XXI^ème Colloque COPIRELEM

des professeurs et des formateurs de mathématiques
chargés de la formation des maîtres

Actes

Quelles mathématiques
faire vivre à l'école ?
Quels outils pour les maîtres ?

IREM
Instituts de Recherche sur l' Enseignement des Mathématiques

irem Toulouse

Sommaire

COMMUNICATIONS

Vous trouverez ci-après les présentations des communications ; revenez sur la page communications .htm pour consulter leurs comptes-rendus complets.

LA PROPORTIONNALITÉ DANS L'ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE FRANÇAIS AU 20ÈME SIÈCLE ET AU DÉBUT DU 21ÈME SIÈCLE

Magali Hersant
IUFM des Pays de la Loire et CREN

Résumé

Considérant le calcul de quatrième proportionnelle comme une tâche représentative de l'enseignement de la proportionnalité dans la scolarité obligatoire, l'auteur étudie l'évolution de la transposition didactique de la proportionnalité depuis 1887 à travers cette tâche. Par l'analyse de textes officiels et de manuels, elle distingue cinq périodes, caractérisées par des savoirs et des savoir-faire, et montre comment la transposition didactique a évolué jusqu'à aujourd'hui.

Références

- Boisnard, Houdebine, Julo, Kerboeuf, Merri, 1994, La proportionnalité et ses problèmes, Ed. Hachette Education
- Bosch, Chevallard, 1999, La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs, objets d'étude problématique, Recherches en Didactique des Mathématiques Vol 19.1
- Comin, 2003, Des souris et des graines, Grand N n°72, pp. 41-73, Ed. IREM de Grenoble
- Dahan-Dalmedico, Peiffer, 1995, Une histoire des mathématiques, routes et dédales, Ed. Point Sciences
- Hersant, 2005, La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire, Repères IREM n°59, à paraître
- Pluvinage, Dupuis, 1981, La proportionnalité et son utilisation, Recherches en Didactique des Mathématiques 2.2, pp. 165-212, Ed. La Pensée Sauvage
- Vergnaud, 1990, La théorie des champs conceptuels, Recherches en didactique des mathématiques 10 2-3, pp. 133-170

En annexe :

Un tableau récapitulatif de l'analyse effectuée dans les manuels.

Exploitations possibles :

- Formation du lecteur : un vrai cours !
- Support pour une construire une intervention en formation initiale ou continue de PE ou PLC.

Mots clés :

proportionnalité, didactique, histoire de l'enseignement.

PREUVE PERCEPTIVE OU DÉMONSTRATION Le rapport des PE1 à la géométrie à travers leur métadiscours

Bernard Parzysz
GReDIM (IUFM d'Orléans-Tours)
& Équipe DIDIREM (Université de Paris-7)

Cette communication se place dans le cadre d'une recherche menée à l'IUFM d'Orléans-Tours.

A l'issue de la résolution d'une tâche à support géométrique où il s'agit de lister un ou plusieurs moyens de lever l'incertitude sur la réponse (oui/non) à une question posée, lors de la mise en commun, le débat instauré chez les PE1 fait apparaître, à travers certaines contradictions constatées par eux-mêmes d'une production à l'autre, des rapports à la validation géométrique très divers, qu'ils justifient soit par des considérations de conviction perceptive, soit par le contrat habituel en géométrie, soit par la nécessité de savoir exactement... Le rôle du formateur, tantôt synthétiseur, tantôt médiateur, tantôt provocateur, apparaît comme un élément important de l'évolution du débat.

Des extraits de l'enregistrement vidéo de l'une des séances menées sur ce thème et de la transcription écrite qui en a été tirée permettront d'analyser ce rapport à la validation et d'en repérer des indices d'évolution chez certains PE.

Plan de l'article

Introduction

1- Cadre théorique :
   a) pour ce qui concerne la géométrie : distinction de deux paradigmes
   b) pour ce qui concerne la didactique : théorie des situations, théorie anthropologique du didactique et niveaux de discours (discours géométrique, métadiscours contextualisé et métadiscours général

2- La séquence
   Présentation d'une séquence de formation

3- Le débat du groupe 4
   Étude des passages d'un niveau de discours à un autre et des éléments déclenchants au cours du débat instauré lors de la mise en commun

4- Le débat du groupe 2
   Étude des passages d'un niveau de discours à un autre et des éléments déclenchants au cours du débat instauré lors de la mise en commun

Conclusion

Type de contenu :

Communication dans le cadre d'une recherche portant sur la question de la preuve en géométrie dans la formation des PE1

Mots-clés :

Paradigmes géométriques, débat scientifique, preuve, su, perçu, métadiscours

LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES : UNE ÉTUDE LONGITUDINALE AU CE1

Rémi Brissiaud
MC de psychologie cognitive IUFM de Versailles
CNRS FRE 2627 Cognition et usages

Six types de problèmes arithmétiques (3 additifs et 3 multiplicatifs) ont été proposés une première fois en octobre et une seconde fois en juin à 110 élèves de CE1 dans 2 versions dont les énoncés ne diffèrent que par les nombres utilisés. Pour chaque type de problème, l'une des versions est bien réussie dès octobre alors que l'autre (parfois, celle où les nombres sont les plus petits !) est massivement échouée. Pour rendre compte de manière précise de la difficulté des principaux problèmes, les typologies avancées par G. Vergnaud sont donc insuffisantes. Par ailleurs, la méthodologie utilisée permet de différencier deux dimensions du progrès des élèves : l'une de nature générale (ils comprennent mieux les énoncés, etc.) et l'autre de nature conceptuelle. Les résultats obtenus montrent qu'il ne suffit pas de résoudre des problèmes pour conceptualiser les opérations arithmétiques car il importe de théoriser ces résolutions. Or, les nouveaux programmes de l'école ne le soulignent guère !

STRATÉGIES ET GESTES PROFESSIONNELS DE PROFESSEURS D'ÉCOLE DÉBUTANTS

ENSEIGNANT EN MILIEU DÉFAVORISÉ : UN ENJEU POUR LES APPRENTISSAGES DES ÉLÈVES.

Denis Butlen
IUFM de Créteil

Résumé

Cette communication développe un aspect d'une recherche collective portant sur les pratiques professionnelles de professeurs des écoles. Nous avons comparé les pratiques de trois professeurs des écoles débutants enseignant les mathématiques dans des classes scolarisant des élèves issus de milieux socialement très défavorisés à celles de sept de leurs collègues plus anciens enseignant dans des conditions analogues[1].

Les observations ont été faites sur une longue durée (au moins deux années scolaires). Nous nous sommes inspirés de la méthodologie élaborée par Robert et Rolgalski (2000) pour analyser les données recueillies. Nous avons mis en évidence des régularités intra mais aussi interpersonnelles. Nous avons également élaboré une première catégorisation des pratiques observées. Nous avons pour cela emprunté en l'adaptant à notre objet de recherche la notion de « genre » à Clot (1999).

À partir de deux exemples, nous caractérisons ce que nous appelons gestes et routines professionnels. Il s'agit de régularités intrapersonnelles qui permettent au professeur des écoles de réaliser au quotidien ses choix généraux et ses stratégies d'enseignement. Gestes et routines sont associés à des catégories de pratiques que nous avons identifiées par ailleurs.

Mots clés

gestes professionnels, routines professionnelles, pratiques enseignantes, i-genre, Zone d'Éducation Prioritaire, professeurs des écoles, mathématiques, didactique des mathématiques

[1] Cette recherche est le résultat d'un trvail collectif collective (Butlen, Peltier, Pézard, Masselot, NGono 2002, 2004)

TECHNIQUES ET FONCTIONS DE LA MÉMOIRE DIDACTIQUE :
APPROCHES D'UNE MODÉLISATION ET DE QUELQUES PROPOSITIONS

Yves Matheron
IUFM Midi-Pyrénées (GRIDIFE-ERTe 46)
IREM d'Aix-Marseille

Il s'agit d'une communication de travaux de recherche sur la mémoire didactique.

La question de la mémoire, couramment considérée comme incontournable dans l'analyse de situations d'enseignement-apprentissage, demeure pourtant un point aveugle des analyses de séquences d'enseignement des mathématiques. Cet article a pour objet de montrer tout d'abord, à partir d'observations de classes ordinaires, une modélisation anthropologique de la mémoire didactique en mathématiques.

Diverses questions se posent alors, et l'on traitera dans un second temps, sur l'exemple des systèmes de deux équations à deux inconnues, celle qui porte sur la possibilité de fonder un enseignement permettant un authentique travail des mémoires pratiques des élèves.

Plan de l'article :

1. La question de la mémoire didactique : position du problème.
2. Lien entre mémoire pratique et ostensifs.
3. Dans la classe, une mémoire qui se montre ou une source de malentendus ?
4. Diriger de manière synchrone la construction des mémoires pratique et ostensive.

Exploitations possibles :

Les exemples développés sont situés au collège, mais l'article ouvre des pistes pour prendre en compte le temps et la mémoire dans les apprentissages à l'école. L'importante bibliographie renvoie entre autres à deux articles récents de l'auteur qui permettent d'approfondir le sujet abordé et aux travaux de Sensevy sur les fractions à l'école élémentaire.

Mots clés :

apprentissage ; enseignement ; mémoire didactique ; mémoire pratique ; ostensifs ; théorie anthropologique du didactique

Communication C6

LIAISON CM2-6ème ET CONTRAT DE PROGRÈS : VIVRE UNE CLASSE MATHÉMATIQUE AU COLLÈGE

Françoise Vala-Viaux

IEN Circonscription Gap-Buëch *(Hautes-Alpes)*

Dans cet article Françoise Vala-Viaux présente un dispositif d'animation pédagogique qui a fonctionné dans le cadre d'une liaison CM2 6ème.

L'originalité de ce type de formation a consisté à préparer et à encadrer, pendant une semaine, en février 2004, une classe de mathématique réunissant les élèves d'une classe de CM2 et de deux classes de sixième issus du même bassin scolaire.

Plan de l'article :

- préambule
- constat : un écart grandissant entre les résultats en français et en mathématiques aux évaluations nationales de sixième au détriment des mathématiques.
- bref historique du travail effectif dans la circonscription
- le projet de classe mathématique : il réunit, pendant une semaine dans un même lieu, les deux types d'élèves pour un travail, sous forme de contrat individualisé, établi à partir de besoins identifiés
- les objectifs
- les contenus : un exemple d'organisation de la semaine et du fonctionnement, des trois classes, en huit ateliers abordant la numération, les programmes de construction, la lecture d'énoncés, les repérages temporels.
- conclusion.

Exploitations possibles :

L'article détaille une organisation d'une classe de mathématique réunissant des élèves de sixième et de CM2 qui suppose un engagement important d'une équipe de circonscription.

Les évaluations initiales et les activités proposées aux élèves au cours des ateliers, fournies à titre d'exemple en annexe, sont assez développées pour permettre une exploitation directe par un formateur.

Mots clés :

Liaison CM2-sixième, classe en résidence, évaluation, ré apprentissage, remédiation.

UN DISPOSITIF DE FORMATION DES PE2 EN MATHÉMATIQUES SUR LE SITE DE BLOIS, IUFM D'ORLÉANS-TOURS.

Jean-Claude Lebreton,
Patrick Wieruszewski
IUFM d'Orléans-Tours, site de Blois (41).

Cet article présente les 30 heures TD sur les 55 heures allouées aux mathématiques dans le plan de formation des PE2.

Pour l'essentiel, des groupes de PE2 animent, dans certaines conditions, des séances de mathématiques, avec un accompagnement des formateurs.

En annexe

Les principes directeurs et l'organisation des 50 heures de formation en pédagogie et didactique des mathématiques

Exploitations possibles

C'est un exemple intéressant d'une formation de PE2, que la consultation du site Internet référencé dans l'article permet d'approfondir

Mots clés

Formation PE2 ; travail en autonomie et accompagnement des stagiaires PE2 ; évaluation.

Communication D3

RAISONNEMENT PLAUSIBLE VERSUS RAISONNEMENT DE NÉCESSITÉ : OÙ EST LA FRONTIÈRE ?

Richard Cabassut,
Formateur à l'IUFM d'Alsace

Cet article présente l'une des facettes d'un travail de thèse en cours, sous la direction de Bernard PARZYSZ. L'auteur s'intéresse à deux types de raisonnements, le " raisonnement plausible " et le " raisonnement de nécessité " et s'interroge sur les modalités de passage de l'un à l'autre. Alors que le raisonnement dit " de nécessité " est reconnu car de la forme : *A est vrai et (si A alors B) vrai, donc B est nécessairement vrai*, le raisonnement dit " plausible " est moins étudié : *B est vrai et (si A alors B) vrai, donc A est davantage plausible*.

Il montre la présence de ces deux types de raisonnements dans les programmes, des outils pédagogiques et des productions d'élèves de l'école primaire. Il analyse que ce qui est souvent un raisonnement de nécessité pour l'élève n'est qu'un raisonnement plausible pour le mathématicien. Il s'interroge sur le rôle que doit jouer le professeur dans ces situations.

L'article est construit en trois parties. La première présente l'éclairage théorique et le questionnement de l'auteur. La seconde étudie le traitement du raisonnement dans les programmes et la troisième dans les manuels.

Mots clés

Raisonnement, argumentation, plausible, nécessaire

CHRONIQUE DE STAGES DE FORMATION CONTINUE : UNE SEMAINE CONSACRÉE À LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES.

Claire Gaudeul
Odile Verbaere
IUFM de Lille

Résumé

L'article présente un dispositif, contenu et bilan de stages de formation continue de professeurs d'école, stages de circonscription ou des stages disciplinaires.

Les formatrices visaient trois objectifs principaux :

- Engager les participants dans des pratiques d'enseignement qui laissent de la place aux problèmes de recherche ;
- Mener ce travail de fond en lien avec des contenus d'apprentissages ;
- Tenir compte des demandes de stagiaires formulées au début ou en cours de stage.

Le dispositif général est articulé autour de trois éléments clés :

- une mise en situation autour de « La vache et le paysan »
- un document recueil d'énoncés de problèmes intitulé « méli-mélo »
- une séance en classe

Le bilan fait apparaître qu'un tel stage est vécu comme « très en prise avec la pratique de classe » et il semble que tous les stagiaires aient modifié leur pratique en laissant plus de place à la recherche des élèves.

L'article est complété par une « bibliographie réduite ».

Annexes

1: planning de deux stages

2. Variantes et évolution

Mots clés

problèmes, chercher, formation continue, apprentissage

Communication D5

CHACUN SON CHEMIN ;
UN PROBLÈME DE PARTAGE
APPRENTISSAGES NUMÉRIQUES AU CYCLE 2

Jeanne Bolon
IUFM de l'académie de Versailles

Cet article présente le DVD *Chacun son chemin - Un problème de partage au cycle* 2 diffusé par le CRDP de Versailles. Il explique la structure de cet outil conçu pour la formation initiale ou continue des enseignants d'école primaire sur la pédagogie différenciée et explicite les choix de l'équipe conceptrice du DVD.

Celui-ci illustre des dispositifs pédagogiques qui articulent gestion collective de la classe et gestion individuelle en fonction de l'état de savoir des élèves. Trois classes, s'appuyant sur la documentation ERMEL, traitent un problème de partage (non équitable ou équitable).

Le DVD comporte plusieurs parties :

- des séquences de classe, en GS, CP et CE1,
- des entretiens avec les enseignantes de ces classes,
- des zooms sur certains aspects de la différenciation.

Il comporte également des textes : transcriptions des séquences de classe, bibliographie, suggestions d'utilisation

Exploitations possibles :

Le DVD montre, par l'image, que de jeunes collègues arrivent à mettre en oeuvre certains dispositifs de différenciation. On peut envisager son utilisation principalement dans la formation des nouveaux titulaires, mais aussi pour des analyses de pratique en formation initiale.

Mots clés :

pédagogie différenciée, problème pour chercher, analyse de pratique

COMPTER SUR LES ERREURS POUR COMPTER SANS ERREURS : ÉTAT DES LIEUX SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA NUMÉRATION DÉCIMALE DE POSITION AU CYCLE 3.

Véronique Parouty
Conseillère pédagogique à La Rochelle

Cette communication présente les résultats d'une recherche menée dans le cadre du DESS d'Ingénierie du Conseil pédagogique lors de l'année 2002-2003. Le Directeur de la formation est Monsieur Michel Fayol. Aussi, la méthodologie adoptée est-elle très centrée sur l'expérimentation, la mesure et le traitement statistique.

Trois questions ont été le point de départ du travail qui s'est appuyé sur des tests et questionnaires auprès des élèves de cycle 3 et des enseignants :

- dans quelle mesure, la numération décimale est-elle bien installée au cycle 3 (du CE2 au CM2) ?
- comment les enseignants repèrent-ils les erreurs de leurs élèves et quels dispositifs de remédiation conçoivent-ils ?
- les résultats des élèves peuvent-ils s'améliorer si les enseignants les font travailler sur des exercices faisant fonctionner de manière privilégiée l'aspect positionnel de la numération ?

Les résultats de ce travail semblent montrer qu'un gros effort de formation des enseignants sur ce sujet est nécessaire.

L'article présente quatre hypothèses, puis leur mise à l'épreuve.

En annexe

Des exemples de tests proposés aux élèves, deux exemples de situations données aux enseignants du groupe expérimental pour travailler la numération avec leurs élèves, le questionnaire initial remis aux enseignants pour mesurer leur conception de l'enseignement de la numération décimale de position par le biais de leurs propositions de remédiation et son analyse.

Exploitations possibles

Le cahier des charges proposé est utilisable par les formateurs dans la perspective de faire évoluer les conceptions des enseignants sur l'enseignement de la numération décimale de position.

Mots clés

Recherche, numération décimale, cycle 3, erreurs et remédiation, formation des maîtres.

