de noter les étapes de cette recherche. Si un groupe semble en panne après quelques minutes, l'enseignant lui propose de dessiner la situation.
Un rapporteur de chaque groupe vient présenter la réponse et la démarche de son groupe. Les différentes solutions sont comparées, critiquées. Plusieurs procédures seront sans doute présentées : additions ou

soustractions successives, essais de produits, dessins. Si un groupe a utilisé la division, elle sera acceptée comme les autres. L'écriture de la réponse devra être examinée collectivement.
La formulation 47 = (11 × 4) + 3 peut être utilisée dans tous les cas. L'enseignant précise le vocabulaire : diviseur, quotient, reste.
b) L'enseignant propose ensuite une deuxième situation. Par exemple :
«Combien y a-t-il de semaines dans 85 jours ?»
Il propose à chaque groupe d'utiliser une démarche différente de celle qu'il avait choisie au cours de la première recherche et de formuler sa réponse sous la forme : $D = (d \times q) + r$.
Parmi les réponses proposées par les enfants, certaines ne correspondront pas à la règle : $r < d$.
L'enseignant utilisera ces réponses pour leur faire découvrir en quoi elles ne correspondent pas à une situation de division. Il les amènera à découvrir et à énoncer la règle :

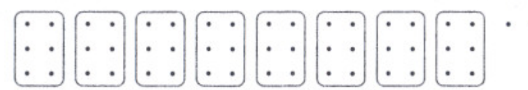
Le reste est toujours plus petit que le diviseur.

L'égalité : 85 = (7 × 11) + 8 est exacte mais correspond pas à une situation de division, car il reste 8 jours ; on peut donc avoir encore une semaine.
La bonne réponse est : 85 = (7 × 12) + 1.
Pour vérifier si cette règle est bien comprise, l'enseignant propose quelques égalités ; les enfants relèvent celles qui correspondent à des situations de division et corrigent les autres. Il convient alors de bien préciser, dans l'égalité, où est placé le diviseur. L'égalité citée ci-dessus : 85 = (7 × 11) + 8, correspondrait bien à une situation de division si l'on cherchait combien d'équipes de 11 on peut former avec 85 joueurs.

72 = (10 × 6) + 12 → 72 = (10 × 7)+2
56 = (8 × 6) + 8 → 56 = 8 × 7
85 = (7 × 12) + 1
465 = (50 × 8) + 65

TRAVAIL INDIVIDUEL

Application 1
Avec 48 points on obtient 8 tasses et il reste 2 points : 50 = (6 × 8) + 2
En cas d'erreur, faire dessiner les 50 points et entourer chaque groupe de 6 :



Application 2
Dans un mois de 31 jours, il y a 4 semaines et il reste 3 jours : 31 = (7 × 4) + 3.
L'observation d'un calendrier permet une excellente vérification. Aux élèves en difficulté, on demande de faire la même recherche pour un mois de 30 jours, voire de 28 jours.

Application 3
Dans un jeu de 52 cartes, il y a 13 cartes de chaque sorte : 52 = (13 × 4).
Dans ce cas précis, le reste est 0. L'écriture : 52 = (13 × 4) + 0 est acceptée.

DEUXIÈME JOURNÉE

CALCUL RAPIDE
Sommes de nombres de deux chiffres
Le maître dit « 54 + 25 ». L'élève écrit 79 sur son ardoise.
62 + 28 ; 58 + 23 ; 38 + 24 ; 57 + 27 ; 67 + 15 ; 34 + 37 ; 29 + 43 ; 37 + 26 ; 18 + 45.

Atelier A5
Annexe II - document 4

TRAVAIL COLLECTIF

■ ACTIVITÉ : EXERCICE 4

a) Par groupes de deux, les enfants reproduisent puis complètent le tableau. Les deux dernières lignes poseront un problème, car elles proposent une situation apparemment nouvelle.
Au moment de la mise en commun, l'enseignant fait observer que cette situation a été souvent rencontrée au cours de problèmes multiplicatifs.
L'égalité $(15 \times 8) + 6 = \ldots$ peut correspondre à la situation :
« Un commerçant a 8 cartons de 15 bouteilles et 6 bouteilles. Combien de bouteilles a-t-il ? »
L'égalité $126 = (15 \times \ldots) + \ldots$ correspond aussi à la situation de division :
« Avec 126 bouteilles, combien pouvons-nous remplir de cartons de 15 bouteilles ? »
Ces deux égalités correspondent à une même situation, mais les nombres connus au départ ne sont pas les mêmes.

b) L'enseignant demande ensuite à chaque groupe d'imaginer une situation correspondant à chacune des lignes du tableau.

c) Il propose quelques situations bien connues des enfants en leur demandant d'indiquer lesquelles correspondent à des situations de division :
« Hier, à la cantine, il y avait 7 tables de 8 enfants et une table de 5… »
« Dans l'école, il y a 224 enfants dans 8 classes… » (Le partage n'est pas équitable. Ce n'est donc pas une situation de division.)

TRAVAIL INDIVIDUEL

Exercice 5 : l'enseignant peut préciser aux enfants que les erreurs à rechercher ne sont pas des erreurs de calcul.
Au moment de la mise en commun, il demande à quelques enfants de justifier leurs réponses et d'indiquer quelle serait l'égalité correspondant à une situation de division.
L'exercice 1 de la banque d'exercices page 74 du livre permet un travail semblable.

Exercice 6 : cet exercice permet de vérifier si les enfants font bien le rapprochement entre chaque terme de l'égalité et la situation proposée. Toute erreur à cet exercice demande une remédiation individualisée.

Problème 7 : toutes les démarches permettant de parvenir à la bonne réponse sont acceptées et discutées. Le travail sur les multiples peut être une aide efficace, tout comme la droite graduée.

Problème 8 : pas de difficultés numériques dans ce problème qui permet surtout de vérifier si l'enfant sait bien repérer les situations de division. Dans la question **b)**, c'est le quotient de la première division qui devient le diviseur.

Problème 9 : sous forme de jeu, ce problème donne toute son importance au reste, considéré ici comme aussi important que le quotient.
À partir de cette situation, on peut faire observer l'évolution du quotient et du reste quand on augmente le diviseur. Un tableau rend ces observations plus évidentes.

Nombre de pièces du trésor (dividende)	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92
Nombre de marins (diviseurs)	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
Part de chaque marin (quotient)	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3
Part du chef (reste)	22	23	24	25	26	27	28	29	0	1	2

LE COIN DU CHERCHEUR

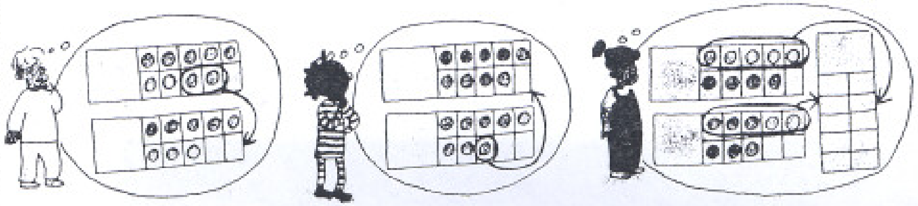
Adrien est mon frère ou mon cousin germain ; il est le fils de ma mère ou de ma tante.

38 Calcul réfléchi (1)

CALCUL MENTAL : • La boîte à compter (1 à 10), avec deux boîtes • Donner le complément à 10

Extrait de l'ouvrage
"Place aux maths"
C.P.

Je cherche



9 + 8 | 9 + 8 | 9 + 8

9 + 1 + ... | 7 + ... + 8 | 5 + ... + 5 + ...

... + ... | ... + ... | ... + ...

• **Relie** chaque enfant au calcul qu'il a fait. • **Termine** les calculs.

Je m'exerce

1. Calcule avec la méthode que tu préfères.

7 + 9

8 + 6

2. Calcule.

6 + 9 = ...
8 + 7 = ...
5 + 8 = ...
9 + 4 = ...
9 + 9 = ...
7 + 5 = ...
5 + 9 = ...

J'écris

10	12	14												

Le sais-tu ?
Combien y a-t-il d'années dans une décennie ?

OBJECTIF : Préparer le calcul réfléchi en utilisant le passage par 10

Fiche 38 Calcul réfléchi (1)

► page 59

CALCUL MENTAL (voir petit dictionnaire des jeux, fichier de l'élève p. 144) :
• La boîte à compter (1 à 10), avec deux boîtes
• Donner le complément à 10.

Objectif

Préparer le calcul réfléchi en utilisant le passage par le nombre 10.

Remarques didactiques

• Dans le cadre de cette fiche, l'enfant doit réinvestir les décompositions additives du nombre 10. Cette accoutumance au réinvestissement de ses connaissances va permettre à l'élève d'intérioriser ces résultats.

• La situation du « Je cherche » vise à mettre en place la méthode de l'arbre à calcul, qui fait apparaître des sous-sommes calculables. Celles-ci font mettre en évidence les compléments à 10 de façon à favoriser le calcul réfléchi. La manipulation de la boîte à compter permet de comprendre ce qui sera traduit ensuite par l'arbre à calcul.

Déroulement

► Séance 1 - *Activités préparatoires conseillées*

Matériel : pour chaque groupe de deux enfants : une file numérique jusqu'à 20, le matériel C photocopiable (pp. 183-184), des jetons de deux couleurs différentes (phase 1). Pour chaque groupe de deux enfants : deux boîtes à compter, des jetons et une ardoise (phase 2).

Phase 1 - Le cache-nombre

• Répartir les enfants par groupes de deux, leur attribuer une couleur de jetons et leur donner le paquet de cartes représentant les décompositions additives des nombres de 1 à 20. La pile de cartes est retournée sur la table. Chaque joueur tire à son tour une carte et cache avec l'un de ses jetons le nombre correspondant sur la file numérique. Un nombre ne peut être couvert qu'une seule fois. Lorsqu'une carte désignant un nombre déjà recouvert est tirée, le joueur la rejette et laisse jouer son adversaire.

• Quand toute la piste est couverte, l'enseignant vérifie avec les enfants si les cartes retenues par chaque joueur correspondent bien aux jetons posés. Le gagnant est celui qui a posé le plus de jetons validés.

• L'enseignant laisse les enfants démarrer le jeu. Il circule de façon à vérifier la compréhension de la règle, la mémorisation des décompositions et donc le bon déroulement de la partie.

• **Synthèse** : Faire apparaître les éventuelles difficultés rencontrées. Mettre en évidence l'intérêt d'avoir mémorisé ces différents calculs pour retrouver l'écriture canonique d'un nombre.

Phase 2 - La boîte à compter

• Donner la consigne : « Vous devez faire le calcul 9 + 8 en utilisant vos boîtes à compter et en traduisant les étapes de ce calcul sur l'ardoise. Dans ce calcul, vous utiliserez le passage par 10. »

• Laisser les enfants chercher par groupes de deux et observer les procédures utilisées.

• **Synthèse** : Confronter les résultats et les démarches choisies. Faire apparaître notamment ce qu'il manque à 9 pour faire 10, et donc ce qu'on prend à 8 pour le donner à 9. Toutes les procédures mises en place par les élèves sont exposées.

► Séance 2 - *Travail sur le fichier*

Matériel : le fichier, page 59.

Phase 1 - Je cherche

• Observer l'illustration silencieusement. Laisser les enfants faire leurs remarques.

• Engager un questionnement.

• Partager la classe en 6 groupes, chacun étant responsable d'un des calculs proposés (un même calcul peut être donné à deux groupes). Faire exécuter le travail en temps limité.

• **Synthèse** : Faire verbaliser les différentes façons de décomposer un calcul en sous-calculs plus abordables.

Phase 2 - Je m'exerce

• **Exercice 1** : Réinvestir les méthodes de calcul. L'enseignant apporte son aide aux enfants qui le sollicitent. Son rôle consiste à observer les procédures réinvesties. Cette activité fait l'objet d'une correction collective.

• **Exercice 2** : Renforcer la connaissance des décompositions additives.

Phase 3 - J'écris

Écrire la suite des nombres pairs à partir de 10. Le maître rappellera aux enfants ce qu'est un nombre pair.

► Des pistes pour la remédiation

• Utiliser deux boîtes à compter pour calculer.

• Exploiter le jeu du cache-nombre.

• Jouer à des jeux de memory des nombres, associant 9 cartes représentant les nombres de 10 à 18 en chiffres (matériel B, p. 187) à 9 cartes représentant des décompositions additives de ces mêmes nombres (sélectionnées dans le matériel C, pp. 183-184).

Académies d'Orléans-Tours et Poitiers - mai 2003
(corrigé page 263)

SECOND VOLET (8 POINTS)

Se référer :
- au document A, annexes 5 et 6, extrait du manuel "Le nouvel objectif calcul" CE2 de chez Hatier,
- au document B, annexes 7 et 8, extrait manuel "Collection Diagonale - Math en flèche" CE2 de chez Nathan.

1) On s'intéresse à l'ensemble des deux documents :
   a) Quelle est la notion mathématique étudiée ?
   b) Concernant cette notion, quelles sont les compétences exigées à la fin du cycle des approfondissements ?
   c) Quelles propriétés de la symétrie axiale sont utilisées implicitement dans les documents A et B ?

2) On s'intéresse à la partie "Découverte" du document A et à l'*annexe* 7 du document B :

a) <u>Document A :</u> "Découverte"
Énoncer les différentes étapes de la démarche proposée.
Quelles difficultés peuvent rencontrer les élèves travaillant sur cette activité ?

b) <u>Document B :</u> *annexe 7*
Énoncer les différentes étapes de la démarche proposée dans l'activité.
Déterminer la cohérence globale de *l'annexe 7* (Activité + Exercice 1) eu égard aux propriétés énoncées au 1 c).

c) À partir de ces deux extraits, énoncer les grandes étapes que vous proposeriez aux élèves pour découvrir cette notion.

3) On s'intéresse à la phase "Exercices" de chacun des documents :

a) Citer une difficulté spécifique de l'exercice 4 du document B.
b) Parmi les 4 exercices du document A et les 5 exercices du document B, choisissez-en trois.
Indiquer les raisons de votre choix.

Annexe 5 (document A)

49

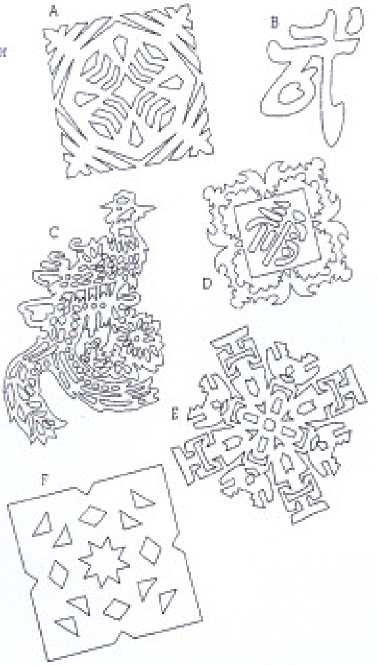
Pliages et symétrie

Construire par pliage des figures ayant un ou plusieurs axes de symétrie

Découverte

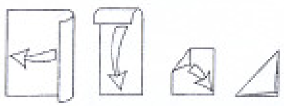
Autrefois, dans l'ancienne Chine, on s'offrait, à l'occasion du Nouvel An chinois, des sortes de « cartes de vœux » découpées dans du papier et on en décorait les murs et les portes des maisons.

Pour réaliser ces cartes, on utilisait souvent le pliage et le découpage.



1. Parmi les motifs représentés, quels sont ceux qui ont été réalisés par pliage et découpage ?

2. Prends un carré de papier de 21 × 21 cm. Plie-le en huit comme ci-dessous : c'est le pliage « rosace ».



Reporte un motif, découpe et déplie. Les lignes de pliage sont des axes de symétrie. Marque-les.

3. Utilise maintenant le pliage rosace pour réaliser la carte F. Découpe, déplie, compare avec le modèle et cherche les découpages oubliés.

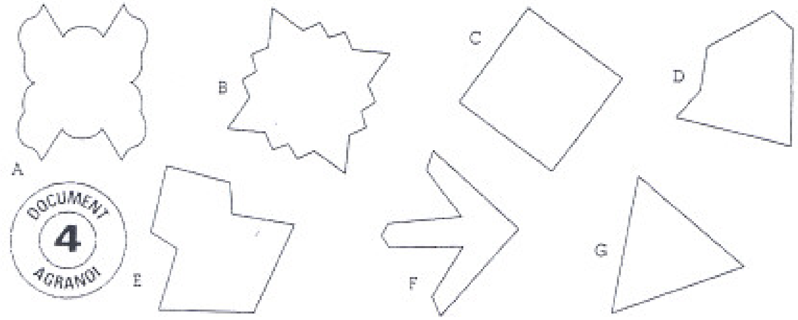
AIDE-MÉMOIRE N° 2 - PAGE 183

Exercices et problèmes

1 En pliant une feuille de papier une seule fois, trace puis découpe une forme qui, une fois dépliée, te donnera un carré. Avec une autre feuille, procède de la même manière pour obtenir un triangle. Avec une troisième feuille, fais de même pour obtenir un rectangle.

Annexe 6 (suite du document A)

2 Décalque les figures agrandies page 190. Trace sur le calque l'axe ou les axes de symétrie de ces figures, s'ils existent. Puis vérifie par pliage.

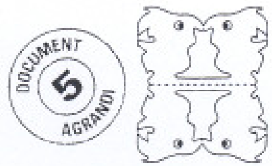


3 **Le pélican de Jonathan**

« Le pélican de Jonathan,
Au matin, pond un œuf tout blanc.
Et il en sort un pélican
lui ressemblant étonnamment... »

(R. Desnos)

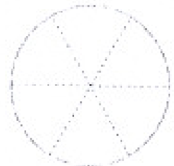
a/ Observe le pliage et le découpage réalisés par Bertrand.

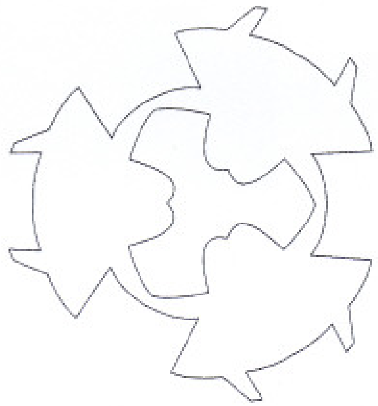


À ton tour, essaie d'obtenir un découpage identique en décalquant le modèle page 191.

b/ Laurent a fait un pliage en accordéon. Il a obtenu une ribambelle de pélicans. À ton tour, essaie de réaliser une ribambelle de pélicans.

4 Plie en six un disque de papier. Utilise-le pour obtenir un découpage qui ressemble à celui-ci.





Annexe 7 (document B)

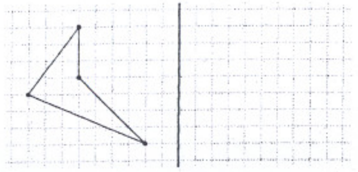
Utiliser la symétrie

Avec les nombres...
Réciter des produits de la table de multiplication

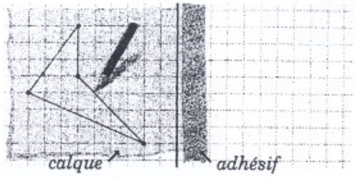
1 Activité

Matériel : feuille quadrillée, papier-calque, crayon à papier, règle, adhésif.

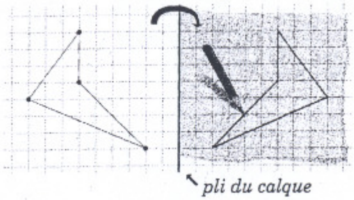
a Trace une droite en rouge pour partager en deux parties une feuille quadrillée.
Sur la partie gauche, reproduis ce polygone :



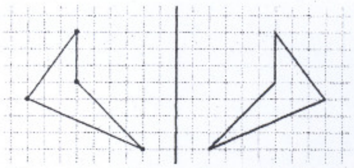
b Avec de l'adhésif, fixe un morceau de calque sur la partie gauche de ta feuille.
Calque le polygone.



c Retourne le calque en le pliant le long de la droite rouge.
Repasse sur les tracés du polygone.



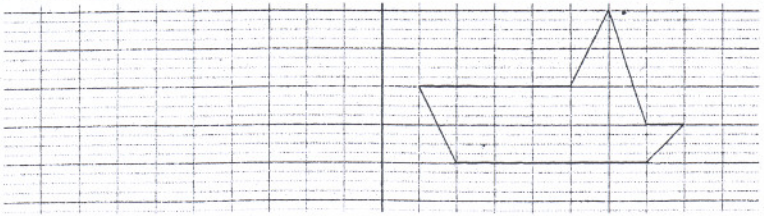
d Retire le calque et observe les deux polygones. Ils sont **symétriques** par rapport à la droite rouge.



Tu peux le vérifier en pliant la feuille le long de la droite rouge.

1 Exercices

En te servant du quadrillage, trace la figure symétrique par rapport à la droite rouge.

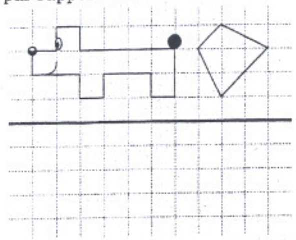


Annexe 8 (suite du document B)

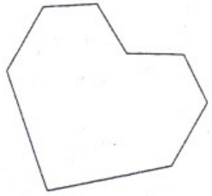
2

- Recherche les lettres de ce prénom qui ont un axe de symétrie.
- Reproduis chacune de ces lettres sur un quadrillage.
Trace en rouge les axes de symétrie.

3 Trace les deux figures symétriques par rapport à la droite bleue.



4 Reproduis cette figure sur un calque.
Cherche l'axe de symétrie et vérifie en pliant.

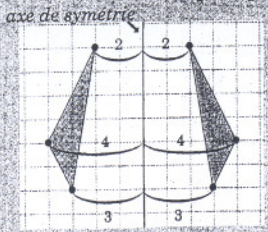


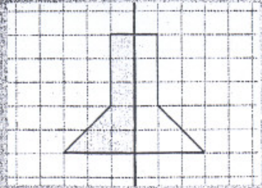
5 Reproduis le chemin rouge. Trace et code le chemin symétrique qui va de m à n.

1 → • 2 ↓ • 1 → • 1 ↑ • 1 → • 2 ↑ • 2 → • 4 ↓

Je retiens bien

Deux figures sont symétriques lorsqu'on peut les faire coïncider par pliage.





Cette figure a un axe de symétrie.

MATÉRIEL ET MANIPULATION COMME AIDE À LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Lucia GRUGNETTI
Unité de recherche en didactique des mathématiques de l'Université de Parma
lucia.grugnetti@unipr.it

François JAQUET
Ancien chercheur à l'Institut romand de recherche et documentation pédagogique (IRDP)
Rédacteur de la revue *Math-École*
fr.jaquet@wanadoo.fr

Résumé
Ce texte est le compte rendu d'un atelier, au cours duquel les participants, adultes, ont résolu eux-mêmes une dizaine de problèmes par manipulations, sans papier ni crayon, en se demandant dans quelle mesure le matériel proposé facilite ou modifie la tâche de résolution pour les élèves.
Les commentaires et remarques des participants, jointes aux nombreuses observations d'enseignants et de formateurs qui ont déjà expérimenté ce mode de résolution avec des enfants, font l'objet d'une synthèse pour quelques-uns de ces problèmes, et de propositions de gestion en classe pour l'un d'entre eux : « L'escalier des différences ». D'autres commentaires figurent pour trois autres activités.
Le travail de rédaction de notes méthodologiques pour chacun de ces problèmes est en cours, ainsi que la mise au point de nouveaux sujets. Toutes les suggestions de participants ou lecteurs seront les bienvenues (à l'adresse ci-dessus des animateurs) pour l'élaboration d'un ensemble d'activités comprenant les énoncés, le matériel et les commentaires didactiques correspondants.

I – INTRODUCTION

La manipulation ou le recours à des matériels peuvent-ils faciliter la tâche de résolution d'un problème et, par conséquent, la construction des savoirs mathématiques qui y sont liés ?

La réponse à cette question est le plus souvent affirmative lorsqu'on évoque les élèves pour lesquels le geste est nécessaire avant le passage à l'écriture, ceux qui ont besoin d'objets concrets pour se représenter les objets mathématiques, ceux qui doivent « agir pour abstraire »…

Il n'est cependant pas inutile d'examiner plus en détails les effets produits par l'apport de matériels de manipulations à un énoncé de problème sous forme de texte et d'éventuelles illustrations.

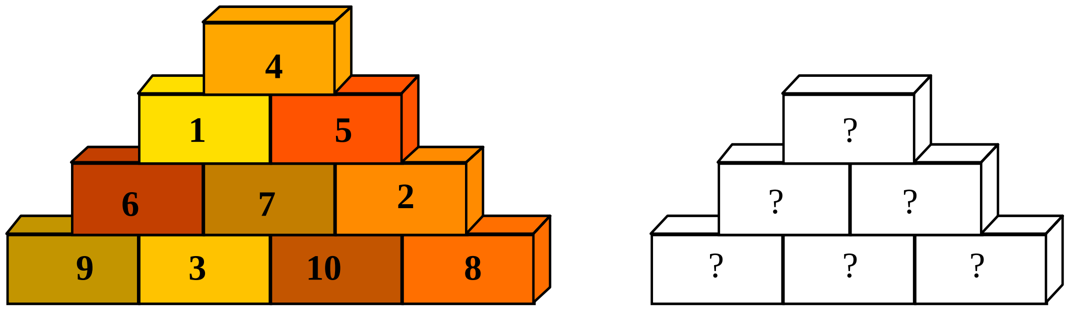
Les problèmes proposés, destinés à des classes de CE2, CM, 6^{e}, 5^{e} et 4^{e}, ont été très largement expérimentés (par des centaines ou des milliers de groupes d'élèves, dans plusieurs pays) et analysés dans le cadre du « Rallye Mathématique Transalpin ». Ils ont été ensuite transformés en « manipulations », pratiquées à leur tour par de nombreux enfants et adultes lors d'expositions, salons et autres manifestations publiques (ex. Grugnetti, Jaquet, 2005).

Voici, pour introduire le thème de l'atelier, un ensemble de questions qu'un enseignant pourrait se poser à propos de l'une de ces activités :

J'enseigne dans une classe d'élèves de 7 - 8 ans (CE1), j'ai trouvé un problème, « L'escalier des différences », qui me paraît à priori intéressant pour mon cours de mathématiques car, j'y vois :

- *une consolidation des opérations dans le champ conceptuel de l'addition ;*
- *la conduite d'une recherche individuelle ou par groupes de deux élèves, autovalidante ;*
- *un défi, susceptible de motiver mes élèves ;*
- *une activité facile à gérer et à évaluer.*

L'escalier des différences



L'escalier de gauche, de quatre étages, est construit ainsi :

Règle 1 : Chaque brique porte un nombre naturel qui est la différence des nombres des deux briques sur lesquelles elle repose.

Règle 2 : Tous les nombres de l'escalier sont différents.

Avec les mêmes règles, construisez des escaliers de trois étages, (comme celui de droite), en utilisant les nombres de 1 à 6.

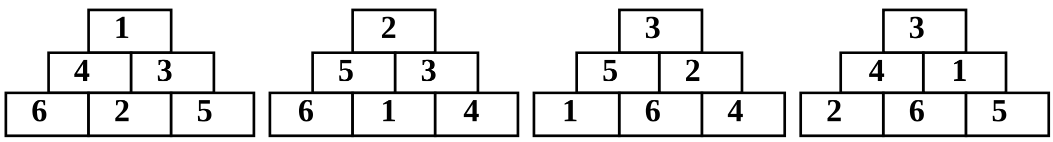
Combien en trouverez-vous de différents ?

Matériel

Six jeux (au moins) de 6 briques numérotées de 1 à 6.

Solutions

Il y a **4 solutions** (constructions) différentes, en tenant compte que les dispositions symétriques se retrouvent sur l'autre face de chaque pyramide :



Niveaux

Dès le CE1.

On propose du matériel pour cette activité, mais je ne vois pas trop ce que ça peut apporter.
Peut-être pour les élèves en difficulté ?
Pour les plus lents ?
Pour permettre une plus grande autonomie ?
Essayons tout de même et regardons d'un peu plus près.
Tout d'abord, y a- t- il un peu de mathématiques derrière cette manipulation ?
Quelle durée vais-je accorder ?
Comment organiser le travail ? Par groupes, individuellement ?
Comment vais-je savoir ce que les élèves ont fait ? Vais-je demander une trace écrite ?
Que vais-je en faire plus tard ?

II – DE LA RÉSOLUTION « PAPIER-CRAYON » À LA MANIPULATION

L'énoncé et le matériel étant donnés à l'élève, celui-ci va se lancer dans la recherche de la solution qui se décompose en plusieurs étapes :

II – 1 Phase 1. La lecture et l'appropriation

Il n'y a pas, à ce moment-là, de grande différence entre le problème et la manipulation puisque le support écrit est le même. Toutefois, le matériel permet de fixer les représentations. Dans l'exemple de « l'escalier des différences », la « brique » du texte est immédiatement concrétisée par un parallélépipède en bois avec ses caractéristiques physiques.

II – 2 Phase 2. La recherche de la solution

Le matériel permet un gain de temps considérable dans les essais et offre une représentation concrète de l'escalier. Il faut toutefois relever que la disposition verticale des briques incite à commencer par la base, alors que, sur le papier (avec les figures des escaliers à compléter), on peut aussi bien commencer par le sommet.

Les trois pièces de base placées, les suivantes sont testées très rapidement et, en cas d'insuccès, les modifications de la base sont rapides aussi.

Il arrive souvent que les élèves travaillent par triplets de briques tenues dans une main : deux dans la base et la troisième, par-dessus, correspondant à la différence. Ils cherchent à combiner ces triplets avec les trois pièces restantes.
La correspondance des gestes avec les contenus mathématiques du problème relevés lors de l'analyse a priori est évidente :

- la maîtrise de l'addition et la soustraction sur les premiers nombres naturels s'observe dans la formation des triplets, dans les contrôles permanents amenant aux changements de briques… ;
- les conjectures et leurs vérifications sont visibles dès le moment où les essais ne se font plus au hasard et qu'on voit apparaître une recherche systématique ou que des résultats intermédiaires sont atteints comme la présence obligatoire de la brique « 6 » dans la base, mais non voisine de « 3 », … ;
- l'organisation d'un inventaire et la validation s'observent au fur et à mesure que les pyramides trouvées s'alignent devant l'élève.

Au cours de l'activité, l'élève élabore donc des « règles de construction » par exemple :

a) Le « 6 » ne peut pas être une différence parmi les nombres de 1 à 6, par conséquent, il doit figurer dans la base de l'escalier ; et le « 5 » ne peut par conséquent pas figurer au sommet de l'escalier puisqu'il ne peut s'exprimer que comme la différence de 6 et 1 qui devraient se trouver au premier étage ;

b) Le « 6 » et le « 3 », comme le « 4 » et le « 2 » ou encore le « 1 » et le « 2 », ne peuvent être placés l'un à côté de l'autre ;

c) Si « 4 » était au sommet, il ne pourrait être que la différence entre 5 et 1 (car 6 est dans la base), qui seraient alors placés au premier étage, mais alors 5 ne pouvant être que la différence entre 6 et 1 placés dans la base, on arrive à une contradiction car la pièce « 1 » est déjà au premier étage ; on en conclut ainsi que le « 4 » ne peut être au sommet de la pyramide et que, vu le point a) seules les pièces « 1 », « 2 » et « 3 » peuvent y être.

Ces « règles de construction » sont des petits « théorèmes locaux » dont la validité est limitée à l'escalier mais dont certains participent à la construction de connaissances mathématiques plus générales, comme, en particulier, à prise de conscience que la différence de deux nombres naturels différents est toujours un nombre inférieur au plus grand des deux, qui peut être égal au plus petit des deux, ou inférieur…

II – 3 Phase 3. La validation

Ces règles doivent peu à peu permettre à l'élève de former tous les escaliers possibles. Le matériel a été conçu pour que la quantité des pièces à disposition ne suggère pas le nombre de solutions (Les briques permettent de construire 6 escaliers alors que 4 seulement sont différents).

La position verticale des pièces permet de voir l'escalier des deux côtés. Si les élèves trouvent deux dispositions symétriques des faces visibles, il leur suffit de tourner l'une des constructions d'un demi-tour pour s'apercevoir qu'il s'agit du même escalier.

Mais le matériel ne garantit pas l'exhaustivité des solutions, ni la formulation des règles découvertes et mises en œuvre pour y arriver.

C'est à ce moment-là qu'intervient le maître, pour organiser, s'il le souhaite, une exploitation de l'activité à des fins didactiques.

III – LA GESTION DE L'ACTIVITÉ

Pendant ou après l'atelier, le maître va devoir choisir ses types d'intervention et les développements qui lui semblent favoriser les apprentissages de ses élèves. On entre ici dans la gestion et l'exploitation de l'activité, avec une très grande variété de possibilités :

III – 1 Variante « pour occuper les élèves »

Le matériel est libre d'accès, à destination des élèves qui ont terminé le travail ordinaire de la classe et qui ont un moment à occuper. Ils s'engagent dans la recherche de la solution, créent un escalier ou deux ou abandonnent en cas d'obstacle trop important, puis remettent le matériel dans sa boîte et passent à une autre occupation.

En travaillant sur cet atelier, ils n'ont « pas fait de mal ». Ils ont peut-être : fait un peu de mathématiques, vérifié leur(s) solution(s), éprouvé du plaisir ou de l'ennui, modifié leur rapport affectif avec la discipline, toutes choses que le maître ne peut pas évaluer.

III – 2 Variante d'occupation avec « contrat » minimum

Comme dans la variante précédente, les élèves choisissent l'atelier de « L'escalier des différences » mais avec l'obligation de conserver une trace écrite de leur activité : les solutions trouvées, la date, l'heure, la durée et quelques explications éventuelles sur leur démarche.

L'examen des protocoles va permettre au maître, s'il en a le temps et l'envie, de contrôler les solutions et de demander à l'élève des compléments d'information sur ses démarches.

III – 3 Variante avec « contrat » collectif

Les élèves doivent travailler par deux au minimum, fournir un compte rendu de leurs recherches avec solutions et explications après que le maître leur ait expressément demandé de trouver toutes les solutions.

Le maître pourra alors, apprécier les solutions et provoquer une confrontation entre les membres du groupe sur les solutions et leurs explications.

III – 4 Variante « la totale »

Toute la classe est organisée en groupes qui travaillent par rotation, sur plusieurs ateliers, avec rédaction d'un rapport, comme précédemment.
Une mise en commun est organisée, sur la base des rapports de chaque groupe.
Le maître prévoit ensuite une phase d'institutionnalisation des connaissances mathématiques mises en œuvre (sur les différences, sur la certitude qu'il n'y a pas d'autre solution, sur la reconnaissance de solutions équivalentes par symétrie ainsi que le permet le matériel) et des activités complémentaires (escaliers de 4 étages).

IV – AUTRES EXEMPLES

Voici quelques autres exemples de « problèmes-manipulations » présentés lors de l'atelier, qui ont particulièrement montré l'intérêt d'une résolution par matériel et pour lesquels les participants ont formulé des remarques. (L'ensemble de ces activités, et une brochure d'accompagnement contenant des notes méthodologiques et didactiques en préparation, peuvent être obtenues, sur demande, auprès des animateurs).

IV – 1 Exemple 1

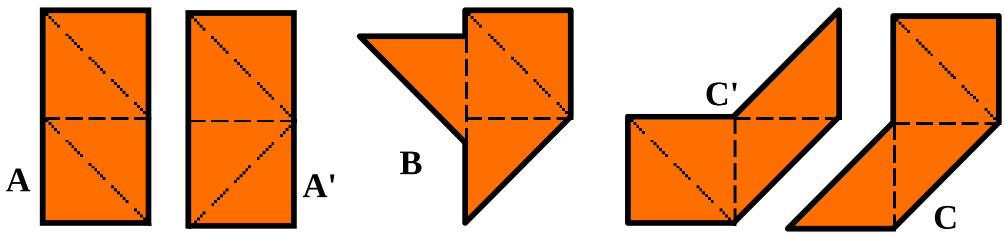
Miss Troispointe

Miss Troispointe est une passionnée de puzzles.

- Avec quatre triangles, rectangles, isocèles, égaux, elle arrive à former des polygones différents.
- Dans les polygones qu'elle forme, les quatre triangles ne se recouvrent pas et ont chacun au moins un côté commun avec l'un des autres triangles.

Dessinez les polygones différents que vous avez trouvés et classez-les selon le nombre de leurs côtés.

Exemples : A est une solution acceptable, c'est la même que **A'** car les deux rectangles sont égaux même si les triangles n'y sont pas disposés de la même manière. **B** n'est pas une solution acceptable pas car le triangle de gauche n'a pas de côté commun (sommets compris) avec celui d'un autre triangle. **C** et **C'** sont égaux car on peut les superposer exactement, ils ne représentent donc qu'une seule et même solution.



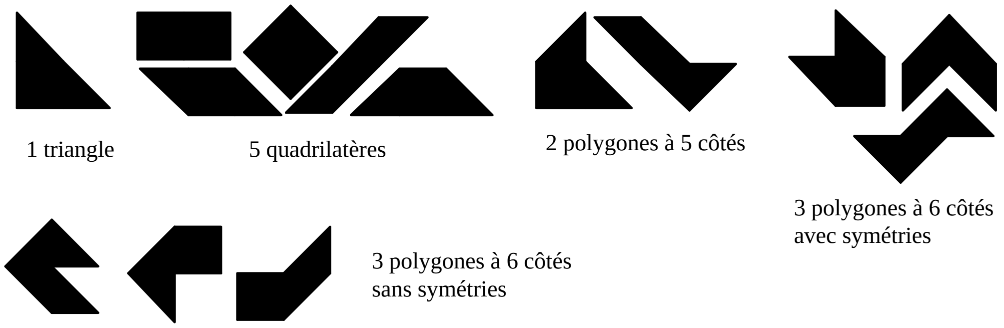
Dans « Miss Troispointe », le matériel (une centaine de triangles rectangles isocèles en bois : demi-carrés de 4 cm de côté) permet un gain de temps considérable dans les essais et simplifie la recherche en remplaçant les constructions géométriques sur papier (éventuellement quadrillé) par des déplacements d'objets.

Cette simplification est aussi une « perte » au niveau géométrique puisque la manipulation permet de rester dans l'espace des objets physiques sans passer aux « figures ». Mais la « perte » n'est que momentanée si l'on exige, après l'inventaire des constructions concrètes, de les transcrire sur papier par des figures géométriques.

Les contenus mathématiques du problème sont du domaine de la géométrie (pour autant qu'on ne se limite pas à la manipulation) :

- isométries : déplacements dans l'espace physique puis leur transcription dans le plan de l'espace géométrique par des translations, rotations et symétries axiales (retournements) ?
- reconnaissance de figures isométriques, avec analyse de leurs caractéristiques (nombres de côtés, axes de symétrie, orientation), pour éviter les répétitions dans l'inventaire ?
- construction de figures :
  - sur papier blanc, avec prise en compte des dimensions et des angles,
  - sur papier quadrillé, après la reconnaissance de la position de la figure de base (triangle isocèle rectangle) et de sa position sur le quadrillage.

L'inventaire des solutions fait encore apparaître des pistes d'exploitations pour aborder ou rappeler d'autres connaissances sur les polygones que celles qui ont été évoquées ci-dessus.