LA PROPORTIONNALITÉ DANS L'ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE FRANÇAIS AU 20ÈME SIECLE ET AU DEBUT DU 21EME SIECLE

Magali HERSANT
IUFM des Pays de la Loire et CREN

Résumé :
Considérant le calcul de quatrième proportionnelle comme une tâche représentative de l'enseignement de la proportionnalité dans la scolarité obligatoire, nous étudions l'évolution de la transposition didactique de la proportionnalité depuis 1887 à travers cette tâche. L'analyse de textes officiels et de manuels nous permet de distinguer cinq périodes caractérisées par des savoirs et des savoir-faire. Elle nous permet aussi de montrer en quoi la transposition didactique actuelle de la proportionnalité est héritière des transpositions didactiques passées

Dans l'enseignement de la proportionnalité, le calcul de la quatrième proportionnelle est une tâche classique et emblématique. C'est pourquoi nous proposons une étude de l'évolution de la transposition didactique (Chevallard, 1985) de la proportionnalité directe dans l'enseignement obligatoire français (1887-2000) à partir de l'évolution des savoirs et savoir-faire (Bosch, Chevallard, 1999) relatifs à cette tâche. Pour cela, nous utilisons deux sources : des textes officiels (programmes, instructions et répartitions des programmes) et des manuels. L'études des textes officiels permet de cerner les positions institutionnelles et de délimiter des périodes de stabilité pour l'enseignement de la proportionnalité ; celle des manuels rend compte d'une certaine réalité de l'enseignement de la proportionnalité et précise l'activité de la noosphère pour rendre ou maintenir cohérentes les organisations mathématiques locales. L'analyse de ces sources nous conduit à délimiter et caractériser cinq périodes dans l'enseignement de la proportionnalité.

Ces cinq périodes sont présentées après des précisions permettant de cerner les limites de notre travail. En conclusion, nous essayons de montrer en quoi la transposition didactique actuelle est héritière des transpositions didactiques passées.

PRÉCISIONS

Enseignement obligatoire

Depuis 1887, la durée de la scolarité obligatoire s'est accrue progressivement et l'organisation en « niveaux » a été modifiée. Jusqu'en 1959[1] l'enseignement obligatoire était morcelé, et le « collège unique » n'existe que depuis la réforme Haby (1975)[2]. Pour

[1] Plan Berthouin, réforme des collèges et des lycées, obligation scolaire prolongée jusqu'à 16 ans.
[2] Cette réforme institue un tronc commun de formation, de l'école primaire à la sortie du collège.

cette étude nous avons considéré les niveaux suivants qui correspondent à la scolarité de la majorité de la population :

- de 1887 à 1941 : classes du primaire (de 6 à 11 ans, jusqu'au CM[3]) et CS[3] (11-13 ans) ou classe de Fin d'études Primaires (11-14 ans) [4] ;
- de 1941 à 1960 : classes du premier cycle du primaire (6-11 ans, jusqu'au CM) et du primaire supérieur ou second cycle (11-14 ans)[5];
- de 1960 à 1977 (application de la réforme Haby) : classes de primaire (6-11 ans) et des collèges d'enseignement général (CEG);
- depuis 1977 : classes de primaire et de collège.

Proportionnalité

Le terme proportionnalité employé dans l'enseignement actuel fait référence à un champ de problèmes issus de la vie sociale et de situations physiques dans lesquelles des grandeurs proportionnelles interviennent. La proportionnalité n'a pas toujours été un objet d'enseignement. Le terme n'apparaît dans les programmes du primaire qu'en 1970. Au début du siècle, on enseignait les grandeurs proportionnelles. Pour nous, le mot proportionnalité recouvre les notions de grandeurs proportionnelles, suites numériques proportionnelles, application linéaire et proportionnalité.

Calcul de quatrième proportionnelle

La tâche que nous considérons est le calcul de quatrième proportionnelle, quel que soit le cadre (Douady, 1986) et le registre de représentation du problème (Duval, 1995). Ainsi les problèmes suivants relèvent du calcul de quatrième proportionnelle :

<u>Etoffe[6]</u> : 18 mètres d'étoffe ont coûté 189 fr. Combien 13 mètres coûteront-ils ?

<u>Carburant</u> : Une voiture consomme en moyenne 8 l de carburant aux 100 km. Compléter le tableau suivant.

Distance (km)	25	1	c	d
Carburant (l)	a	b	10	1

1887-1923 : GRANDEURS QUI VARIENT DANS LE MÊME RAPPORT, PROBLÈMES DE RÈGLE DE TROIS ET TECHNIQUE DE RÉDUCTION À L'UNITÉ.

A cette époque, l'école prépare les enfants à leur vie professionnelle future. L'enseignement de la proportionnalité se fait dès le CM2 à partir de l'étude des grandeurs proportionnelles et des problèmes de règle de trois.

---

[3] CM : Cours moyen ; CS : Cours Supérieur

[4] La réforme de 1931 étend la scolarité obligatoire jusqu'à 14 ans, elle est mise en place à partir de 1938. Jusqu'en 1938, les élèves préparent le Certificat d'études primaires en CM. A partir de 1938, la scolarité est obligatoire jusqu'à 14 ans, le Certificat d'études primaires est alors préparé en classe de fin d'études ou au CS. Les CS n'existent que dans les écoles de plus de cinq classes.

[5] Les élèves préparent le diplôme d'études préparatoires au CM. A l'issue du CM, il est possible d'accéder, sur concours, au collège dont les programmes sont unifiés avec ceux de l'enseignement primaire supérieur (E.P.S.)

[6] extrait de F.F., CM, 1904, p. 196

La théorie de référence est celle des proportions, mais les programmes ne prévoient pas de l'enseigner explicitement. La technique institutionnelle est la technique de réduction à l'unité :

> Problème : 18 mètres d'étoffe ont coûté 189 fr. Combien 13 mètres coûteront-ils ?
>
> Si 18 mètres coûtent 189 fr.
>
> 1 mètre coûtera 18 fois moins, ou $\frac{189}{18}$
>
> et 13 mètres coûteront 13 fois plus qu'un mètre ou $\frac{189 \times 13}{18}$
>
> d'où $x = \frac{189 \times 13}{18} = 136 \text{ fr } 50$
>
> (F.F., CM, 1904, p 196-197)

Mais dans les manuels, les choix restent fortement marqués par les problématiques de la théorie des proportions. Cela se traduit de deux façons. D'abord, les techniques des rapports ou proportions[7] restent utilisées dans certains manuels (cf. annexe 1). De plus, des auteurs refusent d'utiliser des rapports de grandeurs de nature différente (c'est nous qui soulignons) :

> **497.** - Les raisonnements précédents ne conviennent évidemment que pour des proportions de nombres. Voici un raisonnement qui s'applique aux proportions de <u>quatre grandeurs de même espèce.</u>
> **Théorème. -** Étant donnée une proportion de **quatre grandeurs de même espèce**, on en obtient une autre : soit en permutant les extrêmes, soit en permutant les moyens, soit en mettant les extrêmes à la place des moyens et réciproquement. (p 293)
>
> **501**. Propriété. – Théorème. – Quand deux grandeurs **de même espèce** sont directement proportionnelles le rapport d'une valeur **quelconque** de la 1$^{\text{ère}}$ à la valeur correspondante de la 2$^{\text{ème}}$ est un **nombre invariable**. (p 299)
>
> **502**. – Si les grandeurs directement proportionnelles ne sont pas de même espèce, le raisonnement du numéro 501 est en défaut, puisqu'il est impossible de permuter les moyens de la proportion ; l'écriture nouvelle n'aurait aucun sens.
>
> **(Beil, Vareil CS, 1909, p 288-299)**

[7] La technique des rapports utilise le fait que les grandeurs varient dans le même rapport. Ainsi le problème précédent serait résolu de la façon suivante : La longueur d'étoffe et le prix de cette étoffe varient dans le même rapport, donc : $x = 189 \times \frac{13}{18}$. La technique des proportions utilise le fait que les valeurs des grandeurs proportionnelles forment une proportion et la propriété : “ dans une proportion le produit des extrêmes est égal au produit des moyens ”. avec cette technique le problème précédent se résout ainsi : 18 mètres est à 13 mètres comme 189 est à x donc : $\frac{18}{13} = \frac{189}{x}$ et $x = \frac{189 \times 13}{18}$.

1923-1945 : LA MÉTHODE DE RÉDUCTION À L'UNITÉ CONTESTÉE, VERS LE COEFFICIENT DE PROPORTIONNALITÉ ?

Cette période voit de nombreux changements de programme à tous les niveaux d'enseignement. Pour la proportionnalité, c'est une période de transition qui marque le début de changements importants.

Dans les textes officiels (programmes de 1923 pour le CM et 1931 pour le CS) la proportionnalité n'est plus seulement envisagée comme une convention sociale (problèmes de commerce), mais aussi comme un outil de modélisation de phénomènes physiques (introduction de problèmes de mouvement uniforme, densité, échelle dans le champ des problèmes de proportionnalité, étude de nombreuses grandeurs et calculs de mesures de grandeurs avec des formules). Ainsi la notion de valeur de l'unité apparaît implicitement au CS à travers par exemple les notions de poids spécifique, prix d'une marchandise et quantité de marchandise correspondant à une unité de monnaie. Les changements de programmes ultérieurs confirment et accentuent cette tendance.

Dans les manuels, il y a globalement une prise de distance par rapport à la théorie des proportions qui se traduit par une moindre utilisation de la technique des proportions. Parallèlement, la technique de réduction à l'unité est ouvertement contestée et la technique du coefficient commence à apparaître au CS.

> **140**. - La **méthode de réduction à l'unité** est d'un *emploi facile* ; mais, si on l'applique machinalement, elle peut conduire à des *raisonnements trop longs* ou même *absurdes*. (...)
> *Gay et Mortreux, CEP-CS (1933)*

Cependant le changement de technique amorcé n'est pas encore accompagné dans les manuels d'une modification conséquente au niveau de l'étude des propriétés des grandeurs proportionnelles.

Par ailleurs, nous notons deux freins possibles à l'emploi massif de la technique du coefficient. La technique n'est pas “ automatisable ”, contrairement à la technique de réduction à l'unité (selon le coefficient choisi on fait une division ou une multiplication). De plus, elle n'est pas valable pour les grandeurs inversement proportionnelles, étudiées en même temps que les grandeurs directement proportionnelles à l'époque.

1945-1970 : UTILISATION DE LA VALEUR UNITAIRE ET ALGÉBRISATION DES TECHNIQUES

Enseignement primaire

Entre 1945 et 1947, il y a une réorganisation de l'enseignement primaire élémentaire. Les instructions pour le CM institutionnalisent la valeur de l'unité et précisent les rapports du coefficient de proportionnalité avec la règle de trois, les pourcentages et les fractions :

> Le programme comprend explicitement l'étude du prix et du poids à l'unité et des exemples analogues de quotients qui peuvent être compris dans la dénomination générale de “ valeur de l'unité ”. [...] Leur calcul et leur emploi sont résumés dans la formule :
> Valeur totale = valeur de l'unité × nombre d'unités.
> Cette formule donne la règle de calcul, soit du premier nombre par une multiplication, soit de l'un des termes du deuxième membre par une division.

> (...) Les problèmes usuels de règle de trois conduisent à la recherche d'un quotient intermédiaire qui peut être, soit la valeur d'une unité, soit un nombre d'unités.
> Les formules suivantes en donnent deux exemples typiques :
>
> $$\frac{\text{valeur de la première parcelle}}{\text{surface de la première parcelle}} = \text{prix unitaire}$$
>
> $$\text{prix de l'hectolitre} = \frac{\text{valeur totale}}{\text{nombre d'hectolitres}}$$
>
> Des exemples simples de quotient permettent, de même, de justifier sommairement les diverses modes de calcul des problèmes de règles de trois :
>
> $$\frac{a \times b}{c} \;;\; a \times \frac{b}{c} \;;\; \frac{a}{c} \times b$$
>
> ainsi que des procédés de vérification (division par un même nombre d'un des facteurs et du diviseur).

Ces modifications permettent l'algébrisation des techniques de calcul de quatrième proportionnelle et préservent dans une certaine mesure la référence aux grandeurs proportionnelles. Cependant, dans les manuels du primaire, nous relevons deux choses qui conduisent à un travail plus sur les mesures de grandeurs que sur les grandeurs :

– la technique de réduction à l'unité continue d'être employée, mais le petit discours technologique qui l'accompagnait jusque là tend à être remplacé par différents ostensifs ;

– une “ nouvelle ” technique de calcul de quatrième proportionnelle apparaît dans un manuel (Piète-Sciulara-Berthoul, CM CS 8ème et 7ème , 1962) : le produit en croix désigné par « la règle de trois ». Les auteurs n'abordent pas l'étude des grandeurs inversement proportionnelles et proposent de disposer les données d'un problème de quatrième proportionnelle dans un tableau à quatre cases avec un point d'interrogation pour désigner la valeur cherchée. Ils tracent ensuite une croix reliant les quatre mesures et énoncent la règle suivante : « Pour trouver la réponse, il faut multiplier les deux nombres connus d'une branche de la croix et diviser le produit obtenu par le nombre connu isolé de l'autre branche » (cf. extrait en annexe 2).

Enseignement secondaire

Avec la fusion des filières “ courte ” et “ longue ” en 1959-1960, les programmes du collège changent : les problèmes de règle de trois et l'étude des grandeurs proportionnelles disparaissent de l'enseignement à ce niveau.

Ces modifications se traduisent dans les manuels par des points de vue rétrogrades ou avant-gardistes. Ainsi, le Cluzel-Court (3ème, 1963) traite de grandeurs proportionnelles, étudie les rapports, proportions et nombres proportionnels et emploie la technique des proportions ; au contraire le Queysanne-Revuz (3ème, 1968) n'aborde pas les grandeurs proportionnelles, associe les rapports et proportions à la fonction linéaire et aux suites numériques proportionnelles et ne propose que des exercices de partages proportionnels.

1970-1977 : LA PROPORTIONNALITÉ, RELATION MULTIPLICATIVE ENTRE DEUX LISTES DE NOMBRES.

La réforme des mathématiques modernes accélère l'évolution de l'enseignement de la proportionnalité. Les principales modifications concernent les savoirs à enseigner.

Le terme proportionnalité apparaît pour la première fois dans les programmes du primaire où il est défini de la façon suivante :

> Lorsque l'opérateur est " multiplier par ... " ou " diviser par ... " la correspondance qui permet de passer d'une liste à l'autre est la *proportionnalité.*
>
> Instructions CM 1970

Par contre, la proportionnalité disparaît de l'enseignement secondaire.

L'application linéaire devient la théorie institutionnelle et l'étude des grandeurs proportionnelles est abandonnée. Le tableau devient l'outil institutionnel de résolution des problèmes de proportionnalité :

> La plupart des problèmes traités au cours moyen mettent en œuvre des problèmes dans lesquels la proportionnalité doit être explicitée.
> D'une façon générale, tous les problèmes traités au moyen de la " règle de trois " relèvent du modèle mathématique précédent. Il est essentiel de savoir qu'il s'agit d'un seul et même problème, qu'il convient d'expliquer en termes nouveaux.
>
> *Exemple 1* : Pour une fête, des enfants font des colliers composés tous du même nombre de perles.
> Un enfant a utilisé 45 perles pour faire trois colliers.
> Le tableau ci-contre permet de répondre aux deux questions :
> Combien faut-il de perles pour fabriquer 7 colliers ?
> Combien de colliers peut-on fabriquer avec 135 perles ?

Collier	Perles
3	45
7	?
?	135

> Programmes de 1970, CM

Par ailleurs, la technique du coefficient est abondamment utilisée dans les manuels. Elle est souvent accompagnée d'autres techniques (produit en croix ou techniques basées sur la linéarité).

Ces modifications concernant l'enseignement de la proportionnalité et celui des grandeurs engendrent deux glissements potentiels :

– la confusion entre situation multiplicative et situation de proportionnalité. En effet, tous les problèmes qui se représentent dans un tableau avec un coefficient multiplicatif ne sont pas des problèmes de proportionnalité. Certains sont seulement des problèmes de division euclidienne, comme le problème Colliers[8].

– le tableau de proportionnalité devient objet d'enseignement.

---

[8] Il y a bien un opérateur multiplicatif qui permet de passer du nombre de colliers au nombre de perles mais cet opérateur n'admet pas d'opérateur réciproque : avec 46 perles combien de colliers peut-on construire ? C'est la difficulté de la modélisation d'une situation faisant intervenir des valeurs discrètes.

DEPUIS 1978 : UN RETOUR AUX SITUATIONS, LES SUITES NUMÉRIQUES FINIES

Depuis 1978, le retour à l'étude de situations « concrètes » induit implicitement un retour à la notion de grandeurs proportionnelles. Pour autant, on ne travaille plus vraiment sur les grandeurs proportionnelles mais plutôt sur les suites de mesures de grandeurs proportionnelles, comme on le voit en particulier avec l'usage des tableaux qui n'est possible que si l'on distingue les grandeurs en jeu mais qui conduit plus à l'utilisation de l'expression « tableau de proportionnalité » qu'à celle de « grandeur proportionnelle ». De plus, la proportionnalité est envisagée différemment puisque la tâche de reconnaissance de situations de proportionnalité à partir de différentes représentations sémiotiques s'est développée durant la période, avec les imprécisions possibles pour ce qui concerne le registre tableau. Cette organisation permet de donner un rôle moindre au tableau de proportionnalité, d'accorder plus de place à la représentation graphique de la proportionnalité et aussi de ne pas institutionnaliser dans les programmes une technique particulière. Avec cette organisation, les élèves utilisent entre le CM et la $4^{\text{ème}}/3^{\text{ème}}$ (selon les programmes) des techniques relatives au calcul de quatrième proportionnelle justifiées par des propriétés de l'application linéaire, outil implicite jusqu'en $4^{\text{ème}}/3^{\text{ème}}$, selon les programmes.
Le retour aux situations et l'utilisation implicite de la théorie de l'application linéaire entraînent quelquefois la cohabitation des deux théories de référence, notamment au niveau de la génération de techniques, et ce que Comin (Comin, 2002) nomme une hétérogénéité épistémologique. Ainsi, le produit en croix qui était justifié facilement autrefois au niveau du primaire dans le cadre de la théorie des proportions est toujours utilisé à ce même niveau actuellement sans pouvoir être réellement justifiée. De plus, certains mots ou expressions ont perdu une partie de leur sens et peuvent être utilisés à mauvais escient[9].

CONCLUSION

Au-delà de la caractérisation de cinq périodes dans l'enseignement de la proportionnalité, nous avons cherché à montrer comment la transposition didactique de la proportionnalité a évolué progressivement, sans véritable rupture avant 1970, et le plus souvent avec des mouvements avant-gardistes et rétrogrades à chacune des époques.
Cette évolution s'est réalisée sous la pression de contraintes de nature différente. Avant la période 1945-1969, la discussion nous apparaît essentiellement liée à la difficulté de faire cohabiter une utilisation rigoureuse de la théorie des proportions et un enseignement court à visée essentiellement professionnelle. Puis, l'allongement de la scolarité, la modification des besoins en termes de formation et probablement l'influence naissante de Bourbaki et de Piaget entraînent une algébrisation de la proportionnalité et une avancée assez nette vers un changement de modèle. La réorganisation des mathématiques modernes conduit à l'abandon des grandeurs dans le traitement de la proportionnalité et au tout tableau, avec des dérives possibles. Enfin, la prise en compte de résultats de recherche, en didactique des mathématiques notamment, ont vraisemblablement contribué à la transposition didactique actuelle.

L'étude met en évidence une ouverture progressive du champ des techniques utilisables pour le calcul de quatrième proportionnelle. Aujourd'hui, il n'y a pas vraiment de

9 Ainsi le mot « proportion » était utilisé avec le sens de rapport dans les projets de programmes de collège en 2004.

technique institutionnelle et l'on privilégie les raisonnements personnels. Cela apparaît comme une évolution positive de l'enseignement mais pose aussi des questions : dans le contexte actuel où enseignants et élèves ont moins de repères par rapport aux théories mathématiques en jeu, au vocabulaire et à la notion de grandeur (Comin, 2002) ne risque-t-on pas d'entraîner des conceptions erronées? Par ailleurs, l'utilisation actuelle de l'application linéaire comme outil implicite puis outil explicite apparaît *a priori* favorable à l'apprentissage. Cependant, n'est-il pas plus difficile pour les élèves de faire le lien entre proportionnalité et application linéaire ?

REFERENCES

Boisnard, Houdebine, Julo, Kerboeuf, Merri, 1994, *La proportionnalité et ses problèmes*, Ed. Hachette Education

Bosch, Chevallard, 1999, La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs, objets d'étude problématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques Vol 19.1*

Chevallard, 1985, *La transposition didactique*, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble

Comin, 2002, L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège, *Recherche en didactique des mathématiques 22 2-3*, pp. 135-181, Ed. La Pensée Sauvage

Comin, 2003, Des souris et des graines, *Grand N n°72,* pp. 41-73, Ed. IREM de Grenoble

Dahan-Dalmedico, Peiffer, 1995, Une histoire des mathématiques, routes et dédales, Ed. Point Sciences

Douady, 1986, Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques 7.2,* pp. 5-31, Ed. La Pensée Sauvage

Duval, 1995, *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels,* Ed. Peter Lang

Hersant, 2001, *Interactions didactiques et pratiques d'enseignement, le cas de la proportionnalité au collège,* Thèse de l'Université Paris 7.

Hersant, 2005, La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire, *Repères IREM n°59,* à paraître

Pluvinage, Dupuis, 1981, La proportionnalité et son utilisation, *Recherches en Didactique des Mathématiques 2.2,* pp. 165-212, Ed. La Pensée Sauvage

Vergnaud, 1990, La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques 10 2-3,* pp. 133-170

Annexe 1 : Analyse des manuels

Pour cette étude nous avons utilisé des manuels de différentes époques. Nous n'avons pas cherché à savoir s'ils étaient représentatifs, mais ils témoignent d'une façon de présenter la proportionnalité à un moment donné. Leur analyse, présentée ci-dessous, est obtenue de la façon suivante.

La *théorie de référence* est la théorie mathématique utilisée implicitement ou explicitement dans le manuel. Pour la proportionnalité, deux théories peuvent être employées : la théorie des proportions, notée P, ou la théorie de l'application linéaire, notée A. Si la théorie est expliquée dans le manuel, elle notée PE ou AE dans le tableau.

Si elle est implicite elle est notée PI ou AI. Les deux théories peuvent être utilisées dans le même manuel, dans ce cas, nous l'indiquons.
Nous indiquons dans la colonne « *proportionnalité entre* » si les propriétés et définitions données dans le manuel le sont pour des grandeurs proportionnelles, des suites de nombres proportionnelles i.e. des suites de mesures de grandeurs proportionnelles ou encore des nombres proportionnels qui ne sont pas des mesures de grandeurs proportionnelles.
La propriété utilisée pour définir la proportionnalité est indiquée dans la colonne « *définition issue de* ». Les propriétés énoncées au sujet de la proportionnalité dans le manuel sont indiquées dans la colonne « *propriétés énoncées* ». Les numéros correspondent aux propriétés suivantes :

Théorie des proportions (rapports, proportions, extrêmes, moyens)	Théorie de l'application linéaire (application, fonction, image, antécédents)
Soit I un sous-ensemble fini de N, les suites numériques $(u_i)_{i\in N}$ et $(v_i)_{i\in N}$ de termes non nuls sont proportionnelles, si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :	*f est une fonction définie de R dans R. Soit I un sous-ensemble fini de N, les suites numériques $(u_i)_{i\in N}$ et $(v_i)_{i\in N}$ sont proportionnelles si l'une des conditions suivante est vérifiée :*
1. Pour tout i et j de I, $\frac{u_i}{u_j}=\frac{v_i}{v_j}$, (les suites varient dans le même rapport)	
2. a) pour tout i de I, si u_i est multiplié par 2, 3, 4... λ (λ réel), v_i est multiplié par 2, 3, 4… λ. 2. b) pour tous i, j, k de I, si $u_i = u_j + u_k$ alors $v_i = v_j + v_k$.	8. a) pour tout entier i *et* j de I si le réel λ est tel que $u_i = \lambda u_j$ alors $v_i= f(u_i) = \lambda f(u_j) = \lambda v_j$ 8. b) pour tout entier i, j, k de I si $u_i = u_j + u_k$ alors $v_i= f(u_i) = f(u_j) + f(u_k) = v_j + v_k$
3. Pour tout i et j de I, $u_iv_j = v_iu_j$ (le produit des extrêmes est égal au produit des moyens)	
4. Pour tout i et j de I, $\frac{u_i}{v_i}=\frac{u_j}{vj}$	
5. Pour tout i, j, k de I, si λ et μ sont des réels non tous les deux nuls tels que $u_i = \lambda u_j + \mu u_k$ alors $\frac{u_i}{v_i}=\frac{\lambda u_j+\mu u_k}{\lambda v_j+\mu v_k}$	8. (a et b) pour tout entier i, j, k de I si les réels λ et μ sont tels que $u_i = \lambda u_j +\mu u_k$ alors $v_i= f(u_i) = \lambda f(u_j) + \mu f(u_k) = \lambda v_j + \mu v_k$ 8*. toute combinaison linéaire des deux colonnes du tableau est une nouvelle colonne du tableau
6. $\frac{u_i}{v_i}$ est un coefficient de proportionnalité, c'est le nombre par lequel il faut multiplier u_i pour obtenir v_i.	7. Pour tout i de I, v_i est l'image de u_i par une application linéaire f, c'est-à-dire il existe un réel non nul α tel que pour tout entier $i\in$ N, $v_i = \alpha u_i$ 7*. il existe un opérateur multiplicatif qui permet de passer d'une ligne à l'autre du tableau
	9. Dans un repère l'ensemble des points $(u_i, v_i)_{i\in I}$ est sur une droite passant par l'origine du repère.

Enfin, les techniques proposées dans le manuel sont indiquées dans la dernière colonne, avec les abréviations suivantes :

- τ_u : technique de réduction à l'unité
- τ_r : technique de multiplication par un rapport
- τ_p : technique des proportions
- τ_x (τ_x*) : technique du produit en croix (dans le registre tableau)
- τ_c (τ_c*) : technique du coefficient (dans le registre tableau)
- τ_l (τ_l*): technique utilisant des propriétés de linéarité (dans le registre tableau)
- τ_g : technique graphique

Date	Niveau	Auteurs	Théorie de référence	Proportionnalité entre	Définition issue de	Propriétés énoncées	Techniques proposées
Avant 1887							
1884	CM CEP	ED BELIN	PI	Grandeurs	5		τ_u
1886	CM	PLUSIEURS PROFS	PE	Grandeurs	5		τ_u τ_r
Première période 1887-1923							
1904	CM CEP	BARREAU LALARGE	PI	Grandeurs			τ_u
1904	CM	FF	PE	Grandeurs	5		τ_u
1920	CM	LEMOINE	PI	Grandeurs	5		τ_u
	CS	FEC	PE	Grandeurs	5		τ_u τ_r τ_p
1903	CS	LEYSENNE	PE	Grandeurs	5		
1909	CS	BEHR VAREIL	PE	Grandeurs	3	1 5	τ_p τ_r
Seconde période 1923- 1945							
1923	CE CM	LEMOINE	PI	Grandeurs			τ_u
1923	CM CEP	LEMOINE	PI	Grandeurs	5		τ_u
1931	CEP CS	MARTIN REAU	PI	Grandeurs	5	1	τ_u
1933	CEP CS	MORTREUX	PI	Grandeurs	5		
1923	CS	LEMOINE	PI	Grandeurs	5		τ_u
1932	CS	ROYER COURT	PE	Grandeurs	5	3	τ_u τ_p τ_r
1935	CM CEP	CROISILLE	PI	Grandeurs	5		τ_u
1943	EPS	PLUGIBET	PI	Grandeurs	5		τ_u τ_c
1939	EPS/5-4-3	FOULON	PE	Grandeurs	3	1 5 9	τ_g
Troisième période 1945-1969							
1946	CM CS 7	MARIJON MASSERON DELAUNAY	PI	Grandeurs	5		τ_u
1950	CM2 CS	CROISILLE	PI	Grandeurs	5		τ_u
1950	CM	DRAUX	PI	Grandeurs			τ_u
1959	CM	DS (Commission d'instituteurs)	PE	Grandeurs	5		
1962	CM CS 8E 7E	PIETE SCIULARA BERTHOUL	PI	Grandeurs	5		τ_x* τ_c
1965	CM	ADAM - GOUZOU	PI	Grandeurs			
1969	CM2	NADAUD BENHAIM	PI	Grandeurs			τ_u τ_r
1958	6 CC	MARVILET		Grandeurs			

1959	CC BE	MARIJON PEQUINIOT	PE	Grandeurs	6 3	5 4 7 9	τ_p τ_c τ_g
1965	6	HUISMAN ITARD	AI	Grandeurs	4		τ_c
1965	6	QUEYSANNE REVUZ	AI	Suites numériques	4	7	τ_c τ_g
1963	6	MONGE GUINCHAN	AI	Suites numériques	4		τ_c
1963	5-4-3	CLUZEL COURT	PE	Grandeurs	5	1 2 4	τ_p
1963	3	CHILLOUX MALLET	PE	Grandeurs	4	1 6 7	τ_p
1960	3	LEBOSSE HEMRY	PE	Grandeurs	5	4 6	τ_c τ_g
1968	3	QUEYSANNE REVUZ	AE				
1968	3	MONGE GUINCHAN	AE		4		
Quatrième période 1969-1977							
1969	6ÈME	QUEYSANNE REVUZ	AE				
1977	6ÈME	QUEYSANNE REVUZ	AE				
1973	CM2	ADAM NICOLAS GOUZOU	AI	Nombres	7*	5* 8*	τ_l*
1970	CM	DENISE THEVENON JOLY	AI	Grandeurs Nombres		5* 7*	τ_l* τ_c*
1971	CM	GOERGLER ANDRIEU VIALA	AI	Nombres		7* 5* 8*	τ_l* τ_c*
1977	CM2	GOERGLER ANDRIEU VIALA	AI	Nombres		7* 5* 8*9*	τ_l* τ_c*
1970	CM	THIRIOUX GASPARI MIREBEAU LEYRAT	AI	Nombres		5* 7* 8* 2*	τ_c*
1976	CM	THIRIOUX GASPARI MIREBEAU LEYRAT	AI	Nombres		5* 7* 8* 2*	τ_l^* τ_c^* τ_x^*
Cinquième période 1977-2000							
1980	CM	THIRIOUX ET AL.	AI	Nombres			τ_c^*
1984	CM	DENISE THEVENON	AI	Nombres		7* 5* 8*	τ_l* τ_c*
1988	CM	BIA MARECHAL CLAVIER	AE	Suites numériques		8 7 9	τ_l^* τ_c^* τ_g
1996	CM	BIA MARECHAL PELTIER	PI	Suites numériques		7* 8* 9	τ_l^* τ_c^* τ_g
1977	6	MAUGUIN	AI	Suites numériques	7	8	τ_c τ_u τ_l τ_g
1981	6	THIRIOUX L ET S SANCHEZ DOMAIN	AI	Nombres	7*	5* 8* 2*	τ_l^* τ_c^* τ_x^*
1987	5	JULIEN PENNINCKX	AI/PI	Suites numériques		1 3 4 7	τ_l^* τ_c τ_u τ_p τ_x^*
1987	5	BAREIL ZEHREN	AI	Suites numériques		8 7 9	τ_l τ_c τ_g τ_u
1989	3	DELORD TERRACHER VINRICH	AE	Grandeurs		7	τ_c τ_l
1990	6	DELORD TERRACHER VINRICH	AI/PI	Grandeurs		1 5* 7* 9	τ_c^* τ_l^* τ_g
1991	5	DELORD TERRACHER VINRICH	AI/PI	Grandeurs		5* 7* 9	τ_l^* τ_c^* τ_x^*
1992	4	DELORD TERRACHER VINRICH	AE	Suites numériques		7 8 9	τ_c τ_g
1993	3	DELORD TERRACHER VINRICH	AE	Suites numériques		7 9	τ_c $\tau_g\tau_l$
1996	6	DELORD VINRICH	AI	Nombres		5* 7* 9	τ_c* τ_g^* τ_l^*
1997	5	DELORD VINRICH	AI/PI	Nombres		5* 7* 9	τ_x^* τ_c
1998	4	DELORD VINRICH	AI/PI	Nombres		1 7* 9	τ_c^* τ_g τ_l^* τ_p

Annexe 2 : extrait du Piète – Sciulara – Berthoul, CM CS 8ème, 7ème, 1962

Reprenons le Problème II (page 98). Le commerçant a établi un tableau de vente. Comme la réponse est obtenue en effectuant $\frac{3 \times 20}{15}$, il cherche

Longueur en m	*Prix en F*
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25
6	30
7	35
8	40
9	45

Longueur en m	*Prix en F*
3	15
?	20

Longueur en m	*Prix en F*
3	17
7,5	?

un moyen rapide pour placer convenablement les 3 nombres : 3, 20, 15 qui sont soulignés dans le tableau de vente.

Dans un tableau réduit, il inscrit ces nombres à leur place. A l'endroit où doit se trouver la réponse, il met un point d'interrogation. Il trace une croix et il remarque que :

Pour trouver la réponse, il faut multiplier les 2 nombres connus d'une branche de la croix et diviser le produit obtenu par le nombre connu isolé de l'autre branche.

$$? = \frac{3 \times 20}{15}.$$

Avec ce procédé, sans tableau de vente, il peut ainsi trouver immédiatement les calculs qu'il faut effectuer pour trouver la réponse du Problème III (page 98).

$$? = \frac{17 \times 7,5}{3} = 42,5.$$

Ce procédé est appelé règle de trois.

Lorsqu'on connaît 3 nombres de 2 lignes d'un tableau de grandeurs proportionnelles, on peut calculer le quatrième par la règle de trois.

PREUVE PERCEPTIVE OU DÉMONSTRATION ?

LE RAPPORT DES PE 1 A LA GÉOMÉTRIE, ÉTUDIÉ À TRAVERS LEUR MÉTADISCOURS

Bernard Parzysz
GReDIM[1] (IUFM Orléans-Tours)
et Equipe DIDIREM(Université de Paris 7

Résumé :
Lors de la phase de mise en commun suivant la résolution d'une tâche de type méta menée par groupes à propos d'un exercice de géométrie dans le cadre d'une recherche menée à l'IUFM Orléans-Tours, le débat instauré chez les PE1 fait apparaître, à travers certaines contradictions constatées par eux-mêmes d'une production à l'autre, des rapports à la validation géométrique très divers, qu'ils justifient soit par des considérations de conviction perceptive, soit par le contrat habituel en géométrie, soit par la nécessité de savoir exactement... D'autre part, le rôle du formateur, tantôt synthétiseur, tantôt médiateur, tantôt provocateur, apparaît comme un élément important de l'évolution du débat. Des extraits de l'enregistrement vidéo de l'une des séances menées sur ce thème et de la transcription écrite qui en a été tirée permettront d'analyser ce rapport à la validation et d'en repérer des indices d'évolution chez certains PE.