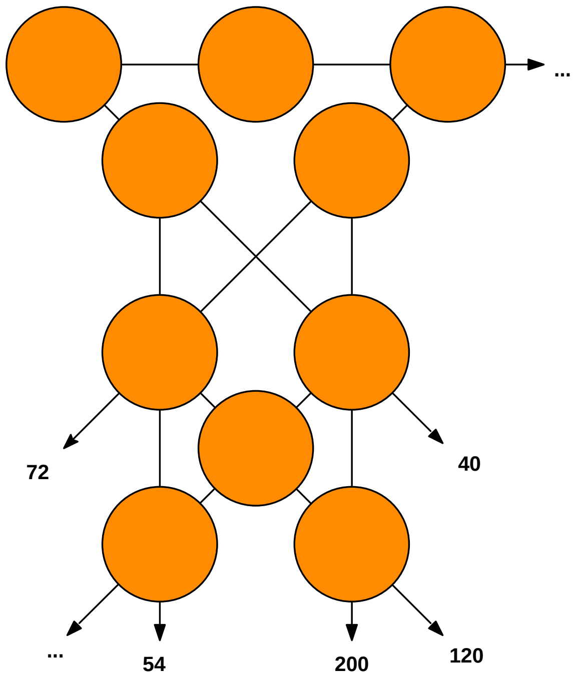


L'observation des reports de l'inventaire des objets de l'espace physique sur papier (espace géométrique du plan) donne de précieuses indications sur la maîtrise, par l'élève, de toutes les connaissances évoquées précédemment :

- si deux figures isométriques apparaissent dans l'inventaire, c'est que la capacité de les tourner ou de les retourner mentalement n'est pas mobilisable ;
- s'il manque un type de figures, les « non convexes » par exemple, c'est la notion de « polygone » qu'il s'agira d'étendre ;
- si l'inventaire est incomplet, on entre dans le domaine de la combinatoire et des méthodes permettant d'assurer l'exhaustivité ;
- …

IV – 2 Exemple 2

Produits en ligne



Disposez les dix nombres de 1 à 10 dans les cercles de cette figure, de telle manière que le produit de trois nombres alignés soit le nombre indiqué en fin de ligne.

Calculez les deux produits manquants.

Combien y a-t-il de manières de disposer ces dix nombres ?

Voici l'analyse de la tâche de « Produits en ligne » rédigée lors de l'élaboration du problème du RMT :

« …

- Vérifier qu'il y a bien dix cercles, et que chaque produit indiqué ou manquant correspond à un alignement de trois cercles, constater que chaque produit donné peut être celui de trois nombres de 1 à 10, mais qu'il y a en général plusieurs solutions;
- Commencer à placer trois nombres d'un alignement et vérifier si le choix et les emplacements des trois nombres sont compatibles avec les autres alignements, puis continuer ainsi par essais successifs jusqu'à la disposition complète (ce qui ne permet pas de déterminer le nombre de solutions).
- Travailler par décomposition des nombres en facteurs et par déductions successives sur les emplacements de certains d'entre eux. Par exemple, comme aucun des nombres donnés ne contient 7 dans sa décomposition, celui-ci est obligatoirement dans le cercle du centre de la ligne supérieure, le 9 doit être dans la ligne « 54 » qui contient trois facteurs « 3 » (3 et 6 ne suffiraient pas) et, ne pouvant être dans la ligne « 120 » ni dans la ligne « 40 », il est obligatoirement dans le cercle du bas à gauche, … »

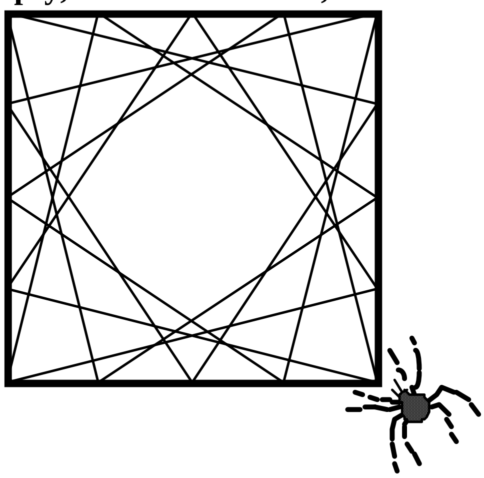
Dans cet exemple, le matériel (10 jetons numérotés de 1 à 10) n'apporte pas une grande aide à la résolution du point de vue des notions mathématiques en jeu : multiples et diviseurs, critères de divisibilité, déductions et organisation logique. Mais on a remarqué qu'il incite les élèves à essayer ou à s'engager dans le problème. Il évite aussi les répétitions de nombres puisque les 10 jetons ont déjà pris en charge la partie de la consigne : « Disposez les dix nombres de 1 à 10 … ». Il permet aussi de gagner un temps précieux dans les essais : plutôt que de dessiner des grilles et de les compléter, on déplace les jetons, mais, en contrepartie, on n'aura pas de mémoire des essais pour les phases de validation ou d'exploitation des recherches.

IV – 3 Exemple 3

Toile d'araignée

L'araignée Tipsy est très contente car sa toile est très régulière et elle n'a utilisé qu'un seul fil pour la tisser (voir figure ci-dessous).

Construisez la toile de Tipsy, de la même forme, sur le cadre.



Le matériel de « Toile d'araignée » est une plaquette de bois avec des clous disposés en carré, 17 sur chaque côté, et un long fil légèrement élastique dont l'une des extrémités est nouée sur le clou du sommet inférieur droit. La manipulation exige un peu d'habilité pour passer le fil sur les clous sans l'emmêler, mais la plupart des enfants y parviennent, dès l'âge de 7 à 8 ans.

Le même problème, sur papier, dans un cadre purement géométrique, fait intervenir la règle et la mesure. La construction de l'objet « toile d'araignée » réduit la mesure ou le mesurage à un comptage, qui n'est cependant pas facile puisqu'il y a un conflit entre le numéro d'ordre des clous sur un côté et les intervalles (le milieu d'un côté sur lequel sont plantés 17 clous est situé au 9^{e} ! et le quart au 5^{e} ! ce qui provoque un « détour » intéressant par le cadre numérique). Le modèle de la toile d'araignée est constitué d'un seul fil, il diffère en cela de la figure géométrique constituée de segments indépendants.

Il y a donc, dans le passage de la manipulation au dessin sur papier, une opportunité à exploiter pour la construction de connaissances numériques (pré-mesure) et géométriques dans les premières années de l'école élémentaire.

V – CONCLUSION

Les manipulations proposées poursuivent les mêmes objectifs que les problèmes dont ils sont tirés.

Même si la présence du matériel facilite parfois la recherche, il est toutefois nécessaire d'aller au-delà des mots et des phrases notées pour en approfondir la signification :

Les phrases « faire des mathématiques en résolvant des problèmes » et « promouvoir la résolution de problèmes pour améliorer l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques » mettent en relation directe les mots « problème » et « mathématiques » et peuvent faire croire à une inférence logique entre « résoudre des problèmes » et « faire, comprendre ou construire des mathématiques ».

Il faudrait plutôt dire : « en résolvant des problèmes, il est plus probable que l'élève construise des connaissances mathématiques qu'en regardant la TV » ou « une part des mathématiques se construit à partir de la résolution de problèmes ».

Les mots « problème » et « résolution de problème » ne sont pas des formules magiques qu'il suffit d'invoquer pour que s'opère la construction des notions mathématiques sous-jacentes. La théorie des situations didactiques l'explique largement : il y a un jeu subtil et complexe entre l'activité de l'élève en résolution de problème et l'élaboration de ses connaissances, régi par le milieu et orchestré par le maître (Grugnetti et al., 2005).

Il faut être conscient que l'élève qui se lance dans l'une de ces manipulations va chercher, tenter de surmonter ou de contourner quelques obstacles, arriver à une solution (juste, fausse, complète ou incomplète) ou encore abandonner en cours de route. Dans un cas comme dans l'autre, il y a tout un travail à développer, où le maître a un rôle essentiel : relance en cas d'obstacle trop important, validation, évaluation, généralisation, institutionnalisation, pour s'assurer que l'activité participe à la construction d'une connaissance mathématique.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

GRUGNETTI L., JAQUET F., TIÈCHE CHRISTINAT C. (2005) Enjeux didactiques des concours mathématiques, in M.H. Salin, P. Clanché, B. Sarrazy (Eds), *Sur la théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage, Editions, 243-248.

GRUGNETTI L., JAQUET F. (2005) Problemi da risolvere con materiale manipolativo/ Problèmes a résoudre par manipulations, *L'educazione Matematica*, Anno XXVI-Serie VIII-Vol. 1, n. 1, Ed. CRSEM, 36-48.

COMMENT UTILISER MATHENPOCHE EN CM2 ?

Ghislaine GUEUDET
Maître de Conférences, IUFM de Bretagne
IREM de Rennes
Ghislaine.Gueudet@bretagne.iufm.fr

Typhaine LE MÉHAUTÉ
Prag, IUFM DE BASSE NORMANDIE
Typhaine.lemehaute@wanadoo.fr

Résumé
Les bases d'exercices se multiplient sur Internet et sont de plus en plus utilisées par les enseignants. Nous avons proposé aux participants à cet atelier de réfléchir aux scenarii d'usage de ce type de ressources. Des scenarii testés en classe de CM2 pour la base d'exercices «Mathenpoche» ont constitué le point de départ de la réflexion.

Mots-clés : Proportionnalité - liaison CM2-6ème - exercices de mathématiques en ligne - ressources Internent – scénario.

A tous les niveaux scolaires, l'emploi de ressources en ligne de type «base d'exercices» dans l'enseignement des mathématiques s'est rapidement répandu ces dernières années (Cazes & al., 2005). Au collège, la base d'exercices «Mathenpoche» rencontre un succès croissant. Nous avons pu constater que certaines ressources Mathenpoche conçues pour la classe de sixième étaient même utilisées par des professeurs des écoles en classe de CM2. Nous avons par ailleurs participé, dans le cadre d'une recherche INRP, à l'élaboration d'un corpus d'exercices Mathenpoche sur la proportionnalité spécifiquement destinés à la classe de CM2.

Notre objectif dans cet atelier n'était pas de présenter Mathenpoche, ni même de discuter les choix faits pour l'élaboration du logiciel ou la pertinence de son emploi en CM2.

Nous avons souhaité adopter dans cet atelier une toute autre démarche, que l'on peut résumer de la manière suivante :

Nous partons du principe que des enseignants de CM2 vont utiliser Mathenpoche. Il ne s'agit pas pour nous d'encourager ou de nous opposer à ce choix, mais d'accompagner les enseignants qui le font en leur proposant des scénarii d'usage raisonnés de cette ressource.

Cet objectif nous a conduites à proposer aux participants la consigne suivante :

« Vous êtes enseignant en CM2, votre classe comporte 25 élèves et vous disposez de 14 postes informatiques reliés à Internet. Vous avez décidé d'utiliser la série Proportionnalité / Liaison CM2-6ème de Mathenpoche. Proposez une mise en œuvre possible en classe, en présentant un scénario d'usage adapté ».

Avant que les participants ne se penchent sur des scénarii d'usage, nous avons proposé une rapide description de Mathenpoche, présentée ici en partie I. Lors de la deuxième partie de l'atelier, nous avons également fourni en support à la discussion des exemples de scénarii d'usage possibles ; ceux-ci sont repris dans la partie II, dans laquelle nous précisons au préalable ce que nous entendons par l'expression « scénario d'usage ». Enfin dans la partie II, nous synthétisons les échanges que nous avons eus avec les participants.

I – MATHENPOCHE : RAPPEL RAPIDE DE LA STRUCTURE

Mathenpoche est avant tout une base d'exercices de mathématiques pour le collège. En juin 2005, les niveaux sixième et cinquième étaient complets ; le niveau quatrième en cours de réalisation ; des exercices expérimentaux de niveau troisième-seconde étaient en ligne ; des travaux étaient en cours pour les lycées, lycées professionnels et pour le premier degré.

La dernière version des exercices pour la sixième peut être consultée à l'adresse : `http://www.sesamath.hautesavoie.net/mathenpoche_test/6eme/pages/menu.html.`

(Pour les autres niveaux, il suffit d'adapter l'adresse).

I – 1 Mathenpoche, côté élève, pour le niveau sixième

Un élève peut librement accéder à Mathenpoche. Cependant, le plus souvent, l'élève travaille en classe, sur des séances programmées par l'enseignant (voir ci-dessous).

L'élève va rencontrer une liste d'exercices, chacun étant caractérisé par un titre. Les titres sont présentés en colonnes sur l'écran, l'enseignant choisit d'imposer ou non un ordre d'accès aux exercices. Chaque exercice comporte 5 ou 10 questions ou problèmes indépendants. Il n'est pas possible, même si on a déjà travaillé sur le logiciel, de débuter un exercice par le problème 3 ou 4 ; tous les problèmes doivent être traités dans l'ordre.

Il y a différents jeux de valeurs numériques possibles, qui sont proposés de manière aléatoire. Les différents jeux de valeurs sont évidemment soigneusement choisis par les concepteurs. Ainsi même si un élève refait un problème, il a très peu de chances de retomber sur le même jeu de valeurs. Parfois même l'ordre des problèmes au sein d'un exercice est aléatoire.

Lorsque l'élève accède à un exercice, un énoncé de problème apparaît à l'écran, problème que doit résoudre l'élève. Il doit noter sa réponse dans la (ou les) case(s) prévue(s) à cet effet puis valider sa proposition.

La plupart du temps une calculatrice basique est à disposition des élèves. Il suffit de cliquer sur "calculatrice" pour la faire apparaître et la rendre opératoire.

Prise en compte de la réponse de l'élève :

- si l'élève donne la réponse attendue, l'affichage "Bravo" apparaît et le compteur du score est mis à jour ;

- si l'élève se trompe, il en est averti et on lui propose d'utiliser une aide pour corriger son erreur. S'il parvient à donner la bonne réponse, son compteur des scores sera mis à jour (+ 1) ;
- si l'élève se trompe à nouveau, la lecture de l'aide lui est imposée et la réponse au problème est finalement donnée (dans la plupart des exercices, après un second essai infructueux).

Dans le niveau sixième, l'aide est la même pour un même exercice (plusieurs problèmes). Elle se présente comme un nouveau problème qui sera résolu petit à petit devant les yeux des élèves. Des éléments plus pertinents par rapport aux compétences visées sont mis en valeur (changement de couleur, ou de taille de police) au fur et à mesure de leur apparition à l'écran.

Pour les exercices du sous-chapitre « Liaison CM2-sixième » dans le chapitre « proportionnalité », les choix sont différents : l'aide est toujours accessible, même si l'élève ne fait aucune erreur ; des solutions rédigées (deux solutions différentes en général) sont proposées après la validation par l'élève de sa réponse. De plus, le premier problème de chaque exercice a des valeurs numériques fixes et sert de support à l'aide.

Un bref descriptif de cette série a été fourni aux participants lors de l'atelier ; il est donné en annexe.

I – 2 Mathenpoche, côté professeur

Lorsqu'un enseignant est inscrit comme « testeur », il peut utiliser la version « réseau » de Mathenpoche.

Il doit rentrer les noms de ses élèves et attribuer à chacun un login et un mot de passe. Il peut organiser les élèves inscrits en groupes.

Il peut ensuite programmer des séances, en choisissant le contenu mathématique de celles-ci parmi les exercices de Mathenpoche. Les séances peuvent être les mêmes pour un groupe, ou bien elles peuvent être différenciées selon les élèves. Par ailleurs, l'enseignant fixe la durée de la séance ; ainsi il peut choisir que les élèves accèdent à une séance qu'il a programmée seulement pendant le temps de la classe, ou aussi en dehors.

Enfin, l'enseignant peut choisir d'imposer ou non un ordre d'accès aux exercices, et de le conditionner ou non à un taux minimal de réussite à l'exercice précédent.

L'enseignant a également accès à un outil de suivi des élèves. Il peut les suivre « en direct », pendant les séances en classe : à partir du poste enseignant, il visualise le déroulement du travail de chaque poste élève.

Il peut aussi imprimer un bilan de la séance ; il y a une partie du bilan qui donne des informations sur le travail de l'ensemble de la classe, et une partie pour chaque élève, ou binôme d'élèves (en fait pour chaque poste). On sait quels exercices ont été abordés, combien de questions ont été faites, si elles ont été réussies à la première tentative, à la deuxième tentative, ou pas ; combien de temps a été passé sur l'exercice…

Bilan groupe : 4 élèves, moyenne : 2 exercices par élève, **Description des exercices**, **Imprimer**

6N1s1ex2	Quel est le chiffre des ... ?	scores : ~ 2/2 | – 2 | + 2	réussite : ~ 100 %
6G0s2ex1	Comment valider une réponse ?	scores : ~ 2/2 | – 2 | + 2	réussite : ~ 100 %
6G0s2ex2	Les aides animées	scores : ~ 3/3 | – 3 | + 3	réussite : ~ 100 %
6G0s2ex4	La calculatrice	scores : ~ 3/3 | – 3 | + 3	réussite : ~ 100 %
6G0s2ex5	Les caractères spéciaux	scores : ~ 2/5 | – 0 | + 4	réussite : ~ 40 %

LOBATO Rafael, 5 exos, moyenne :5.80/10, réussite : 88 %, temps moyen :00:01:32, Imprimer

6N6s1ex3	Proportionnalité ou pas ?	4/5	80 %	00:00:23	
6N7s2ex1	Construction de diagrammes à barres.	10/10	100 %	00:05:20	
6N1s1ex1	Entiers et espaces.	3/10	75 %	00:00:28	
6N1s1ex1	Entiers et espaces.	5/10	83.33 %	00:01:10	
6N1s1ex2	Quel est le chiffre des ... ?	3/10	100 %	00:00:17	

■ : réussi dès le premier essai ■ : réussi après un essai ■ : échec ■ : non abordé

II – EXEMPLES DE SCENARII D'USAGE

Dans cette partie nous allons brièvement préciser ce que nous entendons par scénario d'usage. Nous donnerons ensuite deux exemples de scénarii possibles à partir de la ressource retenue pour l'atelier, adaptés de scénarii qui ont été utilisés lors de la discussion sur les propositions des participants en seconde partie d'atelier.

II – 1 Les scenarii d'usage

Le terme de scénario a de multiples sens. Dans le contexte informatique, il est utilisé en particulier pour décrire certains choix des concepteurs d'un logiciel : « le scénario d'apprentissage » qu'ils ont pu retenir. Ici ce n'est pas de cet aspect qu'il s'agit. Le « scénario d'usage » est pour nous l'ensemble des modalités d'utilisation d'un logiciel mises en place dans une classe.

Quels sont les éléments à prendre en compte pour décrire un scénario ? Nous nous référons ici à Cazes et al. (2005). Voici la grille d'analyse de scénario proposée dans ce texte.

Organisation : séances machine / séances classiques.	Répartition
	Contenu mathématique
	Nature des séances sans ordinateurs
	Articulation entre séances machine et autres séances
	Rôle de l'ordinateur dans l'évaluation.
Enseignant	Rôle dans le choix de scénario
	Rôle pendant les séances machine
	Rôle pendant les autres séances
	Emploi des suivis informatiques
Elèves	Traces écrites attendues en séance machine
	Travail seul / en binôme / en groupe en séance machine
	Travail sur l'ordinateur en dehors des séances

Table 1 : Grille d'analyse d'un scénario d'usage.

Cette grille propose des éléments à prendre en compte pour la description, ou la mise en œuvre, d'un enseignement de mathématiques recourant à un logiciel de type « base d'exercices en ligne ».

Un scénario d'usage peut être décrit avec plus ou moins de précisions, en particulier suivant l'échelle de temps considérée. Pour l'atelier, nous nous plaçons à l'échelle d'une séquence.

II – 2 Deux exemples de scenarii

Voici deux exemples de scénarii d'usage possibles en classe de CM2. Ceux-ci s'inspirent d'enseignements que nous avons pu mettre en place, mais ils n'ont pas été testés tels quels.

II – 2.1 Scénario d'usage 1 : diagnostic initial sur des problèmes de quatrième proportionnelle puis différenciation

<table>
<tr><td>Séance 1 : Prise en main du logiciel.</td><td colspan="2">Travail en binôme sur la fiche « Combien ». Les élèves font les deux premiers problèmes sans intervention de l'enseignant. Ensuite une mise en commun est faite sur les fonctionnalités du logiciel (emploi par l'enseignant d'un vidéoprojecteur).</td></tr>
<tr><td>Séance 2 : Évaluation diagnostique.</td><td colspan="2">Travail sur ordinateur en individuel avec la série « Combien » (un seul accès à la série). Suivant le nombre de postes disponibles, cette séance pourra être faite en plusieurs fois.</td></tr>
<tr><td>Séance 3 : Différenciée.</td><td>Pour les élèves qui ont réussi l'évaluation (ayant obtenu 4/5 ou 5/5): travail sur ordinateur en binôme en autonomie sur les séries « Recettes », «Augmentation-Réduction ».

Consigne supplémentaire : ils doivent choisir dans chaque série un exercice, en noter l'énoncé, et le rédiger soigneusement, sans le support de l'ordinateur.</td><td>Pour les élèves qui n'ont pas réussi l'évaluation (ayant obtenu 3/5 ou moins) :

travail avec l'enseignant sur des problèmes simples de calcul de quatrième proportionnelle, et sur des problèmes de comparaison.</td></tr>
<tr><td>Séance 4 : Classe entière, salle classique, avec vidéo projecteur.</td><td colspan="2">Travail sur le thème des problèmes de comparaison. Des problèmes sont donnés sur papier, puis l'enseignant utilise un vidéo projecteur avec l'aide de « comparaison ».</td></tr>
<tr><td>Séance 5 : Différenciée.</td><td>Pour les élèves qui avaient réussi l'évaluation initiale : travail sur papier avec des exercices de type « Recettes », «Augmentation-Réduction ».</td><td>Pour les élèves qui n'avaient pas réussi l'évaluation initiale: travail sur ordinateur en binôme en autonomie sur la série « Comparaison ».

Consigne supplémentaire: ils doivent choisir dans cette série un exercice, en noter l'énoncé, et le rédiger soigneusement, sans le support de l'ordinateur.</td></tr>
<tr><td>Séance 6 : Préparation des échanges.</td><td>Confection par groupes d'affiches sur les thèmes : « Résoudre de différentes façons un problème de recettes », « Résoudre de différentes façons un problème d'augmentation ».</td><td>Confection par groupes d'affiches sur le thème : « Résoudre de différentes façons un problème de comparaison ».</td></tr>
<tr><td>Séance 7 : Échanges.</td><td colspan="2">Débat sur les affiches réalisées.</td></tr>
</table>

Table 2 : Description du scénario 1.

Pendant toute cette séquence, les séries « Combien », « Comparaison », « Recettes » « Augmentation -Réduction » sont accessibles en dehors des séances en classe pour tous les élèves.

II – 2.2 Scénario d'usage 2 : Travail sur les problèmes d'agrandissements, avec une situation de découverte « classique », une institutionnalisation puis l'entraînement sur Mathenpoche

Séances 1 et 2 : traditionnelles	Travail sur la situation « Puzzle ».
Séance 3 : Synthèse/ institutionnalisation	Synthèse/institutionnalisation suite à la situation « Puzzle ».
Séance 4 et 5 : Demi-groupes, papier et logiciel	Un demi-groupe travaille en individuel sur l'ordinateur. Fiches accessibles : « Augmentation-réduction » avec une réussite minimum de trois sur cinq. Puis « Combien, Comparaison, Recettes, » sans réussite imposée. L'autre demi-groupe travaille sur des problèmes de même type sur papier, dont 4 problèmes de type agrandissement. Échange des rôles à la deuxième séance.
Séance 6 : synthèse	Synthèse suite au travail sur Mathenpoche sur le thème « problèmes d'augmentation et de réduction ».

Table 3 : Description du scénario 2.

Bien entendu il faudrait tester tous ces scénarii ! Ici notre objectif était uniquement de proposer des exemples de scénarii aux participants comme support à leur réflexion.

III – ÉCHANGES LORS DE L'ATELIER

La réflexion sur les scénarii d'usage d'une ressource ne peut pas faire l'économie d'un temps d'appropriation de cette ressource. C'est sans doute pourquoi les échanges sont restés surtout centrés sur une analyse de la base Mathenpoche, et ont abouti à de premiers conseils d'usage, sans déboucher sur un réel scénario.

Les participants ont souligné que la disponibilité individuelle des exercices lors de la séance permet de respecter le rythme de travail de chaque élève. D'autre part la possibilité pour l'enseignant testeur de proposer différentes progressions pendant une même séance (en organisant sa classe en plusieurs groupes) facilite la différenciation. Notons que les expérimentations effectuées ont montré que de nombreux élèves pouvaient travailler longuement sur Mathenpoche sans intervention de l'enseignant, ce qui facilite d'autant la prise en charge des élèves en difficulté.

Une discussion s'est engagée sur la forme choisie pour l'aide. Dans la série utilisée pour l'atelier, l'aide est la même pour tous les problèmes d'une fiche. Est-ce que cela peut réellement aider les élèves ? On sait que la question des aides à la résolution de problèmes est délicate (Julo, 1995), en particulier lorsqu'il s'agit de les prévoir *a priori* pour concevoir un logiciel (Hersant, 2001). Cependant, ici les choix de conception apparaissent discutables sur ce point. En particulier, chaque fiche comporte un problème « intrus » (nous nous sommes inspirés sur ce point de la structure du moniteur de mathématiques (Vergnaud et al., 1997)) ; or l'aide est encore accessible pour ce problème intrus, alors même qu'elle n'est évidemment pas adaptée ! Les participants ont souligné par ailleurs que cette forme d'aide ne prend pas en compte la procédure de l'élève. Ce point pose plusieurs questions :

- Quel lien l'élève peut-il faire entre son travail et l'aide proposée ?
- Sur quoi vont porter les mises en commun ?

Un autre choix des concepteurs de la série « Liaison CM2-Sixième » a suscité des avis partagés des participants. En effet, pour chaque problème nous avons choisi de proposer une ou deux solutions détaillées. Celles-ci apparaissent automatiquement après l'envoi par l'élève d'une réponse juste, ou de deux réponses erronées. Quels peuvent être les effets de la lecture attentive d'une réponse détaillée ? Un impact positif a été constaté lors d'expérimentations sur des étudiants à l'université, mais peut-on l'espérer sur des élèves plus jeunes ?

Tout ceci va plutôt dans le sens de modifications de la ressource, suggérées aux concepteurs. Étant donné l'objectif initial de l'atelier, et en particulier notre souhait d'éviter des discussions sur la pertinence de l'outil, en admettant qu'il serait certainement utilisé quoiqu'il advienne, et qu'il convenait pour nous de pouvoir accompagner cette utilisation, ces interrogations ont débouché sur les premiers conseils qui semblent devoir être respectés pour une utilisation optimale de la ressource. Dans le souci de prendre en compte les procédures de l'élève, les participants ont suggéré l'usage d'une trace écrite pendant les séances. Un carnet de bord de ce type a été introduit effectivement dans certaines classes, reprenant totalement les problèmes abordés. Après expérimentation, une version plus légère semble souhaitable, pour ne pas faire double emploi avec le logiciel.

Ces traces écrites devraient permettre des mises en commun sur les procédures utilisées par les élèves. Ce point a été reconnu comme un passage obligé pour tous les participants. Il ouvre d'autres questions : à quel moment faire ces mises en commun ? Plutôt lors d'une séance-machine ou lors d'une séance classique ? Faut-il alterner séances-machine et séances classiques ? Quel lien peut-on faire entre ce travail et l'aide fournie par le logiciel ?

Les participants ont conclu sur la nécessité d'alterner séances-machine et séances classiques, pour s'adapter aux atouts et manques du logiciel. Ainsi le logiciel ne prenant pas en compte la procédure de l'élève, on peut suggérer une mise en commun sur ces procédures lors d'une séance classique, puis une séance-machine en phase de stabilisation, pour demander à l'élève d'identifier d'une part sa procédure, et d'autre part la procédure proposée par l'aide. Un débat s'est ouvert sur la pertinence de Mathenpoche pour la mise en place d'une activité de découverte, la plupart des participants préférant une séance classique pour cette phase.

Soulignons l'importance du contenu abordé lors de ces discussions : la diversité des procédures est effectivement au centre d'un enseignement de la proportionnalité, et est difficilement prise en compte par ce type de ressource.

IV – CONCLUSION

L'atelier a débouché sur une interrogation des formateurs présents, quant à la place de telles ressources dans la formation. Doit-on présenter ces ressources et encourager leur usage ? Cette initiation aurait-elle sa place en formation initiale ou continue ? Une formation sur ce type de ressource doit-elle plutôt cibler les enseignants qui l'utilisent déjà ? Quels sont en ce cas leurs besoins ? Ces questions dépassent le cadre de notre atelier, mais ouvrent d'autres perspectives de travail…

BIBLIOGRAPHIE

BOISNARD D., HOUDEBINE J., JULO J., KERBOEUF M.-P., MERRI M. (1994) La proportionnalité et ses problèmes, *Hachette éducation, Paris.*

CAZES C., GUEUDET G., HERSANT M., VANDEBROUCK F. (2005) *Utilisation de bases d'exercices en ligne : quelles conséquences pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ?*, in Actes du séminaire de didactique des mathématiques 2005, à paraître.

HERSANT M. (2001) Interactions didactiques et pratiques d'enseignement - Le cas de la proportionnalité au collège, *Thèse de doctorat de l'IREM de Paris 7.*

JULO J. (1995) Représentation des problèmes et réussite en mathématiques, *Presses universitaires de Rennes.*

VERGNAUD G. ÉD. (1997) Le Moniteur de Mathématiques : résolution de problèmes Niveau 2-3 (CM1 - CM2) Cycle3, *Nathan, Paris.*

ANNEXE : PROBLÈMES SUR LA PROPORTIONNALITÉ POUR LE CM2

Choix de structure pour la série «Proportionnalité, Liaison CM2/6ème»

- Il y a pour le moment 6 fiches sur la proportionnalité. Chacune de ces fiches comporte 5 problèmes ;
- chaque fiche correspond à un type de problème, suivant la classification des problèmes de proportionnalité proposée par G. Vergnaud et par l'IREM de Rennes (voir ci-dessous le descriptif du contenu) ;
- il y a pour chaque problème au moins une solution détaillée, la plupart du temps deux solutions possibles ;
- il y a dans chaque fiche (sauf la 5) un problème « intrus », c'est-à-dire un problème qui n'est pas un problème de proportionnalité, ou bien qui relève de la proportionnalité inverse… Nous avons choisi cette solution, plutôt que de faire une fiche de type « proportionnalité ou pas » ;
- l'aide est toujours accessible, la calculatrice est toujours autorisée ;
- le premier problème de chaque fiche sert de support à l'aide. Il est donc en quelque sorte « neutralisé », en particulier il y a un seul jeu de valeurs.

Contenu des fiches

- Fiche 1 : Combien ?

Ces problèmes portent sur le calcul d'une 4ème proportionnelle. Il y a toujours en jeu exactement deux grandeurs, de natures différentes.

- Fiche 2 : Recettes

Ces problèmes portent sur des recettes de cuisine. On demande de calculer les quantités nécessaires de un ou plusieurs ingrédients, en donnant soit la quantité d'un des ingrédients soit un nombre de personnes.

- Fiche 3 : Comparaison

La tâche dans ces problèmes est d'effectuer une comparaison, portant sur la rapidité. Les grandeurs en jeu sont donc des distances, et des durées. Dans le dernier problème il y a des nombres décimaux simples.

- Fiche 4 : Augmentation, réduction.

Ce sont des problèmes de calcul d'une quatrième proportionnelle, avec deux grandeurs de même nature.

- Fiche 5 : A chacun son problème

Problèmes de proportionnalité simple composée.

- Fiche 6 : Par heure, par jour, par semaine

Ce sont des problèmes de proportionnalité double, qui font tous appel à des durées mesurées en heures ou en jour ou en semaines.

Apprenti Géomètre : un nouveau logiciel

par N. Rouche
avec la collaboration de Ph. Skilbecq

> Je souhaiterais que la tête commandât la main.
> Le Corbusier

Au cours des années 2003 et 2004, le CREM[1] a développé un nouveau logiciel appelé Apprenti Géomètre[2]. Celui-ci, malgré son nom, est un logiciel d'aide à l'apprentissage des mathématiques en général, et pas seulement de la géométrie. Il est destiné aux élèves de l'enseignement primaire et de la première moitié du secondaire. Son principe est qu'il permet d'amener à l'écran des figures diverses et de soumettre celles-ci à quelques opérations bien choisies. Il est un outil d'exploration et d'expérimentation. Il ne propose aucune séquence d'apprentissage pré-programmée.

À l'entrée dans Apprenti Géomètre, on peut choisir d'activer l'un ou l'autre de deux champs d'expérimentation : soit le *kit standard* qui amène à l'écran des figures de formes et de dimensions invariables, soit le *kit libre* qui mobilise essentiellement des figures déformables. Le premier est destiné à un premier apprentissage, le second vise des notions plus avancées. L'utilisation technique d'AG[3], et particulèrement du kit standard, est très simple. Elle ne devrait rebuter personne, même pas les enseignants ou les élèves qui éprouvent des réticences face à l'informatique. Le kit libre est également simple à manier. En outre, le passage du kit standard au kit libre ne provoque pas de dépaysement. En effet, la plupart des commandes sont les mêmes dans l'un et l'autre. De même qu'une géométrie avancée est un développement d'une géométrie élémentaire, le kit libre ne fait que développer les possibilités du kit standard.

AG a été conçu comme un champ d'expérimentation nouveau et original à la disposition des enseignants et des élèves. Il n'est pas du tout destiné à se substituer aux autres matériels d'aide à l'apprentissage des mathématiques. Il en est un complément, dont nous tentons ci-dessous de cerner l'originalité et l'utilité. Ajoutons que plusieurs des auteurs d'AG sont familiers du logiciel Cabri Géomètre, qu'ils apprécient beaucoup. Nous ne pensons pas qu'AG fasse d'aucune façon double emploi avec Cabri.

---

[1]Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, 5 rue Émile Vandervelde, B-1400 Nivelles, Belgique, <crem@sec.cfwb.be>.

[2]Apprenti Géomètre a été développé à la demande de Monsieur J.-M. Nollet, Ministre de l'Enfance de la Communauté française de Belgique. Le cahier des charges a été rédigé par une équipe comprenant Michel Ballieu, Marie-France Guissard, Guy Noël, Nicolas Rouche et Marie-Francoise Van Troeye. L'exécution technique a été confiée à la firme Abaque. Une brochure d'accompagnement (voir CREM [2003]) comprenant un mode d'emploi, des analyses théoriques et divers exemples d'utilisation en classe a été rédigée par Patricia Laurent, Christine Lemaître, Guy Noël, Nicolas Rouche, Philippe Skilbecq et Marie-Françoise Van Troeye, directrice du projet. Alain Desmarets et Bernard Honclaire ont été consultants pour le projet. Apprenti Géomètre ainsi que la brochure d'accompagnement sont disponibles en téléchargement libre à l'adresse internet <www.enseignement.be/geometre>.

[3]Ci-après, nous abrégeons Apprenti Géomètre en AG.

1 Le kit standard

Voyons maintenant en quoi consiste le *kit standard.* Il propose des *figures*, des *opérations* et des *mouvements.*

1.1 Des figures et des opérations

Les figures que l'on peut amener à l'écran sont groupées en trois ≪ familles ≫ : celle du carré, celle du triangle équilatéral et celle du pentagone régulier. Nous avons mis ≪ familles ≫ entre guillemets, car comme on va le voir, ce mot est pris ici dans un sens peu usuel. À titre d'exemple, détaillons la famille du carré. Ses membres sont les polygones que montre la figure 1, à savoir :

- un carré ;
- un triangle rectangle isocèle, celui dont on obtient deux exemplaires en coupant le carré en deux le long d'une diagonale ;
- un parallélogramme, celui que l'on obtient en accolant deux demi-carrés (deux triangles rectangles équilatéraux) ; un tel parallélogramme existe en deux variétés, images l'une de l'autre dans un miroir (voir figure 2) ; une seule de ces deux figures apparaît au départ à l'écran ;
- un octogone régulier avec un côté de même longueur que le carré ;
- un triangle isocèle, celui que l'on obtient en coupant l'octogone en huit triangles superposables.

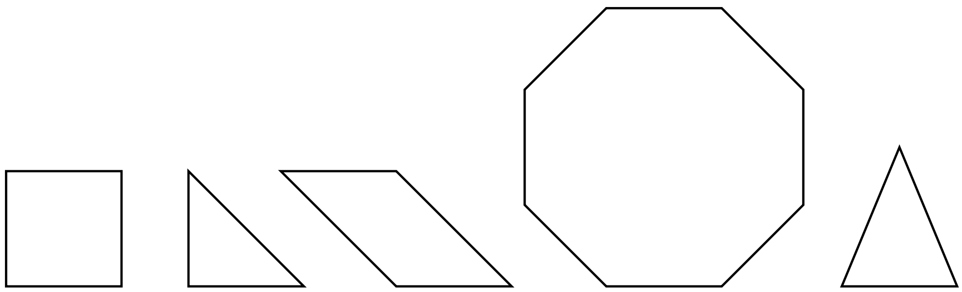


Fig. 1

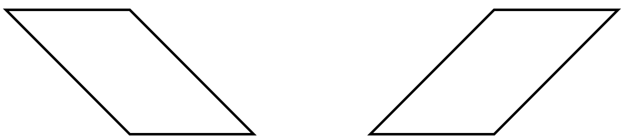


Fig. 2

Ces quelques figures sont parentes, en ce sens qu'elles ont entre elles des rapports simples de longueurs, d'angles et d'aires. Comme nous l'avons vu, on passe de certaines d'entre elles à d'autres par des opérations simples de découpage, assemblage et fusion.

Il est alors intéressant d'explorer le champ des autres figures que l'on peut créer en continuant à appliquer aux membres de la famille les mêmes opérations de *découpage, assemblage* et *fusion.* Les figures 3 et 4 donnent une idée des possibilités. Elles montrent que ces polygones s'ajustent bien les uns aux autres, et cela de multiples façons. Ces ajustements sont ce que H. Freudenthal [1973] a appelé du nom anglais de *fittings* et dont il dit : « The miracles of fitting are a preparation for systematic geometry, but even if this stage is reached, they cannot be dismissed. They remain the rough material of geometric thinking. The pupil should recall them and reconsider the old problems anew at every stage. »[4]

À l'écran, les fittings se réalisent très bien. En effet, non seulement AG dessine des figures très précises, mais encore il les ajuste automatiquement : une fonction de *magnétisme* fait que lorsque deux figures sont amenées à être presque jointives, le logiciel les accole parfaitement.

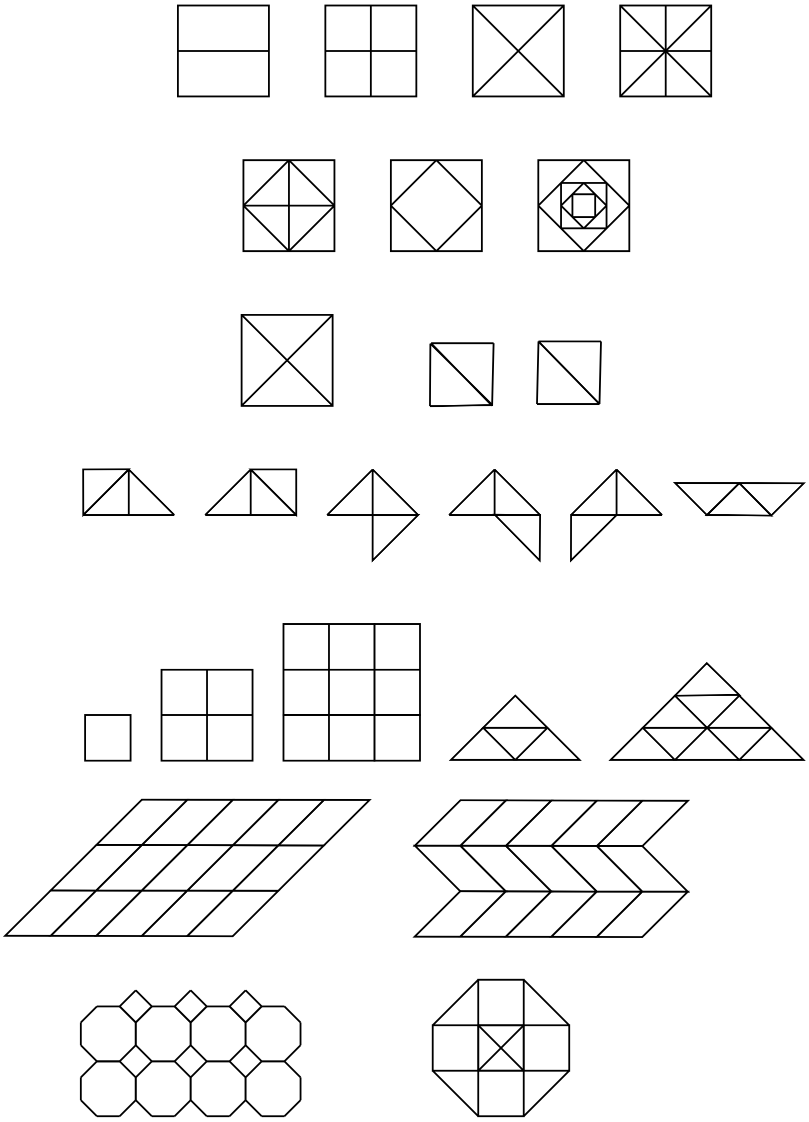


Fig. 3

[4] « Les miracles des *fittings* sont une préparation pour une géométrie systématique, mais même lorsque cette étape est atteinte, ils ne peuvent pas être abandonnés. Ils demeurent le matériau brut de la pensée géométrique. L'élève devrait se les rappeler et reconsidérer à chaque étape les anciens problèmes . »

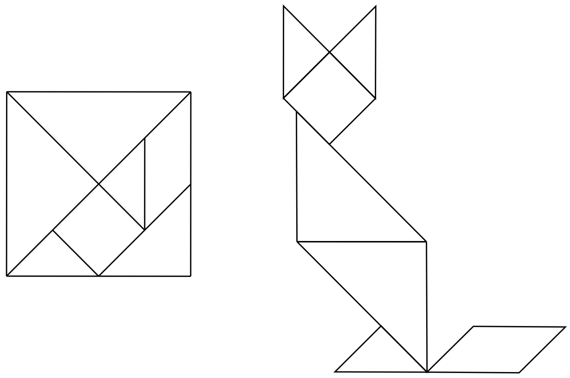


Fig. 4

1.2 Pourquoi des familles ?

La figure 5 montre la famille du triangle équilatéral et la figure 6 celle du pentagone régulier. Dans chacune de ces autres familles également, les polygones ont entre eux des rapports simples de longueurs, d'angles et d'aires qui permettent de réaliser de multiples ajustements. On laisse au lecteur le soin de les imaginer, ou mieux encore de les explorer à l'écran.

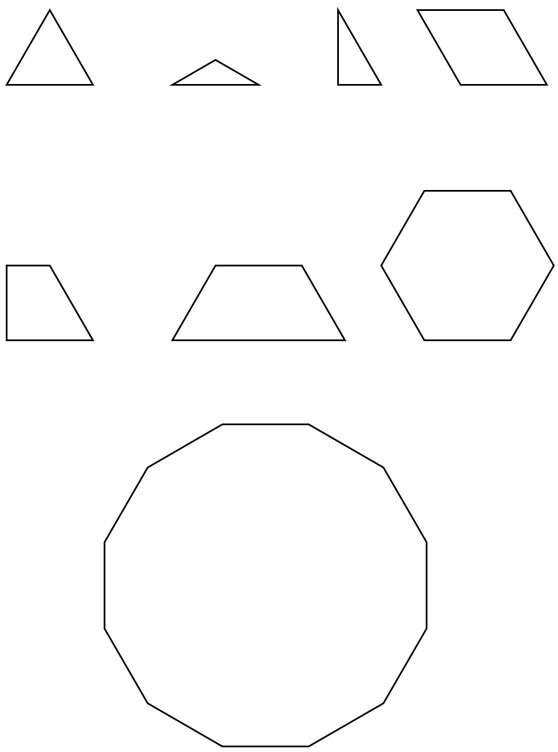


Fig. 5

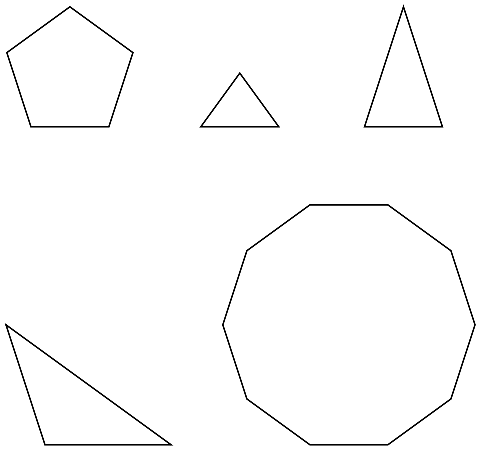


Fig. 6

Pourquoi AG propose-t-il des polygones groupés par familles, et non pas tous ces polygones ensemble, ce qui, à première vue, donnerait bien davantage encore de possibilités ? C'est que, d'une famille à l'autre, il existe beaucoup moins de ces rapports simples de longueurs, d'angles et d'aires dont nous avons montré l'existence entre les figures d'une même famille. Et donc si on met les élèves au travail dans une famille à la fois, la probabilité qu'ils découvrent une combinaison géométriquement significative est plus élevée que s'ils ont accès à tout le stock. Cette restriction n'est pas un appauvrissement, parce que d'une part les combinaisons possibles à l'intérieur de chaque famille sont très nombreuses, et d'autre part il semble difficile de parler d'appauvrissement lorsqu'on donne aux élèves davantage de chances de découvrir des phénomènes intéressants.

1.3 Des mouvements

Sur l'écran d'AG, les polygones apparaissent tous de prime abord dans la même orientation, à savoir avec un côté horizontal. Pour créer des assemblages intéressants, il faut donc les déplacer. On a prévu dans AG trois façons de déplacer une figure.

> 1) On sélectionne le verbe *glisser*[5] dans un menu déroulant. Cela permet de traîner le polygone à la souris jusqu'à un endroit quelconque de l'écran. Pendant tout le transport, le polygone conserve son orientation, avec un côté horizontal.
>
> 2) On sélectionne le verbe *tourner* dans un menu déroulant. On peut ensuite faire tourner le polygone, à la souris, d'un angle que l'on détermine à vue. Le centre de la rotation est automatiquement le centre de la figure – très exactement son centre d'inertie –, ce qui fait que celle-ci tourne en quelque sorte sur place. L'opérateur ne doit donc pas se soucier de désigner le centre.
>
> 3) On sélectionne le verbe *retourner* dans un menu déroulant, puis on clique sur la figure à retourner. Celle-ci subit alors une symétrie orthogonale. L'axe de cette symétrie est invariablement vertical, et passe par le centre de la figure. L'opérateur ne doit pas se soucier de le désigner. La figure se retourne en quelque sorte sur place.

Une combinaison appropriée de ces trois mouvements permet de soumettre la figure à un déplacement ou un retournement quelconque. Chaque mouvement est ainsi nécessairement

[5]Dans la première version du logiciel, le verbe en question était *déplacer*.

composé de mouvements élémentaires, on pourrait dire de *mouvements de base*. C'est sans doute là que se trouve la principale originalité d'AG. Comparons en effet la manipulation de polygones à l'écran, telle que nous venons de la décrire, avec ce qui lui ressemble le plus dans la pratique scolaire, à savoir la manipulation de polygones en carton sur une table. Détaillons la comparaison :

> Les cartons tombent en désordre sur la table lorsqu'on vide la boîte où on les a rangés. Les polygones d'AG apparaissent à l'écran toujours dans la même orientation.
>
> Les polygones en carton énantiomorphes[6] tombent sur la table au hasard sur une face ou sur l'autre. Dans AG, c'est toujours la même variété qui apparaît.
>
> On peut saisir plusieurs cartons à la fois, on peut les manier au petit bonheur, leur faire décrire des mouvements « sauvages », mal identifiés, parfois mal maîtrisés. Dans AG au contraire, chaque mouvement est un mouvement clair, bien identifié, appelé par son nom dans un menu déroulant. Il doit être choisi avant d'être exécuté et ne s'applique qu'à une figure à la fois.
>
> Les polygones en carton sont assemblés de façon approximative, vu les tremblements de la main, et bougent dans les courants d'air. Les polygones d'AG s'ajustent exactement entre eux grâce à la fonction magnétique, et ne peuvent quitter leur position que moyennant la commande d'un nouveau mouvement.

Ainsi, le kit standard est un champ d'expérimentation particulièrement ordonné et intelligible. Il comporte des contraintes qui n'existent pas dans l'univers réel, où la plupart des mouvements sont absolument libres. C'est un univers artificiel, accordé à la géométrie métrique. En effet, les trois mouvements de *glisser*, *tourner* et *retourner* préfigurent – jusqu'à un certain point –, les trois isométries planes de base[7] que sont la *translation*, la *rotation* et la *symétrie orthogonale*.

Les trois mouvements ne s'identifient pas aux trois isométries. Nous l'avons dit, le glissement se règle à vue, et l'opérateur ne doit nullement le définir par un vecteur désignant le point d'arrivée d'un point donné de la figure. La rotation s'effectue à vue, l'opérateur n'ayant pas à en désigner le centre et réglant son angle à l'estime. Le retournement est automatique et l'opérateur ne doit pas spécifier la position d'un axe de symétrie. Les transformations en un sens plus technique appartiennent à un stade plus avancé de la géométrie et sont, dans AG, disponibles dans le kit libre - on peut toutefois, à volonté, les activer aussi dans le kit standard -. C'est une analyse des trois mouvements qui conduit à définir les trois isométries, respectivement par un vecteur de translation, un centre et un angle de rotation ou un axe de symétrie. Les trois mouvements sont théorisés pour les besoins de la géométrie.

Il est sans doute utile d'accéder ainsi aux isométries à travers les mouvements qui les préfigurent, et en particulier d'expérimenter les enchaînements (les compositions) de ces mouvements. Notons en outre que ces enchaînements ne sont pas étudiés ici pour eux-mêmes et dans l'abstrait : ils servent à réaliser des assemblages de polygones.

Cette attention portée aux mouvements de base dans l'apprentissage de la géométrie répond bien au courant de pensée théorique et pédagogique qui, au XIX^e siècle et au début du XX^e, a cherché à réhabiliter les mouvements dans la géométrie. Ce courant est représenté

[6]Rappelons qu'on appelle *énantiomorphes* deux figures planes ayant exactement la même forme et les mêmes dimensions, et que pourtant on ne peut pas superposer en les faisant glisser dans le plan sur lequel elles sont posées. Pour les superposer, il faut nécessairement retourner l'une d'entre elles.

[7]Rappelons le théorème fondamental de géométrie plane qui dit que toute isométrie directe est une translation ou une rotation, et que toute isométrie inverse est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation. Ce théorème exprime une propriété de l'espace physique usuel.

principalement par Kirchhoff, Méray, Bourlet et Borel. Pour une synthèse à ce sujet, voir R. Bkouche [1991]. Sur les mouvements encore et sur la reconnaissance des figures et des symétries, on consultera utilement E. Mach [1922] ainsi que L. Lismont et N. Rouche [2001].

Notre présentation des mouvements dans le kit standard ne vise nullement à proposer ceux-ci comme supérieurs aux manipulations de polygones en carton. Au contraire, la manipulation des objets dans l'univers réel est indispensable. Elle relie les mouvements à des perceptions visuelles et tactiles, elle développe la motricité fine et elle apprend à abstraire d'un univers, complexe par nature, les éléments qui permettent de le reconstruire analytiquement dans le cadre de la géométrie. Notre espoir est que le kit standard soit un champ d'expérience original qui facilite, par des transferts appropriés, la compréhension du monde réel. L'expérience dira si cet espoir est fondé.

1.4 D'autres figures

Les figures disponibles dans le kit standard sont pour l'essentiel celles des trois familles dont nous avons parlé. On y a toutefois ajouté d'une part un cercle et de l'autre deux représentations en perspective d'un cube. Celles-ci sont les seules figures qui évoquent la géométrie de l'espace. L'écran étant plat par nature, il est en effet plus raisonnable de s'en servir pour étudier les figures planes. Les représentations de cube sont donc une exception, une petite commodité ajoutée. Ils permettent tout de même de créer de nombreux objets dont la figure 7 donne un échantillon.

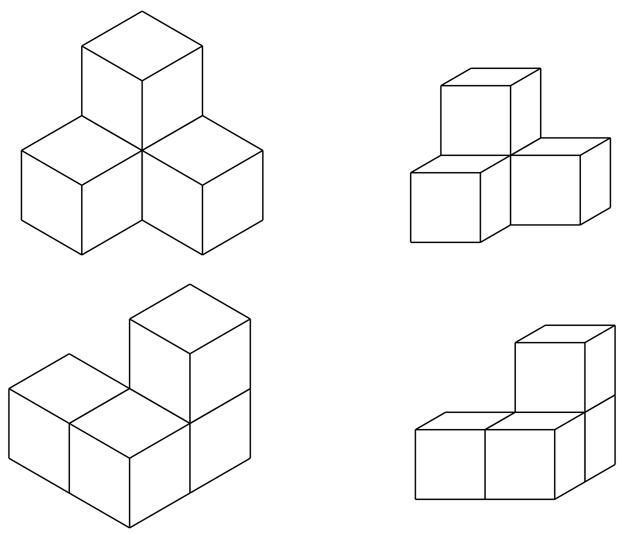


Fig. 7

1.5 Vers les fractions et les mesures

Il existe dans le kit standard une opération que nous n'avons pas encore mentionnée et qui est pourtant essentielle : en sélectionnant le verbe *diviser* dans un menu déroulant, on peut diviser un segment en 2, 3 ou 5 parties égales. En répétant cette opération, on peut obtenir des divisions en un nombre de parties multiple de 2, 3 ou 5. Les divisions sont marquées par des points. En combinant cette opération de *diviser* avec celle de *découper*, on peut créer des fractions d'une figure quelconque, tout en choisissant la forme des morceaux. La figure 8 montre ainsi une façon de couper un carré en parties possédant respectivement 1/3, 1/4, 1/6 et 1/8 de son aire totale. Ces possibilités peuvent être exploitées pour l'étude des fractions et l'introduction de la notion de mesure.

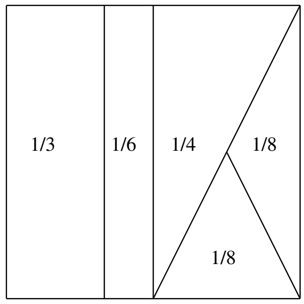


Fig. 8

2 Le kit libre

Comparé au *kit standard*, le *kit libre* permet une plus grande diversité d'expériences. Il amène à l'écran des figures variées, déformables continûment. Il permet de réaliser des isométries de figures. Il conduit à réaliser ce que nous avons appelé des fichiers dynamiques. Enfin, il met à la disposition de l'utilisateur des trames de points inspirées du géoplan. Voyons cela en détail.

2.1 Des figures continûment déformables

Pour plus de clarté, repartons du kit standard. Celui-ci amène à l'écran des figures prédéterminées. Par exemple, si l'utilisateur sélectionne *triangle équilatéral*, alors par un clic en un point quelconque de l'écran, il fait apparaître un triangle équilatéral dont il ne choisit ni la grandeur, ni l'orientation. Par contre, l'utilisateur qui a sélectionné *triangle équilatéral* dans le kit libre doit d'abord cliquer en un point A de son choix, puis en un deuxième point B, et le logiciel fait apparaître alors un triangle équilatéral dont AB est un des côtés. L'utilisateur n'a pas le choix du côté de AB où se construit le triangle, puisque ce dernier se dessine dans le sens trigonométrique. La figure 9 montre trois exemples.

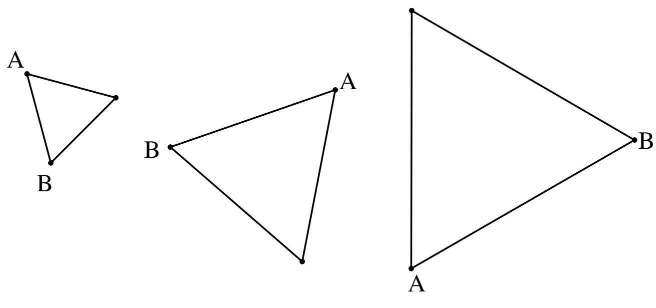


Fig. 9

Le kit libre permet d'amener à l'écran une plus grande variété de figures que le kit standard. Voyons par exemple comment se construit un parallélogramme. L'utilisateur clique en deux points A et B, qui vont donner un premier côté de la figure, puis en un troisième point C, de sorte que BC soit un deuxième côté du parallélogramme. Celui-ci, étant déterminé par la donnée de deux côtés adjacents, apparaît alors. La figure 10 montre trois exemples.

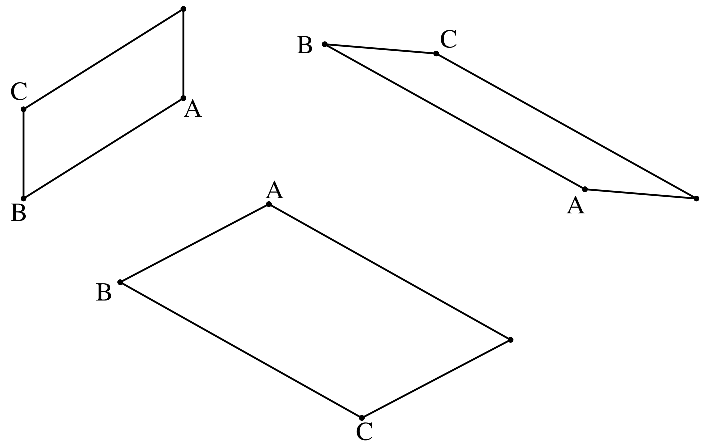


Fig. 10

En résumé, chaque figure est déterminée par sa définition et par des éléments (sommets, côtés, ...) qui suffisent à sa construction. Ce mode de construction induit des questions pédagogiquement intéressantes : par exemple, pourquoi un parallélogramme est-il déterminé par deux côtés adjacents ?

Une fois qu'une figure est tracée, on peut la modifier « à la souris » sans qu'elle cesse de répondre à sa définition. Par exemple, à partir du parallélogramme ABC de la figure 11, on peut, en tirant sur le point C, engendrer les autres parallélogrammes que montre la figure 11. On peut aussi déformer la figure en tirant sur A, B ou C, mais non sur le quatrième point. Ce type de déformation continue induit aussi des questions intéressantes : par exemple, comment se fait-il qu'en déformant un parallélogramme, on puisse obtenir un rectangle, un carré, un losange ?

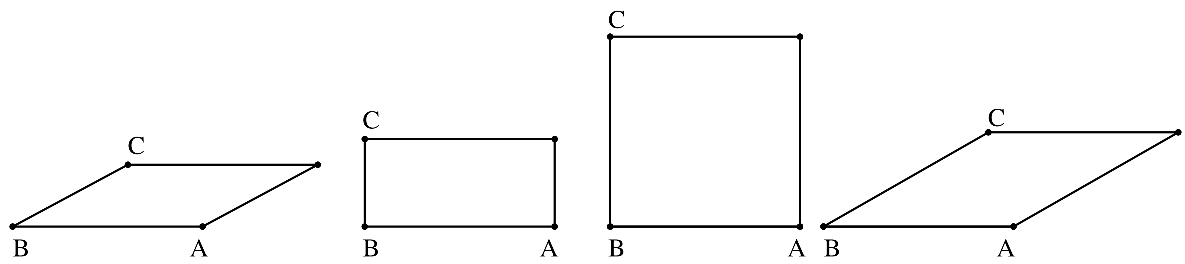


Fig. 11

Les figures disponibles dans le kit libre sont toutes les variétés classiques de triangles et de quadrilatères, les polygones réguliers depuis 5 jusqu'à 12 côtés, les polygones quelconques depuis 5 jusqu'à 10 côtés, et le cercle.

2.2 Des transformations de figures

Dans le kit libre, on peut comme dans le kit standard, glisser, tourner ou retourner les figures. Ces opérations se pratiquent au jugé, sans qu'il faille se soucier de préciser, selon le cas, une direction, un sens, une distance, un centre, un angle ou un axe. Mais le kit libre permet en outre d'appliquer à n'importe quelle figure une translation, ou une rotation ou une symétrie miroir. Voyons cela en détail.

Pour translater une figure, on doit spécifier par un segment AB la direction, le sens et la distance de la translation. La figure 12 en montre deux exemples.

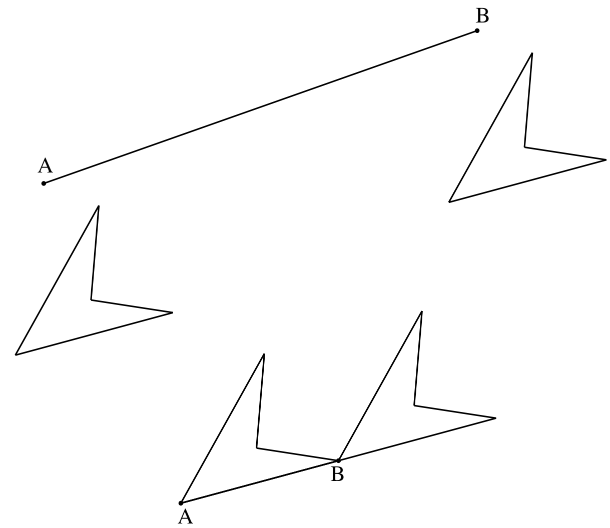


Fig. 12

Pour soumettre une figure à une rotation, on doit spécifier un centre de rotation O et un angle ABC. La figure 13 en montre deux exemples.

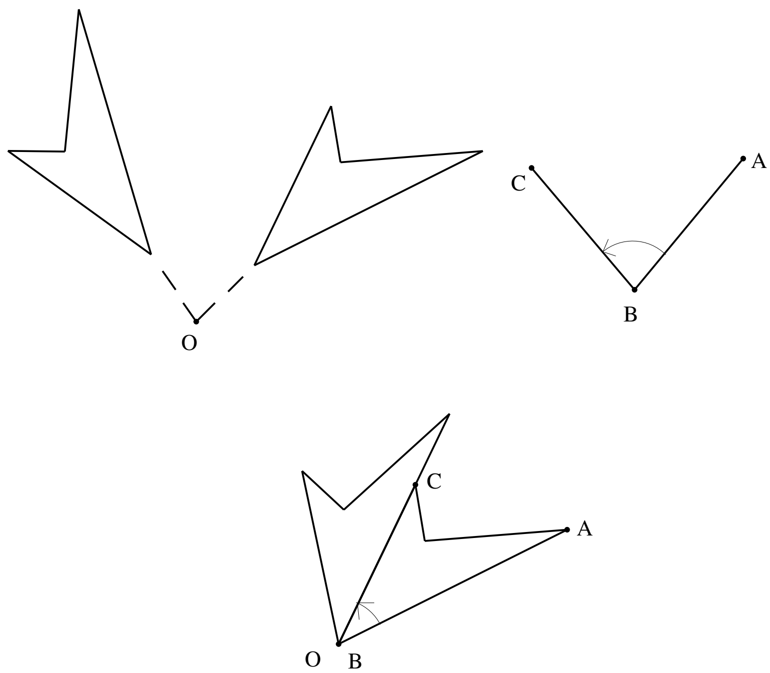


Fig. 13

Enfin, pour soumettre une figure à une symétrie miroir, on doit spécifier, par deux points A et B, l'axe de la symétrie. La figure 14 en montre deux exemples.

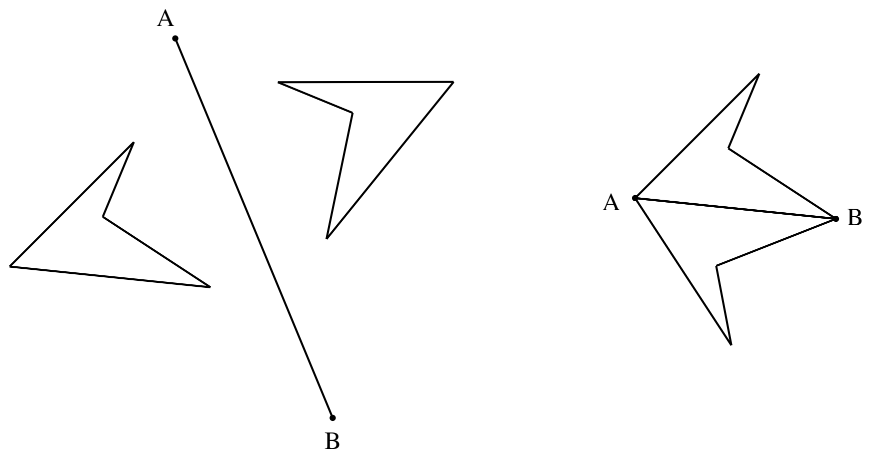


Fig. 14

Une fois qu'une isométrie a été réalisée, on peut modifier continûment, à la souris, le segment qui détermine la translation, ou le centre, ou l'angle de la rotation, ou l'axe de la symétrie. L'isométrie se modifie en conséquence. La figure 15 montre le passage, pour une figure de départ donnée (celle qui est grisée), d'un axe de symétrie AB à un autre $A'B'$ (le passage de l'une à l'autre se faisant continûment).

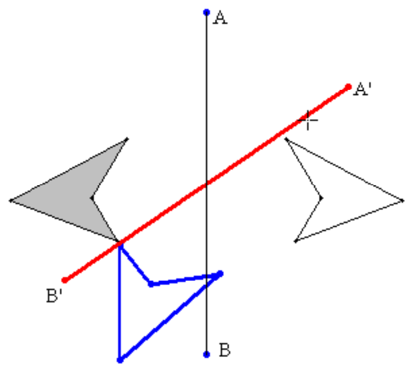


Fig. 15

La figure 16 montre par contre ce qui advient lorsqu'on ne touche pas à l'axe, mais que l'on déforme la figure en tirant le point A vers le point A'(la déformation étant elle aussi continue).

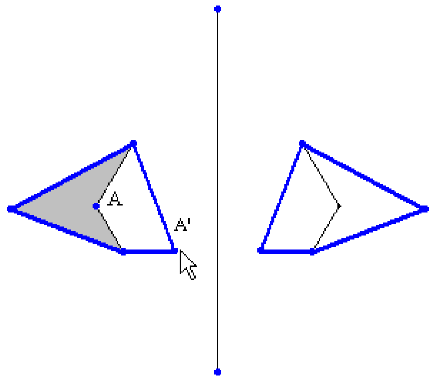


Fig. 16

2.3 Des fichiers dynamiques

Donnons un exemple de ce que l'on peut obtenir en combinant des déformations de figures et des modifications continues d'isométries. Partons d'un quadrilatère quelconque (figure 17). Par une rotation d'un demi-tour (une symétrie centrale) accolons-lui un autre quadrilatère identique. Nous obtenons ainsi un hexagone dont les côtés opposés sont parallèles et de même longueur (figure 18). Par des translations appropriées, assemblons plusieurs hexagones de ce type. Nous obtenons un pavage du plan par ces hexagones, et donc aussi par le quadrilatère de départ (figure 19).

Ceci fait, si nous déformons à la souris le quadrilatère de départ, tous les autres suivent, et le pavage entier se transforme. Les figures 20, 21 et 22 montrent trois pavages obtenus ainsi par déformation continue du pavage de la figure 19.

Nous avons appelé *fichiers dynamiques* les figures ainsi construites en enchaînant (en liant) des créations de figures et des transformations, de sorte que le résultat puisse à la fin se transformer comme un tout.

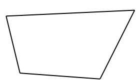


Fig. 17

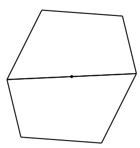


Fig. 18

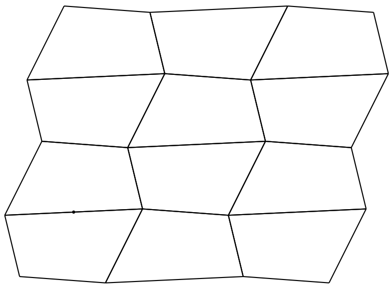


Fig. 19

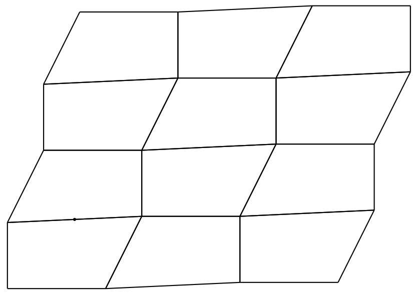


Fig. 20

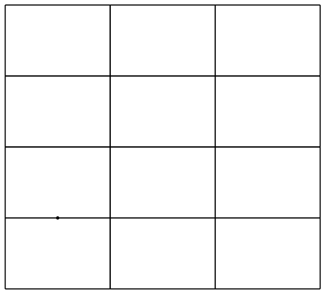


Fig. 21

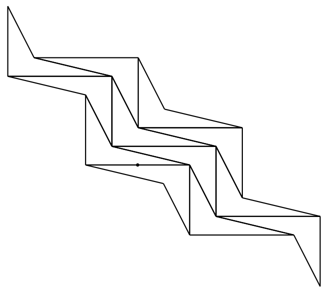


Fig. 22

2.4 Les autres possibilités du kit libre

Ajoutons enfin que les figures du kit libre peuvent, comme celles du kit standard, être découpées, assemblées et fusionnées. Le kit libre permet aussi de dessiner des perpendiculaires et des parallèles. Il permet enfin d'installer à l'écran deux trames de points, l'une à maille carrée et l'autre à maille triangulaire équilatérale. Quand ceci est fait, les sommets des polygones, grâce à la propriété magnétique, s'installent automatiquement sur des points de la trame. Ces trames réalisent à l'écran ce que l'on peut faire avec un géoplan.

3 Deux ou trois idées

Quelques mots enfin sur les principes qui ont inspiré la conception d'AG.

Le kit standard, avec ses figures invariables, aisément reconnaissables, ainsi que ses opérations et ses mouvements simples, est adapté à l'intelligence des situations (voir par exemple H. Wallon [1970]), qui correspond à ce que J. Piaget appelait le stade des opérations concrètes. En ce sens, il convient bien aux petits enfants. Néanmoins, il peut aussi être exploité beaucoup plus loin dans la géométrie euclidienne, la construction des fractions et l'élaboration de la notion de mesure.

Le kit libre par contre, avec ses figures continûment déformables, quoique répondant toujours à une définition, conduit naturellement à une mathématique raisonnée, démonstrative. Les objets qui se présentent sous une infinité d'avatars (de cas de figure) sont identifiables davantage par les propriétés qui les caractérisent que par la perception de leur forme et de leur grandeur (puisque celles-ci sont éminemment variables).

D'autre part, la constance des formes (et même des dimensions) dans le kit standard montre clairement que la géométrie qui s'y pratique est euclidienne. Le kit libre est au contraire un champ d'expérimentation des géométries affine et même projective. En ce sens, la philosophie d'AG est opposée à celle de J. Piaget et B. Inhelder [1947], pour qui l'apprentissage de la géométrie devait aller de la topologie à la projective, puis à l'affine et à la métrique. Mais cette conception de Piaget, qui mériterait pourtant d'être réexaminée en détail, semble aujourd'hui bien dépassée.

Remarquons qu'AG n'offre à l'utilisateur aucune mesure, non plus qu'aucun instrument de mesure tout fait. L'idée est que ce logiciel donne accès essentiellement aux grandeurs non encore mesurées, celles-ci étant le terrain qui motive et rend possible la construction de la notion de mesure.

Ajoutons pour terminer qu'AG est susceptible de rendre ses utilisateurs sensibles à la beauté des figures géométriques. Comme l'a si justement souligné Mach, les symétries suscitent un sentiment esthétique, élémentaire certes, mais réel, et qui est intimement associé à la compréhension des phénomènes géométriques.

3.1 La documentation

Au cours de l'année de la mise au point d'Apprenti Géomètre, l'équipe de recherche s'est aussi attachée à produire une brochure d'accompagnement qui devrait permettre de cerner correctement AG dans ses différentes dimensions. Cette brochure, comprenant trois parties, s'organise comme suit.

- La première a principalement pour but d'exposer le contexte conceptuel. Elle comprend quatre chapitres. Le chapitre 1 contient le mode d'emploi dans lequel l'utilisateur pourra aller puiser l'information nécessaire à la prise en main du logiciel. Le chapitre 2 définit le contexte informatique. Le chapitre 3 expose le champ épistémologique des grandeurs, fractions et mesures. Le chapitre 4 justifie l'existence des familles de figures dans le kit standard.
- La deuxième, comprenant trois chapitres, cerne le cadre pédagogique et comprend quelques activités à réaliser en classe. Le chapitre 5 décrit le contexte pédagogique dans lequel nous avons pensé les activités d'enseignement-apprentissage. Les chapitres 6, 7 et 8, quant à eux, proposent des activités sur base de situations-problèmes pour les classes du CE2 au Collège.
- La troisième comprend les fiches de travail correspondant aux activités. Ces fiches sont photocopiables ou peuvent être imprimées à partir des fichiers pdf disponibles sur le site.

Aux activités des chapitres 6, 7 et 8 correspondent des fichiers informatiques contenus dans trois dossiers intitulés *Initiation, Perimaire* et *Integration* (voir figure 24). Ces dossiers sont aussi à télécharger sur le site.

3.2 Le téléchargement

Le logiciel AG et ses composants (figure 23), les dossiers contenant les fichiers accompagnant les activités préparées (figure 24), ainsi que la brochure d'accompagnement (figure 25) peuvent être téléchargés gratuitement à partir du site suivant :
`http://www.enseignement.be/geometre`
Il est à noter qu'en ce qui concerne les fichiers composants le logiciel AG (figure 23), seul le fichier *Apprenti Géomètre* peut être ouvert par l'utilisateur, et ce par un double clic de souris. Les autres ne sont pas accessibles, ils permettent le fonctionnement du logiciel.
Les dossiers de la figure 24 contiennent les fichiers à ouvrir à partir d'Apprenti Géomètre et à utiliser au cours des activités décrites dans la brochure aux chapitres 6, 7 et 8.
Les fichiers de la figure 25 sont les documents au format pdf que l'on peut consulter soit au format écran, plus convivial, soit au format papier, prêt à l'impression.
On trouve sur ce même site de nouvelles activités construites au cours de la deuxième année de recherche, ainsi que des informations concernant l'utilisation du logiciel. Ce site permet de télécharger tant la version disponible pour Mac que celle fonctionnant sous Windows. Certains fichiers ont été compressés et demandent donc, pour pouvoir les ouvrir après téléchargement, d'employer des logiciels tels que *StuffitExpander* pour Mac ou *WinZip* pour Windows. De même pour la lecture de la brochure d'accompagnement, il est nécessaire de posséder le logiciel *Acrobat Reader*. Tous ces logiciels peuvent être téléchargés à partir des liens prévus sur le site.

Fig. 23

Fig. 24

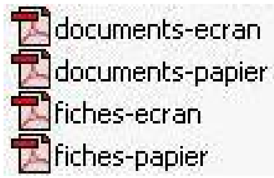


Fig. 25

4 Bibliographie

R.Bkouche [1991], Variations autour de la réforme de 1902/1905, in H. Gispert et al. coord., *La forme mathématique,* Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences et Société Mathématique de France, Paris.

CREM [2003], *Apprenti Géomètre,* Communauté Française de Belgique et Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Bruxelles et Nivelles.

H. Freudenthal [1973], *Mathematics as an educational task,* Reidel, Dordrecht.

L. Lismont et N. Rouche coord. [2001], *Formes et mouvements, perspectives pour l'enseignement de la géométrie,* CREM, Nivelles.

E. Mach [1922], *L'analyse des sensations, le rapport du physique au psychique,* trad. de l'allemand par F. Eggers et J.-M. Monnoyer, Éditions Jacqueline Chambon, Nîmes, 1996.

J. Piaget et B. Inhelder [1947], *La représentation de l'espace chez l'enfant,* Presses Universitaires de France, Paris.

H. Wallon [1970], *De l'acte à la pensée, essai de psychologie comparée*, Flammarion, Paris.

PROBLÈMES ET ACTIVITÉS FINALISÉES DANS L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMETRIE À L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

Jean-François FAVRAT
Maître de conférences, IUFM, site de Nîmes
favrat.jf@wanadoo.fr

Sylvie MULLER - Béatrice BARBERO
Professeurs des écoles, Montpellier

Nicole BELLARD
IREM de Montpellier

Résumé
Le groupe IREM 1er degré de Montpellier s'est donné comme buts de mettre au point des séquences d'enseignement de la géométrie laissant une place importante à la résolution de problèmes et d'établir des continuités entre les divers cycles de l'école élémentaire.
L'atelier a rendu compte de la démarche suivie.
• La 1ère étape a consisté à proposer des tâches aux élèves, sans enseignement particulier préalable, pour recueillir leurs démarches. Trois ont été présentées, soumises à l'analyse des participants : une reconnaissance de carrés imbriqués dans une figure complexe (CP-CE1), deux reproductions de figures, l'une à l'aide d'une règle non graduée, sur un réseau de points (CP-CE1) et l'autre à l'aide d'une règle graduée et d'une équerre, sur papier uni (CM). Ces tâches nous ont permis d'expliciter quelques enjeux importants de l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire (coordination des analyses locale et globale d'une figure, articulation des connaissances géométriques et de la maîtrise des instruments).
• Durant la 2ème étape, des séquences d'enseignement en rapport avec les observations précédentes ont été construites, conduites et analysées. Cinq séquences ont été présentées : pliages (cycle 2), alignement (cycle 2), constructions de deux solides (cycle 3), rédaction de messages (cycle 3). Plusieurs questions ont ainsi été abordées, liées au développement de l'enfant (passage des activités manipulatoires sur des formes au travail sur les figures tracées sur papier), à la gestion des activités finalisées (place des activités « décrochées », « couverture » du programme), à la cohérence entre les cycles (la reconnaissance des formes et la propriété d'alignement tout particulièrement).

Mots-clés : Géométrie - instruments - alignement - situation-problème - projet.

L'atelier avait trois buts :

- illustrer la nature et le rôle des problèmes géométriques à l'école élémentaire par des exemples d'activités conduites dans les classes ;
- montrer comment ces activités avaient été articulées à des évaluations préalables permettant de pointer des enjeux essentiels de l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire ;
- rendre compte ainsi au plus près de la démarche suivie dans le groupe Mathématiques à l'école primaire de l'IREM de l'académie de Montpellier.

L'atelier s'est déroulé en cinq temps que ce compte-rendu s'efforce de respecter.

- Mise en situation des participants : nous leur avons demandé d'analyser des tâches proposées aux élèves en guise d'évaluation (cf. les annexes n°1 à n°7). Quelles sont les compétences géométriques en jeu ? Quelles peuvent être les difficultés des élèves ?
- présentation d'une séquence conduite au cycle 2 (CP, CE1) sur l'analyse des figures planes ;
- présentation d'une séquence conduite au cycle 2 (CP, CE1) sur l'utilisation de la règle et la propriété d'alignement ;
- présentation de deux séquences conduites au cycle 3 (CM) sur le tracé de patrons de solides ;
- présentation d'une séquence conduite au cycle 3 (CE2, CM) sur la rédaction de messages géométriques.

I – EXEMPLES DE TÂCHES PROPOSÉES EN GUISE D'ÉVALUATION DIAGNOSTIQUE

I – 1 Difficultés des jeunes élèves (CP, CE1) pour analyser des figures « emboîtées »

Les fiches présentées dans les annexes n°1, n°2 et n°3, obligent les élèves à adopter deux points de vue successifs et différents sur une même figure. D'une part, ils doivent observer que chaque figure est comme une mosaïque composée de plusieurs sous-figures élémentaires (respectivement quatre carrés, deux rectangles, un carré et un rectangle), et d'autre part, ils doivent remarquer que le contour global est aussi une figure élémentaire (respectivement un carré, un rectangle, un rectangle). Le but des consignes est bien de pousser les élèves à passer, à basculer, d'un point de vue à l'autre. Or les élèves en général ne réussissent pas la tâche demandée.

Dans la fiche de l'annexe n°1, les élèves colorient à chaque fois un des quatre carrés dans les deux figures, ne respectant pas de ce fait, la contrainte que le deuxième carré soit de taille différente du premier. De même dans la fiche de l'annexe n°2, ils colorient à chaque fois un des deux rectangles intérieurs dans les deux figures. Dans la fiche de l'annexe n°3, les élèves sont encore plus bloqués : en suivant leur démarche, ils pourraient colorier un carré dans la deuxième figure, et ce serait exact puisqu'un carré est bien un rectangle, mais assez peu s'y résolvent.