Notre travail est parti de la constatation – étayée par l'analyse d'un questionnaire (cf. [Parzysz & Jore 2004]) - du fait que nombre de candidats au concours de professeur des écoles (PE1), même s'ils possèdent de bonnes connaissances en géométrie élémentaire, ne distinguent pas toujours clairement ce qui relève du perceptif et ce qui relève de la théorie. Estimant pour notre part que cette distinction est fondamentale pour un enseignant de l'école élémentaire qui est amené à valider les productions de ses élèves, nous avons entrepris de rechercher des situations géométriques censées rendre ambiguës les validations perceptives et permettre de déboucher sur la question de la preuve en géométrie. Nous en avons choisi deux (une en environnement papier-crayon et une en environnement informatique) que nous avons proposées à plusieurs groupes de PE1, non pas comme des questions de géométrie, mais comme des questions à propos de géométrie. Notre groupe a déjà présenté de telles séances dans des colloques précédents de la COPIRELEM ([Parzysz 2002], [Parzysz 2003]). Ayant procédé à la transcription d'enregistrements audio-visuels de certaines de ces séances, nous présentons ici un extrait de l'une d'entre elles, au sujet de laquelle nous nous intéresserons à un aspect particulier du débat sur la preuve.

[1] Groupe de Recherches en Didactique des Mathématiques. En font actuellement partie Ghislaine CAILLETTE, André GAGNEUX, Joëlle JAN-GAGNEUX, Claude LANDRÉ, Claudine RAPPENEAU, Edith RENON, Patrick WIERUSZEWSKI. Qu'ils soient tous chaleureusement remerciés pour leur intérêt et leur participation active au groupe

1- CADRE THÉORIQUE

a) En ce qui concerne la *géométrie*, notre cadre théorique[2] repose sur la distinction de deux paradigmes, qui de fait coexistent au niveau au début de l'enseignement secondaire, et que nous avons dénommés G1 et G2 :

- G1 est une géométrie dans laquelle les objets physiques ont subi un début d'idéalisation, en ce sens que seules certaines caractéristiques des objets matériels sont retenues comme pertinentes (ainsi, la couleur des traits d'un tracé sur une feuille de papier ou un écran d'ordinateur, le matériau dans lequel est réalisée une maquette ne seront pas pris en compte). C'est-à-dire que le regard porté sur les objets les a déjà quelque peu abstraits et simplifiés par rapport au réel (maquette, tracé sur une feuille de papier, sur un écran d'ordinateur) ; les techniques de validation y sont de nature perceptive, qu'elles soient ou non instrumentées (comparaison, mesure).

- G2 met en jeu des objets qui ne sont plus physiques, mais théoriques. Il s'agit d'objets "idéaux" au sens platonicien (traits et surfaces sans épaisseur, par exemple), et les images physiques qui peuvent en être faites, maquettes ou "figures" n'en sont que des représentations. Mais ces objets sont aussi des éléments d'une théorie (en l'occurrence, la géométrie affine euclidienne), et les validations n'y sont pas de nature perceptive : elles reposent sur cette théorie et sur un mode d'argumentation particulier, de type hypothético-déductif (la *démonstration*). C'est une géométrie de type axiomatique, mais qui ne l'est pas totalement du fait que certains éléments ne sont pas pris en compte, en particulier tout ce qui touche à la convexité. Elle possède certes des liens avec G1, en ce sens qu'elle a eu pour point de départ des propriétés d'objets physiques, mais la perception n'y est pas acceptée comme preuve.

Ces deux paradigmes relèvent de deux problématique différentes : G1 se situe dans une problématique de la précision et G2 dans une problématique de la "rigueur" (au sens de : conformité à une théorie). Ils sont en quelque sorte concurrents dans les débuts de l'apprentissage de G2, puisque l'enseignement de l'école élémentaire, comme celui du collège, font constamment usage de "figures" (c'est-à-dire, en fait, de *dessins*). Dans G2, la "figure" fait office de support visuel ; elle joue un rôle heuristique (conjecture, recherche d'une démarche de démonstration) et de contrôle (vérification d'une conclusion), mais elle ne peut en aucun cas avoir un rôle de validation. Néanmoins le dessin, simple représentation visuelle de la situation géométrique définie par l'énoncé, risque, de par sa prégnance perceptive, d'induire certains effets, en particulier ce que nous avons appelé "contamination du su par le perçu" (ou CSP) : si l'on n'y prend garde (en se référant à l'énoncé), on peut être conduit à considérer comme une donnée une propriété seulement constatée sur le dessin, et à l'utiliser en tant que telle dans la démonstration. Certes, la démarche usuelle, dans la recherche d'un problème de géométrie élémentaire, consiste en un certain nombre d'allers et retours entre G1 et G2 (voir ci-dessus) ; mais, contrairement à l'"expert" qui sait à tout moment dans quel paradigme il se situe, le "novice" ne les distinguera pas forcément l'un de l'autre. Il ne s'agit en aucun cas pour nous de faire de nos étudiants des experts en géométrie, mais nous pensons néanmoins qu'il est possible de leur donner une conscience plus claire de l'existence de ces deux paradigmes de l'enseignement obligatoire, par le biais de la distinction des modes de validation qui leur sont respectivement associés. Il ne s'agit pas non plus de hiérarchiser ces paradigmes, mais d'amener les PE à les distinguer et à prendre conscience de leur (co)existence possible dans les situations géométriques rencontrées, tant en classe qu'en dehors.

[2] On en trouvera une présentation plus détaillée dans [Parzysz 2002].

b) En ce qui concerne la *didactique*, notre recherche reprend certains éléments de la théorie des situations didactiques (en particulier les quatre dialectiques : action, formulation, validation, institutionnalisation) [Brousseau 1998], ainsi que certains éléments de la théorie anthropologique du didactique (en particulier les "quatre T" : tâche / technique / technologie / théorie) [Chevallard 1999].

Nous reprenons aussi l'idée de l'intérêt d'une prise en compte du métadiscours en formation d'adultes [Robert & Robinet 1993]. Ces auteurs utilisent le mot "méta" *"s'il y a, pour le récepteur du discours, apport d'un élément sur des mathématiques à apprendre, en partie encore donc non acquises"* [Robert & Robinet 1993, p. 17]. En l'occurrence, nous distinguerons d'abord dans ce qui suit un niveau géométrique et un niveau méta, car c'est bien de ce dernier qu'il s'agit ici, étant donné que notre objectif est de travailler avec les étudiants sur leurs représentations de la géométrie ([Schoenfeld 1985]). Dans ce qui suit, nous réserverons plus précisément le substantif "méta" à un discours sur la géométrie enseignée ([i]objets [ii]en jeu, validations), le niveau géométrique consistant en discours de géométrie enseignée. En outre, nous subdiviserons le méta lui-même en deux niveaux[3]:

- le premier (méta contextualisé, ou *méta 1*) étant un discours spécifique au problème géométrique support (par exemple : "*Ce que je ne comprends pas, c'est qu'on ne montre pas que CD passe par O"*) ;

- le second (méta décontextualisé, ou *méta 2*) étant un discours général portant sur la géométrie ou même, plus généralement, sur les mathématiques enseignées (par exemple : *"En mathématiques, on nous demande toujours de démontrer"*)[4]

Nous serons ainsi finalement amenés à distinguer trois niveaux de discours plus ou moins "superposés" : géométrique / méta 1 / méta 2.

Nous schématiserons comme suit le déroulement discursif :
- verticalement (de bas en haut) les 3 niveaux ci-dessus
- horizontalement (de gauche à droite) la succession des actes locutoires (identifiés par leur numéro d'ordre).

Le déroulement du débat sera alors représenté par une ligne brisée se référant à ces trois niveaux.

Remarque : Il arrive parfois que l'on n'arrive pas à identifier formellement à quel niveau de méta se rapporte un acte locutoire, en particulier :
- lorsqu'on manque d'information sur le référent (général ou particulier) ;
- lorsque le méta 2 est juste suggéré de façon fugace au sein d'un discours au niveau 1.

Par convention, dans le premier cas nous choisirons le méta 1 et dans le second nous nous situerons "au milieu" entre le méta 1 et le méta 2. Nous n'indiquerons donc le méta 2 que lorsqu'il n'y aura aucune ambiguïté sur le niveau de généralité du discours méta. Notons enfin que Schoenfeld (*op. cit.*) préconise, pour faire apparaître le niveau méta, une gestion de la classe de type « débat scientifique » (cf. [Legrand 1993]), ce que nous nous sommes efforcés de mettre en application.

---

[4] Dans sa thèse [Tenaud 1991], I. Tenaud, traitant d'un enseignement de méthodes en terminale, distingue trois niveaux méta, se distinguant selon leur degré de précision et le fait de se référer ou non au problème à résoudre. Ici, s'agissant de conceptualisation et non de résolution de problèmes, deux niveaux nous suffiront.

2- LA SÉQUENCE.

La séquence d'enseignement à laquelle nous nous référons ici se situe à l'intérieur d'une séance de formation de candidats au concours de professeur des écoles, d'une durée de deux heures, réalisée sur le site IUFM de Bourges en novembre 2000[5] L'objectif principal de cette séance était de mettre en évidence, pour les étudiants, l'existence des deux paradigmes géométriques évoqués plus haut, à l'occasion d'un débat suscité par une tâche relevant du méta 1 qui demandait, à propos d'un problème particulier, de réfléchir sur les moyens susceptibles d'apporter la réponse à une question. Nous suivons en cela Dorier *et al.*, qui préconisent de poser des questions relevant du méta, éventuellement mal formulées, de façon à modifier le contrat habituel et à faciliter la dévolution du problème à ce niveau [Dorier *et al.* 1993].

Les PE1, d'abord individuellement, puis regroupés par équipes de quatre, avaient à résoudre le problème suivant, en environnement papier-crayon :

Tracer une droite d. On appelle O *un point de cette droite.*
Tracer le cercle C_1 *de centre* O *et de rayon* 2. *Ce cercle coupe la droite d en deux points* A *et* B.
Tracer le cercle C_2 *de centre* O *et de rayon* 4.
Tracer le cercle C_3 *de centre* A *et de rayon* 4,5. *Ce cercle coupe le cercle* C_2 *en deux points* C *et* D.
Comment pouvez-vous faire pour savoir si la droite (CD) *est, ou non, la médiatrice du segment* [AB] *?*

Notons que le type de tâche ici défini consiste uniquement à lister un ou plusieurs moyens permettant de "savoir", c'est-à-dire de lever l'incertitude sur la réponse (oui / non) à la question : (CD) est-elle médiatrice de [AB] ? Il ne s'agit donc pas de "prouver" la véracité de l'une des deux réponses possibles, donc de résoudre le problème. Or, pour beaucoup de groupes (dont les deux que nous allons voir dans la suite), l'affiche ne répond pas *stricto sensu* à la question posée mais expose en détail, au niveau géométrique, <u>un moyen</u> de savoir (qui en l'occurrence apparaît comme une démonstration de G2).

N.B. : Quatre versions de ce problème étaient réparties dans les différents groupes (une même version par groupe). Ces versions différaient uniquement par leurs données numériques (les rayons des trois cercles) : dans deux cas (versions B et D), la droite (CD) passait par le point O, et dans les deux autres (versions A et C) elle passait "presque" par O.

La consigne est que chaque groupe produise une affiche en réponse à la question posée. Au bout de 45 minutes, les affiches sont réalisées ; elles sont alors apposées sur divers murs de la salle, et l'enseignant détermine implicitement l'ordre de passage qui, selon lui, a les meilleures chances d'engendrer un débat fructueux parmi les étudiants. Puis le même scénario va se dérouler pour chaque groupe :

- un membre du groupe vient commenter l'affiche réalisée collectivement
- un débat s'engage au sein de la classe
- à la fin de ce débat, le professeur en fait une synthèse.

[5] Cette séquence est un peu différente de celle mise en œuvre à Orléans et détaillée dans [Parzysz 2002].
.

La consigne pour le débat est précisée par le professeur (codé P):

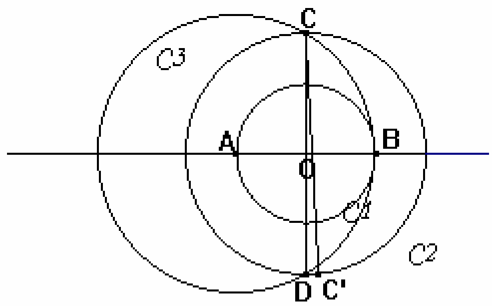
P : *Ce que vous présentez, ce n'est pas votre solution contre celle qui est affichée. Ce que vous présentez, c'est une discussion sur le produit qui vous est donné. C'est-à-dire, si à un moment donné vous avez des remarques à faire, eh bien vous les faites sur le produit. Mais vous ne donnez pas votre solution, votre produit à vous.*

Nous avons choisi ici de présenter la partie de la séquence étudiée correspondant au passage de deux groupes successifs (le groupe 4, puis le groupe 2) ; ces deux groupes ont travaillé sur la version A du problème, c'est-à-dire avec le triplet de valeurs numériques (2 / 4 / 4,5)[6]. Les étudiants ayant à produire des moyens pour "savoir", on peut s'attendre à ce que le débat s'oriente plus ou moins rapidement vers la valeur de preuve de ces moyens, et donc se situe le plus souvent au niveau méta. La question est donc de savoir s'il se cantonnera constamment au niveau méta 1 (celui de la consigne), s'il reviendra au niveau géométrique (exposé d'une solution au problème spécifique) ou s'il atteindra le méta 2 (discours sur la preuve dans les paradigmes géométriques), niveau qui est visé par le dispositif didactique.

Nous nous intéresserons plus précisément, dans ce qui suit, à un aspect particulier du débat : les passages d'un niveau à un autre (géométrique / méta 1 / méta 2) et les éléments déclenchants.

3- LE DÉBAT DU GROUPE 4.

Affiche



Soit le cercle C_3 *de centre* A *et les points* D *et* C *qui appartiennent à* C_3.

Alors [AD] *et* [AC] *sont 2 rayons de* C_3. *Donc* ADC *est un triangle isocèle en* A.

Soit O *le milieu de* [AB]. *Par la symétrie de centre* O *:*

$S_O(A) = B$

$S_O(C) = C'$

Donc C' *et* D *ne sont pas confondus et* AD = BC' *mais* AD ≠ BD.
Par conséquent D *n'est pas équidistant de* A *et de* B *et* (DC) *n'est pas la médiatrice de* [AB].

[6] C'est la version présentée plus haut

L'examen de l'affiche du groupe 4 a fait apparaître au professeur une faille dans la démonstration (*"Donc C' et D ne sont pas confondus"*), et plus précisément une CSP : l'affirmation que les points C' et D sont distincts repose uniquement sur l'observation du dessin réalisé.

Une étudiante[7]du groupe 4 (F4) vient présenter l'affiche de son groupe, en détaillant certains points (niveau géométrique). C'est en particulier le cas pour la fin du texte, où se trouve précisément la CSP (004)[8] :

F4 : *Ici donc, on a dit que C' était différent de D, et étant donné que AD était égal à BC' et que AD est différent de BD, le … D n'est pas équidistant de A et de B, donc DC n'est pas la médiatrice de AB.*[9]

C'est une autre étudiante (F2) qui pointe la faille résultant de la CSP (le point C' est distinct du point D) dans la démonstration (006-007), passant ainsi clairement au méta 1 :

F2 : *Là, ce que vous démontrez, c'est encore par rapport au dessin. Votre symétrique, c'est encore par rapport au dessin. Si votre dessin est un peu mal fait, si vous bidouillez, ça peut retomber dessus.*

F4 atteste de sa bonne foi, mais d'autres étudiants (H1, F5) renchérissent alors, et F2 récuse finalement cette démarche en tant que démonstration (013) :

F2 : *Tu démontres rien, tu le démontres pas !*

Le professeur rebondit sur cette affirmation pour tenter d'orienter le débat vers le méta 2, mais F2, restant dans le méta 1, pousse son idée jusqu'à sa conséquence ultime (014-015) :

P : *Oui, mais … Faut-il démontrer ? Ou est-ce que ça suffit ?*

F2 : *On voit sur la figure, donc à la limite on n'a qu'à dire, sans utiliser la symétrie, C' … et … enfin…*

Même si cette dernière phrase est incomplète, son sens est on ne peut plus clair : si une validation perceptive est suffisante, toute démonstration est en effet inutile.

Le débat semble retomber ; aussi, pour le relancer, le professeur indique la technique de G1 utilisée par le groupe 4 et interpelle ce groupe (016-021) :

P : *Vos camarades ont même pris une précaution que je vais ajouter, c'est qu'ils ont agrandi leur dessin, hein. (…) Alors, est-ce que ça vous apporte quelque chose de l'avoir agrandi ?*

F4 : *Oui, parce que sur le dessin initial la différence de tracé entre CC' et CD était … Ca allait de même pas un millimètre. (…) Mais en agrandissant l'écart s'est considérablement agrandi, donc là ça vient pas de la construction … Enfin … Je veux dire … Ça vient pas de l'imprécision des tracés, ça vient bien de la construction qui fait que CC' et CD ne sont pas confondus.*

---

[7] Dans les extraits du protocole qui seront présentés, les étudiantes (resp. les étudiants) seront identifié(e)s par la lettre F (resp. H) suivie d'un numéro correspondant à leur ordre d'"entrée en scène" dans la séance.

[8] Les nombres à trois chiffres entre parenthèses renvoient à la numérotation des actes de parole dans le protocole de la séquence.

[9] Un implicite de ce passage est que BC' est différent de BD, ce qui pourrait être justifié en se basant, d'une part sur le fait que C' est distinct de D, et d'autre part sur le fait que ces points n'appartiennent pas à un même cercle de centre B (étant donné qu'ils sont sur un même cercle de centre O).