La difficulté ne vient pas du mot « taille » ; il a été expliqué quand cela s'est avéré nécessaire à l'aide de plaques carrées ou rectangulaires. En fait, tout se passe comme si les élèves ne pouvaient ou ne voulaient prendre en considération que les formes simples juxtaposées. Une réponse fréquente pour la fiche de l'annexe n°4 le confirme : beaucoup d'élèves ne colorient que les trois quarts d'un des grands carrés en laissant blanche la surface du petit carré central, comme si le grand carré était en partie masqué par le petit posé par-dessus. Plusieurs hypothèses peuvent être avancées pour expliquer ces observations.

- Les formes, à l'école maternelle, sont surtout présentées à l'aide de plaques unies, opaques ;
- dans les activités de coloriage, une règle souvent énoncée est de ne pas dépasser les lignes frontières ;
- plus probablement, nous sommes en présence de phénomènes liés à la perception qui n'ont pas totalement disparu chez les adultes même si bien sûr les adultes se montrent beaucoup plus capables de faire coexister deux points de vue sur une même figure.

Quelle que soit l'hypothèse, il nous a semblé intéressant d'amener les élèves à analyser, pour toute figure donnée, aussi bien son contour externe que les parties qui la composent en se juxtaposant, en s'imbriquant ou en se chevauchant.

I – 2 Difficultés des élèves de CM à utiliser la propriété d'alignement

La fiche utilisée, en guise d'évaluation préalable, dans les classes de CM, est celle reproduite dans l'annexe n°5, à une différence près : les sommets des carrés n'étaient pas nommés. Ils le sont ici pour faciliter la formulation de remarques.

Les élèves devaient reproduire la figure sur du papier uni. A partir des productions montrées dans l'atelier, plusieurs observations ont pu être faites.

- Il y a peu de productions précises : les erreurs dans les mesures des longueurs sont encore fréquentes ;
- les élèves semblent pour la plupart avoir tracé chacun des trois carrés successivement sans avoir perçu ou utilisé le double réseau des droites (AB), (EH), (FI) d'une part et (EF), (GA), (JB), (IH) d'autre part, structurant l'ensemble de la figure ;
- s'il arrive parfois que le segment [ED] ait été tracé d'un seul trait, c'est beaucoup plus rare pour les segments [AG] ou [BC] ;
- les segments [FG] et [JI] ne sont jamais portés par la même droite ;
- aucun élève n'a tracé la droite (FI) qui pourtant aurait permis d'asseoir la reproduction avec plus de précision.

Tout comme les élèves de CP ou CE1 ne semblent voir dans une figure complexe qu'une juxtaposition de formes simples, les élèves de CM ne semblent pas penser à chercher, par une analyse préalable de la figure à reproduire, quels tracés auxiliaires ils pourraient avoir intérêt à effectuer. Les figures réunies dans l'annexe n°6 montrent qu'il y a plusieurs manières d'envisager ces tracés auxiliaires : un rectangle KLIF ou la droite (FI) coupée orthogonalement par les droites (EF), (GA), (JB) et (IH). Ces deux manières[1] supposent que les élèves n'en restent pas à ce qu'ils voient dans un premier abord, qu'ils sachent aller chercher ce qui est caché.

[1] Ce ne sont pas, insistons bien, les seuls tracés auxiliaires possibles.

I – 3 Difficultés des élèves de CP/CE1 à utiliser la propriété d'alignement

Nous avions noté la mise en avant dans les nouveaux programmes de mathématiques (2002) de la propriété d'alignement pour le cycle 2. Nous avons cherché une situation-problème dans laquelle la notion mathématique en jeu soit l'alignement. Nous avons opté pour une tâche de reproduction de carrés sur un réseau de points. Voici de quoi il s'agit. Les fiches supports et des productions d'élèves sont reproduites dans l'annexe n°7.

Selon le niveau CP ou CE1, il a été demandé aux élèves de reproduire, à l'aide de leur seule règle, soit le premier carré soit le second, sur une feuille ne présentant que le réseau « O[2] ».

Les élèves ont été fortement déstabilisés. Nous avons pu relever plusieurs types de travaux (cf. l'annexe n°7). Certains élèves dessinent tout ou partie d'un octogone. D'autres, - c'est la démarche la plus fréquente - commencent par tracer un segment dont les extrémités sont données puis poursuivent de proche en proche, à vue ; cela les conduit à des polygones dont le nombre de côté dépasse quatre, ou à des lignes fermées dont certaines parties sont courbes. D'autres (les plus hardis ?) enfin dessinent un carré dont certains côtés passent par les points donnés et d'autres non.
Ils expriment leur désarroi de plusieurs manières : ils s'inquiètent du manque de certains points (comprendre sommets), se demandent combien ils peuvent en rajouter, critiquent ceux qui ont « dépassé les points » donnés.
En effet, tel est bien l'obstacle à la fois didactique et mathématique : la tâche exige que les élèves construisent les sommets en traçant des droites passant par des couples de points donnés. Or les élèves sont entraînés (presque exclusivement ?) à joindre des points à la règle. Ici, l'interdit de dépasser les points quand on trace des segments doit être levé.

Cette tâche[3] a fait l'objet dans l'atelier de discussions intéressantes.

- On peut noter que les points sont représentés par de petites taches rondes, au lieu des petites croix plus conventionnelles[4]. L'utilisation des petites taches rondes n'est-elle pas actuellement très répandue[5] ?
- La tâche a été donnée à réaliser sur le réseau O dans lequel les huit points utiles ne sont pas nommés. Il est apparu dans les classes que pour la discussion sur les erreurs, sur les démarches, il était commode de désigner ces points par des lettres comme sur le réseau « OL[6] ». Et même nous nous sommes demandé si ces lettres n'étaient pas intéressantes comme aides organisationnelles pendant la

---

2 O comme « octogone ».

3 Cette tâche et la précédente ont été construites dans le même esprit que celles proposées dans la revue Grand N, n°49, Tracés aux instruments et raisonnements géométriques : quelques exemples de consignes (J-F. Favrat, 1991).

4 C'est d'autant plus paradoxal dans ces fiches que dans nos manuels Maths CP et Maths CE1 (Delagrave, J-F. Favrat et al.) nous utilisions presque exclusivement des croix.

5 Comme par exemple dans les manuels Cap Maths CP et Cap Maths CE1 (Hatier, R. Charnay et al.).

6 OL comme « octogone avec lettres ».

reproduction. Raymond Duval[7], qui était présent dans l'atelier, nous a invités à ne pas aller trop vite sur ce terrain-là. Il préfère que les élèves fassent des gestes pour traduire et visualiser l'action de prolonger.

II – EXEMPLES D'ACTIVITÉS VISANT L'ANALYSE DE FIGURES COMPLEXES AVEC DE JEUNES ÉLÈVES (CP/CE1)

Nous avons pensé à diverses pistes de travail (planches à clous avec des élastiques, mosaïques ou Tangrams, pliages…). Nous présentons ici celle qui a suscité immédiatement l'adhésion des élèves parce qu'elle a été une succession de petits problèmes perçus comme des défis ; elle a été souvent l'occasion de mener les analyses externe (sur le contour) et interne (sur les parties) d'une même figure.

L'activité, directement inspirée de la brochure *Libres recherches en mathématiques* (n°30, ICEM) demande que chaque élève dispose d'un carré de papier (cf. l'annexe n°8), présentant quatre zones colorées en rouge, bleu, vert et jaune, zones également carrées. Le but est de réaliser, par pliage, d'autres figures colorées (cf. les annexes n°9 à n°11)[8].

La séquence principale compte quatre séances de 45 minutes ; elle s'est poursuivie sous la forme de moments plus brefs tant les élèves étaient ravis de travailler avec leur carré coloré.

• 1ère séance : introduction du carré dans la classe.
Chaque élève reçoit un carré uni blanc de 21 cm de côté et doit le plier en deux, en superposant un côté contre un autre côté pour obtenir un rectangle. L'enseignant montre comment procéder. Le but de cette séance, essentiellement « technologique », est que les élèves parviennent à un pli bien net ; des carrés supplémentaires sont nécessaires pour les élèves parfois maladroits ou empressés.

Ce premier pli est ouvert. Les élèves doivent tourner leur feuille d'un quart de tour et effectuer un second pli semblable au premier, de manière à faire apparaître les quatre carrés à colorier selon le modèle affiché au tableau (cf. l'annexe n°8). On vérifie qu'il n'y a pas d'inversion gauche / droite dans les coloriages : il s'agit pour la suite que tous les élèves aient le même outil !

• 2ème séance : réalisation des premières figures par pliage.
Le maître montre une figure qu'il a obtenue en pliant une seule fois le carré coloré. Cette figure est affichée au tableau. Collectivement ou individuellement des élèves sont sollicités pour dire ce qu'ils voient, les formes qu'ils reconnaissent aussi bien sur le contour qu'à l'intérieur de la figure. Puis chacun doit réaliser une figure identique à

7 Ses remarques nous ont poussés à relire le chapitre IV Figures géométriques et discours mathématique de son ouvrage Sémiosis et pensée humaine (R. Duval, 1995). Il y a beaucoup d'affinités entre nos travaux et ses réflexions sur l'articulation souvent problématique entre les registres figuraux et discursifs, sur les difficultés pour les élèves d'avoir une approche opératoire des figures, sur l'opération de reconfiguration.

8 Avant d'entendre les témoignages des activités réalisées dans les classes, les participants ont pu aussi résoudre de tels problèmes.

celle qui est affichée à partir de son carré et grâce à un seul pliage. Ensuite quelques élèves expliquent (ou montrent s'ils ne parviennent pas à expliquer) comment ils s'y sont pris. La même activité est reprise plusieurs fois de suite en changeant la figure à reproduire. L'annexe n°9 présente trois des figures utilisées dans cette séance : le lecteur remarquera qu'elles peuvent toutes être réalisées à l'aide d'un seul pliage.

• 3ème séance : réalisation de nouvelles figures par pliage.
La séance est analogue à la précédente, toutefois les figures demandent deux plis pour être réalisées : l'annexe n°10 présente quatre des figures utilisées. Avec ces figures, les élèves se rendent compte que des figures peuvent être très ressemblantes sans être identiques (cf. les deux trapèzes de cette annexe, ou encore le recto et le verso du rectangle). Ils s'aperçoivent aussi que pendant la réalisation, il vaut mieux contrôler l'agencement des couleurs, sinon gare aux erreurs d'orientation à la fin !

• 4ème séance : réalisation de nouvelles figures par pliage (suite).
Cette séance est un approfondissement des précédentes : les figures nécessitent maintenant trois pliages consécutifs (cf. l'annexe n°11). Les élèves peuvent avoir besoin de s'entraider mutuellement.

• Prolongements : d'autres figures sont proposées par le maître en guise de « gymnastique » géométrique, non plus sur des séances complètes mais à l'occasion de brefs moments (10 à 15 minutes). Parfois ce sont les élèves qui inventent une figure pour leurs camarades.

Qu'avons-nous pu observer au fur et à mesure des séances ? D'abord, le carré initial s'enrichit de nouveaux plis, la connaissance du carré, de ses axes de symétrie, nous pouvons l'espérer, s'en trouve renforcée. Si ces plis ont été bien marqués, la manipulation ne pose plus de problèmes, les élèves peuvent ainsi se concentrer sur la recherche des solutions. De même les verbalisations s'étoffent de plus en plus : sommet, côté, centre, droite, gauche, carré, triangle, rectangle sont constamment réemployés. Par ailleurs les descriptions se diversifient : ainsi il devient « naturel » de voir, dans la figure située en bas à droite de l'annexe n°11, un rectangle, deux carrés, quatre petits triangles ou encore un grand triangle. Autrement dit, ce sont les prémisses de la capacité attendue à changer de point de vue dans l'analyse d'une figure. Ce n'est guère étonnant puisque pour réussir à reproduire une figure présentée sous la forme d'un pliage, il faut tout à la fois tenir compte du contour de cette figure et des formes des zones colorées visibles.

III – ACTIVITÉS SUR L'ALIGNEMENT CONDUITES AU CYCLE 2

Le travail a été réalisé en trois étapes ; nous ne rendrons compte que de la première et la troisième, puisque la deuxième a déjà été décrite (cf. § I-3 et annexe n°7), elle a consisté à faire reproduire les figures Carré 1 et Carré 2, à analyser les erreurs produites, à mettre au point des procédés pour réaliser la tâche.

III – 1 Travaux préparatoires sur les lignes

Ces travaux ont été divers, les collègues impliqués dans la recherche, ne s'étant pas longuement concertés à leur propos ; nous nous contenterons de les énumérer sans que l'ordre de présentation soit toujours l'ordre de réalisation retenu par les collègues. D'ailleurs chacun n'a conduit qu'une partie de ces activités.

- Mise en situation dans la cour de récréation (se mettre en ligne droite, aligner des plots, *etc*.) ;
- création d'un catalogue de lignes à partir de cartes postales reproduisant des œuvres de peintres (Matisse, Delaunay, Klee, Haring, Vasarely, Wharol, *etc*.) : les élèves ont décalqué des lignes, les ont analysées, les ont classées, ont réalisé des dessins à la manière de tel ou tel peintre ;
- inventaire de noms de lignes, après un travail à partir du poème *Il était une feuille* de Robert Desnos ;
- tracés libres à la règle, ou avec de légères contraintes : par exemple, que les droites passent par un même point, qu'elles partent d'un même point, *etc.* ;
- joindre, à la règle et dans l'ordre, des points numérotés ;
- travail avec une planche à clous (ils forment un réseau carré) et des élastiques (les élèves vont reproduire ou créer des figures en tendant ces élastiques autour de certains de ces clous) ;
- compléter des figures (échelles, barrières, frises, dessins sur un réseau régulier de points, *etc*.) : soit une figure est amorcée, il reste donc des tracés à réaliser en s'appuyant sur des points alignés, soit il s'agit de reproduire le modèle donné sur un autre réseau. L'objectif est proche de celui visé dans la reproduction des deux carrés de l'annexe n°7, mais il n'y a pas de point à construire par intersection de deux lignes droites (cf. *Maths CP*, Delagrave, pp. 61, 66 ; *Maths CE1*, Delagrave, pp. 20, 21, 32 ; *Cap maths CP*, Hatier, Ex 5 p. 43, p. 50 ; *Cap Maths CE1*, Hatier, pp. 50, 51, 55 ; *J'apprends la géométrie en dessinant CP*, pp. 41, 45, 46).

III – 2 Travaux conduits après la reproduction des deux carrés

- Il s'est d'abord agi de renforcer les tracés par prolongement. Là encore il fallait compléter des figures (frises, rayons de soleil, étoiles…) non plus en joignant des points mais en prolongeant des segments donnés. Ainsi au croisement de certains prolongements, des points nouveaux apparaissent (des sommets d'étoiles par exemple). Les élèves avaient la possibilité bien sûr d'effacer les tracés dépassant les points nouvellement construits par intersection (cf. *Maths CE1*, Delagrave, p.11 et p. 32 du guide pédagogique, *J'apprends la géométrie en dessinant CP*, pp. 43, 51)[9] ;
- ensuite nous sommes revenus à des activités de reproduction de figures sur le réseau pointé OL, celles de l'annexe n°12. Elles contiennent moins de sommets à construire, un, deux ou trois au lieu de quatre comme dans les carrés n°1 et

[9] En repensant à ces activités, nous nous apercevons qu'elles sont essentiellement dirigées. Il y aurait sans doute intérêt à proposer des tâches plus ouvertes, plus créatrices aussi, à partir toujours de figures inachevées mais que les élèves complèteraient plus librement (cf. *Cap Maths CP*, pp. 37 Ex 3 ; 43 Ex 4) ou de manière à faire apparaître des figures connues (cf. *Maths CE1*, Delagrave, p. 116, ainsi que les situations Etoile, Carré, X, Barres dans l'article déjà cité, Favrat, 1991).

n°2. Leur nombre permet l'individualisation ainsi que l'entraînement sans la répétition. Leur utilisation fut étalée dans le temps.

IV – EXEMPLES D'ACTIVITÉS VISANT L'AMÉLIORATION DES TRACÉS AUX INSTRUMENTS (CM)

Nous avons cherché des activités de reproduction qui aient du sens pour les élèves, qui soient finalisées, c'est-à-dire inscrites dans un projet. Nous pensons ainsi obtenir la motivation des élèves pour une production de qualité et donc aussi leur adhésion à des exigences de précision, pas toujours nécessaires à leurs yeux dans les activités non finalisées. Nous avons choisi des projets de fabrication.

IV –1 Premier projet

L'objet à fabriquer est une boîte de chocolats (vide !). Elle ne tient que grâce à son couvercle. Quand on l'ôte, elle s'entrouvre, telle une fleur à la corolle dorée (même quand il n'y a plus de chocolats). Aplanie, elle a la forme d'un octogone (cf. les figures a, b et c de l'annexe n°13). On le comprend, les particularités géométriques et esthétiques de cette boîte nous ont bien intéressés.

Les intentions didactiques sont claires. La fabrication de cette boîte doit être l'occasion

- de retravailler les propriétés du cube et de construire quelques-uns de ses patrons ;
- de mieux maîtriser les instruments de tracé tels que la règle et l'équerre, cela sur papier uni ;
- de chercher les moyens géométriques de garantir la fidélité d'une reproduction par rapport à son modèle, et donc d'obtenir une bonne précision.

Pour réaliser l'octogone, compte tenu de ce qui a été observé lors de l'évaluation préalable, on peut prévoir que les élèves vont tracer les cinq carrés successivement. L'un des buts de la séquence sera donc d'amener les élèves à trouver d'autres manières de faire (cf. les figures d, e et f de l'annexe n°13) :

- soit construire le carré central IJKL de côté *c* (*c* est la mesure de l'arrête du cube), tracer les droites (IJ), (JK), (LK) et (IL) en prolongeant les côtés de ce carré, placer sur ces droites les huit sommets A, B, C, D, E, F, G et H de l'octogone, à la bonne distance des sommets I, J, K et L ;
- soit tracer un rectangle de largeur égale à *c* et de longueur égale à 3*c*, par exemple ABEF, placer les points I et L sur [AF] et les points J et K sur [BE], tracer les droites (IJ) et (LK), placer les points H, C, D, G et H sur ces droites à la bonne distance des points I, J, K et L ;
- soit tracer un carré QRST dont le côté mesure 3*c*, placer sur les côtés de ce carré les points A, B, C, D, E, F, G et H à la bonne distance des sommets Q, R, S et T.

La séquence au CM1 s'est déroulée sur sept séances ; elle peut être plus brève au CM2. Pour ne pas allonger le compte rendu, nous décrivons la succession des étapes sans rentrer dans le détail de l'organisation pédagogique de chaque séance.

• 1ère séance : observation de la boîte.
La boîte de chocolats est suspendue à une ficelle, une seule pour toute la classe. Les élèves doivent décrire la boîte individuellement puis à l'oral collectivement. Le but est de garder sur une affiche la trace des observations qui ont été vérifiées, en particulier que cette boîte a la forme d'un cube.

• 2ème séance : réalisation d'un patron de cube.
Après avoir résumé la liste des observations précédentes à ce qui est juste nécessaire pour construire un cube, les élèves sont invités à réaliser un patron de cube. L'observation des patrons spontanés conduit à éliminer ceux qui sont erronés, à remarquer qu'il y en a de plusieurs sortes (en fait les classiques en forme de Té ou de croix sont les plus fréquents à ce niveau), à énoncer des exigences de qualité (précision dans les mesures des côtés et des angles droits), à rechercher des moyens de les construire plus fiables ou plus rapides que celui qui consiste à juxtaposer les six carrés (procédé systématiquement utilisé par les élèves).

• 3ème séance : activités décrochées sur les patrons de cubes.
Il s'est agi de consolider les connaissances sur les patrons de cubes (par exemple dire sur un patron si deux faces sont voisines ou non, opposées ou non, etc.) et de gagner en précision dans leurs tracés, la séance précédente en a parfois montré la nécessité pour les CM1 surtout.

• 4ème séance : réalisation du fond octogonal de la boîte.
Après que le maître a demandé, afin de créer la curiosité, comment le fond de la boîte peut tenir alors qu'il n'y a pas de colle, le couvercle de la boîte est enfin enlevé. Devant cette fleur dorée qui s'épanouit, la magie opère immédiatement : les élèves sont pressés de réaliser le patron du fond. Il en circule quelques-uns dans la classe pour observation, puis un exemplaire est fixé au tableau.

Comme dans la 2ème séance, les élèves construisent en général cinq carrés les uns après les autres et complètent la croix obtenue en traçant les hypoténuses des quatre triangles rectangles isocèles ; ils tâtonnent ensuite pour placer les pointillés de la figure c de l'annexe n°13.

Comme à la 2ème séance encore, l'examen collectif de ces productions spontanées vise essentiellement à rappeler la nécessaire précision dans la mesure des côtés et à trouver des procédés moins longs, plus économiques en manipulations de l'équerre, mais aussi à mettre au point un moyen sûr pour positionner correctement les pointillés : le maître doit indiquer qu'ils sont dans le prolongement des diagonales du carré central ou le confirmer, il se peut tout à fait que des élèves en fassent la remarque. Dans les classes observées les trois procédés cités plus haut ont été rencontrés, le troisième sans doute un peu fortuitement car dans une classe, le modèle s'est trouvé fixé sur un tableau quadrillé dont la maille était d'une taille proche de celle du carré central. Ainsi de leur place, lors de la phase collective, certains élèves ont évoqué la pertinence de construire le grand carré nommé QRST sur la figure f de l'annexe n°13.

Les élèves dessinent ensuite chacun un nouveau patron sur papier uni en s'essayant si possible à l'un des procédés décrits et après validation par le maître,[10] ils le réalisent sur du carton bristol coloré et le découpent.

• 5ème séance : réalisation du couvercle.
Il se trouve que le pliage du couvercle est relativement complexe à cause de la présence de plusieurs replis intérieurs garantissant la rigidité de l'emballage. Les élèves peuvent être simplement invités à réaliser le patron d'un pavé droit dont une face est carrée en faisant bien attention de prendre des dimensions adéquates : comme il faut que le couvercle s'ajuste sur le fond, les côtés du carré doivent être un peu plus grands que les arêtes du cube déjà construit. Certains élèves ont réalisé le classique patron d'un pavé droit (privé d'une face) complété par des languettes ; d'autres ont cherché à conserver le principe d'un patron octogonal semblable à celui du fond : ici un carré, quatre rectangles et quatre triangles sont nécessaires.

Après cela, il ne reste plus qu'à décorer l'objet et à le remplir.

• 6ème séance : activités décrochées sur les tracés de précision.
Après ces séances, les élèves ont sans doute encore besoin de s'entraîner à la maîtrise précise des instruments, de l'équerre en particulier. Ils en comprennent mieux la nécessité. Il s'agit de leur demander de reproduire des figures – carrés isolés dans diverses positions, carrés juxtaposés de mêmes dimensions ou non – d'analyser avec eux les sources d'erreurs, de rappeler les moyens de les éviter. Ces activités peuvent être différenciées.

• 7ème séance : évaluation.
Elle porte sur la maîtrise des tracés aux instruments (règle, équerre) sur papier uni et sur les patrons de cubes (tracés et relations entre les faces). Nous avons projeté dans l'atelier des productions d'élèves, la comparaison avec les travaux initiaux a bien montré les progrès réalisés. Ils sont dus tout à la fois aux nombreuses occasions que les élèves ont eues, non seulement d'effectuer des tracés, mais aussi d'affiner leurs analyses en vue de les améliorer (cf. les séances n°2, n°4, n°5), ainsi qu'à la bonne acceptation par les élèves des activités décrochées. L'on voit ainsi que l'enseignement basé sur des projets n'exclut pas la systématisation, ne s'y oppose pas.

IV – 2 Deuxième projet

Le travail précédent privilégie certains contenus d'enseignement : la maîtrise de la règle et de l'équerre, les carrés, les cubes. L'année suivante nous nous sommes intéressés au compas comme instrument de report de longueurs et de construction de triangles. Cela nous a conduits à proposer la fabrication d'un lampion octaédrique (cf. la figure a de l'annexe n°14) au CM2.

Les huit faces sont des triangles équilatéraux de même taille, réalisés en papier Canson noir ; le patron est d'un seul tenant (cf. la figure b). Huit formes géométriques (une par face : deux disques, deux triangles, deux trapèzes isocèles, deux rectangles) ont été

---

[10] Pour qu'un tel patron tienne dans une feuille de papier de format A4, on peut prendre 6 cm comme mesure des côtés des carrés. Il faut discuter aussi avec les élèves des questions de mise en page.

découpées dans les faces. Elles ont été obturées avec du papier vitrail de diverses couleurs.

Le canevas de la séquence est assez proche de celui qui a été suivi pour le projet précédent.

• 1ère séance : présentation de l'objet, description écrite sans possibilité de manipulation, vérification collective des observations, tri des informations à caractère géométrique.
Les élèves décrivent souvent ce solide comme un « losange à huit faces ».

• 2ème séance : recherche de patrons sur papier uni ou sur papier pointé (les points forment un réseau triangulaire équilatéral (cf. la figure c). Les élèves peuvent découper.
Cette recherche crée bien des surprises aux élèves (ils s'en sortent grâce au papier pointé), et à nous aussi. Certains élèves en effet proposent des bi-pyramides (cf. la figure d) ou des losanges simplement réunis par des sommets (cf. les figures e et f).

• 3ème séance : tracé de triangles équilatéraux à l'aide d'un compas.

• 4ème séance : nouvelle recherche de patrons sur papier uni.
Les élèves recherchent des patrons à main levée, ils peuvent découper s'ils le souhaitent pour contrôler. Ensuite, par groupes, ils conservent ceux qui sont différents. Chaque élève en choisit un à redessiner au propre sur papier uni. Cinq patrons différents ont été produits (cf. les figures g, h, i, j et k de l'annexe n°14). Pour les construire au propre, les élèves procèdent souvent de proche en proche ; ils n'exploitent qu'occasionnellement les propriétés géométriques de ces patrons comme l'alignement de certains côtés ou le parallélisme.

• 5ème séance : analyse géométrique des patrons trouvés par la classe.
Les élèves disposent d'une fiche sur laquelle sont reproduits les cinq patrons cités ci-dessus. Ils doivent colorier des figures géométriques connues, une par patron, autre qu'un triangle élémentaire correspondant à une face de l'octaèdre, et donner son nom. Cette séance est l'occasion d'apporter le lexique relatif aux quadrilatères particuliers : losange, trapèze, parallélogramme.

• 6ème séance : tracés de parallèles, de parallélogrammes, de trapèzes au compas et à la règle sur papier uni.

• 7ème séance : affinement des procédures de reproduction de patrons.
Les élèves reçoivent à nouveau la fiche avec les cinq patrons. Ils doivent choisir celui qu'ils estiment le plus commode à reproduire et expliquer pourquoi par écrit. C'est le patron g qui est majoritairement retenu par les élèves. Certains dessinent les deux grands triangles ABC et DEF puis les triangles intérieurs ; d'autres dessinent le parallélogramme GHIJ qu'ils pavent de triangles en utilisant le compas pour reporter la longueur de l'arête, ils complètent en prenant l'intersection de la droite (LK) avec les droites (IJ) et (HG).

• 8ème séance : production terminale.
Les élèves la réalisent d'abord sur une feuille de papier et passent au canson après validation. Selon la mesure de l'arête donnée aux élèves, il se peut que le patron choisi par l'élève ne tienne pas dans la feuille. Le maître alors aide cet élève pour la mise en page et/ou l'invite à changer de modèle de patron. Il ne reste plus que la décoration.

• 9ème séance : évaluation.
Celle-ci a porté sur les quadrilatères et les triangles particuliers (reconnaissance, vocabulaire, dessin), sur les patrons d'octaèdres (reconnaissance, tracé), sur la construction de deux droites parallèles et de deux droites perpendiculaires.

V – ECHANGES INTER–CLASSES À PROPOS DE PUZZLES GÉOMÉTRIQUES AU CYCLE 3

On connaît tout l'intérêt des puzzles géométriques comme le tangram pour l'entraînement à l'analyse de figures et la mobilisation d'images mentales géométriques : pour réussir à reconstituer une silhouette donnée avec les pièces imposées, il faut en analyser le contour, les proportions, il faut aussi avoir mémorisé quelques assemblages de base. Mais nous visions également la maîtrise des instruments et du langage géométrique. L'idée est alors venue de plusieurs projets de communication inter-classes. Nous rendons compte de deux tels projets, l'un adapté au CE2, l'autre pour les CM.

Nous n'avons pas utilisé le tangram carré classique car nous voulions pouvoir travailler sur les arcs de cercle et le compas. Notre choix s'est donc porté pour les CM sur le « Cœur brisé » et le « Cercle problématique » (cf. la brochure APMEP Jeux n°6, p. 73), pour les CE2 sur le Cœur brisé et la « Goutte d'eau », puzzle que nous avons créé pour l'occasion (cf. l'annexe n°16). Voici les deux démarches succinctement présentées en parallèle.

Au CE2 : la Goutte d'eau, le Cœur brisé	Au CM : le Cercle problématique, le Cœur brisé
1ère étape : découverte du puzzle. Observation et analyse géométrique du puzzle (reconnaissance de figures, vocabulaire). Présentation du projet. Découpage des différentes parties du puzzle ; reconstitution. Jeu : invention de silhouettes.	1ère étape : découverte du puzzle. Donner le modèle, faire nommer les figures géométriques reconnaissables. Découper les différentes parties. Assembler les pièces pour obtenir un dessin, une silhouette.
2ème étape : reconstitution de silhouettes en utilisant toutes les pièces du puzzle. Donner des silhouettes à l'échelle 1 (cf. l'annexe n°16) sur papier uni ; les faire reconstituer sans la superposition. NB : pour aider certains, autoriser la superposition ou donner quelques traits de séparation entre les pièces.	2ème étape : composer d'autres figures géométriques. Défi : trouver toutes les figures géométriques connues qui soient l'assemblage de deux (ou plus) pièces du puzzle. Réalisation d'affiches collectives récapitulatives. Reconstitution d'un puzzle complet sans modèle.
3ème étape : composer des figures géométriques à partir de quelques pièces du puzzle. Composer des figures connues (carré,	3ème étape : fabrication d'un puzzle sur papier uni. Les élèves disposent du modèle reconstitué, ils doivent le reproduire sur

rectangle, triangle, trapèze) à partir d'au moins deux pièces élémentaires ; reproduire les figures obtenues sur une feuille (contour) et les nommer ; dresser un catalogue collectif (affiche) des figures obtenues.	papier uni. Premier travail au brouillon, et après discussion, travail sur bristol.
4ème étape : activités décrochées sur le cercle. Manipulation du compas, introduction du vocabulaire lié au cercle, tracés.	4ème étape : jeux avec le puzzle. Les élèves ont leur puzzle, une silhouette leur est proposée. S'ils ne trouvent pas, le maître leur montre la solution pendant dix secondes puis ils retournent à leur place.
5ème étape : reproduction du puzzle sur papier quadrillé. Pour que cette tâche ne soit pas trop complexe, le puzzle est disposé sur le quadrillage de telle manière que les côtés du grand carré soient portés par les lignes du quadrillage et d'autre part, le côté de la maille du quadrillage a la même mesure que le rayon des arcs de cercle (4 cm au moins).	5ème étape : rédaction de textes géométriques. Rédaction de textes (programmes de construction) à partir de figures assez simples (cf. l'annexe n°15) dans lesquelles on retrouve des configurations présentes aussi dans les puzzles travaillés. Rédaction individuelle, échange, discussion sur les difficultés, rédaction d'un nouveau texte (à partir d'une figure semblable aux précédentes).
6ème étape : échange inter-classe. Dans un premier temps les élèves disposent d'une silhouette et la reproduisent (traits de séparation apparents) sur du papier quadrillé (cf. ci-dessus), à main levée puis aux instruments. Le maître fait attention de ne pas donner n'importe quelle silhouette, certaines sont plus faciles que d'autres à reproduire (ne pas chercher la difficulté). Une fois au propre, les élèves décalquent la silhouette (contour uniquement) sur du papier uni. Le modèle du puzzle et ces silhouettes sont envoyés à l'autre classe.	6ème étape : échange inter-classe. Classe émettrice : rédiger le programme de construction du puzzle pour l'autre classe ; choisir quelques silhouettes décalquées par les élèves (contours uniquement) ; les envoyer à la classe destinataire avec le texte (avec le modèle pour la vérification). Classe réceptrice : réaliser le puzzle à partir d'une dictée du texte reçu (à main levée, vérification tracé au propre) ; reconstituer les silhouettes.
7ème étape : évaluation. Elle porte sur le vocabulaire géométrique (carré, rectangle, centre, cercle, rayon, sur la reconnaissance de figures, sur le tracé de cercles, sur la reproduction de figures sur quadrillage.	7ème étape : évaluation. Elle porte sur le vocabulaire géométrique (triangles particuliers, segment, diagonale, centre, cercle, rayon, parallélogramme), sur la reconnaissance de figures, sur la lecture et la rédaction de programmes de construction de figures.

EN GUISE DE CONCLUSION

Nous voudrions lister les points de convergence entre les diverses séquences présentées ici, aussi bien au niveau des démarches pédagogiques :

- utilisation d'évaluations préalables ;
- obligation pour les élèves de résoudre des problèmes répétés et variés ;
- va et vient constant entre les actions, la réflexion, la verbalisation,

qu'au niveau des finalités de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire : s'il est classique d'affirmer que la géométrie de l'école primaire est celle de l'observation, ces travaux montrent que l'observation n'est pas le simple enregistrement de ce qui perçu spontanément, elle consiste à aller chercher au delà, elle est bien l'engagement de savoirs à des fins de résolution de problème.

Pour reprendre le titre de l'ouvrage de Roger N. SHEPARD, n'est-elle pas plutôt « l'œil qui pense ?»

BIBLIOGRAPHIE

APMEP (2002) *Jeux 6 ; des activités mathématiques pour la classe*, brochure n°**144**, Paris.

CHARNAY R., DUSSUC M-P. & MADIER P. (2000) Cap maths CP, *Hatier, Paris*.

CHARNAY R., DUSSUC M-P. & MADIER P. (2001) Cap maths CE1, *Hatier, Paris*.

DESNOS R. (1975, réédition) Fortunes, **42**, p. 134, *Poésie/Gallimard, Paris*.

DUVAL R. (1995) Sémiosis et pensée humaine ; registres sémiotiques et apprentissages intellectuels, *Peter Lang, Berne*.

FAVRAT J-F. (1991) *Tracés aux instruments et raisonnements géométriques : quelques exemples de consignes*, Grand N, **49**, IREM de Grenoble, 11-35.

FAVRAT J-F. & LAGANNE J. (1999) Maths CP, *Delagrave, Paris*.

FAVRAT J-F. & VASSELON J. (1999) Maths CE1, *Delagrave, Paris*.

FAVRAT J-F. & VASSELON J. (2000) Maths CE1, *guide pédagogique, Delagrave, Paris*.

ICEM, *Libres recherches en mathématiques*, **30**, PEMF, Mouans Sartoux.

Ministère de la jeunesse, de l'éducation, de la recherche (2002) *Documents d'application des programmes ; mathématiques, cycle 2*, Direction de l'enseignement scolaire, SCEREN/CNDP, Paris.

PAPADOPOULOS J. (1993) *J'apprends la géométrie en dessinant, CP*, CDDP de Perpignan.

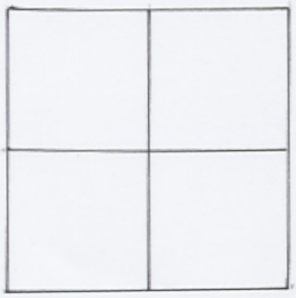
SHEPARD R-N. (1992) *L'œil* qui pense. Visions, illusions, perceptions, *Collection Science ouverte, Seuil, Paris.*

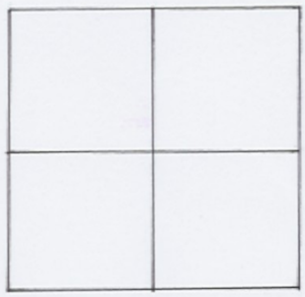
ANNEXES

Atelier de géométrie

Reconnaissance de formes

Matériel : *feutres ou crayons de couleur*





1. Colorie un carré.

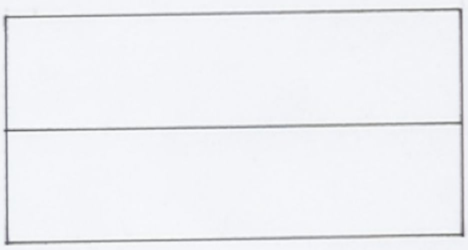
2. Colorie un autre carré de taille différente.

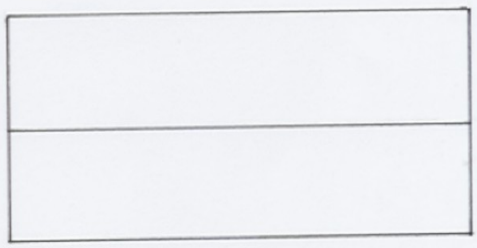
Annexe n°1

Atelier de géométrie

Reconnaissance de formes

Matériel : *feutres ou crayons de couleur*





1. Colorie un rectangle.

2. Colorie un autre rectangle de taille différente.

Annexe n°2

Atelier de géométrie

Reconnaissance de formes

Matériel : *feutres ou crayons de couleur*

1. Colorie un rectangle.

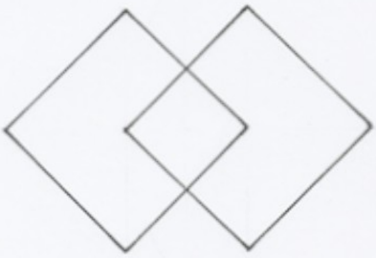
2. Colorie un autre rectangle de taille différente.

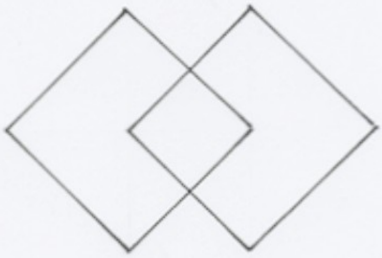
Annexe n°3

Atelier de géométrie

Reconnaissance de formes

Matériel : *feutres ou crayons de couleur*





1. Colorie un carré.

2. Colorie un autre carré de taille différente.

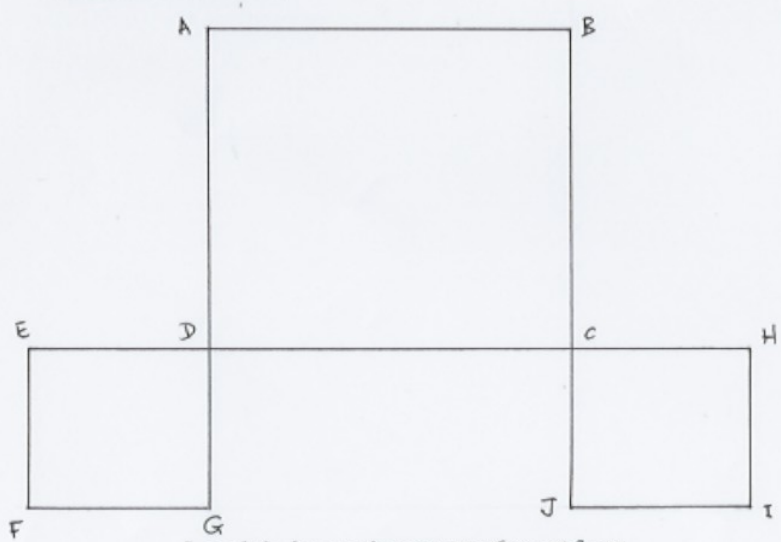
Annexe n°4

Atelier de géométrie

Reproduction de figures

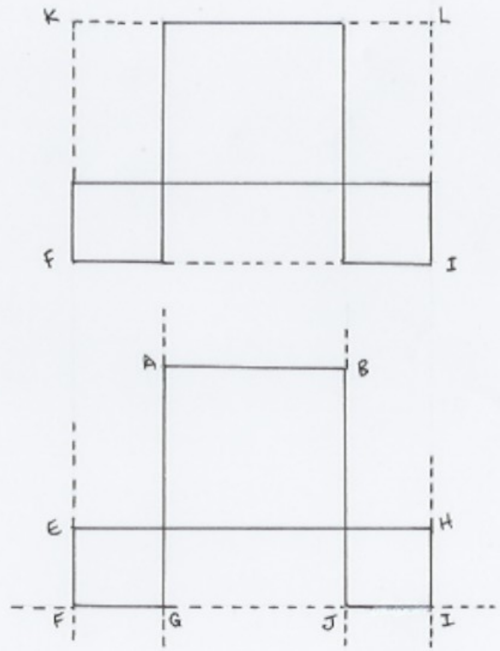
Matériel : *règle, équerre, papier blanc*

Reproduis cette figure.