F4 commet un lapsus –qu'elle rectifie immédiatement– en disant "construction" au lieu de "tracé" ; elle oppose ainsi "construction" et "tracé", ce qui pourrait permettre au professeur d'amorcer un nouveau débat relevant du méta 2 (Qu'est-ce qu'une *construction* en géométrie ?) et ayant également trait aux paradigmes géométriques. Mais il n'en fait rien et renvoie vers F2, qui n'est toujours pas convaincue. Puis il oriente de nouveau le débat vers le méta 2 en reposant comme ci-dessus, de façon générale, la question de la validation perceptive (022-029) :

P : *Et malgré ça, ta camarade ne reçoit toujours pas ton argument.*

(…)

F2 : *On le voit sur la figure, mais …*

P : *Et voir sur la figure, ça ne te suffit pas ?*

Cette fois, le méta 2 est repris par une (nouvelle) étudiante, F5, qui intervient pour poser la question du contrat (méta 2) ; F4 se sent confortée, mais F2, se situant résolument dans G2, précise le rôle que peut y jouer le dessin. Puis on revient au méta 1, par F6 qui rappelle la consigne (030-037) :

F5 : *Ça suffit. Mais en fait, en mathématiques on nous demande toujours de démontrer, hein ? (…) Est-ce qu'on a le droit de se baser sur le dessin, à ce moment-là ?*

F4 : *Si on nous dit qu'on a le droit, alors …(…)*

F2 : *On peut peut-être se baser sur le dessin pour dire d'abord, oui ça l'est, ou non, ça ne l'est pas. Ce qui nous permet après de le démontrer, c'est-à-dire de démontrer que ça l'est ou que ça ne l'est pas.*

F6 : *Moi je … Moi j'crois que ça dépend de la façon dont on comprend la consigne. On nous demande pas de démontrer, donc ça peut très bien être suffisant.*

Le professeur suit F6 et précise la question initialement posée (méta 1), à laquelle répond F4 (méta 2 ?). Il essaie alors de la provoquer en déformant sciemment son propos, mais celle-ci –soutenue par F7– ne s'en laisse pas conter (039-042) :

P : *On vous demande quand même de répondre à une question, hein ? C'est, comment faites-vous pour savoir.*

F4 : *Ça peut être une explication, le dessin, pour savoir.*

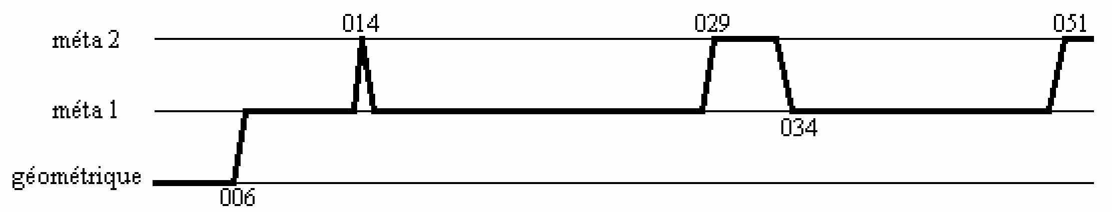
P : *Le dessin sera l'explication ?*

F7 : *Non, mais ça peut être. Je ne sais pas, ça peut être une façon commode, de regarder sur le dessin pour savoir.*

Le professeur coupe alors court à la discussion et en opère une synthèse qui, partant du méta 1 (pointage de la CSP), aboutit au méta 2 (fonctions possibles du dessin) (048-051) :

P : *On vient d'entendre, donc, le deuxième groupe, avec quand même quelque chose par rapport au discours qu'on avait tout à l'heure, qui était que, finalement, vos camarades ont tout de même essayé de faire des démonstrations, hein ? Ça il faut le noter. Essayé. À chaque fois il y a eu, à un endroit dans la démonstration, une utilisation du dessin. Et c'est ça qui est actuellement en discussion, c'est-à-dire, est-ce qu'on peut, ou est-ce qu'on ne peut pas, utiliser le dessin ? Et il semblerait, d'après les productions qu'on a vues là, c'est que, lorsque le dessin est très clair, hein ? … est très* *clair, il y en a qui ont le sentiment qu'on pourrait peut-être s'en servir. Et peut-être même pour dire non, d'ailleurs.*

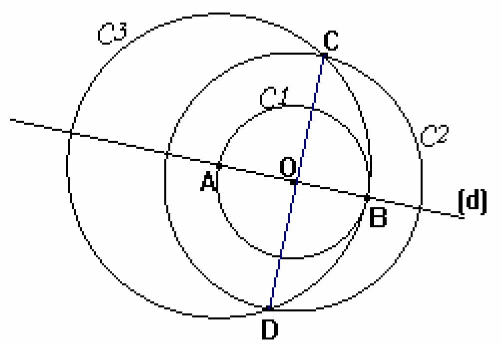
Sur la base de ce premier extrait, on peut construire le schéma ci-après :



On voit que le changement de niveau peut éventuellement résulter d'une discussion entre les seuls étudiants : le repérage de la CSP par F2 fait dès le départ, passer du géométrique au méta 1 par la mise en évidence du "mélange des genres", c'est-à-dire d'une intrusion (involontaire) du perceptif dans un texte qui prétend, selon ses auteurs, au statut de démonstration. Mais il peut aussi provenir du professeur, de son seul fait (en 014 et en 051) ou à la suite d'une phrase d'un(e) étudiant(e) –F2 en 028– qu'il reprend au vol sous la forme d'une question (en 029), entraînant à sa suite une autre étudiante (F5 en 031).

4- LE DÉBAT DU GROUPE 2.

Affiche



Définition de la médiatrice de [AB]

C'est l'ensemble des points équidistants de A *et de* B

Cette droite est ⊥ [AB] *et la coupe en son milieu* O.

C *et* D *st sur* C_3 *de centre* A *; ils st donc à égale distance de* A : AC = AD.

O *est le centre de* C_1 *et* [AB] *est un* ∅ *de* C_1*, donc* OA = OB.

→ B *est la projection de* A *par rapport à* O *donc, comme on a* AC = AD*,*
on a BC = BD.

Donc ACBD *est un quadrilatère où on a* AC = CB = BD = DA.

On en déduit que ACBD *est un losange.*

D'après cette propriété, ses diagonales CD *et* BA *se coupent en leur milieu ;* O *étant le milieu de* [AB]*, O est aussi le milieu de* [CD]. *Et ses diagonales sont* ⊥.

Donc (CD) *médiatrice de* [AB].

N.B. : On voit qu'un problème de terminologie apparaît dans cette affiche : il convient en effet de lire "symétrique" au lieu de "projection". Ce point fera d'ailleurs l'objet d'un débat que nous n'évoquerons pas ici.

Ce texte comporte deux CSP, reposant toutes deux sur l'appréhension perceptive du losange ACBD :

- la première (CSP1) aux lignes 6-7 ("comme on a AC = AD, on a BC = BD) ; ceci suppose en effet que la droite (CD) passe par O, ce qu'il s'agit précisément de prouver ou d'infirmer ;

- la seconde (CSP2) à la ligne 8 : des égalités AC = AD et BC = BD on ne peut déduire AC = CB = BD = DA sauf à supposer que ACBD est un losange, ce qui est justement le but de cette partie de la démonstration. La façon dont se présente cette triple égalité révèle d'ailleurs qu'elle ne dérive pas des deux égalités précédentes : en fait, elle provient d'un parcours dans le sens des aiguilles d'une montre autour du quadrilatère ACBD.

On aura également remarqué -c'est important pour la suite- que, les données numériques étant ici les mêmes que pour le groupe précédent, la conclusion du présent groupe est néanmoins opposée : alors que le groupe 4 avait conclu par la négative, le groupe 2 conclut par l'affirmative.

Contrairement au débat précédent, le niveau méta apparaît ici dès le début, lors de la présentation de l'affiche par F8 (053-057) :

F8 : *Alors, on n'a pas fonctionné par…*
Enfin, on a fait le dessin pour voir, mais on a essayé de le démontrer.
Je ne sais pas si on arrive à lire, mais c'est souligné là.
On n'est pas tous d'accord sur ce qu'on a fait, mais peut-être qu'on n'a pas eu assez de temps …

F8 prend du recul en pointant un désaccord persistant au sein du groupe, au sujet précisément de la partie de la démonstration qui correspond à la CSP1 (méta 1). Puis elle expose cette démonstration (058-065), en faisant part de ses doutes (060-063) :

F8 : *Et alors, c'est là qu'on n'est pas tout à fait d'accord.*
On a dit que, comme AC était égal à AD, quand on projette … B est la projection de A par rapport à O, donc comme on a AC égale AD, on a BC égale BD.
Je n'sais pas ce que vous pensez d'ça …
Et après on se sert de ça pour dire qu'on a un quadrilatère avec quatre côtés égaux qui est un losange.

Le professeur feint d'accepter cette démonstration comme telle, sans doute dans l'espoir de susciter ainsi une réaction analogue à celle qui était apparue lors du débat du groupe précédent (066-069) :

P : *Alors ? Voilà une démonstration, non ? Ils n'utilisent pas le dessin.*

F8 : *Et on n'utilise pas le dessin.*

P : *Et qui n'utilise pas le dessin.*

La réaction vient bien, mais cette fois de la part d'un membre du groupe 4 (F9) ; celle-ci se situe bien au niveau méta 1, mais sans doute pas dans la direction que le professeur attendait (*i.e.* le rejet de la démonstration présentée), car ce que pointe F9, ce sont les conclusions opposées auxquelles sont parvenus les deux groupes, à partir du même problème. F8 lui répond en récusant la preuve perceptive (méta 2 ?), enjeu du débat précédent (070-074) :

F9 : *Quant à nous … Et en fait on avait fait une démonstration, et c'est en faisant le dessin et en agrandissant qu'on s'est aperçu que ça ne tombait pas juste.*

F8 : *Nous, ça ne tombe pas forcément juste non plus, mais on a décidé que le dessin, ça ne permettait pas de …*

F9 : *Mais si tu veux, nous on avait la même démonstration, et le dessin nous prouvait qu'on avait faux, alors …*

F8 : *Mais je ne crois pas que le dessin prouve.*

Le professeur semble ignore cette discussion entre F8 et F9, qui est pourtant au cœur de la question, F9 se situant dans G1 tandis que F8 se place dans G2[10]. Il relance le débat vers la démonstration du groupe 2 (méta 1). Deux étudiantes (F2 et F9) s'appuient alors sur celle du groupe 4 pour récuser celle-ci (078-0086) :

P : *Alors, ils se sont basés sur le dessin, ou pas ?(…)*

F9 (en direction de F8) **:** *Vous l'avez respecté ? Vous l'avez grossi ? Parce que nous, en le grossissant, eh ben je ne sais pas, alors …*

F2 : *Oui, en fait, là, en construisant, ça l'est pas. Le problème c'est qu'ils montrent que ça l'est, et qu'en fait ça l'est pas.*

F9 : *Je ne sais pas si ça ne l'est pas, mais nous, je sais qu'on l'a refait plusieurs fois, et qu'en fait ça l'est pas.*

N.B. : Le nœud de la situation est exprimé de façon limpide par F2 (toujours elle) : *"Le problème c'est qu'ils montrent que ça l'est, et qu'en fait ça l'est pas"*. Cette situation inhabituelle est extrêmement intéressante, en ce sens que l'opposition validation perceptive *vs.* démonstration tourne à l'avantage de la première du fait des failles de la seconde (les deux CSP). Elle débouche sur la question de leurs fonctions respectives : l'agrandissement du dessin permet effectivement de savoir si (CD) est médiatrice de [AB], mais il ne permet pas de savoir pourquoi il en est ainsi. Nous verrons bientôt que F2 pressent toutefois que la clé du dilemme réside dans les dimensions respectives des trois cercles, mais sans identifier "Pythagore" (G2).

Arrivé à ce point, le professeur résume la situation en opposant les deux modes de validation (ce qui pourrait permettre de passer au méta 2) (093-094) :

P : *On est quand même très embêté, parce qu'il y a un groupe qui nous a répondu oui et l'autre non. L'un s'appuie sur le dessin, l'autre s'appuie sur une démonstration. Est-ce que la démonstration tient la route ? Voilà ma question.*

Mais il oriente (en restant au niveau méta 1) le débat vers la question de la validité de la démonstration du groupe 2, qui est celle que, semble-t-il, il visait depuis le début, après avoir repéré les CSP sur l'affiche. S'ensuit une discussion au cours de laquelle F2 va effectivement invalider la démonstration présentée par F8, grâce à l'évocation gestuelle d'une "figure" tenant lieu de contre-exemple (097-102) :

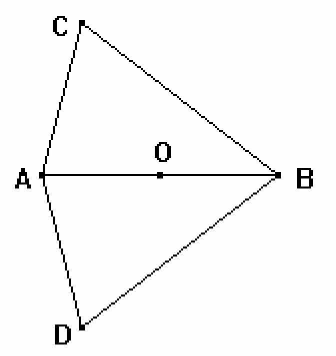
F2 : *Le problème, si D il est, admettons, tout à fait à gauche, on aura aussi AC égale AD, mais C sera pas du tout le …*

F8 : *Ouais, ça se base sur ce qu'on a fait avant, tu ne peux pas avoir D complètement à gauche avec ce qu'on a fait avant, c'est pour ça qu'on prend … En fonction de ta construction, tu ne peux pas avoir D à l'autre bout puisque (…)*

[10] F8 se situe en outre au niveau méta 2.

F2 : *Il peut être totalement par là* (geste du bras gauche tendu vers la gauche), *l'autre là* (geste du bras droit tendu vers le haut)*, par rapport à d.*

N.B. : Les gestes de F2 évoquent en fait la position suivante des points C et D par rapport à la droite (AB)[11] :



Cette intervention, pour pertinente qu'elle soit, n'emporte pas la conviction[12] et le débat semble alors s'enliser, les étudiantes campant sur leur position. En particulier, F9 pointe à nouveau la contradiction entre les réponses des groupes 4 et 2. Suite à une réflexion de F8, qui passe au méta 2 (en 116 : *"Est-ce qu'on peut comparer une démonstration par rapport à un dessin ?"*), le professeur décide cette fois d'intervenir à ce niveau, en hiérarchisant explicitement les deux types de preuve considérés (120) :

P : *Vos camarades disent, vous, vous étiez sur le dessin, donc c'est lié à votre œil, à des conditions de dessin, à la précision du dessin,* et cætera. *Tandis que nous, on a la réponse qui est assise sur une démonstration, et parce qu'elle est assise sur une démonstration elle est forcément meilleure que la vôtre, elle dit la vérité mieux que la vôtre.*

La position ainsi résumée est difficilement tenable, car à l'évidence c'est la preuve perceptive qui "dit la vérité" (celle de G2 aussi bien que celle de G1). Aussi le débat retourne-t-il tout de suite au méta 1 : F12 propose de chercher une *"troisième démonstration"* qui départagerait les deux précédentes, puis H2 repère la CSP 2 (en 136 : *"Le problème c'est pour arriver au losange"*). Et c'est alors qu'un mini-incident apparaît, lorsque H2 redemande la parole (145-149) :

P : *Oui, tu voulais dire quelque chose ?*

H2 : *Non, j'revenais à ce qu'on avait fait, c'est-à-dire … On avait fait comme ça, et ensuite on a vérifié avec le théorème de Pythagore.*

P : *Ah, ah, ah. Oui,toi tu …* (geste pour évacuer cette intervention)

H2 : *J'ai pas eu le droit de dire ce que j'disais.*

---

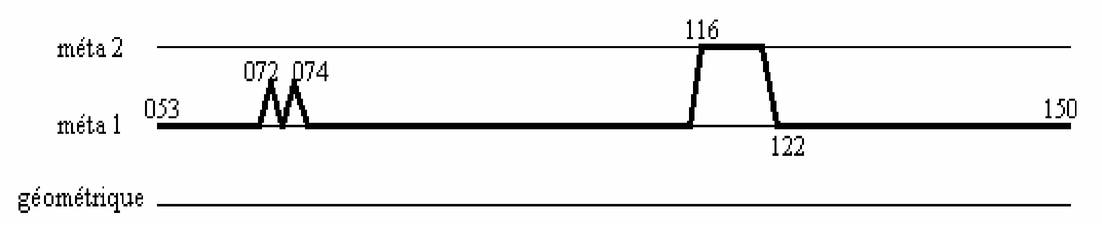
[11] On s'aperçoit ici que l'importance du triplet de données numériques (qui rendrait possible une orientation vers "Pythagore") n'est pas explicitée : en effet, la situation ci-dessus pourrait être obtenue, soit en augmentant le rayon de C_2, soit en réduisant celui de C_3, mais cette idée ne vient pas à F2, qui reste dans le qualitatif.

[12] On ne peut s'empêcher d'imaginer ce qu'aurait pu devenir cette explication dans un environnement de géométrie dynamique, dans lequel il suffit de faire varier le rayon d'un cercle pour faire apparaître que (CD) ne passe pas par O.

Si le professeur fait taire M2, c'est qu'il a bâti la phase de débat autour d'un ordre imposé pour les affiches, de façon à ne faire apparaître le "juge de paix"[13] que constitue "Pythagore"[14] que dans les dernières affiches discutées. L'intervention de M2 risque donc de court-circuiter sa démarche, et c'est pourquoi il la récuse. Il se contente enfin de donner une "conclusion" provisoire (150) :

P : *Bon , donc on en reste là, c'est indécidable ? Eh bien, c'est indécidable. Merci.*

On obtient cette fois le schéma suivant



:

On voit que le méta 2, même s'il vient très tôt dans ce second débat, n'apparaît finalement que très sporadiquement :

- peut-être une première fois (?) par F8 en 072 et 074 : *"Je ne crois pas que le dessin prouve"* (mais, dès 078, le professeur ramène le débat dans le méta 1) ;

- une seconde fois, toujours grâce à F8, en 116 : *"Est-ce qu'on peut comparer une démonstration par rapport à un dessin ?"* (cette fois, le professeur lui emboîte le pas en explicitant le problème, mais c'est la classe qui ne suit pas et revient au méta 1).

CONCLUSION

En conclusion, les deux mini-débats étudiés ici montrent que, si une situation basée sur un problème de géométrie dans lequel la perception risque de provoquer des CSP, et dont la consigne se situe dans le méta 1, permet effectivement de susciter chez les PE un débat à ce niveau, il n'est pas si évident que ce débat accèdera, à un moment ou à un autre, au méta 2, même si c'est là l'intention de l'enseignant. Et nous avons vu également que, lorsqu'il a lieu, le passage au méta 2 est le plus souvent dû aux étudiants − avec ou sans "coup de pouce" du professeur qui relance −, mais qu'il n'est cependant pas assuré ; il serait donc intéressant d'en identifier des sources de succès ou d'échec, tant chez les étudiants que chez le professeur. D'autre part, même si le débat accède au méta 2, il risque fort de revenir rapidement au méta 1, et s'il parvient à s'y maintenir, il faudrait pouvoir évaluer son impact, à court et moyen terme, sur les étudiants, et en particulier s'intéresser aux questions liées à l'institutionnalisation de ces métaconnaissances géométriques (nature, forme, moment…). Mais la condition première serait qu'un tel enseignement ne se cantonne pas à des séances ponctuelles et soit étalé sur toute la durée de la formation, car les représentations individuelles n'évoluent que très lentement. En effet, *"la perspective est celle du temps long : les interventions ne se conçoivent que sur une certaine durée, ne serait-ce que pour établir les changements d'habitude qu'elles impliquent pour les élèves"* [Robert & Robinet 1993 p. 32].

[13] Comme il le dira plus tard.
[14] C'est-à-dire, selon le cas, le théorème (sous la forme contraposée) ou sa réciproque.

BIBLIOGRAPHIE

Brousseau, G. (1998) : *La théorie des situations didactiques*. Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard, Y. (1999) : L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, in *Recherches en Didactique des Mathématiques* vol. 19 n° 2, pp. 221-266..

Colmez, F. & Parzysz, B. (1993) : Le vu et le su dans l'évolution des dessins de pyramide, du CE2 à la seconde, in *Espaces graphiques et graphismes d'espaces* (dirigé par A. Bessot et P. Vérillon), pp. 35-55. Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Dorier, J.-L. (1992) : *Illustrer l'aspect unificateur et simplificateur de l'algèbre linéaire*. Cahier de DIDIREM n° 14. Université Paris-7.

Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet J., Rogalski, M. (1993) : L'enseignement de l'algèbre linéaire en première année. Nouveaux problèmes, nouvelles méthodologies, in *Actes du colloque de l'ARDM*.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (1998) : Géométrie et paradigmes géométriques, in *Petit x* n° 51, pp. 5-21.

Legrand, M. (1993) : Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse, in *Repères-IREM* n° 10, pp. 128-153.

Parzysz, B. (2002) : Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1, in *Actes du 28ème colloque COPIRELEM (Tours , juin 2001)*, pp. 99-110. Ed. Presses Universitaires d'Orléans.

Parzysz, B. (2003) : Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1, en environnements papier-crayon et informatique, in *Actes du 29e colloque COPIRELEM (La Roche-sur-Yon, juin 2002)*, pp. 85-92. Ed. IREM des Pays de Loire.

Parzysz, B. & Jore, F. (2004) : Le rapport à la géométrie des futurs professeurs des écoles, in *Actes du colloque "Quelles géométries au collège ? Geste physique, geste virtuel, geste mental ? " (La Grande Motte, juin 2001)*, pp. 107-118. Ed. IREM de Montpellier.

Robert, A. & Robinet, J. (1993) : *Prise en compte du méta en didactique des mathématiques*. Cahier de DIDIREM n° 21. Université Paris-7.

Schoenfeld, A. (1985) : *Mathematical Problem Solving*. Academic Press.

Tenaud, Isabelle (1991) : *Une expérience d'enseignement de la géométrie en Terminale C : enseignement de méthodes et travail en petits groupes.* Thèse université Paris-7. Ed. IREM Paris-7.

LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES : UNE ÉTUDE LONGITUDINALE AU CE1

Rémi Brissiaud

MC de psychologie cognitive

IUFM de Versailles - CNRS FRE 2627 Cognition et usages

Résumé : six types de problèmes arithmétiques (3 additifs et 3 multiplicatifs) ont été proposés une première fois en octobre et une seconde fois en juin à 110 élèves de CE1 dans 2 versions dont les énoncés ne diffèrent que par les nombres utilisés. Pour chaque type de problème, l'une des versions est bien réussie dès octobre alors que l'autre (parfois, celle où les nombres sont les plus petits !) est massivement échouée. Pour rendre compte de manière précise de la difficulté des principaux problèmes, les typologies avancées par G. Vergnaud sont donc insuffisantes. Par ailleurs, la méthodologie utilisée permet de différencier deux dimensions du progrès des élèves : l'une de nature générale (ils comprennent mieux les énoncés, etc.) et l'autre de nature conceptuelle. Les résultats obtenus montrent qu'il ne suffit pas de résoudre des problèmes pour conceptualiser les opérations arithmétiques car il importe de théoriser ces résolutions. Or, les nouveaux programmes de l'école ne le soulignent guère !

L'auteur n'a pas souhaité rédiger l'article mais a voulu que le lecteur se tourne vers sa bibliographie

Bibliographie

Brissiaud, R. (à paraître). La résolution de problèmes arithmétiques : une étude longitudinale au CE1. *Actes 2003- 2004 du Séminaire National de didactique des mathématiques. xd*

Brissiaud, R. (2004). Allégements de programmes et échec scolaire. *Cahiers pédagogiques*, 59, n°427, 23-25

Brissiaud, R. (2004). Allégements successifs des programmes en mathématiques : une légèreté didactique ? *site de la Société Mathématique de France*, http://smf.emath.fr/Enseignement/TribuneLibre/

Brissiaud, R., & Sander, E. (sous-presse). Conceptualisation arithmétique, résolution de problèmes et enseignement des opérations arithmétiques à l'école : une étude longitudinale au CE1. *Acte du Colloque « Les processus de conceptualisation en débat : Hommage à Gérard Vergnaud »*. Clichy-La Garenne. 28-31 Janvier 2004. 10 pages.

STRATÉGIES ET GESTES PROFESSIONNELS DE PROFESSEURS DES ÉCOLES DÉBUTANTS ENSEIGNANT DANS DES ÉCOLES DE MILIEUX DÉFAVORISÉS : UN ENJEU POUR LES APPRENTISSAGES DES ÉLÈVES

Butlen Denis, maître de conférences,
IUFM de Créteil, Bonneuil, France,
denis.butlen@creteil.iufm.fr,

Mots clés : gestes professionnels, routines professionnelles, pratiques enseignantes, i-genre, Zone d'Education Prioritaire, professeurs des écoles, mathématiques, didactique des mathématiques

Résumé : à partir de deux exemples, nous caractérisons ce que nous appelons gestes et routines professionnels. Il s'agit de régularités intrapersonnelles qui permettent au professeur des écoles de réaliser au quotidien ses choix généraux et ses stratégies d'enseignement. Gestes et routines sont associés à des catégories de pratiques que nous avons identifiées par ailleurs. Cette catégorisation s'appuie sur l'observation de dix professeurs des écoles enseignant les mathématiques dans des écoles de ZEP très défavorisées.

Cette communication développe un aspect d'une recherche collective portant sur les pratiques professionnelles de professeurs des écoles. Nous avons comparé les pratiques de trois professeurs des écoles débutants enseignant les mathématiques dans des classes scolarisant des élèves issus de milieux socialement très défavorisés à celles de sept de leurs collègues plus anciens enseignant dans des conditions analogues[1].

Les observations ont été faites sur une longue durée (au moins deux années scolaires). Nous nous sommes inspirés de la méthodologie élaborée par Robert et Rolgalski (2000) pour analyser les données recueillies. Nous avons mis en évidence des régularités intra mais aussi interpersonnelles. Nous avons également élaboré une première catégorisation des pratiques observées. Nous avons pour cela emprunté en l'adaptant à notre objet de recherche la notion de genre à Clot (1999).

Trois i-genres

Un de ces i-genres[2] est très majoritaire ; il regroupe en effet sept des dix professeurs observés. Il se caractérise par des scénarii d'enseignement faisant une part importante à la présentation collective des activités, par des phases de recherche individuelle très courtes, voire inexistantes, par une individualisation très forte des parcours cognitifs et des aides apportées par le professeur. Cette individualisation systématique des activités proposées comme du

[1] Cette recherche est le résultat d'un trvail collectif collective (Butlen, Peltier, Pézard, Masselot, NGono 2002, 2004)

[2] La notion de i-genre nous permet de décrire comment le professeur des écoles réalise sa mission d'instruction (transmettre des savoirs disciplinaires notamment), la notion de e-genre nous permet de décrire la manière dont il remplit sa mission d'éducation.

traitement des comportements se traduit par des activités algorithmisées, parcellisées, par un découpage des tâches en tâches élémentaires. Elle s'accompagne au quotidien d'un abaissement des exigences de la part du maître. Les phases de synthèse, de bilan et d'institutionnalisation sont quasi inexistantes.

Un deuxième i-genre regroupant deux enseignants (non débutants) est proche du premier mais s'en distingue notamment par la part accordée aux présentations collectives des activités. Elles sont quasi absentes.

Un troisième i-genre, très minoritaire (un professeur sur les dix observés) se distingue des deux autres par des scénarii basés sur des problèmes engageant les élèves dans une recherche et comportant quasi systématiquement des phases de synthèse, de bilan et des institutionnalisations locales ou plus générales. Les apprentissages comme les comportements sont traités collectivement.

Des gestes et des routines professionnels caractéristiques de i-genres

Étudions un premier exemple de deux routines différentes mises en œuvre par le professeur des écoles du i-genre très minoritaire enseignant les mathématiques en milieu difficile. Cette analyse permet de comprendre comment il réussit à mettre en œuvre, dans des conditions analogues, des stratégies très différentes de celles de ces collègues.

Un premier exemple : la gestion des phases de synthèse en vue d'une institutionnalisation

Il s'agit de décrire l'activité du professeur lors de la gestion des phases de synthèse et de bilan.

La situation

Le problème proposé aux élèves est le suivant :

“ Les Dalton ont enlevé le chien de Lucky Luke qui doit payer une rançon en pièces de 10F. Combien de pièces de 10 francs chacun des Dalton aura-t-il ? Averell veut 260 F. Jack veut 860 F. William veut 1500 F. Joe veut 2000 F. ”

C'est un problème de numération présenté dans un contexte très particulier, celui de la monnaie qui peut cacher la notion mathématique visée. En effet, nous pouvons penser que le maître attend des élèves l'activité mathématique suivante : traduire la question “ Combien de pièces de 10 francs chacun des Daltons aura-t-il ? ” en la question plus décontextualisée “ Combien de dizaines y-a-t-il respectivement dans 260, 860, 1500 et 2000 ? ”. L'activité visée nécessite donc une première décontextualisation suivie d'une recontextualisation afin de répondre à la question posée en terme de pièces de 10F. Une seconde décontextualisation s'effectue ensuite lors de l'institutionnalisation quand le professeur reprend et généralise cette première décontextualisation. Des exercices de réinvestissement faisant recours ou non au contexte particulier de la monnaie sont ensuite proposés. Notons toutefois que le contexte permet à certains élèves d'apporter une réponse exacte à la première question posée sans pour autant avoir mobilisé les connaissances de numération attendues.

La routine et les gestes professionnels mis en œuvre

Étudions comment le professeur gère les différents niveaux de réponses des élèves.

Après une phase de recherche d'une quinzaine de minutes, nous avons observé onze productions d'élèves (travaillant par binôme) correspondant à six procédures différentes dont deux erronées.

8 élèves sur 22 seulement mobilisent plus ou moins explicitement des connaissances liées à la numération. Leurs réponses restent dans le contexte du problème, celui de la monnaie.

Les analyses des nombreuses observations, confirmées par les entretiens qui ont suivi montrent que l'organisation des phases de synthèse et d'institutionnalisation est très stable. Nous avons repéré, de manière répétée, trois types d'activités correspondant à des gestes professionnels différents que nous précisons sur l'exemple particulier choisi.

Lors de la phase de recherche des élèves, Sébastien observe et hiérarchise les productions des élèves afin de décider quels seront les élèves interrogés lors de la phase de synthèse et dans quel ordre. Durant celle-ci, le professeur étaye, si besoin est, les formulations des élèves. Enfin, il organise la phase de synthèse qui débouche sur une institutionnalisation de sa part (non étudiée ici). Détaillons chacune de ces activités et les gestes associés.

Un premier geste : l'observation et le tri des productions et performances des élèves

La première étape consiste en une observation précise des productions des élèves pendant la phase de recherche du problème. Celle-ci est finalisée par le choix des élèves à interroger. Le professeur évalue l'économie et le degré d'expertise de chaque procédure. Il fait un choix parmi les erreurs produites, ne retenant que celles dont une explicitation permet d'améliorer la compréhension collective. Enfin, les élèves interrogés doivent pouvoir, au moins en partie, formuler oralement et par écrit les procédures mobilisées.

Un second geste : l'étayage des formulations des élèves pendant la synthèse

Au cours de la synthèse, les formulations orales des élèves sont très souvent pauvres et correspondent à des niveaux de décontextualisation intermédiaires entre le contexte du problème et le savoir mathématique en jeu. Les interventions des élèves interrogés sont très courtes (en moyenne de 3 à 4 mots). Les phrases sont rarement complètes.

Le plus souvent les formulations orales les plus riches sont produites par les élèves ayant mobilisé les procédures les plus expertes.

Afin de permettre la compréhension des procédures exposées par les élèves interrogés, Sébastien s'appuie en général sur des écrits. Les élèves doivent rédiger et justifier leur démarche par écrit. Ces productions sont affichées au tableau lors de la synthèse.

De plus, le professeur reformule les dires des élèves. Cet étayage dépend de la qualité de la formulation de l'élève interrogé. Quand l'élève manifeste de grandes difficultés pour exprimer oralement sa démarche, le professeur intervient davantage. Il complète les quelques mots prononcés par l'élève afin d'énoncer des phrases compréhensibles par tous.

Un troisième geste : l'organisation de la synthèse, vers l'institutionnalisation

Les élèves désignés par le professeur exposent leurs procédures. Cette synthèse est organisée selon trois principes. Le professeur ne prend pas en compte les productions trop difficilement interprétables. L'exposé des procédures est gradué. Il commence par des exemples de non compréhension du problème ; il se poursuit par l'explicitation de procédures plus ou moins économiques ; il se termine par l'énoncé de la procédure la plus experte produite. Enfin, cette synthèse débouche sur l'institutionnalisation de la procédure experte prévue par le maître. Cette dernière reprend la procédure la plus experte produite tout en la replaçant dans un contexte plus général, celui de la numération.

Un ensemble finalisé et cohérent de trois gestes

Tout se passe comme si ces trois gestes permettaient au professeur de construire une histoire fictive des productions des élèves. Cette histoire se fonde sur un exposé ordonné de nouvelles formulations des actions et des propositions des enfants obtenues grâce à une maïeutique. Ces nouvelles formulations restent proches de celles des élèves, mais elles permettent à Sébastien de conclure par une institutionnalisation s'adressant à toute la classe. Le professeur peut ainsi transformer les itinéraires particuliers des élèves en un itinéraire générique acceptable par tous. L'histoire des productions de la classe ainsi reconstruite a pour but de favoriser l'adoption par tous de la procédure experte.

Cet ensemble de gestes professionnels que nous appellerons routines par la suite s'appuie sur une dialectique entre privé, public et collectif. Le professeur observe et choisit les productions privées de certains élèves. Il rend ces démarches publiques en permettant à leurs auteurs de les formuler oralement ou par écrit (sous forme d'affiches). Il leur donne un statut collectif en assurant, par un étayage important, la compréhension de l'ensemble de la classe et en les réorganisant selon leur degré d'expertise. Chaque élève peut ainsi s'approprier individuellement le savoir institutionnalisé. Des exercices de réinvestissement dans un premier temps contextualisés puis décontextualisés (sans référence au contexte de la monnaie) sont ensuite proposés dans le but d'assurer cette appropriation individuelle.

L'analyse des performances des élèves enregistrées lors de ces activités de réinvestissement montre que ce type d'enseignement est assez efficace au moins à court terme pour un nombre significatif d'élèves.

Cette routine n'est sans doute pas spécifique des pratiques des enseignants de ZEP/REP mais elle permet de gérer les difficultés cognitives spécifiques de ce public d'élèves.

Précisons à l'aide d'un second exemple les notions de routines et de gestes.

Un second exemple de routine : l'enrôlement des élèves et les modes de médiation associés

Étudions maintenant comment, en fonction des contenus mathématiques, ce professeur organise lors de la séance l'enrôlement des élèves et les médiations nécessitées par cet enrôlement. Quatre gestes interviennent : une sollicitation constante des élèves, un mode de réponse aux résistances manifestées par les élèves lors de changements de contrat ou de tâches ou de statut de la connaissance, une aide individualisée limitée à la maîtrise de techniques, un étayage important des formulations orales des élèves.

Nous avons évoqué dans l'exemple précédent un de ces gestes, l'étayage des formulations orales des élèves lors des phases de synthèse. Étudions les autres composants de cette routine.

Lors de toutes les séances observées, les élèves sont très sollicités, tant dans les phases collectives que dans les phases de travail individuel, même si leurs interventions sont parfois très courtes. Cette sollicitation constante semble avoir pour but d'entretenir un rythme de travail important. Par exemple, lors de la présentation d'une activité, en six minutes, le professeur intervient individuellement auprès de 20 élèves différents (sur 22). Il maintient ainsi une “pression” qui assure la réalisation au moins partielle de l'activité mathématique visée.