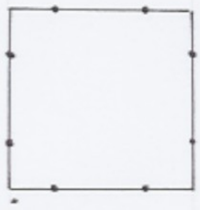
Les côtés des carrés mesurent 6 cm et 3 cm.

Annexe n°5

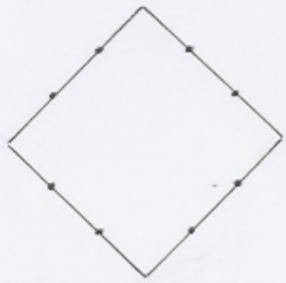


Deux exemples de tracés auxiliaires, en pointillés, permettant de reproduire plus facilement la figure de l'annexe n°5

Annexe n° 6

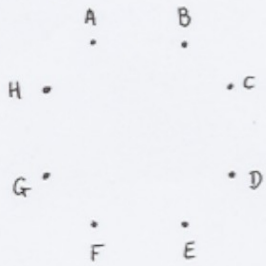


Carré 1

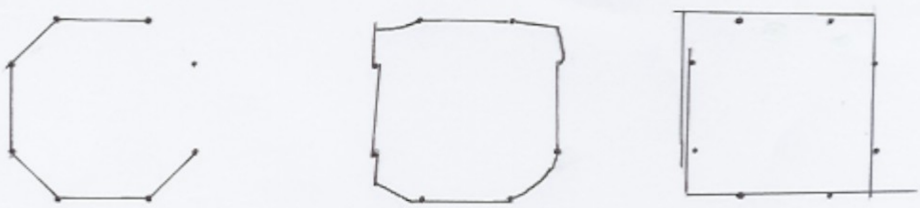


Carré 2

Réseau O

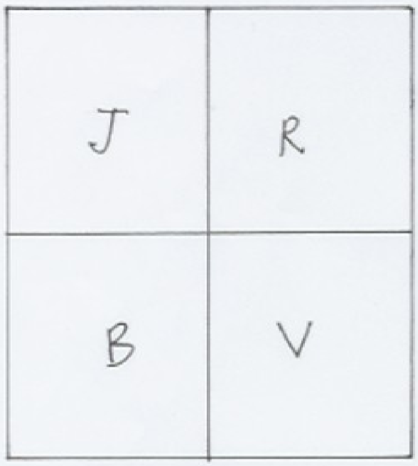


Réseau OL



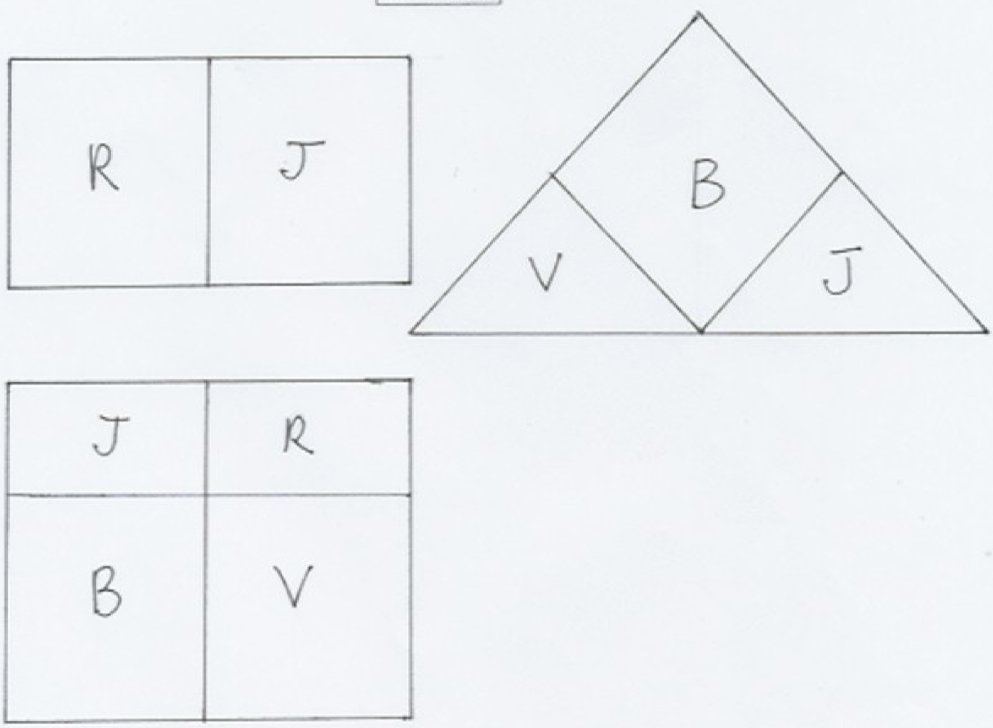
Reproduction de trois travaux d'élèves (CP)

Annexe n°7



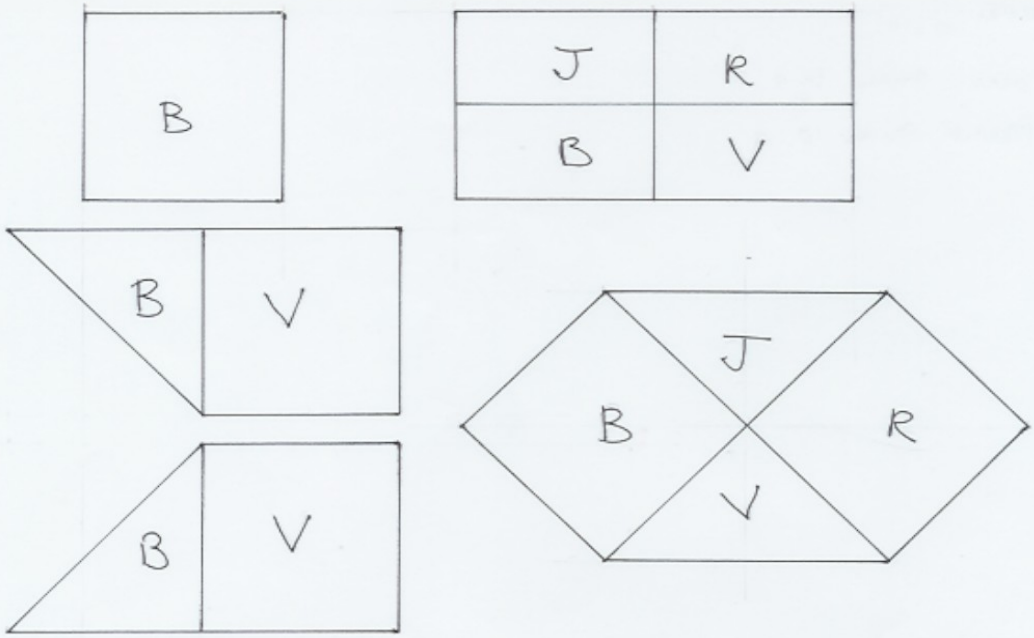
Les quatre zones colorées ont été délimitées par pliage puis coloriées par les élèves (R est mis pour rouge, V pour vert, J pour jaune, B pour bleu). Le côté du carré utilisé en classe mesure 21 cm ; l'échelle prise ici est égale à 1/3.

Annexe n°8.



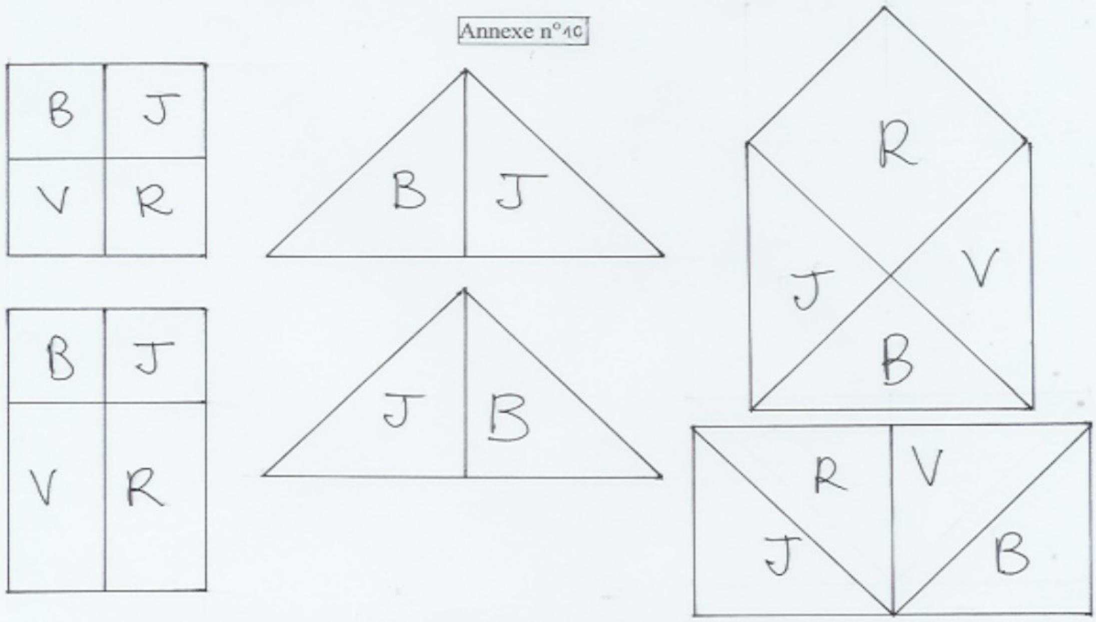
Première série de figures à réaliser par pliage à partir du carré initial. (Echelle 1/3).

Annexe n°9



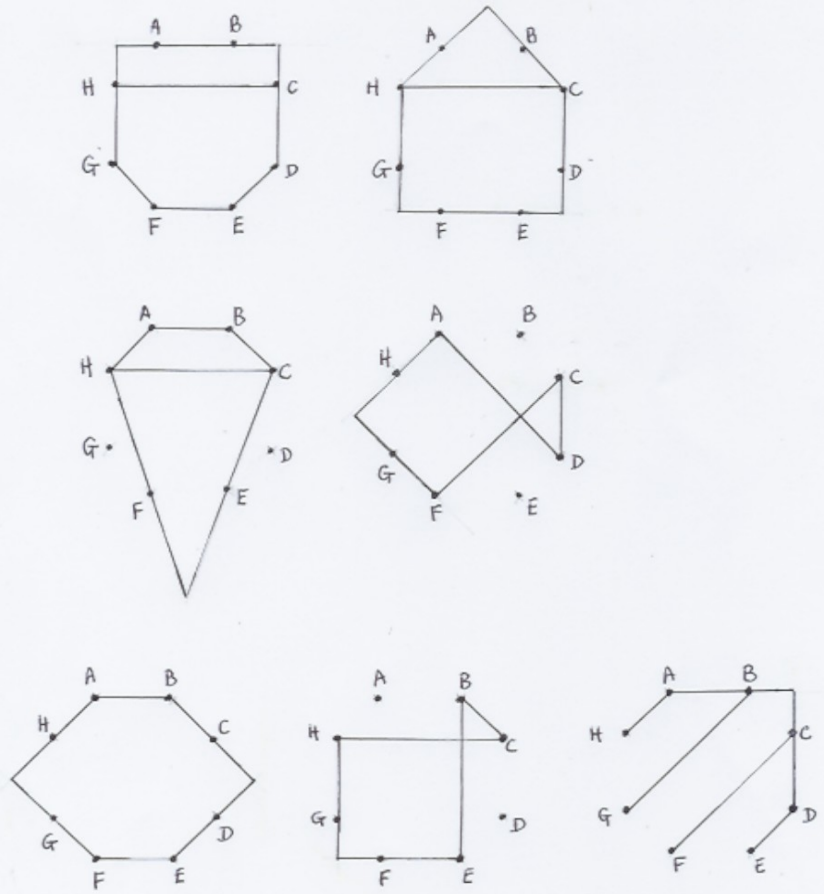
Deuxième série de figures à réaliser par pliage à partir du carré initial. (Echelle 1/3).

Annexe n°10



Troisième série de figures à réaliser par pliage à partir du carré initial. (Echelle 1/3).

Annexe n°11



Annexe n°12

Figure a

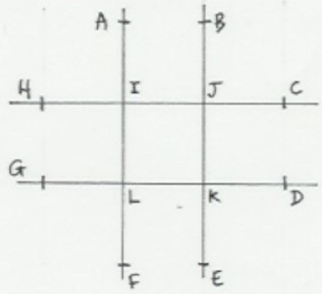


Figure d

Figure b

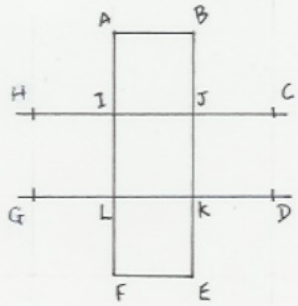


Figure e

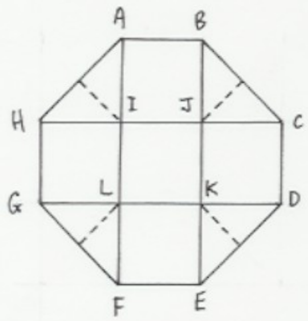


Figure c

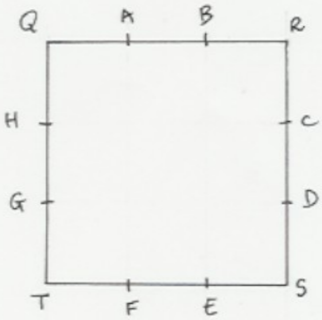


Figure f

Annexe n°13

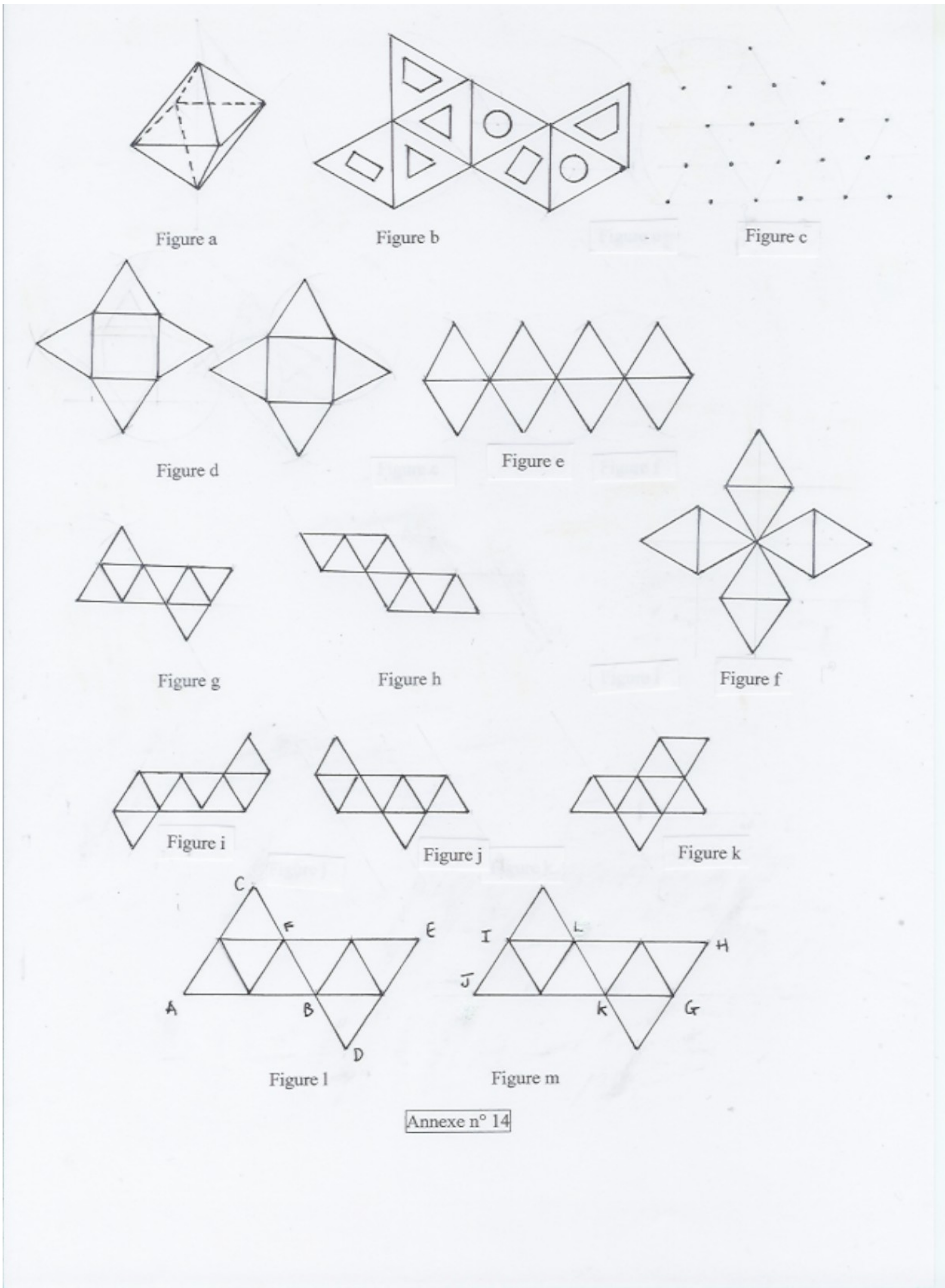


Figure a
Figure b
Figure c
Figure d
Figure e
Figure f
Figure g
Figure h
Figure i
Figure j
Figure k
C
F
E
A
B
D
Figure l
I
L
H
J
K
G
Figure m
Annexe n° 14

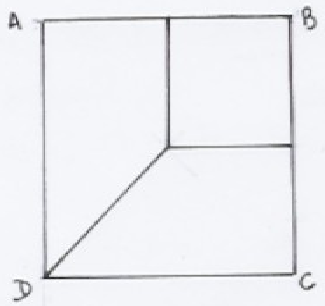


Figure a

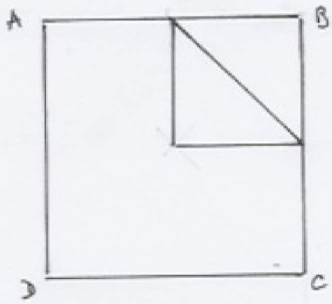


Figure b

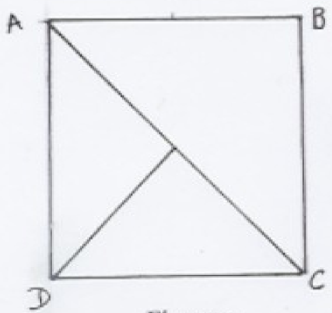


Figure c

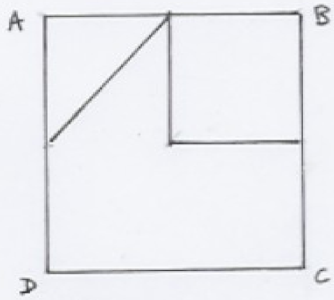


Figure d

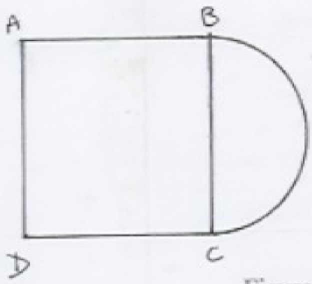


Figure e

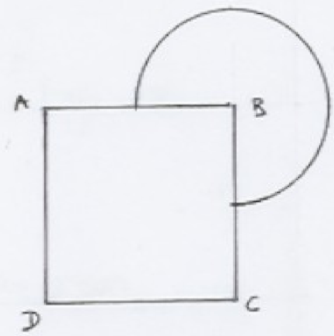


Figure f

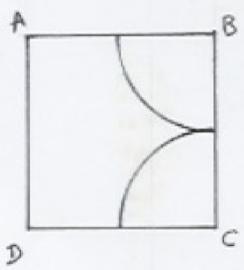


Figure g

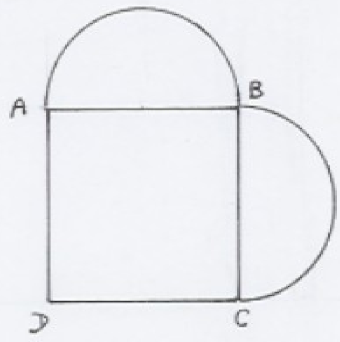
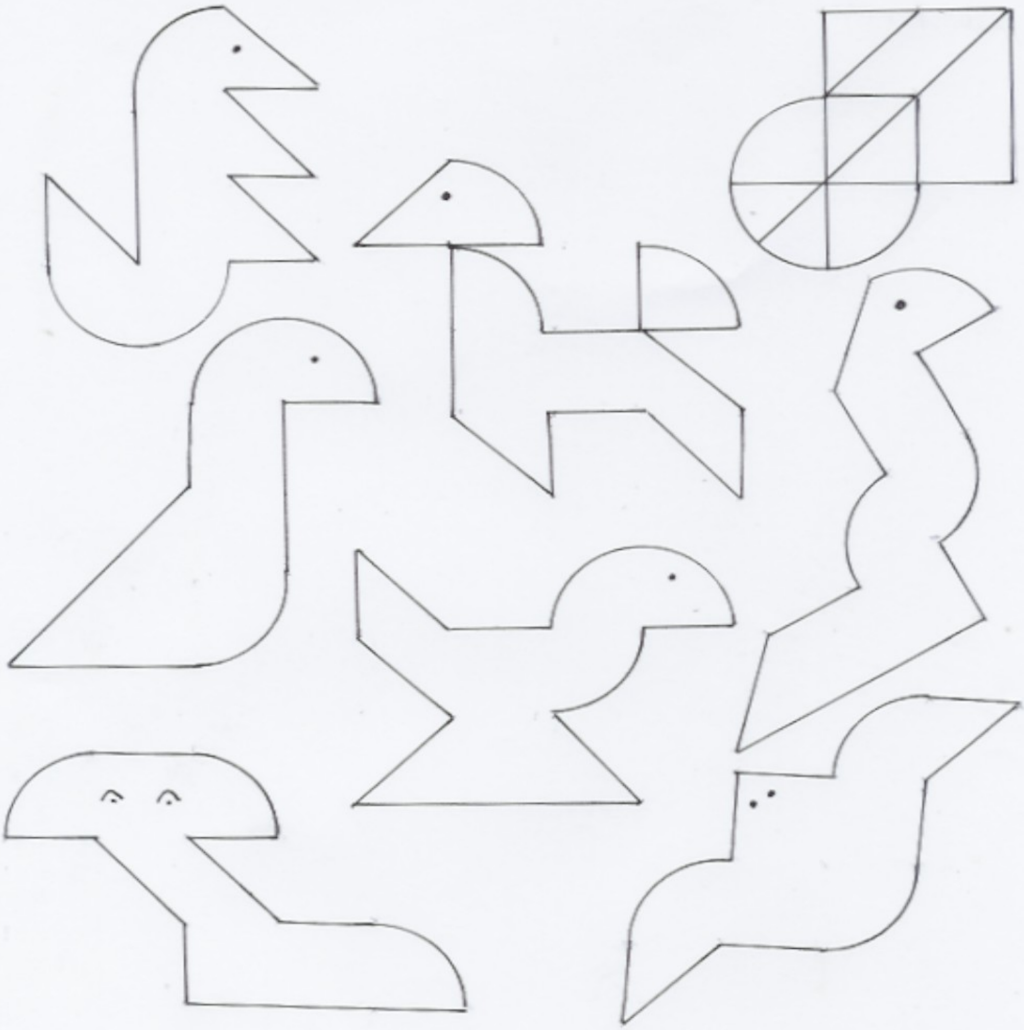


Figure h

Annexe n° 15



Puzzle géométrique « La goutte d'eau » et quelques silhouettes à reconstituer

Annexe n° 16

PARALLÉLISME AU CYCLE 3

Marie-Paule DUSSUC
Formateur IUFM de Lyon Centre de Bourg-en-Bresse
Equipe ERMEL - INRP
mpdussuc@wanadoo.fr

Gérard GERDIL- MARGUERON
Formateur IUFM de Grenoble
Equipe ERMEL - INRP
gerard.gerdil-margueron@wanadoo.fr

Michel MANTE
Formateur IUFM de Lyon, Professeur au collège C. Marot – Lyon
Equipe ERMEL - INRP
michelmante@free.fr

Résumé
Dans le cadre de la recherche INRP « Rôle de l'argumentation dans les phases de validation en géométrie au cycle 3 », l'équipe ERMEL a analysé les articulations entre savoirs et problèmes spatiaux et géométriques, expérimenté des dispositifs complets d'enseignement fondés sur la résolution de problèmes, s'appuyant sur une continuité dans l'étude des relations géométriques et une évolution des procédures de résolution et de validation.

Nous présentons dans ce texte le travail que nous avons mené sur le thème du parallélisme.

L'Équipe de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques à l'Ecole Elémentaire est composée de formateurs en mathématiques venant de 8 IUFM (d'une vingtaine de départements à une dizaine aujourd'hui…), d'un formateur en philosophie, de maîtres-formateurs et de conseillers pédagogiques.

I – OBJECTIFS, MÉTHODE DE TRAVAIL

I – 1 Objectifs

Nos objectifs ont été de :

- préciser pour le cycle 3 les enjeux, les contenus et les objectifs d'un enseignement visant le développement des compétences spatiales et géométriques ;
- élaborer, expérimenter, analyser des dispositifs complets d'enseignement (situations, modalités de mise en œuvre, analyses didactiques) cohérents pour l'ensemble du cycle 3 ;
- dans le cadre de ces dispositifs, conduire des investigations plus précises sur l'utilisation de phases argumentatives et les capacités des élèves qui y sont sollicitées.

Nous ne rendons compte ici que d’une partie du travail visant les deux premiers objectifs.

I – 2 Méthode de travail

Durant les six années qu’a duré notre travail, l’ensemble de l’équipe s’est retrouvée 3 à 4 fois par an pour concevoir l’ingénierie (réflexion sur les aspects théoriques, élaboration des situations) et pour analyser a posteriori les situations mises en oeuvre.

La progression complète a été expérimentée dans les classes. Aussi, pour cela, avons nous mené des réunions régulières dans les équipes de sites pour l’analyse préalable des situations, l’observation et le recueil des données.

Environ 80 situations pour le cycle 3 ont été expérimentées plusieurs fois dans des versions successives.

II – DES ÉLÉMENTS DE NOTRE PROBLÉMATIQUE

II – 1 L’espace et la géométrie

Nous sommes convaincus qu’au Cycle 3, les connaissances spatiales des élèves doivent être consolidées. Mais la conduite d’activités dans le méso-espace ou le macro-espace est coûteuse, et la description des situations liées à un espace particulier difficile. Nous avons conçu quelques situations reproductibles dans des espaces construits qui ont les caractéristiques du méso-espace ou du macro-espace, l’objectif principal de ces situations étant l’élaboration de systèmes de repères par les élèves.

Pour la construction des connaissances géométriques, nos travaux nous ont amené à mesurer l’importance du domaine spatio-graphique.

L’espace que nous appelons ainsi, à la suite de Colette LABORDE, peut être conçu comme un espace où les objets graphiques sont des représentations d’objets théoriques ou des modélisations d’objets spatiaux usuels.

La majorité des problèmes sont posés dans cet espace, sur des objets graphiques, pris pour eux-mêmes, ou dans une modélisation de l’espace physique fournie par l’enseignant, ou bien encore en référence à des objets théoriques.

II – 2 Les objets et les relations

Les objets sont de deux types du point de vue de l’élève :

- des objets premiers perçus dans leur globalité ;
- des objets composés d’objets premiers et de relations.

Au cours de la scolarité un même objet, comme le carré, d’abord perçu comme tel, puis conçu comme formé de quatre segments de même longueur perpendiculaires deux à deux, peut apparaître comme premier ou comme composé du point de vue des connaissances supposées de l'élève. Souvent, la conception première fait obstacle à l'apprentissage de savoirs « plus théoriques ».

Les relations sont les liens entre les objets ; dans le plan, ce sont l'alignement, la perpendicularité, le parallélisme, l'égalité de longueurs, et ce que nous appelons le « pareil/pas pareil » (superposabilité, agrandissement/réduction), l'incidence et le repérage. Ce sont ces relations qui structurent notre ingénierie.

Nous avons décidé de commencer par travailler sur les relations pour les raisons suivantes :

- étudier un objet, c'est étudier les relations qui le constituent ou qui le distinguent des autres ;
- c'est un moyen d'inciter les élèves, dans la résolution d'un problème, à passer du global à l'analytique ;
- les relations sont des éléments moins « apparents » pour les élèves que les objets d'où le recours à une représentation langagière ;
- les « évidences » spatiales sont moins présentes pour les relations, ce qui oblige à des jugements plus « théoriques ».

II – 3 Différentes significations d'un concept

« Le concept se réfère à plusieurs catégories de situations qui elles-mêmes se réfèrent à plusieurs concepts » (G. Vergnaud).

Pour un concept donné, comme la relation « parallélisme », les situations que nous avons conçues permettent de développer ce que nous appelons des « *significations différentes* » du concept qui renvoient :

- à des propriétés mathématiques ;
- à des procédures qui sont opérationnalisées par les propriétés mathématiques et qui permettent de tracer et ou de reconnaître ;
- à des images mentales ;
- à des formes langagières ;
- des difficultés spécifiques pour l'élève.

Ce point sera largement illustré plus loin.

II – 4 Les instruments

Nous nous sommes appuyés sur l'approche de Rabardel. Un instrument est une entité mixte à plusieurs composantes qui se construit. Les différentes composantes sont :

- l'artefact : le dispositif matériel conçu dans un but déterminé ;
- des éléments du concept en jeu ;
- des schèmes d'utilisation.

Ainsi, pour la construction de droites parallèles, un instrument possible est donc :

- artefact : la paire « équerre -règle graduée » ;
- éléments du concept en jeu : « deux droites parallèles sont deux droites d'écart constant, cet écart étant mesuré le long d'une direction fixe » ;
- schèmes :
  - placer l'équerre : un bord sur le trait fourni (trait 1), l'autre passant par le point fourni,
  - tracer un trait 2 le long de ce second bord de l'équerre,
  - mesurer le long de ce trait la distance entre le trait 1 et le point,
  - faire glisser l'équerre de quelques centimètres le long du trait 1,
  - tracer un trait 2 le long du second bord de l'équerre,
  - marquer un point sur le trait 3, en reportant la distance mesurée le long de ce trait, à partir du trait 1, du même côté que le point fourni,
  - joindre les deux points.

Nous avons fait le choix de donner systématiquement l'ensemble des instruments (dans « la boîte à outils ») à chaque élève, de façon à l'amener à mobiliser l'un ou l'autre en fonction du problème à résoudre. Dans certaines situations, des instruments sont enlevés de la « boîte » de façon à empêcher certaines procédures.

II – 5 Les situations

A la suite des choix faits pour les apprentissages numériques, chaque situation d'apprentissage proposée s'appuie sur un problème à résoudre, comporte une possibilité de validation pratique, dans un contexte porteur de la signification visée. Le contexte permet la dévolution du problème sans utiliser le vocabulaire correspondant au concept visé ; il sert de référence dans les situations ultérieures.

III – UN EXEMPLE LE PARALLÉLISME

III – 1 Les différentes significations du parallélisme

Deux droites « qui ne se rencontrent jamais »

- Référence mathématique « deux droites du plan sont soit sécantes, soit parallèles » ;
- signification permettant une reconnaissance perceptive dans de nombreux cas mais la distinction « parallèle / presque parallèle » est difficile ;
- signification qui ne peut être rendue opératoire pour la construction de droites parallèles ;
- difficultés pour l'élève :

- distinction trait / droite,
- confusion « ne se coupent jamais / ne se coupent pas dans la feuille de papier ».

Deux droites « d'écart constant »

- Référence mathématique : « l'ensemble des points situés à une distance donnée d'une droite est une droite qui lui est parallèle » ;
- opérationnalisation possible pour contrôler ou produire du parallélisme ;
- difficultés pour l'élève : nécessité de mesurer l'écart le long d'une direction fixe (parallèle à un bord de la feuille, perpendiculaire à la droite donnée ou le long d'un gabarit d'angle). Or l'élève ne perçoit pas toujours cette contrainte car une mesure à l'aide de la règle, le long d'une direction « à peu près fixe », contrôlée au jugé, suffit souvent.

Deux droites « penchées pareil »

- Référence mathématique : « deux droites sont parallèles si elles déterminent avec une sécante des angles correspondants égaux » ;
- opérationnalisation possible pour reconnaître que des droites sont parallèles car des droites de même inclinaison par rapport à une droite donnée correspondent à des images mentales facilement accessibles. Par contre l'opérationnalisation pour tracer des droites parallèles est plus délicate car elle nécessite l'utilisation de gabarit d'angle qui n'est pas naturelle pour les élèves.

Deux droites obtenues par « glissement sans tourner »

- Référence mathématique : « l'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle » ;
- le glissement de la règle contrôlé par rapport à une direction physique fixe (bord de la table, bord droit de la feuille de travail) apparaît comme le moyen le plus spontané pour tracer un parallélisme acceptable au jugé ;
- aspect dynamique favorisé ;
- accès rapide à un réseau de droites parallèles (outil de contrôle du parallélisme) et mise en évidence de la transitivité du parallélisme ;
- support de la technique la plus courante (glissement de l'équerre le long d'une règle), l'équerre n'étant alors qu'un gabarit d'angle particulier ;
- difficultés pour l'élève : une opérationnalisation rigoureuse nécessite un moyen pour empêcher la règle de tourner (gabarit d'angle, équerre). Mais un glissement de la règle, contrôlé au jugé, peut suffire dans de nombreux problèmes pratiques.

Deux droites supports de côtés opposés de formes familières

- Référence mathématique : « Le carré, le rectangle, le trapèze… ont des côtés opposés parallèles » ;
- la règle graduée aussi !

- opérationnalisé en utilisant la transitivité du parallélisme par le biais de la règle ;
- difficultés pour l'élève : technique de tracé facile à concevoir mais difficile à mettre en œuvre car non adaptable aux écarts multiples.

Deux droites parallèles sont deux droites perpendiculaires à une même troisième

- Nécessite un premier apprentissage de la perpendicularité d'une part, du parallélisme d'autre part ;
- relève davantage du collège, peut apparaître spontanément à l'école.

III – 2 Les situations

Nous avons choisi de :

- faire rencontrer les quatre premières significations évoquées en visant dans un premier temps des identifications perceptives avec une entrée relevant plutôt de « glissement sans tourner » ;
- favoriser les contextes de référence, de façon à ne pas avoir besoin d'un vocabulaire préalable ;
- construire assez rapidement un outil de reconnaissance : le réseau de droites penchées pareil,
- aller très progressivement vers une technique de construction faisant appel à l'écart constant ;
- approcher la double perpendicularité en fin de cycle 3.

Nous décrivons ci-dessous les principales situations que nous avons expérimentées tout au long du cycle 3. Nous les présentons dans l'ordre chronologique. Par contre nous ne présentons pas les situations d'accompagnement.

III – 2.1 Les feuilles qui coulissent CE2 (ou CM1)

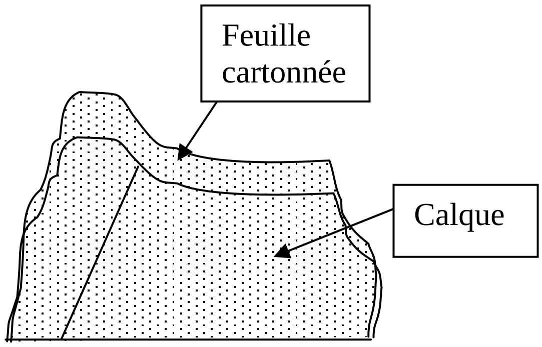
C'est la 1ère situation que nous proposons aux élèves sur le parallélisme.

Description

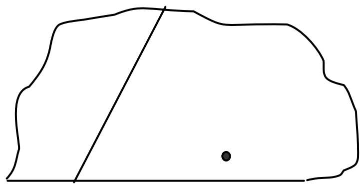
Matériel

- Boîte à outils contenant : règle, équerre, réquerre, compas ;
- des guides (environ un pour 6 élèves, voir dessin ci - dessous) constitués d'une feuille cartonnée à bords non réguliers (format A4) et d'un calque scotché à la feuille cartonnée, de forme voisine. Le calque se replie sur la feuille cartonnée pour constituer une sorte de "feuille double" dans laquelle vont coulisser les feuilles. (voir schéma ci-dessous). Sur le calque, on a tracé un trait penché assez épais ; il indique la direction du réseau de droites parallèles à construire. Il faut éviter les angles de 30°, 45° ou 60° car l'équerre pourrait alors fournir des gabarits, ce qui risquerait d'entraîner des confusions avec l'usage de l'équerre pour la perpendicularité !

- des feuilles de travail comportant un bord droit, un trait de même direction que celui du calque par rapport au bord droit, un point situé à environ 2,5 cm de la droite ou bien plus loin à environ 15 cm de la droite ;
- un guide et deux feuilles de travail de format plus important pour afficher au tableau au moment de la présentation de la situation.



Le guide


La feuille donnée aux élèves

1ère phase : Le maître présente les consignes et donne le matériel.

Le maître montre un guide et une feuille de travail. On observe et décrit collectivement le guide. Il explique ensuite le fonctionnement du dispositif : "*Cette feuille coulisse dans ce guide, le bord droit de la feuille bien plaqué contre le bord droit du guide.*"

Il le fait fonctionner et on constate qu'à un moment donné, le trait de la feuille est exactement sous le trait du guide : *« quand ça coulisse, à un moment, on ne voit plus qu'un trait ! »* On continue le mouvement et on constate que c'est ensuite le point qui passe sous le trait du guide.

« *Vous allez recevoir une feuille comme celle-ci. Sur la feuille, vous allez tracer un trait qui passe par le point et qui sera caché par le trait du guide, comme le premier trait, quand vous ferez coulisser la feuille dans le guide. Attention, vous n'aurez pas le guide pour tracer »*

Travail individuel puis présentation des productions soumises à la critique des autres. Puis validation en utilisant le guide.

2ème phase : Travail individuel.

3ème phase : Mise en commun au cours de laquelle des productions sont présentées à la classe. Chacun doit commencer par dire si le trait tracé convient ou non à vue d'œil dans un 1er temps puis avec instruments dans un 2ème temps. Ensuite les élèves explicitent leur procédure et enfin on passe à la validation pratique.

4ème phase : La situation est proposée à nouveau avec d'autres variables didactiques en fonction de la réussite des élèves.

Procédures

P1 : Tracé du trait sans mettre en jeu le parallélisme même de façon implicite.

P2 : Tracé du trait, au jugé, avec utilisation implicite du parallélisme.

P3 : Tracé du trait par glissement de la règle.

P4 : Tracé du trait avec un ou plusieurs traits intermédiaires.

P5 : Tracé du trait en cherchant même de manière implicite à construire un écart constant entre les deux traits.

P6 : Tracé du trait à l'aide d'un gabarit d'angle construit par pliage.

P7 : Tracé du trait à partir d'une double perpendicularité instrumentée.

Les principales variables didactiques

- Distance entre le point et la droite ;
- nombre de traits à tracer ;
- instruments disponibles (règle plate, règle non graduée, équerres, ficelle, papier non quadrillé…).

Nos choix

Dans un 1er temps le point est à environ 4 cm de la droite, dans un 2ème temps il est à environ 8 cm, puis on propose aux élèves dans un 3ème temps une feuille avec une dizaine de points. Cela permet aux élèves de percevoir un réseau de droites parallèles.

Avec ce choix de variables les élèves dans le 1er temps utilisent principalement les procédures P2, P3 et P5. La validation pratique fait « tomber » la procédure P1. Le passage au 2ème temps (point plus éloigné) amène des élèves à utiliser P4. La procédure P6 n'a jamais été rencontrée (le matériel dans la boîte à outil ne s'y prête pas). Quant à P7, elle est utilisée parfois par des élèves qui ont (chez eux, en étude) déjà rencontré cette procédure. A l'issue de cette activité un nouvel outil est proposé aux élèves : le réseau de droites parallèles sur un transparent au format A6.

Le vocabulaire mathématique peut être introduit mais on peut aussi accepter le vocabulaire plus familier des élèves par exemple « traits penchés pareils » ou « traits qui ne se rencontreront pas »…

Cette situation permet donc de travailler sur deux significations du parallélisme : « des droites d'écartement constant » et « deux droites obtenues par glissement sans tourner ». A noter que dans la phase de jugement à vue d'œil des productions, la signification « des droites qui ne se rencontrent jamais » est assez souvent utilisée.

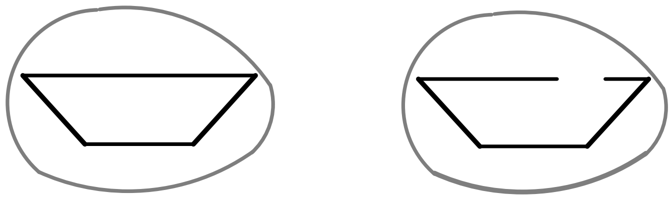
III – 2.2 Trapèze à terminer CE2 (ou CM1)

Nous proposons cette situation aux élèves à la suite de « Les feuilles qui coulissent ».

Dans cette situation, nous mobilisons les connaissances implicites des élèves sur la relation de parallélisme entre les côtés opposés d'un trapèze. Le problème posé est un problème spatial que l'élève va résoudre de manière perceptive.

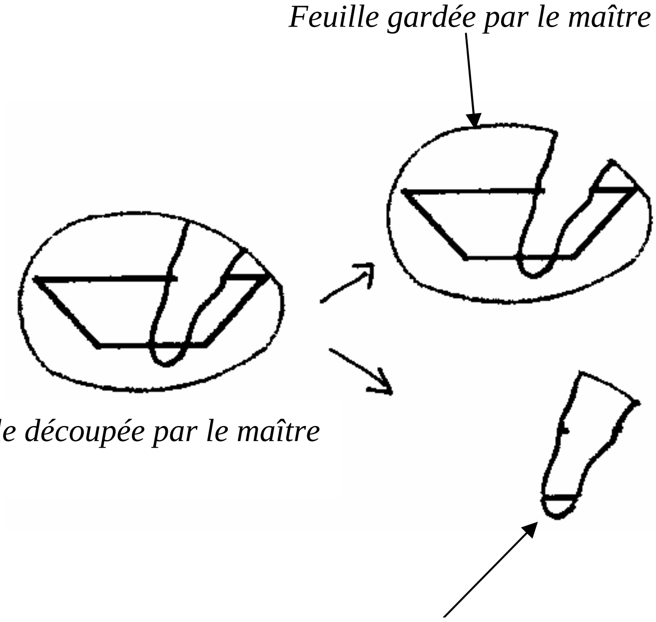
Problème

Terminer un trapèze dessiné sur une feuille à bords arrondis comme indiqué ci-dessous :



trapèze de référence *trapèze à terminer*

Feuille gardée par le maître



Feuille découpée par le maître

Feuille de travail donnée à l'élève

- Les élèves travaillent par deux. Chaque équipe est désignée par une lettre A, B, C... Les « trapèzes à terminer » (voir ci-dessus) préparés au préalable, sont désignés du nom des équipes A, B, C... écrit au recto sur le bord de chacune des deux parties,
- le maître montre le « trapèze de référence » (voir ci--dessus) puis le fixe au tableau dans une position quelconque, ses bases n'étant pas parallèles aux bords du tableau,
- puis, il montre un « trapèze à terminer » (voir ci-dessus) en disant : *«On a commencé à reproduire le trapèze affiché sur cette feuille. Ce côté* est *déjà dessiné. Il reste ce côté à terminer. »* ;
- le maître découpe au vu de tous ce trapèze suivant une ligne courbe passant par les points indiqués : *Voici la partie 1 (c'est la feuille gardée par le maître)* et *voici la partie 2 (c'est la feuille donnée à l'élève)»*. Remarque très importante : sur la partie donnée à l'élève il doit rester un « petit bout » du côté à terminer ;

- le maître fixe au tableau les deux parties, en faisant en sorte que les bases ne soient pas en position horizontale ou verticale. Les autres trapèzes ayant été découpés auparavant par le maître pour gagner du temps, leurs parties 2 sont présentées aux élèves puis distribuées : *«J'ai fait la même chose pour d'autres trapèzes à terminer. Voici le dessin à terminer ».*

Une variable didactique de cette situation est évidemment la position relative du trait que l'élève doit tracer avec le trait qui est tracé sur sa feuille de travail : les deux traits peuvent être en face ou « légèrement » décalés ou « totalement » décalés.

Étape 1 : Les deux traits sont bien en face

Communication du problème : Le maître fixe le trapèze de référence au tableau dans une position quelconque. Puis, il montre le trapèze à terminer en disant : *«On a commencé à reproduire le trapèze affiché sur cette feuille. Ce côté* est *déjà dessiné. Il reste ce côté à terminer. ».*
Les élèves travaillent par deux.
Bilan rapide : Le maître affiche les productions en demandant aux élèves de repérer celles qui conviennent. Puis il les passe en revue en demandant à leurs auteurs de se prononcer sur leur production sous le contrôle de la classe. **On ne vise là que des réponses établies perceptivement du type "c'est bon !","c'est pas bon !", "on ne peut pas dire, c'est presque bon !"…** Une vérification pratique est ensuite organisée.

Étape 2 : Les deux traits sont légèrement décalés

Même conduite que dans la phase 1.
Bilan : Le maître demande à différents élèves de venir mettre de côté toutes les productions qui ne conviennent pas. La mise en commun reste centrée sur la détermination « réussi/non réussi ». Le contrôle de la classe et les désaccords sur les productions litigieuses doivent amener un débat et une argumentation basés sur les procédures utilisées. L'explicitation de toutes les procédures et des réussites ou non réussites associées n'est pas un objectif de cette phase.

Étape 3 : Les deux traits ne sont plus du tout en face

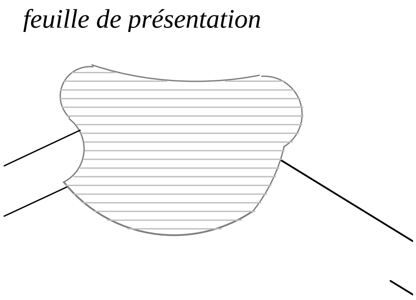
Comme précédemment, la mise en commun a pour objectif de déterminer les productions qui correspondent à un tracé réussi et les autres, avant de passer à la validation pratique. Ce débat doit faire ressortir que : *on ne peut placer le côté sans précaution ; c'est une position particulière du côté (direction) que l'on cherche* ; *la règle glissée avec une grande précaution pour garder la même direction (ou la garder « penchée pareil ») ou le tracé de traits intermédiaires en utilisant les deux bords de la règle aident au tracé du bon segment.*

III – 2.3 Traces des roues CM 1

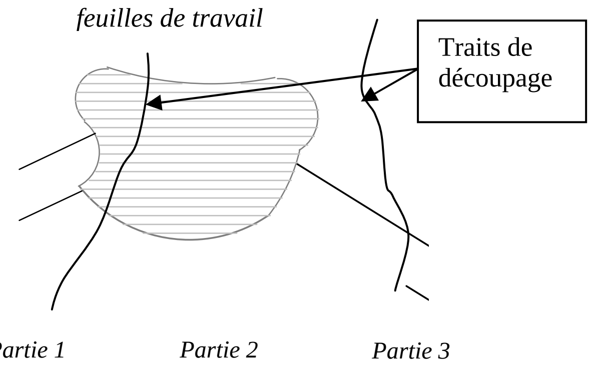
Description

Matériel

- La boîte à outils ;
- par groupe de 2 les élèves reçoivent la partie 2 du document 2 ci – dessous.



Document 1



Document 2

Étape 1 : Présentation de la situation et des consignes et distribution du matériel

Les élèves sont répartis par groupes de 2.

Le maître montre le document 1 (agrandi au format A3 ou même A2) pendant qu'il présente le problème. *« Nous nous imaginons sur le rallye Paris-Dakar... La tâche représente un marigot (mare, plan d'eau, étang...) et les deux bords de la bande correspondent aux traces laissées par les roues d'un camion dans le sable. Celui-ci a traversé le marigot, mais le vent a effacé une partie des traces qu'il a laissées en sortant. Vous devrez dessiner le trait représentant la trace effacée.».*

Le maître affiche au tableau le document 2 préalablement découpé selon les traits de découpage : « *Attention, les plans dont nous disposons sont partagés en trois parties comme ceci ".*

" Je vais distribuer un exemplaire de la partie 2 à chaque groupe ; c'est sur cette feuille que vous devrez dessiner le trait représentant la partie effacée. Si vous en avez besoin, vous pourrez consulter les exemplaires de la partie que je vais répartir dans la classe, mais vous ne pouvez transporter ni ces feuilles, ni les vôtres. Je garde les exemplaires de la partie 3 ; ils serviront plus tard. »

Étape 2 : Réalisation par binômes

Étape 3 : Mise en commun –Cf. mise en commun de feuilles qui coulissent

Procédure

P1 : au jugé.

P2 : par glissement, en conservant la direction, la largeur de la bande étant estimée au jugé.

P3 : utilisation de la propriété des écarts et glissement : mesure sur le bord du marigot, report sur l'autre bord et direction déterminée par glissement.

P4 : utilisation de la propriété des écarts avec mesure selon une direction fixe estimée au jugé.

P5 : utilisation de la propriété des écarts avec mesure selon la direction perpendiculaire à celle d'un bord de chaque bande et reports en deux points.

P6 : utilisation de la double perpendicularité pour le tracé avec mesure et report de l'écart (selon une perpendiculaire à l'un des bords tracée sur chacune des deux bandes).

Dans cette situation l’utilisation des écarts est indispensable.

Les variables didactiques sont principalement la longueur de l’écart entre les deux droites et la longueur du trait à tracer. Si cet écart est important, si la longueur du trait est importante, alors les procédures au jugé et les procédures qui ne prennent pas en compte qu’approximativement l’écart entre les deux droites ne permettent pas d’aboutir.

Ici on travaille évidemment sur la signification : deux droites parallèles sont « Des droites d’écartement constant ». D’autre part à la fin de cette situation la terminologie "droites parallèles" apparaît.

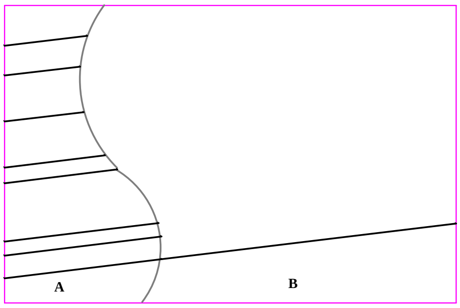
III – 2.4 D’autres situations

Nous décrivons ci-dessous trois situations qui complètent le travail amorcé à travers les situations précédentes :

Parapuzzle

Dans cette situation les élèves ont à reconstituer un réseau de droites parallèles à partir de l’une d’entre elles.

Pour prendre de l’information sur la feuille où le réseau de parallèles est tracé, certains mesurent les écarts entre les droites perpendiculairement aux traits, d’autres en privilégiant une direction moins précise, d’autres en prenant un écart approximatif. Les instruments utilisés pour cette prise d’information sont aussi variables (règles, quelquefois équerre, mais aussi compas…).



Pour la réalisation, les deux parties de la feuille sont séparées et éloignées. La partie A sert à prendre de l'information, la partie B est le lieu du tracé.

Pour le tracé aussi les choix effectués sont multiples. Ils portent sur le nombre de points perçu comme nécessaire pour tracer la droite[1] (de un à une demi-douzaine), le report de l'écart…

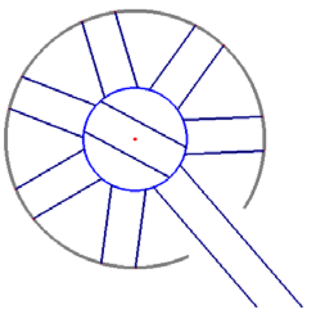
Dans cette situation on travaille encore sur la signification « Deux droites d'écart constant », la signification « Deux droites perpendiculaires à une même 3ème » est souvent rencontrée, mise en œuvre de manière totalement empirique car elle facilite les tâches de mesurage des écarts.

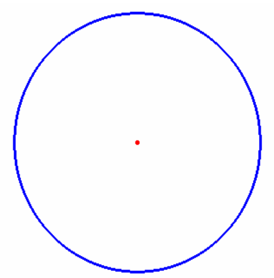
Les techniques de tracé de parallèles en prenant un écart perpendiculaire peuvent alors être institutionnalisées.

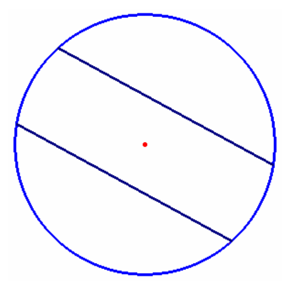
Rotonde[2] CM2

Il s'agit de produire deux droites parallèles dont l'écart est fixé par des données graphiques du problème : les élèves doivent installer les rails, sur la plaque tournante de la rotonde, connaissant les voies fixes et le centre de la plaque. Cela revient à tracer deux cordes d'un cercle, symétriques par rapport au centre, dont la distance au centre est déterminée. Deux relations sont identifiables perceptivement sur le dispositif fourni : le parallélisme et l'égalité de distance. Pour les élèves il s'agit donc de construire deux droites parallèles dont l'écart est déterminé par la distance de chacune à un point fixe. Ils doivent ensuite écrire un « texte géométrique » correspondant à un protocole finalisé.

dispositif *feuille de travail de l'élève* *production attendue*







---

1 Cette question peut faire l'objet d'un débat argumenté (cf. chapitre Validation).

2 Les premières locomotives, qui étaient des machines à vapeur, avaient un sens de marche imposé. Il fallait donc un dispositif leur permettant de faire demi-tour dans les gares terminus. Il s'agissait de très grandes plaques tournantes souvent situées à l'intérieur de bâtiments appelés ROTONDES.

Dans cette situation, les élèves réinvestissent les significations mises en place dans les activités précédentes.

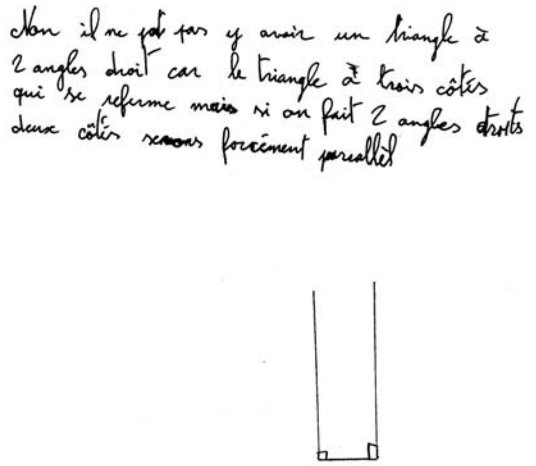
Triangles, quadrilatères et angles droits

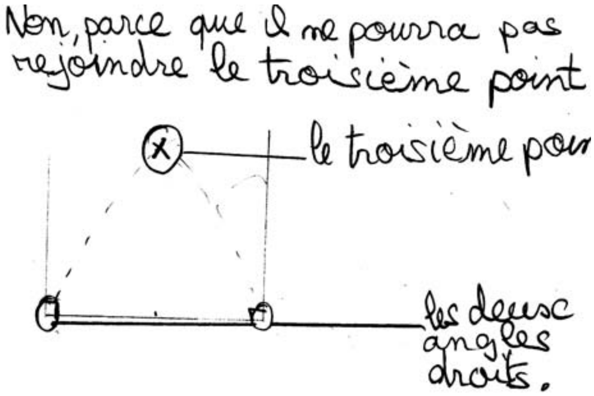
Cette situation est bâtie autour de deux problèmes simples dans leur énoncé :

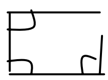
- *Est-il possible de construire un triangle à deux angles droits ?*
- *Est-il possible de construire un quadrilatère à trois angles droits ?*

Il s'agit de problèmes théoriques dont la résolution peut se faire soit dans le domaine théorique (*si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles et ne peuvent se rencontrer pour donner le troisième sommet du triangle*) soit dans le domaine spatio-graphique (*production d'un schéma commenté*).

Exemples de productions obtenues :





Non,
Car s'il y a 3 angles **droits**  et si je continue le trait il y aura 4 angles droits.

IV – CONCLUSIONS : NOS INTERROGATIONS

Au cours de ce travail de recherche, nous avons donc analysé les articulations entre savoirs et problèmes spatiaux et géométriques et construit un dispositif complet d'enseignement de la géométrie au cycle 3, fondé sur la résolution de problèmes

IV – 1 Les liens entre les significations

La technique la plus courante de glissement de l'équerre le long de la règle relève-t-elle de « droites penchées pareil » ou de « glissement sans tourner » ?

La signification « droites penchées pareil » permet de construire une technique de tracé fiable en utilisant n'importe quel gabarit d'angle ; faut-il investir du temps pour construire cette technique qui a l'avantage d'être indépendante de l'équerre mais l'inconvénient d'être non usuelle ?

Au delà du parallélisme nous constatons que les élèves mettent spontanément en œuvre différentes significations spontanément dans une même situation ; comment s'établissent les liens entre elles ?

IV – 2 Les problèmes liés aux mises en commun

La procédure ne laisse pas de trace de résolution et n'est pas visible sur les productions. Les élèves ont des difficultés à formuler ce qu'ils ont fait ; ils montrent leurs méthodes avec des gestes.

Les productions sont souvent petites pour une exploitation collective ce qui conduit à des difficultés dans la diffusion des procédures et leur appropriation par d'autres élèves. En conséquence, le plus souvent, nous demandons de montrer, à l'aide du rétroprojecteur, la procédure par une production réalisée par un élève devant la classe.

IV – 3 Les problèmes de validation

Une validation pratique est prévue dans toutes les situations. Dans les premières phases des situations, elle est souvent mise en place dès la réalisation ; elle participe à la dévolution du problème. Nous avons rencontré deux difficultés :

- la relation souvent difficile entre validation pratique de la production et validation de la procédure (la production peut être correcte alors que la procédure n'est pas valide, et inversement) ;
- la tolérance acceptable par rapport aux imprécisions de tracé.

Ensuite, cette validation pratique est en général différée pour laisser place à un débat sur les productions et sur les procédures, où souvent l'instrument apparaît nécessairement comme argument en raison des limites du contrôle perceptif.

BIBLIOGRAPHIE

ARGAUD H-Cl. (1998) Problèmes et milieux a-didactiques, pour un processus d'apprentissage en géométrie plane à l'école élémentaire, dans les environnements papier-crayon et Cabri-géomètre, *Thèse, Université Joseph Fourier-Grenoble 1.*

BERTHELOT R. et SALIN M-H. (1992) L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire, *Thèse, Université Bordeaux 1.*

ERMEL (à paraître) L'enseignement de la géométrie au cycle 3, *Ed. HATIER.*

LABORDE C. (1989) L'enseignement de la géométrie entant que terrain d'exploitation de phénomènes didactiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **9/3**, La Pensée Sauvage Éditions.

RABARDEL P. (1995) Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains, *Paris, Armand Colin.*

VERGNAUD G. (1991) La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **10 2/3**, La Pensée Sauvage Éditions.

LE LOGICIEL MATHENPOCHE À LA LIAISON CYCLE 3/6ÈME

Sébastien HACHE
Professeur de Mathématiques, Collège Villars (DENAIN 59)
Président de l'association Sésamath
sebastien.hache@sesamath.net

Katia HACHE
Professeur de Mathématiques, Collège Voltaire (LOURCHES 59)
Katia.hache@sesamath.net

Résumé
Le logiciel Mathenpoche connaît actuellement un déploiement très rapide dans les collèges et suscite beaucoup d'attentes chez les professeurs des écoles. L'objet de l'atelier était de mieux comprendre le fonctionnement du logiciel, ses forces, ses faiblesses, mais aussi ses perspectives de développement pour voir comment des partenariats peuvent se construire pour la réalisation d'un mathenpoche cycle 3.

Nous tenons à remercier la COPIRELEM qui nous a permis d'exposer une partie des travaux de l'association Sésamath à des spécialistes de l'enseignement des Mathématiques en primaire à l'occasion de son colloque à Strasbourg. Ces contacts furent riches et nombreux, dans l'atelier même mais aussi lors des autres ateliers et conférences.

L'association Sésamath (`www.sesamath.net`) rassemble des professeurs de mathématiques désireux de publier sur Internet des ressources libres en Mathématiques, ressources issues de la mutualisation de centaines de professeurs en exercice ou d'un travail collaboratif à distance. Depuis 2004, Sésamath a noué un étroit partenariat avec l'ADIREM qui s'est en particulier concrétisé par la création d'une commission Inter-Irem Mathenpoche : `http://cii.sesamath.net/index.php`

I – MATHENPOCHE : LE PRINCIPE

Le logiciel Mathenpoche est développé par des professeurs de Mathématiques en exercice (collège et lycée) dans le cadre de l'association Sésamath. Ce logiciel peut être utilisé en ligne : `www.mathenpoche.net` ou téléchargé pour une utilisation en local. Mathenpoche est sous licence libre (GPL) et gratuitement téléchargeable sur le site ad hoc. Actuellement les 3 premiers niveaux de collège (6ème, 5ème, 4ème) sont terminés, soit plus de 1000 exercices intéractifs, ainsi qu'un chapitre de seconde.

I – 1 Génèse du projet

Le projet Mathenpoche a débuté en 2001, à la suite de premières expériences de mutualisation (Mathadoc). Le constat de départ était qu'aucun exerciseur ne répondait réellement à l'attente des professeurs de collège, puisque ces logiciels étaient avant tout tourné vers le périscolaire. La première exigence du projet Mathenpoche a donc été d'intégrer le professeur au cœur du logiciel. En particulier cela s'est traduit par un mode de développement dans lequel n'interviennent (à différents niveaux de spécialisation) que des professeurs de Mathématiques en exercice. Très vite, par ailleurs, la version Monoposte de Mathenpoche a été complétée par une version réseau qui est actuellement utilisée chaque jour par des dizaines de milliers d'élèves en France (en constante et régulière augmentation).

Par « Exerciseur » il faut entendre que le logiciel propose des exercices à l'élève et qu'il valide et propose une réponse ou une aide à l'élève. Le type de réponse attendu dans Mathenpoche est assez varié (réponse numérique, réponse à choix multiple, sélection d'un élément à la souris, construction virtuelle...) mais également relativement fermé : cette fermeture s'explique par la difficulté d'analyser une réponse complexe. Mathenpoche n'a pas recours à l'intelligence artificielle, ce qui limite évidemment l'ouverture des questions.

I – 2 Les aides de Mathenpoche

Les aides de Mathenpoche sont des petits « dessins animés » qui ont pour objectif d'aider un élève en échec devant une question. L'élève peut dérouler ces exercices à son rythme et revenir en arrière (tel un magnétoscope). En général, ces aides présentent une technique pour résoudre un exercice. Elles sont décontextualisées, mais ne dépendent pas actuellement du type d'erreur de l'élève. Une réflexion est actuellement en cours pour déterminer dans quel cas il est pertinent d'avoir une aide indexée sur un champ d'erreurs répertoriées et quand il est pertinent de proposer une correction animée de la question (dans ce cas, la correction dépend des données aléatoires de l'exercice). Cette réflexion résume à elle seule la complexité du développement de Mathenpoche puisqu'elle intègre simultanément une réflexion didactique et une optimisation technique (il est évidemment très long de faire une aide animée intelligente ou une correction animée).

Ces aides sont en particulier disponibles indépendamment de l'exerciseur à l'adresse : `http://cii.sesamath.net/montpellier/aides_animees/index.htm`

Lors de l'atelier, la différence entre les attentes d'un professeur de collège (en $6^{ème}$) et celles d'un professeur des écoles (cycle 3) pour de telles aides animées ont été soulignées. Ces différences concernent en particulier le formalisme de ces aides, leur longueur et parfois même leur pertinence.

I – 3 Mathenpoche en réseau

Toutes les explications sur la version réseau de Mathenpoche sont accessibles à l'adresse : `http://mathenpoche.sesamath.net/?option=utilisation`

En particulier, la version réseau de Mathenpoche met le professeur au centre du logiciel puisque celui-ci peut programmer à l'avance des séances d'exercices (en différenciant au besoin suivant les élèves) et récupérer tous les résultats des élèves (temps passé, nombres d'erreurs...) depuis tout poste connecté à Internet, par exemple le soir depuis son domicile s'il est équipé. Il est également possible de suivre les résultats des élèves en direct depuis son poste maître (dans une salle en réseau), ce qui ouvre aussi la porte d'un suivi à distance pour un élève hospitalisé qui peut de cette façon apparaître dans le suivi en temps réel comme s'il se trouvait dans la salle informatique. Il est clair que l'utilisation de Mathenpoche réseau demande des équipements informatiques conséquents qui font souvent défaut dans le primaire (et même encore parfois dans les collèges).

La version réseau de Mathenpoche permettra sans doute aussi de sortir du cadre trop fermé de l'exerciseur. En effet, à partir du moment où le professeur peut récupérer et analyser lui-même via le réseau les réponses complexes des élèves, il devient possible d'ouvrir beaucoup plus largement le spectre des questions. En particulier, des concepts comme celui de l'ardoise virtuelle ou même d'un tableau virtuel collaboratif (construit simultanément par les contributions des élèves) sont actuellement à l'étude, de même que la constitution d'une mémoire complémentaire de classe via la mémoire des travaux. Une fois encore, les questions posées sont techniques, pédagogiques mais aussi organisationnelles et ergonomiques : comment éviter de noyer l'enseignant sous un flot de données qu'il in fine ne pourrait pas gérer ?

II – LES OUTILS MATHENPOCHE

Alors que d'autres logiciels (type Wims) partent des potentialités d'outils pour générer des exercices (les exercices utilisant les outils en sous-main), Mathenpoche a suivi un parcours totalement inverse : c'est le développement des exercices qui a conditionné la création d'outils indépendants (un peu comme les élèves qui, au fur et à mesure de leurs manipulations, élaborent des objets plus génériques et généraux qui deviendront alors des outils pour la résolution de problèmes plus complexes). Cette démarche est à relier typiquement au mode de développement retenu, proche des besoins des enseignants et inscrit dans le quotidien de la classe.

II – 1 Suite de logiciels intégrés

Les exercices de Mathenpoche ont donc permis la création d'outils qui à leur tour permettent d'envisager la génération d'exercices dans Mathenpoche. Ainsi l'utilisation ponctuelle d'instruments de géométrie virtuels a conduit à la création du module Instrumenpoche (`www.instrumenpoche.net`) : y sont rassemblées tous ces instruments permettant la construction de figures complexes en mode ouvert, c'est à dire sans procédure de validation par le logiciel. De la même façon, le module Tracenpoche (`www.tracenpoche.net`) a vu le jour, permettant d'introduire de la géométrie dynamique (sur le modèle de Cabri ou Geoplan ou …) au cœur des exercices de Mathenpoche. A noter également le développement actuel de Casenpoche, le tableur mathématique de cette suite logicielle.

Mais comme ces outils sont par ailleurs développés par la même équipe, ils préfigurent le noyau d'une suite de logiciels mathématiques compatibles et même interconnectés (par exemple, le croisement entre Tracenpoche et Instrumenpoche soulève de nombreuses interrogations).

II – 2 Exercisation des outils

En plus de leur usage autonome, il existe actuellement 2 modes d'exercisation des outils Mathenpoche : l'outil peut être totalement intégré dans l'exercice (exemple : les exercices 3,4 et 5 à l'adresse :
(`http://meptest.sesamath.net/4eme/pages/geometrie/chap5/serie3/index.html`) ou être exercisé dans le cadre de Mathenpoche réseau ; dans ce dernier cas, le professeur

propose un exercice faisant intervenir par exemple Tracenpoche. La figure construite avec Tracenpoche par l'élève est alors renvoyée directement au professeur via le serveur.

II – 3 Les cahiers Mathenpoche

Intégrer l'utilisation des TICE dans l'enseignement des mathématiques demande aussi d'imaginer une conception globale de l'enseignement dans laquelle ces outils ont leur place. C'est dans cet esprit qu'ont été développés les cahiers Mathenpoche. Il s'agit de fiches d'exercices en tous points complémentaires du logiciel exerciseur :
`http://lescahiersmep.sesamath.net/index.php`

Dans le même esprit, une expérience de rédaction collaborative d'un manuel en 5ème est actuellement tentée au niveau de Sésamath : `http://www.sesamath.net/livre5`

III – MATHENPOCHE AU SERVICE DE LA LIAISON INTER-CYCLE

Après un développement centré sur le collège, Mathenpoche se tourne vers le cycle 3 d’une part, la seconde générale et professionnelle d’autre part. Cette extension répond à une demande très forte et s’explique en partie par le fait que très peu d’outils sont actuellement communs aux différents acteurs des liaisons inter-cycles. Comment bien se parler si on ne parle pas des mêmes choses ? Très modestement, l’utilisation d’un même logiciel dans les différents cycles peut être le catalyseur d’échanges entre enseignants. C’est particulièrement vrai pour la liaison école/collège. Mais le risque est grand aussi d’importer les mathématiques du collège vers l’école ; ainsi Mathenpoche cycle 3 ne doit pas être une simple extension de Mathenpoche 6ème, ce qui ne servirait nullement la liaison, tout au contraire. La demande est forte mais la réponse doit être adaptée et mûrement réfléchie : c’est le sens actuel de la démarche adoptée par les développeurs et des contacts avec la COPIRELEM.

III – 1 Scénarisation collaborative

Actuellement, Mathenpoche 6 fait l'objet d'une nouvelle scénarisation. Ce changement est motivé par la modification des programmes de 6ème mais aussi par les avancées techniques réalisées par l'équipe de développement : il est désormais possible d'envisager des types d'exercices impossibles à programmer il y a seulement 3 ans. Contrairement au mode de scénarisation actuel où deux professeurs sont plus particulièrement chargés de bâtir les scenarii avant de les éprouver avec les professeurs-développeurs, le choix s'est porté sur une scénarisation collaborative. Il s'agit de rassembler à distance (via internet) un certain nombre d'enseignants volontaires (une dizaine actuellement) pour élaborer les scenarii. Pour cela il faut d'abord trouver un modèle de scénario à la fois précis et évolutif, puis mettre en place l'espace de débat nécessaire autour de certains exercices. Il est important de noter que l'équipe qui travaille actuellement sur ce projet est composée de professeurs des écoles (CM2) et de professeurs de collèges, afin de favoriser les échanges inter-cycles et sans doute de préfigurer le développement d'un Mathenpoche cycle 3.

III – 2 Intérêts et perspectives d'un travail avec la COPIRELEM

Parmi les huit groupes IREM travaillant sur Mathenpoche, Deux groupes IREM sont plus particulièrement positionnés sur la liaison cycle 3/6ème : les groupes de Rennes et de Lille. Le groupe IREM de Rennes a élaboré des scenarii relatifs à la proportionnalité tandis que le groupe de Lille a travaillé sur les fractions et décimaux.

Il n'est pas évident de mettre en place un partenariat constructif entre l'équipe de Mathenpoche et la COPIRELEM, car les façons de travailler, les rythmes, les contraintes sont a priori très différentes. Il est évident que le regard de la COPIRELEM est bien plus vaste qu'une simple problématique de scénarisation, mais il est clair aussi que le déploiement massif de Mathenpoche est une opportunité pour faire passer certaines idées ou conceptions sur l'enseignement des Mathématiques. L'année qui s'annonce sera donc un test pour voir comment allier le dynamisme des deux démarches, dans le respect des approches de chacun.

CRÉATION D'UN ATELIER DE DÉCOUVERTE MATHÉMATIQUE SUR LE THÈME DES PONTS DE KOENIGSBERG

Bénédicte AUTIER
Professeur, Collège Kleber, Strasbourg
autiernegrier.benedicte@wanadoo.fr

Muriel CRON
Professeur des écoles, Ecole primaire d'Andlau
cron@wanadoo.fr

Anne-Céline MITTELBRONN
Professeur, La Providence, Strasbourg
anne-ce@noos.fr

Nathalie WACH
Maître de conférences, Département de mathématiques
Université Louis Pasteur, Strasbourg
wach@math.u-strasbg.fr

Marc WAMBST
Maître de conférences, Département de mathématiques
Université Louis Pasteur, Strasbourg
wambst@math.u-strasbg.fr

Résumé
Sur un thème important tant par son aspect historique que mathématique (les ponts de Koenigsberg et les graphes), il s'agit de réfléchir à la conception d'une activité de vulgarisation scientifique destinée à des enfants de huit à douze ans, de préférence en intégrant une partie ou tout d'un théorème avec sa démonstration.

La Mission Culture Scientifique et Technique (M.C.S.T.) de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg propose des activités de découverte scientifique à destination d'enfants de huit à douze ans. Nous avons créé un groupe I.R.E.M. «atelier mathématique » qui s'est donné pour tâche de concevoir de telles activités sur des thèmes mathématiques. Il est composé d'enseignants-chercheurs de l'université, d'enseignants du second degré et d'une professeur des écoles. Ce groupe a pour l'instant conçu quatre activités mathématiques et les a testées dans le cadre scolaire et dans celui des activités de l'Université. Les thèmes abordés sont les suites de Fibonacci (cf. [1]), le théorème d'Euler-Poincaré (cf. [3]), la combinatoire des dominos (cf. [2]) et les systèmes de numération (cf. [3]).

Le but de l'atelier animé par notre groupe IREM lors du colloque de la COPIRELEM est de concevoir une activité mathématique avec les contraintes que nous nous sommes fixées ou qui sont imposées par le public auquel elle est destinée sur le thème des Ponts de Koenigsberg. Nous espérions, par cet atelier, faire part de notre expérience quant à la réalisation de telles activités et recueillir les remarques des participants.

I – EXPOSÉ DES CONTRAINTES ET DU PROBLÈME

I – 1 Contraintes

Notre ambition est de présenter des thèmes historiques et scientifiquement importants dans l'esprit de ce qui peut être fait dans le domaine des sciences expérimentales par *La main à la pâte*. Dans le cadre de la M.C.S.T., nos ateliers doivent s'adresser à des enfants de huit à douze ans sans pré-requis particuliers.

Ils doivent se dérouler en un temps imposé de quatre heures, éventuellement fractionné en deux séances de deux heures. Il est nécessaire que les ateliers soient clos dans le sens qu'une solution au problème étudié est donnée à la fin des quatre heures et nous souhaitons que les enfants emportent avec eux une réalisation matérielle. Ces dernières contraintes nous éloignent des expériences dites de *narration de recherche* où des problèmes ouverts sont traités sur une longue période.

Nous essayons de présenter des problèmes de manière relativement approfondie faisant appel à la notion de démonstration plus qu'à celle de résolution. Ces problèmes sont généralement issus de notions fondamentales des mathématiques et sont par là même d'un intérêt culturel et historique. Nous ne nous situons pas dans une démarche d'apprentissage à long terme, qui s'inscrirait dans un programme, cependant le programme scolaire est notre outil de référence pour préjuger du niveau de connaissance et de compétence des enfants. Ceci nous permet de proposer nos ateliers au plus grand nombre. De plus, ce type d'activité se place dans le fil du document d'application des programmes (cf. [4]) où la résolution des problèmes est mise au centre des activités mathématiques du cycle 3 de l’école primaire.

Nous avons essayé de donner aux activités un aspect ludique afin de pouvoir les proposer dans des cadres différents de celui de l'école, mais aussi pour qu'ils soient perçus dans les classes comme une activité différente du travail scolaire habituel.

I – 2 Déroulement pratique des activités

Nos activités sont toutes régies par le schéma général suivant. Nous commençons par faire observer un phénomène ou posons une question simple. Dans l'atelier sur les suites de Fibonacci (cf. [1]), nous faisons observer des pommes de pins, dans l'atelier sur le théorème d'Euler-Poincaré (cf. [3]), nous faisons faire des comptages d'éléments de figures, dans l'atelier dont le thème est les dominos (cf. [2]), nous posons la question « *combien y a-t-il de dominos dans une boîte ?* ».

Après cela, nous demandons aux enfants d'énoncer des conjectures. Au cours d'un même atelier, il peut arriver qu'il y ait plusieurs stades où les enfants soient amenés à en faire. Nous proposons ensuite une activité permettant de valider ou d'invalider les conjectures émises. Celle-ci est suivie par une autre qui ébauche la démonstration de la proposition qui a été reconnue par tous ou au moins explique un phénomène.

Nous avons organisé les ateliers par petits groupes d'enfants. Nous alternons les activités personnelles, les discussions au sein de binômes, au sein des petits groupes et les mises en commun et confrontation des résultats avec l'ensemble des enfants. Le travail reste guidé, les enfants sont placés face aux difficultés pas à pas. En fin d'atelier, nous proposons de réinvestir le résultat dans une activité annexe, comme la réalisation de devinettes, de dessins, d'un jeu ou la résolution d'un problème pratique.

I – 3 Le problème mathématique proposé à l'atelier de la COPIRELEM

Le thème que nous avions choisi est celui des ponts de Koenigsberg.

Rappelons le problème historique.

Dans la ville de Koenigsberg en Prusse orientale, un jeu consistait à chercher un chemin de promenade qui passe une et une seule fois par chacun des sept ponts de la ville. On dispose d'une carte relief de la ville (figure 1) qui peut se simplifier en une carte schématique (figure 2).

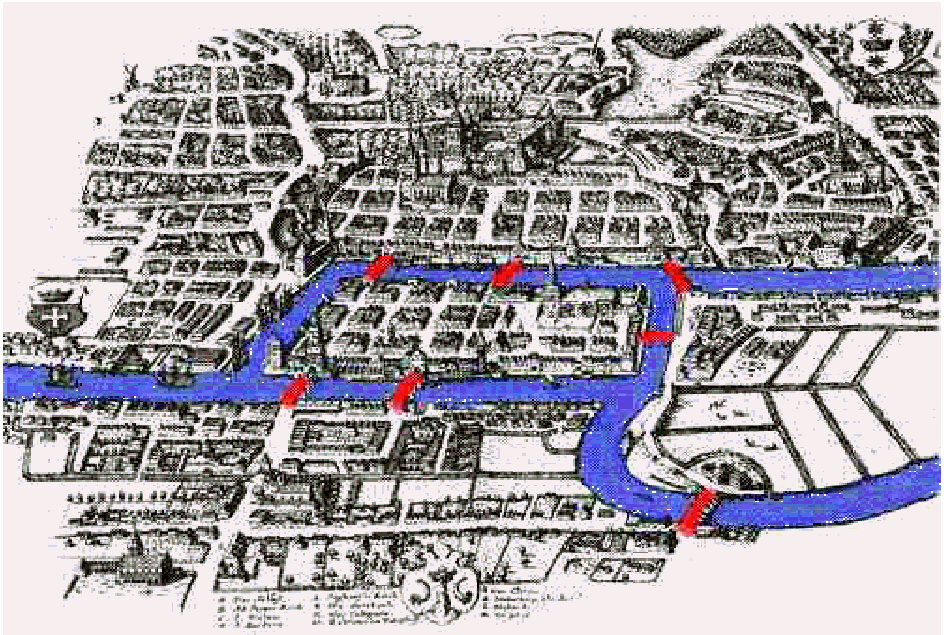


Figure 1

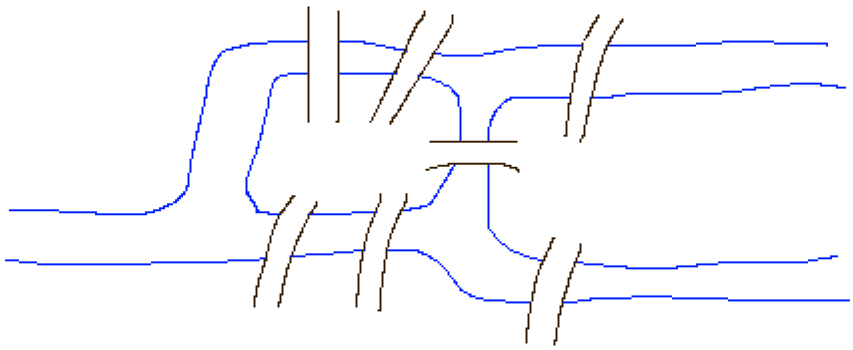


Figure 2

Le problème a été résolu au XVIII^{e} siècle par Leonhard Euler qui montra qu'un tel chemin n'existe pas. Il s'agit en fait d'un problème de théorie des graphes.