Une gestion adaptée de la résistance forte des élèves aux changements de tâches et de contrat

Les élèves résistent (bruyamment, voire parfois violemment) aux changements d'activités. Le professeur réduit ces résistances par des rappels à l'ordre individuels ou collectifs adaptés aux manifestations des élèves. Ces rappels à l'ordre font partie intégrante d'une gestion globale des comportements, de l'installation et de l'entretien de méthodes de travail : sollicitation constante des élèves, maintien des exigences, rappels des règles de vie collective…

Afin de mieux cerner le mode de gestion des comportements (violents ou au contraire très inhibés) des élèves, nous avons comptabilisé la fréquence et les moments des " rappels à l'ordre " émis par le professeur lors des séances observées. Nous prenons en compte les rappels à l'ordre visant à rétablir le calme et ceux visant à établir une posture d'écoute ou de travail. Ils concernent donc l'écoute des élèves, leur comportement apparent, le niveau sonore, les déplacements… Ils peuvent concerner des élèves particuliers ou la classe dans son ensemble.

Lors de la séance de résolution du problème des " Dalton ", nous décomptons ainsi au moins 65 interventions de ce type qui peuvent être plus ou moins longues (de un mot à plusieurs phrases).

Les moments où ces rappels sont les plus nombreux sont d'une part le début de l'activité mathématique et d'autre part les passages d'un type de tâche à un autre. Ces difficultés de gestion semblent donc liées soit à la dévolution d'une tâche nouvelle, soit à un changement local de contrat accompagnant un changement du statut de la connaissance (passage d'une d'action à une production, à une formulation, à une validation, passage à un réinvestissement suite à une institutionnalisation). En particulier, dans cette séance, les épisodes concernés sont le début de la synthèse des productions des élèves ou la préparation du matériel en vue d'un réinvestissement. L'entrée dans une tâche localement nouvelle semble vraiment difficile à négocier pour le professeur.

Une fois engagés dans la résolution de la nouvelle tâche (recherche, synthèse, réinvestissement), les élèves respectent davantage, du moins apparemment, les règles de vie de la classe. Notons que l'on ne peut pas réduire ces changements de comportement à l'effet d'un engagement dans l'action puisque ces enfants sont capables d'écoute et d'attention lors des phases de bilan et d'institutionnalisation.

Nous faisons l'hypothèse que ces moments de transition nécessitent une intervention fine de l'enseignant. Le nombre et la durée des rappels à l'ordre peuvent s'avérer déterminants : un trop grand nombre ou une durée trop importante risqueraient d'interrompre trop longuement l'activité et rendre plus difficile encore l'entrée des élèves dans l'activité. De plus, une centration trop prononcée du maître sur certains élèves perturbateurs pourrait cristalliser des comportements agressifs. Plusieurs interventions (au moins 9 sur 65) s'adressent ainsi à un élève particulier, élève agité, colérique, assez violent. L'attitude du maître oscille alors entre des rappels à l'ordre et une indifférence feinte face à ces bruyantes manifestations.

Un étayage individualisé limité aux techniques

Un nombre important des interventions du professeur porte sur des aides techniques, des demandes d'explicitations ou des relances d'activités. Ces très nombreuses sollicitations permettent également d'apporter une aide individuelle rapide mais efficace aux élèves en difficulté.

Par exemple, lors d'une séance de géométrie portant sur la notion de rayon du cercle, l'étayage se limitera à l'usage des instruments et laissera une part non négligeable de la résolution des questions mathématiques à la charge des élèves. Les élèves doivent définir le rayon d'un cercle comme la longueur commune aux segments joignant un point du cercle au centre de celui-ci. Pour cela, ils doivent construire plusieurs disques, les découper, les plier plusieurs fois selon différents diamètres et identifier l'invariant en question. Ces actions préalables pourraient interdire aux élèves ne maîtrisant pas suffisamment ces techniques de tracé ou de pliage d'aborder la notion en jeu.

L'étayage se caractérise souvent par un questionnement très serré et rapide accompagné d'aides techniques.

L'analyse des entretiens avec Sébastien nous amène à penser que ce mode de gestion alternant phases collectives et phases individuelles nécessite une implication physique et nerveuse très importante, coûteuse en fatigue pour le professeur. Il lui permet toutefois de maintenir un enrôlement suffisant. Il s'agit à la fois de dévoluer la tâche attendue, de faire entrer grâce à une médiation l'élève dans la tâche, mais aussi de lui faire accepter et réaliser son “ métier d'élève ”. L'analyse du comportement et des productions des élèves lors des séances que nous avons observées le confirme.

La gestion des interactions professeur/élève permet donc à cet enseignant de réaliser son projet d'enseignement, de mettre effectivement en œuvre des choix plus globaux conciliant l'existence d'une recherche individuelle consistante et un étayage suffisant pour éviter des abandons trop nombreux et trop rapides. Les interactions lors de la phase de recherche semblent finalisées par cet objectif.

Cet exemple nous amène à formuler l'hypothèse que la notion de routine (et dans une moindre mesure, celle de gestes) suppose une adaptabilité de l'enseignant qui va de pair avec une automatisation. L'étayage s'adapte à l'activité projetée pour l'élève et au but poursuivi de l'enseignant. Ceux-ci renvoient à des choix plus généraux sur lesquels, nous reviendrons ci-dessous.

Routines et gestes professionnels associés

Lors de nos différentes recherches, nous avons mis en évidence des activités élémentaires appelées gestes professionnels et routines qui participent de la réalisation des processus de dévolution, de régulation et d'institutionnalisation. Ces processus permettent aux élèves d'accepter la responsabilité des tâches qui leur sont proposées et au professeur de maintenir les élèves dans ces tâches. De plus, les élèves peuvent ainsi reconnaître parmi toutes les connaissances en jeu dans la situation celles qui doivent être retenues et qui ont un statut culturel de savoirs mathématiques.

Ces gestes se construisent avec l'expérience professionnelle. Leur maîtrise permet à un enseignant donné de mettre en actes en temps réel son projet, notamment d'interagir avec ses "vrais" élèves, d'adapter plus ou moins consciemment ses préparations en fonction de la conjoncture, de prendre des décisions d'adapter sa réponse à des changements de surface... Ils permettent au professeur de gérer une classe de situations.

Exposons dans un premier temps un ensemble de caractéristiques communes aux routines et aux gestes professionnels. Dans un second temps, nous expliciterons comment les gestes professionnels s'organisent en routines.

Des caractéristiques communes aux gestes et routines

Une organisation invariante de l'activité du professeur

L'analyse des différentes observations de séances comme les entretiens que nous avons menés avec les professeurs concernés nous ont permis de mettre en évidence des régularités intra personnelles. Elles se caractérisent par une succession d'actions nécessaires à la réalisation par le professeur d'un ensemble organisé de tâches ou un type de tâches (étayage de formulations orales, prise et tri d'informations sur les procédures des élèves, etc.).

Une suite d'actions et de décisions

Tout se passe comme si les actions produites par le professeur, l'étaient dans un temps très court, suite à une évaluation très rapide de la situation, sans effort apparent de réflexion. Nos observations comme les déclarations de l'intéressé le confirment. Les différentes actions semblent s'enchaîner d'elles-mêmes. Le professeur n'a pas besoin de réfléchir à leur succession. Les décisions prises ne nécessitent pas une prise d'informations importante sur le travail des élèves de la part du professeur.

Une mobilisation de connaissances de différents types

De même, le professeur ne convoque pas consciemment les connaissances en réponse au problème à résoudre ; elles semblent immédiatement disponibles. Bien que variées, ces connaissances semblent être pré organisées, reliées entre elles. La convocation d'une connaissance donnée implique la convocation d'autres en fonction de la situation et du but finalisant le ou les gestes mis en œuvre.

Il peut s'agir des connaissances mathématiques nécessaires à l'interprétation des productions des élèves, de connaissances relatives à la communication (entre élèves, entre adulte et élèves). Le professeur utilise également des connaissances relatives aux élèves de sa classe. Les compétences des élèves, diagnostiquées à différentes occasions, prennent une part importante dans la conduite des interactions.

Les interventions de Sébastien semblent aussi reposer sur des certitudes basées sur des représentations.

Adaptabilité

Le professeur semble s'adapter aux changements de surface de la situation, changements qui ne remettent pas suffisamment en cause l'activité des élèves pour en changer la nature (objet, but, organisation générale). Ainsi, Sébastien peut moduler son aide en fonction des difficultés rencontrées par les élèves durant une recherche individuelle, mais celle-ci porte toujours sur des aspects techniques de l'activité.

De même, le professeur lors des phases de synthèse ne peut prévoir dans le détail ce que va dire ou ne pas dire l'élève interrogé. Il interprète rapidement les quelques mots prononcés. Il les replace dans le cadre des observations faites précédemment. Il les complète afin d'énoncer une phrase compréhensible par les autres élèves. Pour traduire la démarche de ce dernier, nous pensons que cette formulation doit rester suffisamment proche de celle de l'élève.

Cela renforce notre hypothèse : pour être efficaces, les gestes et routines doivent donc pouvoir s'adapter à des conditions locales, de surface, non déterminantes pour le fonctionnement du professeur et des élèves. Nous verrons dans la suite que cette adaptabilité caractérise pour une grande part la maîtrise des gestes. Elle renforce leur stabilité.

Une grande part d'implicite

Maîtrisés, ces gestes et routines deviennent transparents pour le professionnel. Ils deviennent difficiles à expliciter. Leur transmission aux débutants se fait davantage sur le mode de la monstration et du compagnonnage.

Des activités élémentaires finalisées par des buts et sous buts

Les caractéristiques précédentes ne suffisent pas à caractériser gestes et routines. Ces activités constituent des unités finalisées par la réalisation d'un but, éventuellement de sous buts. Ces buts ont à voir avec l'activité (projetée ou réelle) de l'élève. Ainsi, la routine de gestion des synthèses mobilisée par Sébastien vise l'explicitation, la reconnaissance et l'acquisition par les élèves de la classe d'une procédure experte. Chaque geste participant de cette routine est lui-même finalisé par un but pouvant se décliner en sous buts : repérer et évaluer les productions des élèves, trier les erreurs dont l'explicitation est susceptible de renforcer la compréhension individuelle et collective, assurer la diffusion de l'information, justifier le choix de telle procédure, etc.

La finalité de l'activité s'ajoute aux autres caractéristiques précédentes pour définir et distinguer les gestes et les routines.

Ce découpage de l'activité de l'enseignant nous semble pertinent pour décrire à la fois une suite d'actions finalisées du professeur, les connaissances mobilisées à cette occasion et pour les mettre en relation avec l'activité correspondante de l'élève. Un découpage plus restreint correspondant par exemple à : “ prononcer une phrase ” ou bien “ interroger un élève ” ou encore “ écrire une phrase au tableau ” ne nous le permettrait pas.

Des gestes organisés en routines

Comme nous l'avons vu dans les deux exemples ci-dessus, les gestes professionnels ne sont pas indépendants les uns des autres. Ils peuvent s'organiser et s'articuler entre eux. Ils constituent alors ce que nous avons appelé des routines qui permettent au professeur de gérer un ensemble de situations finalisées.

Comme les gestes, une routine n'implique pas rigidité ou sclérose. Ce terme permet de décrire un ensemble de comportements se répétant régulièrement. En particulier, une routine, pour perdurer, doit pouvoir prendre en compte des perturbations locales.

La routine est constituée d'activités plus élémentaires qui peuvent être réalisées indépendamment les unes des autres : les gestes. Chacun correspond à la réalisation d'un type de tâches particulier et permet la réalisation d'un but. Dans notre analyse, ils apparaissent tous finalisées par la réalisation d'un même but : celui de la routine. Ce sont donc des gestes professionnels distincts qui participent de la réalisation d'une même activité.

Une routine nous renseigne sur la stratégie globale du professeur. Elle nous semble être l'unité de l'activité du professeur la plus petite qui nous permet de l'identifier (au moins partiellement). Un geste isolé ne donne pas assez d'informations pour cela. Il pourrait être mobilisé par un professeur qui met en œuvre un autre type de stratégie. Il peut aussi être convoqué par d'autres routines.

L'un des gestes intervenant dans notre second exemple de routine, l'étayage des formulations des élèves est caractéristique de cette distinction. L'analyse isolée des parts respectives prise par le professeur et les élèves lors de la formulation des différentes procédures lors des synthèses pourrait laisser penser que le professeur assure à la place des élèves la plus grande part des formulations, qu'il les prive, en anticipant sur leurs difficultés, de cette partie importante de l'activité. Par contre, une mise en relation de cet étayage avec l'ordre des procédures formulées et l'analyse effective des procédures des élèves permet de reconstituer la stratégie du professeur lors de la synthèse. Cette analyse croisée met en évidence un compromis réalisé dans l'action. L'étayage comme l'organisation des formulations lui permet de mettre en relation l'activité mathématique projetée (prévue, potentielle) et les activités réellement réalisées par les élèves.

Les différentes propriétés que nous venons de lister sont proches de celles permettant de caractériser un schème. Geste et de routine peuvent s'interpréter en ces termes.

Les gestes professionnels que nous venons d'exposer correspondent à des régularités intra personnelles repérées en observant différents professeurs des écoles sur un temps long. Ces gestes sont-ils partagés par d'autres individus exerçant dans des conditions semblables la même profession ?

Notre recherche a montré que ces gestes professionnels traduisent des régularités inter personnelles qui semblent être des réponses à des systèmes de contraintes dépassant l'individu mais s'imposant à un groupe de professionnels.

Gestes, routines et i-genres.

Les activités du professeur des écoles aussi petites soient-elles ne sont pas aléatoires. Elles révèlent des choix cohérents, stables qui sont partagés par des groupes d'individus exerçant dans des conditions semblables.

Des routines très distinctes

Nous avons mis en évidence des gestes professionnels et des routines associés aux i-genres majoritaires qui se distinguent nettement de ceux mis en œuvre par Sébastien. Ces routines révèlent des choix très différents associés à des conceptions différentes sur les connaissances et compétences des élèves concernés. Ainsi, alors que Sébastien limite son aide lors de la phase de recherche individuelle des élèves à des apports techniques, Corinne professeure du i-genre 2 lors d'une présentation collective préalable résout entièrement le problème (par étapes) et limite l'activité des élèves à une reproduction de la solution.

Les deux professeurs étayent beaucoup les formulations des élèves lors des phases collectives. Ils justifient tous les deux cet étayage par les difficultés d'expression. Mais cette médiation s'appuie pour Sébastien sur une phase d'action alors qu'elle la précède et l'oriente pour Corinne. Le moment et la finalité sont différents.

L'aide individualisée consistante apportée lors des phases de travail individuel, apparemment analogue, ne porte pas sur les mêmes objets et ne remplit pas le même rôle pour les deux professeurs.

Nous pourrions ainsi multiplier les exemples de gestes différents associés à des i-genres différents. Ils peuvent impliquer des activités différentes chez les élèves.

Bibliographie

BUTLEN D. & PELTIER M.L. & PÉZARD M. (2002) " Nommés en REP, comment font-ils? Pratiques de professeurs des écoles enseignant les mathématiques en REP. Contradictions et cohérence ", *Revue Française de Pédagogie* n°140, (41-52), Paris, INRP

BUTLEN D. (2004) " Deux points de vue pour analyser les pratiques observées ", " Des exemples de difficultés liées à l'appropriation de gestes professionnels attachés à un enseignement de mathématiques en formation initiale de professeurs d'école " *in* PELTIER M.L. (dir), (33-42, 119-129), *Dur d'enseigner en ZEP*, Grenoble, La Pensée Sauvage

CLOT Y., (1999), *La fonction psychologique du travail*, Paris, PUF

ROBERT A. & ROGALSKI J. (2002) " Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche ", Toronto, *Canadian Journal of Science, Mathematics and technology Education (La Revue Canadienne de l'Enseignement des Sciences des Mathématiques et des Technologies)* 2(4), (505-528)

TECHNIQUES ET FONCTIONS DE LA MÉMOIRE DIDACTIQUE : APPROCHES D'UNE MODÉLISATION ET DE QUELQUES PROPOSITIONS

Yves Matheron
IUFM Midi-Pyrénées (GRIDIFE-ERTe 46)
IREM d'Aix-Marseille

Résumé :

La question de la mémoire, couramment considérée comme incontournable dans l'analyse de situations d'enseignement-apprentissage, demeure pourtant un point aveugle des analyses de séquences d'enseignement des mathématiques. Cet article a pour objet de montrer tout d'abord, à partir d'observations de classes ordinaires, une modélisation anthropologique de la mémoire didactique en mathématiques.

Diverses questions se posent alors, et l'on traitera dans un second temps, sur l'exemple des systèmes de deux équations à deux inconnues, celle qui porte sur la possibilité de fonder un enseignement permettant un authentique travail des mémoires pratiques des élèves.

LA QUESTION DE LA MÉMOIRE DIDACTIQUE : POSITION DU PROBLÈME

Il est assez simple de résumer, en quelques traits, la problématique générale au sein de laquelle peuvent être posées certaines des questions justifiant que l'on se penche sur le sujet de la mémoire dans les apprentissages scolaires des mathématiques.

D'une part, le professeur suscite régulièrement chez les élèves, au cours de son enseignement, la mobilisation de connaissances ou d'événements didactiques produits antérieurement dans la classe : les savoirs nouveaux s'appuient fréquemment sur d'autres, plus anciens, et l'enseignement s'inscrit généralement dans l'histoire d'une petite communauté, celle qui est constituée, pour une certaine durée, par des élèves et leur professeur.