Le chemin cherché est un chemin eulérien dans le sens suivant : une **chaîne eulérienne** est un chemin parcourant un graphe et passant une et une seule fois par chacune des arêtes du graphe. Lorsque le sommet d'arrivée se confond avec le sommet de départ, on parle de **cycle eulérien**.

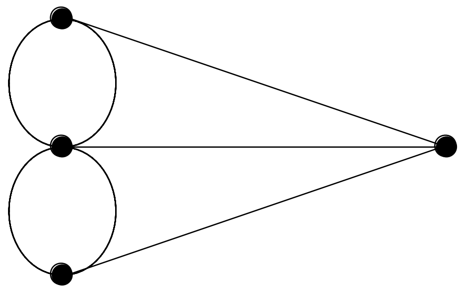
Un théorème permet de décider si un graphe possède ou non des chaînes ou des cycles eulériens (on trouvera plus de détails dans [5]). Pour l'énoncer, il faut encore introduire la notion de degré d'un sommet.

Le **degré** d'un sommet d'un graphe est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet.

Théorème : *Un graphe admet une chaîne eulérienne si et seulement s'il est connexe à des points isolés près et le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.*

La démonstration du sens direct est simple. Si l'on considère le parcours du graphe par le chemin eulérien, chaque fois que l'on arrive à un sommet on doit obligatoirement en repartir et donc le degré du sommet est pair à l'exception près, s'il ne sont pas confondus, des sommets de départ et d'arrivée, dont les degrés sont donc impairs.

Par exemple le graphe associé au problème des ponts est celui-ci :



Il y a trois sommets de degré trois et un sommet de degré cinq. Il n'existe donc pas de chemin eulérien pour ce graphe.

La démonstration de la réciproque se fait par récurrence sur le nombre d'arêtes. On parcourt le graphe en choisissant un sommet de degré impair, s'il y en a deux, ou un sommet quelconque s'il n'y en a aucun. Comme tous les sommets intermédiaires sont de degré pair, le parcours doit obligatoirement s'arrêter à l'autre sommet impair ou au point de départ. On considère alors les composantes connexes du graphe obtenu en enlevant les arêtes parcourues du graphe de départ. Par hypothèse de récurrence, chacune de ses composantes peut être parcourue par un cycle eulérien. Ces cycles complètent le chemin déjà tracé donnant ainsi une chaîne eulérienne.

II – DÉROULEMENT DE LA DISCUSSION

L'atelier proposé lors du colloque de la COPIRELEM consistait à réfléchir à la conception d'une activité satisfaisant aux contraintes citées ci-dessus, de préférence en intégrant une partie ou tout le théorème avec sa démonstration. Nous rendons compte ici du travail de réflexion du groupe. Il va de soi que nous n'avons eu le temps que d'ébaucher les grandes lignes et différentes options possibles d'une activité pour les enfants. Le fait de réfléchir sur un thème concret a permis de mettre en évidence les problématiques inhérentes à la conception de ce type d'activités.

Il a rapidement été convenu qu'il serait raisonnable de n'aborder le théorème que dans le sens direct : si un chemin existe, alors le graphe ne possède que des sommets de degré pair sauf éventuellement deux d'entre eux. Cet énoncé est la forme contraposée de celui qu'il faut utiliser pour répondre au problème des Ponts de Koenigsberg.

Nous nous sommes également mis d'accord sur le fait de proposer au moins deux séances de deux heures : la première consistant à étudier le problème non modélisé avec émission de conjectures sur la possibilité de trouver un chemin, de manière à énoncer le théorème en fin de séance, la deuxième se concentrant sur le problème modélisé avec la démonstration de la partie directe du théorème. L'activité se terminerait par l'application du théorème à des situations pratiques, soit à la fin de la deuxième séance, soit éventuellement au cours d'une troisième séance.

II – 1 Comment introduire le problème aux enfants ?

Le principal sujet de discussion a été de savoir quel support présenter aux enfants et quelle question leur poser, l'objectif clairement défini étant que ceux-ci doivent parvenir à dessiner un graphe à partir du document fourni et en compter les degrés des sommets.

II – 1.1 Choix de la question à poser

Au fil de la discussion, plusieurs points ont été soulevés.

A quel moment introduire le plan de Koenigsberg ?

Il s'agit du problème historique qui apporte la dimension culturelle à l'atelier et il faut le mettre en valeur, sans le noyer parmi d'autres exemples, par ailleurs nécessaires à l'émission de conjectures. S'il est présenté avant d'autres figures, il risque de perdre de son intérêt et les enfants n'auront pas nécessairement l'envie d'y revenir au moment de la conclusion de l'atelier. Il est envisageable de ne le présenter qu'au moment de la conclusion, comme application de l'activité à un problème historique.

Quel plan faut-il présenter ? Et combien ?

Les enfants doivent s'approprier le problème. Pour cela, il parait préférable de leur distribuer le plan d'une ville qu'ils connaissent.

On a évoqué le fait qu'une question dont la réponse est ou « oui » ou « non » n'a plus d'intérêt une fois qu'on y a répondu. Même si l'atelier commence par la distribution d'un seul plan, pour lequel il n'y a pas de chemin possible, il faut induire le besoin d'explications en proposant d'autres situations où la réponse est différente une fois que les enfants sont d'accord sur la réponse. On peut prévoir de présenter des plans où la chose est possible, pour que la réponse « on n'y arrive pas » ne ferme pas la discussion. Une possibilité consisterait à présenter d'abord une situation possible puis le problème de Koenigsberg en précisant son intérêt historique.

II – 1.2 La modélisation

La seconde étape consiste à modéliser le problème et à passer du schéma ou du plan de ville à un graphe.

La façon de procéder à cette étape a donné lieu à une longue discussion. Nous sommes confrontés à un choix : soit axer l'atelier sur la modélisation et le problème des ponts de Koenigsberg n'est plus qu'un habillage, soit construire un outil qui sera appliqué par la suite. Dans les deux cas, la difficulté est d'inciter à modéliser la situation par un graphe sans l'imposer d'emblée.

Le plan de la figure 1 peut présenter de réelles difficultés de lecture : il comporte beaucoup trop d'informations et incitera vraisemblablement les enfants à sillonner des rues différentes ce qui éloignerait du problème de départ. De nombreuses idées ont surgi à ce moment : par exemple, certain ont proposé d'introduire la contrainte de passer par une maison particulière sur chaque îlot de la ville, d'autres de faire colorier ces îlots, de les nommer. Il s'agit de faire apparaître les sommets du graphe. D'autre ont proposé d'assumer complètement l'imposition du modèle aux enfants, en l'introduisant par exemple à l'aide d'un papier calque.

Nous n'avons pas obtenu de consensus satisfaisant sur ce point : si l'on respecte la contrainte de temps *énoncer une conjecture en deux heures*, malgré tous les efforts fournis par l'animateur pour faire induire le graphe aux enfants, il y aura certainement de l'arbitraire à ce moment.

II – 2 Emissions de conjectures

Dans un second temps il faut aborder l'énoncé du théorème. Là encore tout le jeu consiste à inciter à la découverte sans en déposséder l'enfant. Il faut que les enfants fassent le maximum d'expériences pour parvenir à conjecturer le théorème, c'est-à-dire qu'ils observent de nombreux graphes, certains « impossibles» et d'autres « possibles » afin de les comparer.

Là encore les propositions ont été nombreuses :

- leur distribuer des graphes déjà préparés à étudier ;
- leur faire dessiner des graphes : le côté aléatoire peut être contenu en imposant un nombre réduit de sommets et d'arêtes ou en distribuant des feuilles où seuls les sommets sont tracés. Si l'une de ces deux options est choisie, se posera très certainement le problème du statut des intersections des chemins que les enfants auront tracés ;
- leur proposer de soumettre des graphes inventés à leurs camarades sous forme de jeu.

La question qui se pose au cours de la phase de comparaison est de savoir si les enfants vont compter naturellement le nombre de chemins partant de chaque sommet ou s'il va falloir l'induire. On peut leur proposer de nommer les sommets par des lettres A, B, C. et de faire écrire les parcours sous forme de chaînes du type (AB) (BC)... Le nombre d'apparitions des différentes lettres étant le degré des sommets.

A partir du moment où les degrés des sommets sont connus, il ressort de la discussion que l'idée d'étudier la parité devrait émerger assez vite. Les enfants sont rapidement en moyen de dégager le fait que les points de passage sont de degré pair et les points de départ et d'arrivée de degré impair.

Nous n'avons pas eu le temps d'aborder la démonstration du théorème. Il a simplement été rappelé que la nécessité de la démonstration générale apparaît naturellement lorsque l'on veut se convaincre qu'il est impossible de trouver un chemin répondant aux conditions : le « oui » est une réponse qui est sûre, alors que le « non » est une réponse qu'on est obligé de nuancer par un « peut-être ». De plus, l'enfant est confronté à énoncer une contraposée.

III – CONCLUSION

Au cours de cet atelier, même si nous ne sommes pas parvenus, faute de temps, à l'élaboration d'une activité mathématique, nous avons esquissé diverses pistes pour la construire. Les difficultés de réalisation de ce type d'activité ont bien été mises en évidence. Il s'agit du jeu constant et subtil entre les activités induites ou non, et l'importance des supports matériels pour le mener à bien. C'est pourquoi, il faut proposer une démarche pas-à-pas. En toile de fond transparaît la question de comment les enfants se forgent eux-mêmes leur savoir.

L'importance du côté culturel de ces activités a également été largement évoquée tout au long de la discussion. Le thème choisi doit permettre d'aborder des notions ou un théorème fondamental en mathématiques et l'élaboration de l'activité est un processus de vulgarisation de la culture mathématique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AUTIER B., MITTELBRONN A.C., CRON M., WACH N. & WAMBST M. (2004) *Spirales végétales et suite de Fibonacci : un atelier mathématique pour les enfants,* Bulletin de l'APMEP, **455**, 759-778.

[1'] AUTIER B., MITTELBRONN A.C., CRON M., WACH N. & WAMBST M. (2004) *Un atelier mathématique : Spirales Végétales et suite de Fibonacci,* Cahiers de la Mission Laïque Française.

[2] AUTIER B., MITTELBRONN A.C., CRON M., WACH N. & WAMBST M. (2004) *Combinatoire des dominos, un atelier mathématique pour les enfants,* L'Ouvert, **110**, 57-74, IREM de Strasbourg.

[3] AUTIER B., MITTELBRONN A.C., CRON M., WACH N. & WAMBST M. (en préparation) Des ateliers mathématiques pour les enfants, *Brochure, IREM de Strasbourg.*

[4] Document d'application des programmes (2003) Mathématique, Cycle 3, *Collection Ecole, SCEREN (CNDP).*

[5] BERGE C. (2000) La théorie des graphes, *Birkhäuser, Bâle.*

DE LA LECTURE D'ÉNONCÉS AU SENS DES OPÉRATIONS

Michèle MUNIGLIA - Philippe LOMBARD

Article non communiqué

À PROPOS DE L'ENSEIGNEMENT DES SOLIDES : QUELLES MATHÉMATIQUES FAIRE VIVRE À L'ÉCOLE ? QUELS OUTILS POUR LA FORMATION DES MAÎTRES ?

Jean-Claude AUBERTIN

Yves GIRMENS

Claude MAURIN

Louis ROYE
Formateurs en IUFM, membres de la Copirelem

Résumé
Cet atelier prolonge la réflexion de la Copirelem sur les finalités de l'enseignement des mathématiques à l'école qui s'est concrétisée par un atelier proposé lors du colloque du XXXI^e colloque à Foix.
Ce premier travail avait permis de dégager trois orientations autour desquelles s'organise l'enseignement des mathématiques : rationalité et raisonnement, culture, intégration sociale et citoyenne.
Cette fois-ci, l'atelier a pour objectif d'étudier comment il est possible d'intégrer ces orientations dans les actions de formation des maîtres afin qu'elles participent à la construction de leur rapport aux mathématiques. La réflexion s'appuie sur deux situations de formation concernant les solides qui peuvent être transposées en cycle 3.

Mots-clés : Rationalité - argumentation - référent culturel - modèle.

I – INTRODUCTION

L'atelier s'inscrit dans la continuité d'une réflexion engagée par la Copirelem sur le questionnement « Quelles mathématiques faire vivre à l'école ? Quels outils pour la formation des maîtres ? ». Cette réflexion a déjà donné lieu à deux ateliers lors du colloque précédent de Foix, l'un à propos de l'enseignement de la soustraction, l'autre, animé par les mêmes formateurs présents, à partir des solides.
Cette première étape a conduit à mettre en évidence trois grandes orientations de l'enseignement des Mathématiques à l'école : La rationalité et le raisonnement, la culture, l'intégration sociale et la formation du citoyen.
L'atelier a pour objectif d'étudier de quelle manière on peut faire intervenir ces trois orientations en formation à propos de situations de formation sur les solides, afin que les personnes en formation prennent en compte ces orientations pour faire vivre à leurs élèves des situations analogues.
L'atelier se déroule en deux temps : la première partie vise à permettre aux participants de s'approprier deux situations susceptibles d'être proposées en formation des professeurs des écoles : « le solide caché » proposé par Louis Roye, puis « le cube Soma » présenté par Claude Maurin ; en deuxième partie, il est proposé aux participants de réfléchir à la manière dont on peut les exploiter en formation, en mettant en évidence les orientations évoquées plus haut - pour qu'elles puissent servir d'appui à ces maîtres quand ils proposeront ces situations à leurs élèves.

II – ÉTUDE DES SITUATIONS

II – 1 Le Solide Caché

II – 1.1 Description de la situation

Un solide est caché dans une boîte. Afin de le reproduire à l'identique, il s'agit, par groupes de 4, d'en réaliser un patron par un jeu de questions fermées posées à un groupe auquel le solide a été préalablement remis. Les questions sont fermées dans le sens où les réponses ne peuvent être que "oui", "non" ou un nombre. Si les questions sont imprécises ou incompréhensibles, la réponse sera "on ne peut pas répondre".
Il est convenu que l'enseignant écrit au tableau, en abrégé, les questions et les réponses pour une étude ultérieure.
Quand les indications recueillies par le jeu "questions–réponses" sont jugées suffisantes ; dans chaque groupe, chacun tente de construire un patron correspondant aux informations afin de réaliser le solide envisagé. Les différentes productions sont d'abord comparées entre elles puis au solide modèle.
On procède alors à l'examen critique du questionnaire : questions imprécises qui n'ont pas reçu de réponses, questions superflues, *etc*.

II – 1.2 Mise en situation et recherche

Trois groupes « Questions » sont constitués (GQ) formés de trois ou quatre personnes. Les groupes « Questions » ne connaissent pas le solide caché et se concertent pour choisir des questions à poser en vue de le déterminer.
Un groupe « Réponses » (GR), composé de deux personnes qui disposent du solide a comme tâche de prévoir les questions qui pourraient leur être posées et de préparer des réponses à donner à ces questions.

II – 1.3 Phase de questions – réponses

Les groupes « questions » (GQ) posent, à tour de rôle, des questions au groupe-réponse qui répond par oui ou par non. L'animateur a écrit les questions et réponses au tableau :

GQ1 : *Le solide a-t-il des faces ?*	*Oui*
GQ2 : Est-*ce un polyèdre ?*	*Oui*
GQ3 : Quel *est le nombre de faces ?*	*5*
GQ1 : *Combien y a-t-il de natures de faces différentes ?*	*3*
GQ2 : *Comprend-il des faces triangulaires ?*	*Oui*
GQ3 : *Comporte-t-il des faces polygones réguliers ?*	*Oui*
GQ1 : *Quel est le nombre maximal de côtés pour une face ?*	*4*
GQ2 : *Ne comprend-il que des triangles et des quadrilatères ?*	*Oui*
GQ3 : *Tous les polygones sont-ils réguliers ?*	*Non*

GQ1 : *Possède-t-il un plan de symétrie ?*	*Oui*
GQ2 : *Y a-t-il des triangles non équilatéraux ?*	*Oui*
GQ3 *: Est-il concave ?*	*Non*
GQ1 : *Combien a-t-il d'arêtes ?*	*8*
GQ3 : Combien *a-t-il de sommets ?*	*5*
GQ3 : *Y a-t-il un rectangle non carré ?*	*Non*

Il décide, après sondage des groupes-questions pour savoir s'ils ont recueilli assez d'informations pour trouver la solution, d'interrompre le questionnement.

II – 1.4 La solution de chaque groupe

Chaque groupe GQ propose sa solution et dit s'il peut, avec les informations recueillies, construire un patron du solide ou s'il lui manque des informations.

Voici les réponses fournies par les trois groupes :

GQ3 : *C'est une pyramide avec des triangles rectangles. Il manque le modèle, la nature des triangles, les dimensions.*

GQ2 : *C'est une pyramide à base carrée avec des arêtes perpendiculaires au plan du carré. Il manque les dimensions.*

GQ1 : *C'est une pyramide à base losange ou trapèze isocèle ou carré. Il manque les dimensions et la position du sommet par rapport à un axe de symétrie de la base.*

Le solide est ensuite dévoilé par l'animateur, ce qui permet à chaque groupe de valider ou d'invalider sa solution.

II – 2 Le Cube Soma

II – 2.1 Description de la situation

L'animateur présente le « cube Soma » : un ensemble de pièces permettant de reconstituer un cube et formé de 6 tétracubes et 1 tricube, soit l'équivalent de 27 cubes élémentaires en 7 pièces toutes différentes.

Il présente ensuite la situation telle qu'on peut la proposer à des élèves de cycle 3.

Les élèves ont construit les différentes pièces lors de séances précédentes. Ils sont maintenant répartis en groupes et disposent des pièces qu'ils ont réalisées. Le problème leur est alors posé : peut-on réaliser un cube avec ces 7 pièces ?

Lorsque les groupes ont réussi, non sans difficulté, à obtenir un cube, le maître leur propose de chercher un moyen pour se rappeler comment les pièces ont été assemblées pour pouvoir remonter le cube une autre fois.

La situation a comme objectif d'amener les enfants à « inventer » un moyen de représenter par un dessin sur un plan une configuration spatiale.

II – 2.2 Mise en situation et recherche

Deux cubes Soma (non assemblés) sont distribués à chacun des trois groupes formés dans l'atelier (G1, G2, G3).

G1 réalise le cube très vite, G2 y parvient après 7 à 8 minutes de recherche et G3 ne réussit pas.

Ce travail est loin d'être simple et reste difficile, même après un succès et ce, tant que l'on n'a pas élaboré une méthode que l'on peut contrôler et reproduire. L'animateur rappelle la suite de l'activité, telle qu'elle est prévue en cycle trois : le maître demande alors aux élèves (qui s'insurgent) de démonter le cube qu'ils viennent de réaliser et précise qu'il leur faut trouver un moyen de se rappeler comment le construire ; il s'agit pour eux de trouver un moyen de conserver la mémoire de la construction.

La première partie de l'atelier avait pour objectif de permettre aux participants de s'approprier deux situations sur les solides qui vont servir de support à l'élaboration d'une séance de formation des maîtres.

III – RÉFLEXION RELATIVE AUX TROIS ORIENTATIONS

Les animateurs proposent aux participants d'engager une réflexion autour de la question : comment peut-on exploiter ces deux situations en formation des maîtres pour faire intervenir les trois orientations en rapport avec l'enseignement des mathématiques à l'école (voir annexe 2) ?

Ils suggèrent d'utiliser ces deux situations en mettant en œuvre un processus « par homologie », en référence à l'un des modèles décrits par Alain Kuzniak dans le cadre de ses travaux sur l'étude des stratégies de formation (annexe 1).

Alain Kuzniak définit une stratégie d'homologie comme une situation dans laquelle le formateur cherche à « transmettre sa propre conception de l'enseignement des mathématiques, en la mettant en œuvre dans son enseignement, et des habiletés de gestion d'un groupe classe ; il construit des séances à visée mathématique ou didactique ; il attend que les étudiants utilisent dans leurs classes, des mises en œuvre proches de celles des séances qu'ils ont vécues comme élèves ».

Pour ce travail, les participants sont répartis en quatre groupes de trois personnes : G1, G2, G3 et G4.

La consigne suivante est alors donnée aux participants :

« *Imaginez de quelle(s) manière(s) vous proposeriez ces deux situations en formation (initiale / continue), en essayant de définir des modalités qui fassent intervenir les trois grandes orientations et qui les mettent en évidence pour les personnes en formation* ».

Il est précisé aux participants que les modalités qu'ils vont proposer doivent viser à faire apparaître les trois orientations comme un référent pour les maîtres en formation, qui leur permettra d'organiser la situation pour leurs élèves de manière à favoriser certains apprentissages en rapport avec les trois orientations.

Après avoir pris connaissance des descriptifs complets des deux situations, distribuées sous la forme d'un document écrit (annexe 3), il était prévu que les groupes G1 et G2 travaillent à partir de la situation du solide caché et les groupes G3 et G4 à partir de la situation du cube Soma. Devant le manque de temps, afin d'étudier la question de manière suffisamment approfondie, il est décidé que tous les groupes travailleront seulement sur la situation du solide caché. Chaque groupe présentera le compte-rendu de ses réflexions à l'aide d'un transparent lors de la mise en commun.

De manière générale, dans leurs propositions, les divers groupes ont conservé certaines phases dans les scénarios des situations qui étaient fournis et en ont modifié certaines autres en relation avec les trois orientations repérées.

La plupart des suggestions faites visent à mettre en place, lors des différentes phases de la situation, des moyens d'observation et d'enregistrement afin de pouvoir faire remonter, lors d'une phase de retour sur la situation à prévoir en fin de séance, des éléments d'analyse et de questionnement sur les trois orientations.

Rapport du groupe G1
En s'appuyant sur le scénario décrit dans le document (annexe 3), les aménagements suivants sont proposés :

- lors de la phase 1 : une question concernant l'orientation « rationalité et raisonnement » pourrait être confiée au groupe-réponses, par exemple « Quelles connaissances seront mises en jeu dans le raisonnement ? ». Ce groupe aura pour tâche de reconstituer le raisonnement mis en œuvre au fil du questionnement et d'en rendre compte lors du moment de retour ;
- lors la phase 2 : pour chaque groupe-questions, un observateur est désigné dont le rôle est d'enregistrer les modifications qu'apportent les questions des autres groupes sur la position de son propre groupe.
  Lors d'un moment de retour, chaque observateur pourra ainsi faire l'historique du cheminement du groupe ;
- concernant les phases 3 et 4 : lors du moment de retour, il est suggéré d'interroger les participants sur l'intérêt et la légitimité du travail de groupes. Pour illustrer l'orientation culturelle des mathématiques, on pourra questionner les participants sur les référents culturels, les méthodes et les instruments qui leur ont été utiles pour construire un patron d'un solide ;
- concernant la phase 5 : un débat pourra être engagé sur le choix du solide en rapport avec la dimension culturelle : pourquoi avoir choisi une pyramide ? pourquoi pas une pyramide régulière ?

Rapport du groupe G2
- Pour les phases 1 et 2 : Le groupe pense qu'il faut s'interroger sur la place que l'on peut donner à cette activité en formation des Professeurs des Écoles 2^{e} année, pour un groupe « standard » et sur les pré- requis nécessaires ?
  A l'issue de la phase 2, il est possible, lors d'une pause, de susciter un échange pour savoir si le groupe-réponses a pu répondre à toutes les questions posées. Cela peut

permettre ensuite d'aborder la notion de référents culturels mathématiques communs à tous (vocabulaire, caractérisation…)

- Pour la phase 3 : il est proposé de demander la « réalisation du solide » au lieu de la « réalisation du patron ».
- Pour la phase 4 : lors du moment de validation, en cas d'échec, on peut demander à chaque groupe de débattre pour trouver les raisons de l'échec et pour identifier les manques.

Remarques : les orientations « raisonnement et méthodes » et « apprentissage de l'esprit critique et du discernement » peuvent – elles être abordées en même temps ?
Cela ne dépend-il pas de l'objectif choisi pour cette activité : est-il de faire construire le solide ou de se centrer sur le processus d'acquisition ?

Rapport du groupe G3
Le groupe met en avant la nécessité de faire vivre la situation aux maîtres en formation et simultanément, tout au long de son évolution, de ménager des temps de prise de recul pour analyser les moments vécus, en rapport avec les trois orientations. Il s'agit de développer chez les maîtres en formation une attitude réflexive afin qu'ils prennent conscience des aspects en jeu rattachés aux trois orientations, pour, à leur tour, les investir dans leur propre enseignement. Il est alors nécessaire que le formateur aborde la question de la transposition des éléments repérés dans une situation analogue proposée à des élèves. On retrouve le principe d'une stratégie de formation par homologie-transposition (annexe1).

Rapport du groupe G4
Le groupe ne propose pas de modalités nouvelles de la situation dans le cadre d'une formation des maîtres mais expose des questions en débat.

1) Est-ce qu'il est pertinent de donner la grille présentant les trois orientations aux maîtres en formation ? Peut-être pas, puisqu'il n'est pas concevable que les stagiaires, donnent à leur tour, la grille à leurs élèves !
2) Serait-il intéressant de faire échanger aux groupes leur codage, afin qu'ils en mesurent l'efficacité ?
3) Avec des stagiaires, comme on peut le faire avec des élèves, ne peut-on pas prévoir au terme de l'activité, un moment de bilan où on leur demandera ce qu'ils ont appris ? Cela pourra permettre d'aborder avec eux les trois dimensions, raisonnement, culture commune et esprit critique.
4) Peut-on choisir de mettre des stagiaires en retrait pour observer leurs collègues ? En les extrayant de l'action ne risque-t-on pas de provoquer chez eux une frustration ? De plus, un groupe qui se sait observé fonctionne-t-il comme un groupe non observé ?
5) Est-il raisonnable de viser les trois orientations en même temps ? Ne convient-il pas de privilégier l'un des aspects que l'on va développer lors du moment d'analyse réflexive ?

En conclusion, les animateurs soulignent la nécessité, évoquée par tous les participants dans leurs propositions, une fois que chaque situation a été proposée à des enseignants en formation, d'organiser un moment pour faire un « pas de côté » dans la logique d'un processus par homologie, tel qu'Alain Kuzniak l'a défini.

Ce moment sera d'abord l'occasion d'analyser et d'expliciter quels apprentissages, rattachés aux trois orientations repérées, cette situation favorise et met en œuvre. Il sera nécessaire ensuite d'étudier avec les enseignants en formation, de quelle manière ces apprentissages peuvent être privilégiés chez les élèves en leur faisant vivre la même situation. Cela permettra d'aborder des questions relatives au contenu, aux modalités, à la gestion dans tous les aspects concernant ces apprentissages. Il sera nécessaire d'expliciter avec eux les conditions de la transposition de la situation dans une classe et de préciser que les trois orientations constituent, pour le maître, un référent qui lui permet de prévoir et de mettre en œuvre la situation avec les élèves, mais qu'il ne saurait être question d'aborder ces orientations directement avec les élèves.

BIBLIOGRAPHIE

AUBERTIN J-C., MAURIN C., GIRMENS Y., ROYE L. (2003) *A propos de l'enseignement des solides, quelles mathématiques faire vivre à l'école ?*, in Actes du Colloque COPIRELEM de Foix.

KUZNIAK A. (2003) *Les stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématique*, 7-22, in Carnet de route de la COPIRELEM, Concertum Tome 3, COPIRELEM.

CRDP de Lille (2000) *Travaux géométriques au Cycle 3*, Brochure de l'Irem de Lille.

ANNEXE 1

STRATÉGIES DE FORMATION REPÉRÉES PAR ALAIN KUZNIAK

- **Stratégies culturelles** : le formateur diffuse une information ; il veut accroître le savoir mathématique (ou éventuellement didactique) de l'étudiant, sans se préoccuper de la mise en œuvre ultérieure par l'étudiant dans les classes.

- **Stratégies de « monstration »** : le formateur cherche à transmettre une pratique d'enseignement, en montrant sa mise en œuvre effective dans les classes, soit in vivo, soit via une vidéo…L'étudiant regarde un maître qui fait la classe en visant un objectif mathématique.

- **Stratégies d'homologie** : le formateur cherche à transmettre sa propre conception de l'enseignement des mathématiques, en la mettant en œuvre dans son enseignement, et des habiletés de gestion d'un groupe classe ; il construit des séances à visée mathématique ou didactique ; il attend que les étudiants utilisent dans leurs classes, des mises en œuvres proches de celles des séances qu'ils ont vécues comme élèves.

- **Stratégies de transposition** : le formateur cherche à transmettre un savoir de référence sur l'enseignement et tente de maîtriser le phénomène d'adaptation opéré par les étudiants.

ANNEXE 2

« Quelles mathématiques faire vivre à l'école ? »

Référent d'analyse

ORIENTATIONS	**TYPES D'APPRENTISSAGES**
1) Rationalité et Raisonnement	Apprentissage de raisonnement. Apprentissage de modèles. Apprentissages de méthodes.
2) Culture	Apprentissage de référents culturels mathématiques. Acquisition d'une culture commune. Acquisition d'une compréhension du monde. Développement du plaisir de chercher, de la capacité à produire des efforts.
3) Intégration sociale et formation du citoyen	Apprentissage de l'argumentation avec des pairs. Développement de l'esprit critique et apprentissage au discernement. Développement de compétences ouvrant des perspectives d'avenir. Construction d'outils. Acquisition de méthodes pragmatiques.

ANNEXE 3

Le Solide Caché (Situation proposée par Louis Roye)

1. ***Description de la situation***

Un solide est caché dans une boîte. Afin de le reproduire à l'identique, il s'agit, par groupes de 4, d'en réaliser un patron par un jeu de questions fermées à destination d'un groupe auquel le solide a été préalablement remis. Les questions sont fermées dans le sens où les réponses ne peuvent être que "oui", "non" ou un nombre. Si les questions sont imprécises ou incompréhensibles, la réponse sera "on ne peut pas répondre". Il est convenu que l'enseignant écrit au tableau, en abrégé, les questions et les réponses pour une étude ultérieure...Quand les indications recueillies par le jeu "questions–réponses" sont jugées suffisantes, dans chaque groupe, chacun tente de construire un patron correspondant à ces indications afin de réaliser le solide envisagé. Les différentes productions sont d'abord comparées entre elles puis au solide modèle. On procède alors à l'examen critique du quesionnaire : questions imprécises qui n'ont pas reçu de réponses, questions superflues…

2. ***Description du scénario***

<u>Première phase : préparation</u>

Après la présentation de l'activité**,**

- un groupe de 4, que nous appelerons "groupe réponses", GR, reçoit le solide qui doit rester caché aux autres groupes. Un premier travail pour ce groupe va consister à étudier les propriétés du solide afin de savoir répondre aux questions qui vont être posées, (le solide n'est plus visible pendant le questionnement).
- Les autres groupes de quatre, que nous appelerons "groupes questions", GQ, préparent par écrit les questions qui vont être posées au GR afin d'obtenir les indications en vue de la production d'un patron du solide caché.

<u>Deuxième phase : recherche d'informations</u>

Le jeu des questions-réponses commence. Chaque GQ pose, à tour de rôle, une question au GR, afin d'obtenir des renseignements permettant de construire un patron du solide caché. Chacun des GQ profite donc des informations recueillies à partir des questions des autres groupes.

Des moments-bilan sont décidés par l'enseignant pour que chaque groupe puisse faire le point et éventuellement réajuster son questionnement.

Le rôle de l'enseignant est ici de gérer le déroulement du jeu, sans intervenir sur les contenus sauf en cas de litige. Il note au tableau dans un style télégraphique les questions et les réponses.

<u>Troisième phase : résolution</u>

L'avancée dans le questionnement amène l'enseignant à la question : "Pensez – vous avoir assez de renseignements ? ". Si un consensus se dégage, on passe à la construction du patron. Si un groupe est en difficulté, l'enseignant demande à ce groupe de désigner un représentant qui pourra aller voir le groupe GR et lui demander de le laisser regarder le solide dans la boîte pendant quelques instants. Le rôle de ce représentant sera alors de communiquer aux autres le fruit de sa brève observation et ce, afin de débloquer la situation.

<u>Quatrième phase : communication et validation</u>

Il s'agit d'abord d'obtenir le solide par pliage à partir du patron, puis de confronter sa réalisation à celles des autres au sein du groupe.

Il se peut qu'un seul patron ait été réalisé dans tel ou tel groupe car il a été produit collectivement par fabrication des différentes faces et collage selon une arête par essais successifs. Dans ce cas, la confrontation se fait avec un autre groupe.

Ces confrontations ont pour objectif de provoquer les justifications, de prendre en compte les erreurs : renseignements insuffisants, mauvaise interprétation des informations, erreurs dans les calculs de longueurs, tracés incorrects…

On compare alors les productions à l'un des patrons que le GR a pu réaliser du solide-modèle. (Plusieurs patrons sont possibles).

<u>Cinquième phase : examen du questionnaire</u>

Collectivement on procède à l'analyse critique du questionnaire relevé au tableau par l'enseignant : Pourquoi le GR n'a pu répondre à telle ou telle question ? Est-ce que toutes les questions posées étaient nécessaires ? On peut décider alors de rechercher un nombre minimal de questions.

LES ANALYSES DE VIDÉOS : OUTILS DE RECHERCHE ET MOYENS DE FORMATION

Éric RODITI
Maître de conférences, IUFM Nord Pas-de-Calais
Équipe DIDIREM de l'Université Paris 7
eric.roditi@free.fr

Résumé
Sur un extrait de vidéo tournée en classe, l'atelier a présenté diverses analyses qui ont été confrontées. Il a ainsi été montré comment la vidéo sert d'outil de recherche pour analyser les pratiques d'enseignement, puis sur la même vidéo, comment les mêmes outils – éventuellement transformés – ou d'autres types d'analyses servent en formation.
Les recherches qui servent de référence aux formations présentées et discutées dans l'atelier portent sur les pratiques des enseignants en classe en relation avec les activités mathématiques des élèves qui nous permettent d'émettre des hypothèses sur leur apprentissage. La construction des connaissances mathématiques des élèves en situation scolaire dépend en effet de facteurs très variés, pris en compte différemment selon les recherches en didactique des mathématiques : le fonctionnement du système éducatif, y compris les programmes ; les situations d'enseignement proposées en classe et les activités mathématiques effectives des élèves ; les interactions professeur/élèves et élèves/élèves ; le projet de l'enseignant, avec ses conceptions, ses expériences, ses connaissances, sa représentation du métier, etc. Les recherches dont il est question amènent à préciser les activités que les enseignants organisent pour les élèves et à étudier les déterminants de leurs pratiques (les contraintes, fixées par l'institution ou liées à l'exercice du métier, mais aussi les conceptions personnelles des mathématiques et de leur enseignement).
Ce qu'on cherche à transmettre en formation concerne essentiellement deux aspects. D'une part des moyens d'analyser, à partir de vidéos, même sommairement, les activités des élèves à partir de ce que provoque le professeur, et d'autre part les moyens d'aborder les alternatives, avec à la fois les contraintes qui pèsent sur chaque enseignant et les marges de manœuvre qui comportent une dimension individuelle essentielle.

Cet atelier a été construit à partir d'une conférence donnée à quatre voix au colloque
" Former des enseignants – professionnels, savoirs et compétences "
qui s'est tenu à Nantes en février 2005.
Les quatre voix étaient celles de :

Christophe Hache, maître de conférences, Université Paris 7,

Julie Horoks, doctorante, Équipe DIDIREM de l'Université Paris 7,

Aline Robert, professeur d'université, IUFM de Versailles

Éric Roditi, maître de conférences, IUFM Nord Pas-de-Calais.

INTRODUCTION

Sur l'exemple d'une vidéo, nous avons présenté des outils d'analyse des pratiques d'enseignement qui ont été utilisés dans des recherches en didactique des mathématiques. Nous avons indiqué ensuite des résultats que ces recherches ont permis d'obtenir. Nous avons aussi présenté des formations d'enseignants et de formateurs où la vidéo analysée précédemment a été utilisée. Ces différentes présentations ont été l'objet de discussions avec les membres de l'atelier.

Le texte ci-dessous possède une structure qui ne rend pas compte de ces discussions : celles-ci ont permis à la fois d'éclaircir les outils et de discuter des recherches et des formations, avec de nombreux allers et retours entre les parties qui composent ce texte.

L'introduction présente la diversité des dimensions des pratiques d'enseignement qui sont convoquées dans les recherches en didactique des mathématiques, puis elle précise les recherches et les formations qui ont été présentées durant l'atelier. Le texte les développe ensuite en deux parties : les outils et les résultats de recherche sur les pratiques qui ont été montrés et discutés d'une part, les inférences qui en ont été tirées sur la formation d'autre part. Dans la conclusion, en tenant compte des discussions de l'atelier, nous proposons des pistes de travail qui concernent les chercheurs et les formateurs, principalement sur l'articulation entre la recherche et la formation.

1 – La diversité des dimensions convoquées en didactique

La construction des connaissances mathématiques des élèves en situation scolaire dépend de facteurs très variés qui sont pris en compte différemment selon les recherches en didactique des mathématiques. Nous les présentons ici sommairement.

En amont de ce qui est proposé aux élèves, le système éducatif contraint l'enseignement, particulièrement les savoirs mathématiques enseignés : ceci se marque notamment dans les programmes et dans des phénomènes liés à la transposition didactique (cf. Y. Chevallard).

En classe, en partie au moins, l'apprentissage des élèves découle de leur activité. Cette activité dépend – mais pas seulement – des choix de présentation du savoir par l'enseignant et des mises en fonctionnement de ce savoir qui sont proposées aux élèves[1]. L'activité mathématique des élèves dépend donc de l'enseignant, notamment par les dynamiques qu'il choisit entre le cours et les exercices, et par la variété des exercices qu'il propose[2]. Elle dépend également de l'organisation du travail des élèves en classe car cette organisation compte de façon importante dans la caractérisation des situations réellement rencontrées. Ainsi, la répartition du travail entre l'enseignant et les élèves, les validations et les corrections apportées, sont autant de facteurs qui influencent l'activité des élèves. Cette activité dépend encore de la classe elle-même, de son hétérogénéité : celle-ci pèse notamment sur le temps didactique, dont on sait bien qu'il diffère du temps d'apprentissage de chaque élève.

---

[1] G. Brousseau distingue ainsi plusieurs types de situations dans la classe, notamment les situations d'action, de formulation, de validation.

[2] Y compris ce qui n'est pas enseigné.

Plus finement, les interactions qui ont lieu en classe – entre pairs ou entre le professeur et les élèves – et hors la classe, peuvent aussi contribuer aux apprentissages ainsi que le langage, qui joue un rôle à la fois dans l'étiquetage des connaissances, dans la mise en acte des méthodes et des techniques, et dans les jeux de communication. De même, les représentations (signes, symbolisme, registres variés) et leurs transformations qui interviennent dans l'activité mathématique, et cela dès l'école primaire, donnent un rôle particulier à l'écrit dans l'apprentissage.

Ainsi, globalement, le professeur – avec ses conceptions, ses expériences, ses connaissances, sa représentation du métier – définit son projet d'enseignement et modèle ce qui se passe en classe ; il donne en particulier une empreinte à l'enseignement sur le long terme. Ce qui se passe dans telle séance de telle classe est donc partiellement déterminé par le professeur, avant et pendant la séance, et par les élèves durant la séance. Mais partiellement seulement, car compte aussi ce qui s'est passé en classe avant cette séance, et ce qui se passe hors de la classe. Les conceptions des élèves, leurs rapports au savoir, leur héritage social et culturel, interviennent indéniablement dans les processus scolaires ; tout comme les conceptions des enseignants, elles aussi, modèlent leurs pratiques en classe.

Partiellement aussi car des composantes plus psychologiques et psychanalytiques, comme la mémoire ou l'affectif, sont autant de facteurs qui conditionnent évidemment les apprentissages. Ces facteurs ne sont généralement pas pris en compte directement par les didacticiens. Des travaux co-disciplinaires, par exemple ceux que C. Blanchard-Laville (2003) a coordonnés, montrent tout l'intérêt de prendre en compte la composante psychanalytique, et plus généralement l'espace psychique de la classe.

2 – Les recherches qui ont servi de référence à l'atelier

Les recherches en didactique des mathématiques qui servent de référence aux formations que nous avons présentées dans l'atelier, ont les pratiques des enseignants comme objet central d'analyse. Les pratiques des enseignants principalement en classe, et essentiellement en relation avec les activités mathématiques des élèves, en classe comme à la maison. Ces recherches amènent donc à étudier les pratiques enseignantes, mais aussi les déterminants de ces pratiques : des contraintes sociales ou fixées par l'institution, et des conceptions personnelles des enseignants, notamment liées à l'exercice du métier. Et nous tenons compte de ces déterminants en formation.

Les analyses menées dans le cadre de nos recherches sont organisées à partir des séances de classe qui ont été enregistrées, et d'entretiens avec les professeurs. Elles croisent des facteurs extérieurs à la classe concernant le professeur, les élèves, l'établissement, *etc.* à des observables qui sont relevés en classe ou à partir des enregistrements : observables des pratiques de l'enseignant d'une part, des activités des élèves d'autre part. Ces analyses peuvent amener de nouvelles questions, notamment sur des alternatives éventuelles – leur viabilité et leurs effets potentiels.

Les indicateurs retenus pour décrire les observables dépendent des recherches, - et notamment du nombre de séances analysées - et du niveau scolaire. La nature des indicateurs à choisir, tout comme le grain à retenir pour les analyses sont même des questions en partie encore ouvertes. Par exemple, on peut se demander jusqu'où étudier le discours de l'enseignant, et ce qu'on gagne à croiser des analyses sémantiques avec d'autres analyses, par exemple sur certains marqueurs linguistiques.

3 – Les formations qui ont été présentées et discutées dans l'atelier

Les formations présentées et discutées dans l'atelier sont des formations que nous avons organisées nous-mêmes, en relation avec nos recherches. La sélection des vidéos analysées est sans doute une variable importante des dispositifs. Néanmoins, indépendamment des vidéos elles-mêmes, ce qu'on cherche à transmettre aux enseignants et aux formateurs concerne précisément deux aspects. D'une part on cherche à transmettre des moyens d'analyser les activités des élèves à partir de ce que propose le professeur et à engager une réflexion des participants au stage à ce propos, en sachant que les analyses portent, non pas exactement sur ce qui se passe en classe et après, mais seulement sur une vidéo. D'autre part, on travaille les moyens d'aborder les alternatives, c'est-à-dire à la fois les contraintes qui pèsent sur les enseignants et les marges de manœuvre dont ils disposent, avec la part incompressible de l'individuel dans les choix effectués réellement. Cependant, même si ce sont les vidéos des participants qui sont étudiées, nos analyses ne sont pas directement des analyses réflexives de pratiques, au sens de M. Altet[3] par exemple ; il nous semble qu'elles en sont complémentaires. Nous reviendrons sur le type de formation où peuvent être mis en place ces objectifs.

En ce qui concerne la formation des formateurs, nous pensons que ces derniers, comme les professeurs, doivent avoir des moyens pour analyser les pratiques d'enseignement et déterminer des alternatives, mais ils doivent aussi appréhender les problèmes de transmission de pratiques. C'est pourquoi nous essayons de leur donner accès aux inférences que les chercheurs peuvent engager sur la formation à partir des recherches sur les pratiques. En outre, nous pensons que les formateurs, indépendamment des formations que nous leur proposons, doivent savoir accéder à ces résultats de recherche, doivent savoir se les approprier de manière critique et les adapter à différents publics. Ces dernières compétences n'apparaissant pas comme un développement direct des recherches que nous présentons, elles n'ont pas été abordées dans l'atelier et ne seront pas reprises dans ce texte.

I – LES PRATIQUES ENSEIGNANTES : RECHERCHES ET RÉSULTATS

Les travaux présentés dans l'atelier concernent des analyses de pratiques et de formation du second degré. Cela mérite quelques éclaircissements puisque le colloque vise les formateurs des enseignants du premier degré. Comme il a été dit, cet atelier est inspiré d'une communication faite au colloque « Former des enseignants – professionnels, savoirs et compétences » qui s'est tenu à Nantes en février 2005. Il nous a été demandé par des organisateurs du colloque d'adapter cette communication, charge aux participants de l'atelier d'effectuer les éventuelles transpositions nécessaires si possible. Le pari des organisateurs a été gagné : les discussions qui ont nourri l'atelier ont montré l'intérêt de ces travaux dans un colloque centré sur l'enseignement du premier degré.

[3] Cf. M. Altet (2004).

I – 1 Rappels sur les premières recherches en didactique

En ce qui concerne les apprentissages des élèves en mathématiques, des résultats spécifiques ont été obtenus depuis une trentaine d'années en didactique, à différentes échelles et avec des objectifs variés, de la modélisation du système d'enseignement à la compréhension de phénomènes qui surviennent en classe. Certains acquis sont liés à des aspects épistémologiques des mathématiques, ils conduisent à une meilleure connaissance des contraintes des programmes, ils montrent aussi que les notions mathématiques ne sont pas toutes équivalentes [4] et qu'il est nécessaire de le prendre en compte dans l'enseignement. D'autres acquis concernent des aspects didactiques : l'« inégalité » de différents types d'activités d'élèves pour leur apprentissage, l'importance du contrat par exemple pour comprendre et relativiser certains apprentissages, l'importance du jeu ancien/nouveau, des jeux de cadres, etc. Des domaines des mathématiques ont été étudiés plus particulièrement, comme les nombres et les opérations, l'algèbre élémentaire, la géométrie ou encore les démonstrations. Il y a aussi des travaux liés aux difficultés spécifiques en ZEP, mais les recherches y sont très difficiles, notamment car les approches seulement didactiques ou seulement ergonomiques ou seulement sociales ne sont satisfaisantes : une pluralité d'approches simultanées semble nécessaire pour obtenir des résultats stables.

Des « ingénieries » ont été conçues pour mieux diagnostiquer les apprentissages. Les observations de classe qui y étaient développées étaient outillées par des enregistrements audio dont l'écoute et l'analyse, indispensables pour la recherche, étaient trop fastidieuse pour être proposées en formation à l'analyse des pratiques. Ces ingénieries peuvent en revanche être utilisées dans l'enseignement pour aider les élèves à apprendre certains notions : elles s'appuient sur des problèmes adéquats qui conduisent une mise en œuvre de ces notions par les élèves avant l'exposition du savoir, les interventions de l'enseignant qui a conduit l'expérimentation en classe sont indiquées.

I – 2 Une diffusion limitée des recherches

Cependant d'autres recherches ont montré[5], au moins sur des sujets précis comme les décimaux par exemple, que ces ingénieries n'étaient pas adoptées par les enseignants. Pourquoi ? Quatre facteurs au moins peuvent l'expliquer pour le second degré :

- la difficulté d'adaptation pour un professeur donné qui peut avoir des représentations en contradiction avec celles des concepteurs des ingénieries, ou bien, même s'il y a convergence de représentations, différences entre l'idéal didactique et le possible dans une classe ordinaire ;
- le manque de travail de « transposition » de la part des chercheurs : tout n'est pas à transmettre de l'ingénierie et il y a des adaptations à prévoir. Par exemple quelles analyses d'énoncés, et respectivement de déroulements en classes, adopter parmi toutes celles qui sont proposées en didactique ?

---

[4] A. Robert distingue les notions qui répondent à un problème et pour lesquelles il existerait des situations fondamentales au sens de G. Brousseau, de celles qui sont fondatrices, unificatrices ou généralisatrices et qui nécessiteraient d'autres modes d'enseignement.

[5] J. Bolon, 1996 et E. Roditi, 2001, 2005.

- dans les premières recherches au moins, le manque de prise en compte des pratiques effectives (notamment leur complexité, leur stabilité et leur cohérence) et de leur formation (notamment le rôle du collectif enseignant, du métier et des contraintes) ;
- et pour la transmission : la formation hétérogène des formateurs, la non cohérence des équipes de formation, la faible collaboration en acte des chercheurs et formateurs.

I – 3 Nouvelles recherches sur les enseignants et leurs pratiques

Depuis une dizaine d'années certaines de ces recherches ont évolué et ont aussi abordé les pratiques des enseignants : ce qu'ils font et ne font pas, disent et pensent, avant, pendant et après la classe. Beaucoup de ces recherches ont utilisé des analyses de vidéo.

Les analyses de vidéo ont permis à la fois d'établir des diversités et des régularités dans les pratiques, notamment dans les choix de contenus et de gestion des enseignants, et de commencer à en chercher des explications.

Citons quelques exemples de recherches menées au sein de notre équipe DIDIREM de l'Université Paris 7.

Sur des séances en classe de seconde et sur des contenus analogues, C. Hache (2001) a montré une diversité des choix des enseignants. Il a ainsi dégagé ce qu'il appelle l'« univers mathématique » d'une séance : c'est la recomposition, originale pour chaque professeur, de cinq indicateurs tenant à des choix de contenus (plus ou moins riches en termes d'activités élèves), à des choix de gestion (laissant plus ou moins de travail autonome aux élèves et de discussion entre eux), à des choix de discours de l'enseignant (selon l'ouverture par rapport à ce qui est en jeu), à des choix d'intervention relatifs aux productions des élèves (nature et modalité) et à des choix de modes de questionnements des élèves. Il met ainsi en évidence un certain nombre d'univers rencontrés dans les séances et illustre le fait qu'un enseignant donné ne provoque pas tous ces univers.

A. Robert et F. Vandebrouck (2002) ont montré des résultats analogues sur l'utilisation du tableau en classe : plusieurs modalités existent (le tableau utilisé comme un lieu de savoir, comme un lieu d'écriture, ou comme un brouillon public). Mais encore une fois un enseignant donné ne les emprunte pas toutes. En revanche, E. Roditi (1997) avait montré qu'un même professeur pouvait, pour un même enseignement, utiliser le tableau différemment dans deux classes, l'une étant composée d'élèves plus faibles que ceux de l'autre. En outre, ces recherches ont montré qu'une grande cohérence s'observe entre les utilisations du tableau et le reste de la gestion de la classe de mathématiques.

Afin de mieux comprendre les déroulements, E. Roditi (2001) a croisé deux séries d'analyses du travail de l'enseignant, les premières permettent d'étudier le travail que l'enseignant effectue pour répondre à des objectifs d'apprentissage des élèves, les secondes s'attachent à l'étude du travail que l'enseignant effectue pour répondre à des contraintes propres, professionnelles ou personnelles. Dans un deuxième temps, ce type de travail a été théorisé par A. Robert et J. Rogalski qui ont introduit une « *double approche des pratiques enseignantes* » pour analyser les pratiques enseignantes non seulement à partir de caractéristiques liées à ce qui est proposé aux élèves, mais aussi à partir de caractéristiques liées au fait qu'enseigner est un métier, une activité sociale, personnalisée, rémunérée, comportant de nombreuses contraintes, avec des habitudes

(A. Robert, 2001, A. Robert et J. Rogalski, 2002). E. Roditi (2004) a montré l'importance des *règles de métier* (cf. Y. Clot, 1999) et le rôle du collectif dans les pratiques des enseignants à partir d'une recherche effectuée dans un même collège et qui portait sur la gestion du travail à la maison des élèves de sixième.

C'est cette prise en compte imbriquée des deux points de vue, celui des apprentissages par l'intermédiaire des activités provoquées, et celui du métier par l'intermédiaire des contraintes et marges de manœuvre, qui a nécessité l'incursion de la didactique des mathématiques dans le cadre de l'ergonomie et de la psychologie du travail.

I – 4 Nouvelles hypothèses sur les pratiques enseignantes

Dans la lignée des travaux menés autour d'Aline Robert, nous admettons qu'assez rapidement, pour un enseignant donné, les pratiques sont <u>stables</u> (c'est-à-dire qu'il prend des décisions analogues dans des situations analogues). Cela nous autorise des analyses limitées à quelques séances. Cette stabilité est expliquée et renforcée par une grande <u>cohérence</u> individuelle des pratiques[6], basée sur une <u>complexité</u> certaine, que nous restituerons par une analyse en composantes devant être imbriquées. Cela peut expliquer – en partie – les échecs de transmission « brute » des ingénieries.

Ainsi les pratiques en classe des enseignants dépendent de contraintes incontournables :

- liées à l'institution (programmes scolaires par exemple) ;
- liées au métier (habitudes, établissement, collectif des enseignants) : il y a des réponses optimales du milieu enseignant à un moment donné.

Mais elles dépendent aussi des individus, de leurs expériences, de leurs connaissances et de leurs représentations.

Plus précisément, interviennent, pour une séance :

- des objectifs d'apprentissage en fonction des programmes, des contraintes horaires globales et des objets mathématiques visés ;
- la représentation qu'a le professeur de l'enseignement de ce contenu et de son rôle, sa représentation de l'apprentissage des élèves de la classe concernée ;
- les expériences précédentes que le professeur a de cet enseignement ;
- le scénario précis de la séance et les improvisations pendant son déroulement ;
- les connaissances et les représentations des mathématiques (en cause dans cette séance) de l'enseignant et des élèves ;
- les contraintes sociales qui pèsent sur l'enseignant dans son établissement.

En particulier :

- <u>« Tout » n'est pas possible</u> à un niveau scolaire donné. Même si certains choix semblent très propices aux apprentissages des élèves, il y a à la fois des contraintes, des tensions et des réponses du milieu enseignant très partagées,

[6] Cf. Montmollin, 1984.

quelquefois subreptices, qui peuvent amener un enseignant à préférer d'autres choix (A. Robert, 2002). Ainsi, A. Robert reprend de manière métaphorique l'idée de *genre* introduite par Y. Clot (1999), qui traduit le fait que se créent dans une profession des réponses communes aux acteurs (ou à un grand groupe d'acteurs) qui se transmettent presque implicitement. À un moment donné ces réponses peuvent être économiques, mais il se peut qu'elles perdurent alors même qu'un changement dans l'environnement pourrait amener à des modifications utiles. Souvent les ingénieries amèneraient à sortir de ces habitudes collectives élaborées pour répondre économiquement à des contraintes du métier et transmises de génération en génération, ce qui peut aussi jouer dans leur rejet. Il en est de même de l'intégration des TICE dans une certaine mesure ;

- <u>tout n'est pas possible pour un même enseignant</u> (à cause de sa cohérence, de la stabilité des pratiques). Il y a certainement nécessité **d'adaptation individuelle** (difficile à cause de la complexité). Par ailleurs, il peut y avoir des logiques contradictoires entre enseignement et apprentissage.

I – 5 La méthodologie des cinq composantes

Nous analysons les pratiques en classe à partir de transcriptions et/ou de vidéos. Un dispositif peu contraignant pour les professeurs et les élèves est utilisé depuis peu : les vidéos proviennent de prises de vue tournées par l'enseignant lui-même dans sa classe, la caméra face au tableau posée sur un trépied. C'est ce dispositif qui a été utilisé pour réaliser la vidéo analysée durant l'atelier.

Pour résumer, cinq composantes sont retenues pour mener nos analyses. Recomposées, elles renseignent à la fois sur les activités des élèves et sur certains déterminants des activités des enseignants, elles permettent de les replacer dans la gamme des possibles, de les interpréter, de réfléchir aux variables de la situation :

- les composantes cognitive et médiative : elles permettent des descriptions du scénario mathématique (comprenant les descriptions des contenus abordés avec la gestion globale prévue) et de son déroulement (comprenant les formes de travail effectives et tous les accompagnements, avec la nature des discours, la gestion du tableau, les aides, les échanges…) ;
- les composantes institutionnelle, sociale et personnelle : elles permettent de préciser certains déterminants, y compris extérieurs à la classe, mais indispensables pour comprendre les choix : par exemple, les programmes concernés, les habitudes professionnelles de l'environnement (que l'on peut appeler « genre » en suivant métaphoriquement Y. Clot), les conceptions de l'enseignant, *etc.*

De la recomposition de ces composantes se déduisent des logiques qui caractérisent un enseignement donné.

I – 6 Des nouveaux résultats, partiels, à partir d'analyses de vidéo

À propos de l'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième et à partir de quatre enseignants différents, E. Roditi explicite certains « principes » qui, de la même manière que les « règles de métier » d'Y. Clot, semblent bien traduire des décisions communes à beaucoup de professionnels, ici des enseignants de lycée et collège, et qui tiennent autant du métier que du projet strict d'apprentissage. Ainsi le principe de clôture du champ mathématique (ce qui est traité à un moment doit être une partie « auto-close » du champ conceptuel), le principe de la nécessité de succès d'étapes (qui amène à une fragmentation de l'enseignement permettant des évaluations), le principe de respect de l'attente des élèves…

A. Robert et M. Rogalski (A. Robert 2003b, A. Robert et M. Rogalski 2002) ont montré, dans de nombreux cas, des régularités sur le démarrage des exercices[7]. Nous les résumons ci-dessous, dans la mesure où la vidéo analysée durant l'atelier présente certaines de ces caractéristiques.

I – 6.1 Une prise en main précise et rapide de l'activité des élèves

Si la tâche proposée aux élèves n'est pas simple et isolée[8], le professeur la décompose immédiatement[9] en sous-tâches en posant des questions intermédiaires. Ces sous-tâches correspondent à des applications isolées que le professeur simplifie encore si les élèves n'arrivent pas très vite à les réaliser.

De ce fait il n'y a pas d'hésitation pour les élèves sur le démarrage : la question « quoi faire » est posée immédiatement par l'enseignant et les élèves peuvent « faire quelque chose » tout de suite, il n'y a pas de flou, pas d'incertitude.

I – 6.2 Du temps laissé aux élèves mais pour des tâches simples

Le temps laissé aux élèves (il y en a toujours dans les séances étudiées et il y en a dans la séance étudiée durant l'atelier) permet à certains de répondre brièvement à des questions « bien posées » ; dans ce cas l'enseignant attend généralement une dizaine de secondes. Ou bien il permet aux élèves (tous, si possible) d'effectuer les « derniers » calculs, précisés par ce qui a précédé ; dans ce cas le silence de l'enseignant peut dépasser une minute. Quelquefois ce sont les dessins pour lesquels l'enseignant laisse un peu de temps. Dans tous les cas, il s'agit de tâches simples et isolées, ou qui le sont devenues.

I – 6.3 Une orientation univoque de l'activité des élèves

Puisqu'il faut que les élèves apprennent, et vite, à se servir de la nouvelle notion enseignée, le professeur oriente l'activité des élèves, au moins dans les premiers exercices sur cette notion. Cette orientation est maintenue même si elle ne correspond pas aux propositions ou aux démarches initiales des élèves pour résoudre ces premiers exercices ; en outre, ces propositions ou démarches initiales ne sont pas reprises. Le professeur engage ainsi très vite les élèves à recourir au savoir décontextualisé, celui qui est en train d'être appris et qu'il va falloir mémoriser. Il ne laisse généralement pas les élèves refaire, sur un exercice donné, un raisonnement qui serait adapté au cas particulier de cet exercice : il les engage au contraire à appliquer les ressources du

---

[7] Les travaux concernent davantage les exercices que les cours.

[8] D'après A. Robert, une tâche simple met en jeu une application immédiate d'une propriété du cours ; une tâche est isolée si une seule propriété doit être utilisée. Ces analyses des tâches proposées aux élèves sont relatives à un niveau scolaire donné.

[9] Par une prise de parole qui suit immédiatement la donnée ou la relecture de l'énoncé.

cours, en évitant que les élèves mélangent ces ressources à des procédures particulières, qu'ils mélangent une nouvelle méthode avec d'anciennes connaissances qui ne seraient pas indispensables. En conséquence, en classe, le générique est souvent vite éliminé au profit du général, même s'il finit par se réintroduire subrepticement.

En seconde par exemple, pour résoudre $|x + 2| < 5$, on identifie le modèle $|x - c| < r$ donné en cours, on remplace c par -2 et r par 5 dans le résultat lui aussi donné en cours : $S = \left]c - r\,;c + r\right[$ et l'on écrit finalement l'ensemble des solutions de l'inéquation.

Il est laissé peu d'occasions aux élèves de tâtonner en classe, de mélanger leurs connaissances, de les éprouver. D'une certaine manière on ne laisse pas se développer des mathématiques qui mobilisent des méthodes pas encore optimales ou dont la mise en œuvre est encore en cours d'élaboration, on n'accepte pas non plus, même de manière transitoire, une rédaction pas parfaite avec un formalisme encore approximatif.

Mais, au moins, on a appris quelque chose aujourd'hui[10]… peuvent dire les enseignants.

De plus, cela engage davantage la mémorisation.

I – 6.4 Une gestion qui permet d'aller vite

L'enseignant anticipe sur ce que l'élève va dire, ou n'a pas compris. Il ne le laisse pas aller jusqu'au bout, il lui coupe la parole ou le double en terminant la phrase à sa place. Il peut y avoir un « effet Jourdain » (cf. Brousseau, 1998) : l'enseignant faisant comme si l'élève avait découvert ce qu'il attendait.

Souvent l'enseignant provoque des acquiescements de surface par des questions qui n'attendent pas toujours de réponses, comme « *d'accord ?* » ou « *c'est compris ?* ». Ces acquiescements peuvent témoigner d'un certain suivi mais aussi provenir de l'impossibilité pour les élèves de pointer précisément leurs incompréhensions.

I – 6.5 Synthèse sur ces déroulements (cf. A. Robert et M. Rogalski)

En classe, souvent, tout se passe comme si…

Les contraintes de temps[11], rendues encore plus lourdes par les restrictions d'horaires actuelles, amènent à privilégier en classe le travail sur le « nouveau ». Un travail sans beaucoup d'exploration[12], avec peu d'entretien de l'ancien, pas ou peu de réorganisation entre l'ancien et le nouveau, un travail avec une orientation univoque de l'activité des élèves vers ce nouveau, orientation obtenue par une prise en main précise et rapide (voire immédiate) de ces activités.

[10] E. Roditi a montré dans sa thèse qu'il y a là un principe en actes très fort chez les enseignants.

[11] Elles sont toujours évoquées pour justifier ces faits.

[12] Qualitative notamment.

En termes d'activités, cela correspond à la réalisation de tâches isolées, voire simples et isolées, sans beaucoup d'adaptations des connaissances à utiliser[13]. C'est ainsi le chapitre « organisation des connaissances » qui est une des premières victimes de ce manque de temps, et avec lui le développement de la dynamique entre cours et exercices. On ne peut pas être sûr qu'il en résulte chez les élèves un morcellement des connaissances[14] car des élèves apprennent aussi ce qui ne leur est pas enseigné explicitement, mais on peut se demander tout de même si la plainte du manque de « connaissances sûres » chez les élèves, réitérée par beaucoup d'observateurs, n'est pas due, entre autres origines, à ce type de travail en classe.

Les auteurs des recherches constatent également le peu d'exploration du champ des problèmes qu'il serait possible de traiter avec les outils disponibles. Vu la nécessité d'avancer, les professeurs préfèrent proposer des tâches relativement proches du cours, qui demandent des mises en fonctionnement standardisées et qu'il faut bien avoir vues.

Il apparaît donc, et cela pourrait renforcer le manque d'organisation des connaissances déjà pointé, une « séquentialisation » des activités sur une même notion en moments relativement indépendants : les élèves font fonctionner les outils les uns après les autres, ils n'ont besoin que des connaissances outils correspondant au cours et soufflées par le découpage organisé par l'enseignant. Il y a, *in fine*, beaucoup de tâches simples et isolées. Il y a aussi, en classe, majoration des calculs. Dans de telles conditions, il n'y a pas besoin de dévolution des moyens de contrôle aux élèves, il n'y a pas besoin non plus de structuration des connaissances en acte : c'est le professeur qui s'en charge.

Cela revient finalement à privilégier le sens « décontextualisé → contextualisé » et à minorer les tâches conduisant les élèves à effectuer des mises en relation, des explorations qualitatives du champ des possibles, et une organisation de leurs connaissances.

I – 6.6 Dernières questions : alternatives, effets des pratiques…

Diverses questions se posent ici. Des questions de recherche, bien sûr, par exemple au niveau du choix des indicateurs retenus pour les analyses ou de leur échelle : jusqu'où aller dans le détail ? Quel type d'analyse utiliser pour étudier les discours en classe ?

Mais d'autres questionnements, déjà cités en partie, intéressent aussi le formateur : peut-on et doit-on changer les pratiques d'enseignement ? Autrement dit, y a-t-il des alternatives réelles pour un enseignant ou un groupe d'enseignants ? Si oui, comment les mettre en évidence et comment les mettre en place ? Comment en saisir les effets sur les élèves et suivant les élèves ?

Une question théorique concerne la stabilité des pratiques, la question est liée à leur cohérence et à la prise en compte du métier dans la *double approche* : qu'est-ce qui peut changer, à quel prix, et grâce à quelles modalités ? Par exemple, « comment permettre

---

[13] Les auteurs ont étudié, pour établir ces constats, des séances de troisième ou de seconde, essentiellement en algèbre. Les énoncés proposés ne sont pas des exercices d'application immédiate, mais ils interviennent juste après un cours, ou juste avant et ne sont pas très éloignés du cours

[14] C'est en tout cas un des constats les plus forts qui ont été faits sur les connaissances des étudiants de CAPES.

une prise de conscience des alternatives par un enseignant, notamment lorsqu'il s'agit de ses propres cours ? » est une vraie question. Alors même que dans nos analyses, nous utilisons comme variable le couple énoncé/déroulement, on peut se demander si en formation, au contraire, il ne serait pas nécessaire d'effectuer un travail séparé sur chacun des termes. Cela pourrait permettre au professeur de se dégager de la combinatoire choisie dans le cas particulier analysé. Cette combinatoire réalise souvent un optimum entre l'ambition du professeur, ses objectifs, ses représentations concernant l'enseignement/apprentissage des mathématiques, et les diverses conditions et contraintes qui s'exercent sur son enseignement. En outre certains choix pour réaliser cette combinatoire sont naturalisés, ils ne sont pas explicites, il est alors très difficile de s'en dégager. Tout cela contribue à stabilité des pratiques. Nous pensons en outre que tout n'est pas possible dans l'enseignement, et encore moins pour un enseignant donné, dans une classe donnée. Néanmoins, un des enjeux de nos formations est d'envisager des alternatives, notamment grâce au travail collectif, afin d'obtenir des alternatives réalistes pour certains. Cela pose de nouvelles questions : jusqu'à quel point le travail initialisé par une vidéo doit-il être poussé pour concerner chaque enseignant, compte tenu des contraintes, de la pression du métier, et de la composante personnelle de ses pratiques ? Est-ce plus efficace de faire ce travail sur une vidéo de ses propres cours ou sur une vidéo des cours d'un collègue ?

II – INFÉRENCES SUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

Les recherches menées sur les pratiques à partir de films tournés en classe et les formations qui reposent sur des analyses de vidéos, nous ont conduit à des inférences sur la formation elle-même. Parallèlement se développent des questions quant à l'évaluation des dispositifs de formation. Ces inférences et ces questions ont nourri la discussion durant l'atelier, c'est ce que nous abordons dans cette seconde partie.

La littérature est riche sur les formations professionnelles et les formations d'enseignants[15], néanmoins le cas de la formation des enseignants en mathématiques est moins abordé dans des recherches spécifiques.

Nous avons travaillé à partir des divers travaux et articles mis à disposition dans les ouvrages, et à partir des recherches menées au sein de l'équipe DIDIREM par le groupe qui travaille sur les pratiques des enseignants. Nous avons ainsi dégagé, notamment avec Aline Robert, un certain nombre d'hypothèses sur les formations d'enseignants de mathématiques du second degré que nous présentons ci-dessous. Ne sont concernées que les formations professionnelles ayant une relation explicite avec les pratiques.

II – 1 Travailler les pratiques

Nous admettons l'hypothèse forte suivante, qui n'a rien d'original et qui n'est pas spécifique aux enseignants de mathématiques : il ne s'agit pas seulement de faire acquérir des connaissances exclusivement mathématiques ou exclusivement pédagogiques. Par exemple, il s'agit de travailler sur et avec les pratiques effectives, il

[15] Quelques ouvrages de références : M. Altet, M-M. Cautermann, L. Paquay ; on pourrait citer aussi presque tous les articles de la revue *Recherche et formation* !

s'agit d'articuler en formation les apports du terrain[16] et les apports plus théoriques[17], à la fois comme **moyen de formation** et comme **objectif de formation**.

Nous pourrions évoquer une expérience à outiller, ou nous référer aux concepts pragmatiques (Pastré, 1996, 1999), ou encore à la conceptualisation de l'action (Vergnaud, 2002).

C'est cette idée de **moyen de formation** que nous allons illustrer dans le cas particulier de la formation des professeurs de mathématiques. En tout état de cause, nous faisons l'hypothèse qu'on ne peut laisser à la charge du formé, la recomposition de composantes des pratiques qui auraient été travaillées séparément, qu'on doit travailler sur des éléments « ressemblant » suffisamment aux pratiques effectives. Nous proposons pour cela de travailler sur plusieurs composantes à la fois : travail simultané sur le contenu et la gestion, le contenu pour la classe et les programmes...

Cela amène à imaginer des **modalités de formation** comportant une articulation des apports du terrain et des apports théoriques, et une imbrication d'au moins deux composantes des pratiques. Nous proposons, par exemple, une alternance organisée entre passage sur le terrain et apports plus théoriques, des analyses mixtes comme des analyses de vidéo, etc.

II – 2 Tenir compte explicitement du collectif et du personnel

Une des caractéristiques importantes des pratiques des enseignants[18], qui doit intervenir dans leur formation, est qu'il co-existe, d'une part des contraintes extérieures aux enseignants, explicites ou plus cachées, qui limitent les variables et les marges de manœuvre à l'échelle de chaque individu, et d'autre part des styles individuels forts qui permettent à chaque professionnel d'assurer, pour lui, un bon exercice de la profession. Il faut aussi tenir compte, en formation, du fait que les pratiques individuelles sont stables, après quelques années d'exercice, et que leur stabilité est déjà en germe chez les débutants. Cette stabilité s'appuie sur des cohérences individuelles et sur le fait que les pratiques sont complexes.

Cela nous amène à proposer de travailler avec les professeurs en explicitant les contraintes et les habitudes professionnelles d'une part, et en recherchant d'autre part les alternatives possibles et les marges de manœuvre de chacun. Cela implique des prises de conscience, des adaptations individuelles, en tenant compte du fait que les cohérences interviennent comme un facteur de stabilité. Cela demande certainement du temps au sein d'une formation donnée ! Et bien des inconnues demeurent sur ces sujets qui doivent être explorés davantage.

Soulignons que la nécessité de ce travail d'adaptation est pour nous une hypothèse qui implique d'avoir des formateurs qui ne soient pas seulement des « bons enseignants ». Ils doivent être bien sûr aptes à analyser des activités d'élèves et le travail d'un enseignant autrement qu'en référence à leurs propres choix, mais ils doivent aussi

[16] C'est à dire les apports relevant d'expériences effectives en classe.

[17] Relevant de formation regroupée en centre par exemple.

[18] Cela fait partie des résultats de nos recherches en collaboration avec des ergonomes.

acquérir une relative familiarité avec les diversités et les régularités des pratiques enseignantes. Ils doivent encore avoir des connaissances sur les formations des pratiques et les moyens à développer pour y arriver. Ils doivent enfin pouvoir accéder aux ressources pour les enseignants, notamment les travaux de recherches en didactique, et doivent être capables de les critiquer et les adapter. Il est difficile de rentrer dans cette problématique en restant à l'échelle de quelques classes dans un établissement donné. Par ailleurs, la collaboration entre formateurs et chercheurs semble indispensable pour alimenter les nouveaux travaux.

II – 3 Tenir compte du fait qu'on forme des adultes en exercice

Pour tenir compte du public, adulte, en exercice (même les débutants ont des classes en responsabilité, dans le second degré comme dans le premier, mais avec des modalités différentes), nous nous appuyons notamment sur des travaux sur la conceptualisation de l'activité et l'importance du collectif en formation.

Nous proposons que cette mise en jeu du collectif se fasse par l'intermédiaire de mots pour dire l'activité professionnelle, pour la décrire, l'étudier et la discuter, grâce à des situations de formation adéquates, **signifiantes pour les formés**, qui ne se passent pas seulement sur le terrain où le travail est celui de l'action plutôt que celui de son analyse. Les situations que nous avons expérimentées et auxquelles nous pensons sont l'analyse de vidéo, la résolution de problèmes professionnels, l'accompagnement du travail sur le mémoire professionnel, le suivi de néo-titulaires, etc. Le caractère collectif de certains moments de la formation nous apparaît nécessaire pour qu'elle engendre certains changements[19].

II – 4 La nécessité du temps long

Enfin nous faisons une dernière hypothèse forte qui nous semble s'imposer compte tenu de tout ce qui précède : la nécessité du temps long. C'est contraire à bien des habitudes actuelles, notamment en formation continue.

II – 5 Un travail spécifique de conception de scénario de formation

L'importance de modalités adéquates des formations nous amène à proposer de travailler sur des scénarios de formation. Il s'agit de concevoir, **à partir de choix de contenus explicites,** une suite d'activités réelles, **signifiantes**, où les formés s'investissent et acquièrent du nouveau, proches de leur expérience[20], mobilisant à la fois deux composantes au moins des pratiques d'enseignement (cognitive et médiative par exemple).

Il ne s'agit pas pour nous de former les professeurs sans apport extérieur, au contraire, mais l'exposition de connaissances doit être accrochée aux besoins : si elle est nécessaire, elle n'est pas un préalable aux activités.

---

[19] Cf. Y. Clot, 1999.

[20] En amont et en aval.

II – 6 Des questions ouvertes pour la formation initiale

Des travaux menés en formation initiale de professeurs d'école indiquent l'intérêt d'apprentissages limités, très personnalisés, de certains gestes professionnels. Nous nous posons la question pour le second degré de l'identification de tels gestes, notamment en ZEP, et plus généralement de l'intérêt de faire vivre aux débutants des expériences cruciales, à partir de séquences très balisées qu'on leur propose.

De plus, la formation initiale amène les débutants à rencontrer plusieurs formateurs et la cohérence entre eux est une vraie question : est-elle nécessaire ou la diversité est-elle plus importante encore ?

CONCLUSION : CONCEPTION DE SCÉNARIOS ET ÉVALUATION

Ces travaux nous conduisent à une problématique qui concerne pour partie les chercheurs et pour partie les formateurs : élaborer des scénarios de formation qui permettent de relier les expériences sur le terrain à d'autres modalités d'intervention, et qui puissent être évalués par des recherches.

Concevoir de tels scénarios implique à la fois :

- un travail explicite de transposition de certaines recherches : tant sur les apprentissages des élèves que sur les pratiques et leur formation ;
- un travail d'ingénierie longue, avec la mise au point des modalités de ces formations ;
- une réflexion sur les formateurs et peut-être une certaine formation de ces derniers ;
- des expérimentations et des évaluations mises au point soigneusement ;
- et tout un travail réflexif à partir des premiers résultats…

Les évaluations restent très difficiles à imaginer dans la mesure où elles impliquent un triple chantier : les scénarios de formation et les formateurs, les effets sur les pratiques en classe, et enfin les effets sur l'apprentissage des élèves. En tout état de cause, la proposition d'une évaluation intégrée à un travail sur un problème réel faisant intervenir chercheurs, formateurs et participants nous semble à retenir.

BIBLIOGRAPHIE

ALTET M. (1994) La formation professionnelle des enseignants, *PUF, Paris.*

ALTET M. (2004) *L'analyse de pratiques en formation initiale des enseignants : développer une pratique réflexive sur et pour l'action*, Éducation permanente, **160**.

ARSAC G. (2003) *Que peuvent retirer les enseignants des travaux didactiques sur la démonstration ?*, Conférence donnée à Saint-Étienne.

BEZIAUD P., DUMORTIER D., ROBERT A., VANDEBROUCK F. (2003), *Un questionnaire sur l'utilisation du tableau noir en classe de mathématiques (collège et lycée) : portée,* *limites, perspectives en formations*, Document n°1 pour la formation des enseignants, Université Paris 7.

BOLON J. (1996) *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique ?*, Thèse de doctorat, Université Paris 7.

BROUSSEAU G. (1988) Théorie des situations didactiques, *La pensée sauvage, Grenoble.*

BUTLEN D., MASSELOT P., PEZARD M. (2003) *De l'analyse de pratiques effectives de professeurs d'école débutants nommés en ZEP-REP à des stratégies de formation*, Recherche et formation, **44**, 45-61.

CAUTERMANN M-M., DEMAILLY L., SUFFYS S., BLIEZ-SULLEROT N. (1999) La formation continue des enseignants est-elle utile ?, *PUF, Paris*.

CLOT Y. (1999) La fonction psychologique du travail, *PUF, Paris*.

CHEVALLARD Y. (1999) *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique*, Recherches en didactique des mathématiques, **19/2**, 221-265.

CRAHAY M. (1989) *Contraintes de situation et interactions maître-élève : changer sa façon d'enseigner est-ce possible ?*, Revue Française de Pédagogie, **88**, 67-94.

HACHE C. (2001) *L'univers mathématique proposé par le professeur en classe*, Recherches en didactique des mathématiques, **21/1-2**, 81-98.

MERCIER A., LEMOYNE G., ROUCHIER A. (2001) Le génie didactique, usages et mésusages des théories de l'enseignement, *De Boeck, Bruxelles*.

MONTMOLLIN (de) M. (1984) L'intelligence de la tâche, *Peter Lang, Berne*.

PAQUAY L., ALTET M., CHARLIER E., PERRENOUD P. (Eds) (2001) Former des enseignants professionnels, quelles stratégies, quelles compétences ?, *De Boeck, Bruxelles.*

PASTRÉ P. (1996) *Représentations sur le développement des adultes et leurs représentations*, Éducation permanente, **119**, 33-63.

PASTRÉ P. (Ed) (1999) *Apprendre des situations*, Éducation permanente, **139**.

PELTIER-BARBIER M.-L. & al (2004), Dur d'enseigner en ZEP, *La pensée sauvage, Grenoble.*

ROBERT A. (2001) *Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant*, Recherches en didactique des mathématiques, **21/1-2**, 57- 80.

ROBERT A. (2003) *De l'idéal didactique aux déroulements réels en classe de mathématiques : le didactiquement correct, un enjeu de la formation des (futurs) enseignants (en collège et lycée)*, Didaskalia, **22**, 99-116.

ROBERT A. (2003b) *Tâches mathématiques et activités des élèves : une discussion sur le jeu des adaptations introduites au démarrage des exercices cherchés en classe de collège*, Petit x, **62**, 61-70.

ROBERT A. et ROGALSKI J. (2002) *Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche*, Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies, **l2-4**, 505-528.

ROBERT A. et ROGALSKI M. (2004) *Problèmes d'introduction et autres problèmes au lycée*, Repères IREM, **54**, 77-103.

ROBERT A. et VANDEBROUCK F. (2003) *Des utilisations du tableau par des professeurs de mathématiques en classe de seconde*, Recherches en didactique des mathématiques, **23/3**, 389-424.

RODITI É. (1997) *Le tableau noir, un outil pour la classe de mathématiques*, Cahier DIDIREM n°30, Université Paris 7.

RODITI É. (2001) *L'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième. Étude de pratiques ordinaires*, Thèse de doctorat d'Université, Didactique des Mathématiques, Université Paris 7.

RODITI É. (2003) *Régularité et variabilité des pratiques ordinaires d'enseignement. Le cas de la multiplication des nombres décimaux en sixième*, Recherches en didactique des mathématiques, **23/2**, 183-216.

RODITI É. (2004) *Former par la résolution de problèmes professionnels*, Cahier de Didirem n°48, Université Paris 7.

RODITI É. (2005) Les pratiques enseignantes en mathématiques. Entre contraintes et liberté pédagogique, *L'Harmattan, Paris*.

VERGNAUD G. (2002) *La conceptualisation, clef de voûte des rapports entre pratique et théorie*, in Actes de l'université d'automne « Analyse de pratiques et professionnalité des enseignants », *DESCO & CRDP de Versailles,* collection *Les actes de la DESCO*.