D'autre part, il est attendu des élèves qu'ils parviennent à mobiliser les savoirs adéquats pour la résolution de problèmes ; savoirs plus ou moins éloignés, dans le temps didactique, du présent de l'enseignement, d'où la nécessité de “ se souvenir ”. Par ailleurs, il leur est souvent implicitement demandé “ d'oublier ” des techniques anciennement enseignées et apprises, au profit d'autres, plus économiques, et qui s'y substitueront : c'est par exemple le cas des techniques relatives à la proportionnalité, et dont on sait que l'enseignement s'étend du cycle III à certaines des classes de 1re et Terminales.

De la même manière, des définitions relativement satisfaisantes à un certain niveau du cursus scolaire doivent parfois être “ oubliées ” au profit de nouvelles, de plus grande portée et plus générales ou précises, à un niveau plus élevé : c'est par exemple le cas si la multiplication est définie à l'École élémentaire comme addition répétée d'entiers, définition dont la pertinence devient incertaine lorsqu'il s'agit de décimaux ou de rationnels au Collège, et plus du tout effective en ce qui concerne le produit d'irrationnels.

La prise en compte de la question de la mémoire apparaît ainsi comme un élément important ; tout d'abord pour la description et la compréhension des phénomènes didactiques puis, cette analyse ayant été menée, pour l'amélioration éventuelle des possibles de l'action enseignante.

Une première difficulté surgit alors. Il est en effet assez courant de considérer la mémoire, que nous définirons ici à travers ses manifestations en la capacité au souvenir et à sa reconstruction, ainsi que dans la capacité à l'oubli, comme une propriété individuelle des personnes ; l'approche psychologique de la mémoire s'inscrit dans ce cadre. Néanmoins, cette entrée ne paraît pas suffisamment large pour pouvoir embrasser les phénomènes mémoriels qui, dans l'étude des mathématiques, se jouent non pas uniquement au niveau des individus pris isolément mais, plutôt, au niveau des personnes prises au sein de petits groupes sociaux, comme c'est le cas des classes.

Si l'on se place alors dans le cadre plus satisfaisant, car plus englobant, des phénomènes mémoriels propres aux groupes, c'est-à-dire dans le cadre d'une mémoire sociale ou collective, il reste encore à circonscrire, pour les questions d'enseignement, la nature des objets auxquels se rapportent les phénomènes mémoriels. Tout événement se produisant dans la classe n'est, en effet, pas systématiquement intéressant du point de vue du souvenir ou de l'oubli. Plus précisément, ce ne sont pour l'essentiel que sur les phénomènes mémoriels en rapport avec l'étude des mathématiques que portera notre regard.

Afin d'appréhender la question, il a été proposé une modélisation en trois classes pour l'étude de la mémoire dans l'étude des mathématiques (Matheron, 2001). Elle se veut avant tout fonctionnelle, afin de permettre l'observation et l'analyse de la mémoire produite ou nécessitée par les mathématiques et leur étude.

On distingue ainsi essentiellement trois types de mémoire :

- *une mémoire pratique*, qui est sollicitée et mobilisée par toute personne (élève, enseignant, ou autre) qui s'engage dans l'accomplissement d'une tâche identifiée comme relevant d'un savoir mathématique
- *une mémoire du savoir*, qui est la mémoire institutionnelle de la pratique du savoir mathématique, ainsi que celle des outils et des objets de cette pratique
- *une mémoire didactique ostensive*, ou plus simplement *mémoire ostensive*, mémoire délibérément donnée à voir, par des moyens appropriés, à ses propres sujets ou à d'autres personnes par une institution ou un individu (par l'enseignant, par l'élève, par les moyens que se donne l'institution scolaire).

Dans ce court texte, nous n'évoquons pas les raisons qui ont conduit à modéliser ainsi la mémoire didactique. Signalons seulement qu'elles s'appuient sur des travaux menés d'une part en sociologie et anthropologie de la mémoire, et pour lesquels on peut citer, parmi les fondateurs ou continuateurs, les noms de M. Halbwachs, A. Leroi-Gourhan, G. Namer, J. Candau, et d'autre part, en didactique des mathématiques, sur les travaux de Y. Chevallard pour la théorisation anthropologique du didactique, et sur ceux de G. Brousseau et J. Centeno relatifs à la mémoire didactique de l'enseignant.

LIEN ENTRE MÉMOIRE PRATIQUE ET OSTENSIFS

L'engagement dans une activité de nature mathématique suppose la réunion de plusieurs conditions.

Elles passent tout d'abord par l'existence d'un dispositif constitué de moyens matériels (feuille, stylo, règle, énoncé écrit, compas, etc.) et techniques (savoir-faire mathématiques mis à disposition par l'institution et attendus pour la réalisation de la tâche). Mais, à lui seul, ce dispositif ne " produit " aucune mathématique sans une action nécessitant d'être outillée par des gestes appropriés, et qui mobilise pour cela des moyens personnels.

Par exemple, la simplification de la fraction $\frac{1183}{2873}$ nécessite que l'on dispose d'instruments matériels, mais qui peuvent être aussi visuels, sonores, tactiles et qui ont reçu le nom *d'ostensifs* parce qu'ils se " donnent à voir " (Bosch & Chevallard, 1999). Ce sont entre autres, pour le cas de la tâche consistant à simplifier cette fraction, les ostensifs scripturaux 13^2, $\times$, 7, $-$, =, / qui permettront d'accomplir la pratique mathématique suivante :

$$\frac{1183}{2873}=\frac{\cancel{13^2}\times 7}{\cancel{13^2}\times 17}=\frac{7}{17},$$

pratique qui, peut-être, fera aussi intervenir de manière appuyée l'ostensif gestuel consistant à barrer les 13^2, si l'on souhaite montrer à quelqu'un à qui on l'enseigne, " le geste de simplification " par 13^2.

Cet exemple laisse voir que l'engagement dans une pratique mathématique nécessite tout d'abord un dispositif, éventuellement complété par d'autres objets matériels, par exemple une calculatrice ou un algorithme de décomposition en produit de facteurs premiers dans ce cas. Mais il est tout aussi nécessaire de disposer d'une technique mathématique, d'instruments (les ostensifs), et évidemment de l'activation de l'ensemble par une personne qui possède la mémoire de cette pratique, et notamment la mémoire des gestes pour cette pratique.

Par ailleurs, cette mémoire résulte de l'incorporation de chaînes opératoires portées par une communauté. Dans l'exemple de la fraction à simplifier, ce peut être la classe où la personne étudie, la famille où elle pratique cette technique, ou encore tout autre collectivité ayant affaire avec cette technique, pouvant aider à son étude, en évaluer la maîtrise, etc.

Cette communauté, que l'on désigne sous le terme générique " d'institution " en anthropologie, joue les rôles de mémoire externe, dépositaire du savoir et des gestes de la pratique, et de médiateur pour son apprentissage. On retrouve en ce point l'approche de la mémoire qui est celle de Leroi-Gourhan (1964) : " Le fait fondamental, relatif à la mémoire humaine, a déjà été discuté : comme l'outil, la mémoire de l'homme est extériorisée et son contenant est la collectivité ethnique. "

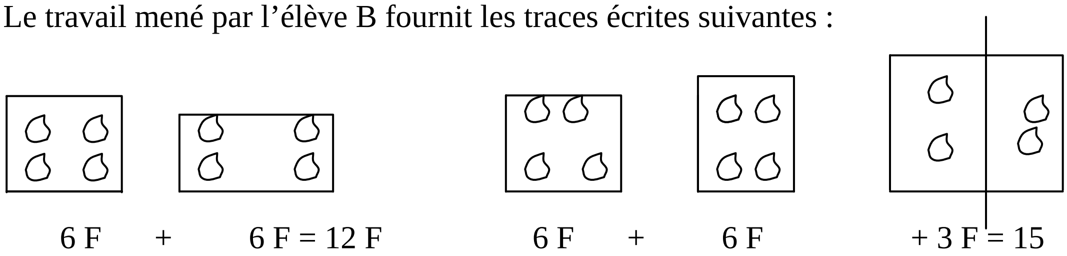
Dans le cas des mathématiques, la mémoire externe est celle d'un savoir ; c'est en ce sens que l'on peut parler de *mémoire du savoir*. Il porte avec lui la mémoire, ou tout au moins l'histoire, des choix qui ont été faits au sein des institutions qui l'ont produit ou transposé. L'aspect mémoriel du savoir mathématique, qui soulage la mémoire de celui qui accomplit le travail mathématique, a été très tôt souligné, notamment par Descartes dans ses *Règles pour la direction de l'esprit* et, évidemment, dans le *Discours de la méthode*.

Au cours de sa trajectoire scolaire, un élève rencontre, au sein des institutions qu'il fréquente, divers éléments de dispositifs, de techniques, etc., plus ou moins organisés et relatifs à des savoirs transposés. À l'issue du processus, en grande partie non objectivable, de ses divers assujettissements plus ou moins heureux, se constitue une mémoire pratique de cet élève, contenue dans des épisodes de sa biographie didactique, selon la formule d'A. Mercier, et à laquelle nous pouvons parfois accéder. Le cas se présente lorsque nous pouvons relever un certain nombre des traces significatives qui subsistent de l'activité mathématique accomplie.

Même s'il peut apparaître en partie fictif, car il est construit pour un concours, un extrait du CRPE de l'académie de Grenoble en 1995, dans lequel est demandée l'analyse de productions d'élèves, fournit un exemple d'objectivation de la mémoire pratique. Il s'agit de la résolution du problème suivant : “ 4 petits pains coûtent 6 F. Combien coûtent 8 petits pains ? Combien coûtent 10 petits pains ? ”

Du document de l'épreuve, on extrait les productions de deux élèves, désignés B et C, et reproduites ci-dessous :

Le travail mené par l'élève B fournit les traces écrites suivantes :



Le travail mené par l'élève C fournit les traces écrites suivantes :

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 2 \\ \hline 12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6 \\ \times 3 \\ \hline 18 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 18 \\ -3 \\ \hline 15 \end{array}$$

L'élève B a utilisé la technique didactiquement transposée au cycle III, que l'on peut désigner comme “ la décomposition en combinaison linéaire ”, pour les nombres 8 et 10, associée à l'implicite portant sur une modélisation proportionnelle de la situation.

Plus précisément, il a utilisé ce que nous écrirons, pour simplifier :

$f(8) = f(4 + 4) = f(4) + f(4) = 6 + 6 = 12$ et

$f(10) = f(4 + 4 + \frac{1}{2} \times 4) = f(4) + f(4) + \frac{1}{2} \times f(4) = 6 + 6 + \frac{1}{2} \times 6 = 15.$

Comme il ne dispose évidemment pas du commode ostensif $f(x)$, ni *a fortiori* de son utilisation pour écrire les propriétés de linéarité dont il a une connaissance certaine, il utilise d'autres ostensifs, graphiques, à l'appui de la technique : il dessine des représentations de ses calculs. Celles-ci permettent de montrer, au lecteur sans doute, mais plus sûrement à l'élève lui-même au cours de son travail, les éléments technologiques qui justifient la technique choisie, en même temps qu'ils commandent et contrôlent sa bonne mise en œuvre.

L'élève C utilise la même technique “ de décomposition en combinaison linéaire ” que l'élève B, même s'il n'utilise pas les mêmes coefficients pour cela. On peut la décrire ainsi :

$f(8)=f(2 \times 4) = 2 \times f(4) = 2 \times 6 = 12$ et

$$f(10) = f(3 \times 4 - \frac{1}{2} \times 4) = 3 \times f(4) - \frac{1}{2} \times f(4) = 3 \times 6 - \frac{1}{2} \times 6 = 18 - 3 = 15.$$

D'autres techniques auraient pu être mobilisées pour résoudre ce problème : retour à l'unité, coefficient de proportionnalité par exemple. Elles sont sous-jacentes aux divers exemples donnés dans les commentaires du document d'application du cycle III, pages 16 et 17, relatifs à la proportionnalité.

Au-delà des variations numériques au sein de la même technique, l'intérêt de cet exemple réside dans l'usage par ces deux élèves d'ostensifs différents, et de ce que l'on peut en inférer pour leur mémoire pratique. Dans le cas de l'élève C, il n'y a pas de recours aux dessins, mais simplement à la pose des opérations qui interviennent dans la mise en œuvre de la technique. On a vu que les dessins figuraient, pour l'élève B, les éléments technologiques (propriétés de linéarité) qui justifient et permettent d'accomplir la technique utilisée. Ces derniers restent donc implicites dans les écrits de l'élève C, bien qu'on en soupçonne la trace à travers les opérations marquées.

On peut alors en déduire que les ostensifs utilisés par B ont pour fonction de soulager la mémoire des propriétés de linéarité, qu'il doit avoir et qui doivent lui rester disponibles tout au long du travail qu'il mène, pour la mise en œuvre convenable de la technique choisie.

Pour l'élève C, au contraire, même si ce sont toujours les mêmes éléments technologiques (propriétés de linéarité) qui justifient et commandent l'accomplissement de la technique utilisée, leur présence donc leur souvenir, ne passe pas par des ostensifs qui les montrent.

Cet exemple fournit ainsi deux types de travail mémoriel pour la pratique d'une même technique, en montrant à travers les ostensifs, utilisés ou non, une réorganisation des souvenirs attestant d'un certain travail d'étude.

Sans doute peut-on noter que l'usage, fait par l'élève B, de dessins figurant des petits pains pour la résolution du problème, est en principe appelé à disparaître dans la progression au sein du cursus scolaire ; dans le cas présent, au sein du cursus secondaire. Généralement, le travail routinisé de ces problèmes de proportionnalité entraîne la mémoire pratique à se passer de ce type d'aide ; ceci afin que le rapport personnel à ce type de problèmes coïncide avec le rapport institutionnel à venir qui exclut que l'on montre publiquement ce qui peut être vu comme étant des “ béquilles ” ou des puérilités.

Le propos qui précède n'a évidemment pas pour fonction de dénigrer cet usage. Il s'agit au contraire, dans la perspective de favoriser l'apprentissage, d'identifier et d'analyser, afin de les mettre ou non à disposition des élèves, quels sont les outils nécessaires, à un moment donné, pour ouvrir l'espace d'une certaine liberté, ou d'une “ capacité génératrice ” des élèves dans l'accomplissement et dans l'étude de certaines tâches mathématiques. “ La production libre de pensées ” par les élèves s'inscrit en effet “ dans les limites inhérentes aux conditions de sa production ” (Bourdieu 1980), limites fixées par le savoir mathématique transposé et précédemment rencontré, ainsi que par les occasions de travail de mémoire pratique de ce savoir, et qui ont ou non été fournies aux élèves.

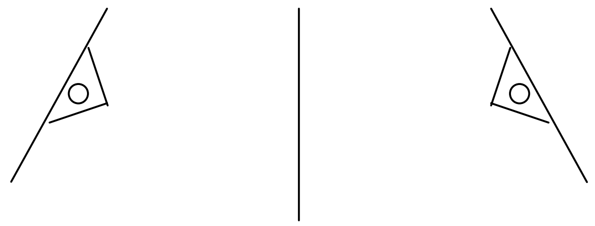
DANS LA CLASSE, UNE MÉMOIRE QUI SE MONTRE OU UNE SOURCE DE MALENTENDUS ?

Nous n'en dirons pas davantage sur la mémoire du savoir, ainsi que sur les ostensifs et ce que l'on appelle les non-ostensifs, c'est-à-dire les concepts et les idées mathématiques, qui la soutiennent. Il est cependant nécessaire de revenir sur l'un des termes de la modélisation proposée pour la mémoire didactique, et qui concerne la *mémoire ostensive*.

C'est une mémoire qui est délibérément *donnée à voir* à la classe, à des élèves, au professeur, par une ou des personnes (professeur ou élève), ou par une institution. Cette ostension peut être réalisée, comme c'est le cas pour les ostensifs définis comme outils du travail mathématique, au moyen de *divers registres perceptifs* : gestuel, discursif - langagier, graphique, scriptural. C'est donc une mémoire qui s'exprime, se dit, se montre, est perceptible, etc., et qui est à destination des autres.

Un exemple permettra d'illustrer l'usage de la mémoire ostensive et les malentendus qui risquent alors d'apparaître au cours de la reconstruction mémorielle qui est engagée. L'observation est faite dans une classe Sixième, après une séance d'observation de phénomènes liés à la symétrie orthogonale à l'aide d'un logiciel de simulation : cette activité préliminaire était supposée fournir la matière de la leçon du jour.

P : " Vous vous rappelez qu'il y avait une figure comme ceci ? " *P reproduit la figure telle qu'elle était présentée aux élèves sur l'ordinateur :*



P : " À l'aide de la souris, on vous a demandé d'attraper un certain point qui se trouvait ici et de faire tourner. Qu'est-ce qui s'est passé ? Ça revient un petit peu dans votre mémoire ?… […] Alors, y'avait un point qui vous permettait de faire tourner. "
Des élèves : " Ah oui ! Le point J ! "
P : " Alors vous vous rappelez ce que ça faisait ? Quand ça tournait là *(P montre une des figures)*, qu'est-ce que ça faisait ? "
Des élèves : " Y'avait l'autre qui tournait " […]
Un élève répond.
P reprend : " Celui d'à côté, il faisait pareil. C'est-à-dire par exemple, si on faisait tourner celui-ci comme ça, celui d'à côté, il tournait comme ça ". *P dessine des flèches de couleur indiquant le mouvement*
[…]
P : " Donc, il tournait lui-aussi, mais en sens inverse. Vous vous rappelez bien de ça ? "
Les élèves répondent oui.
P : " Ensuite, qu'est-ce qu'on a fait ? "
Un élève répond : " On l'a fait glisser " P : " On l'a fait glisser. Comment on faisait glisser ? "
Un élève : " En piquant sur le cercle et après on le faisait… "
P : " Vous vous rappelez qu'en piquant sur le cercle, on l'attrapait. Vous aviez une main comme ça qui permettait de faire glisser. Qu'est-ce qu'on a observé ? "

[…]
P : " Ensuite, qu'est-ce que vous avez remarqué d'autre ? "
Akim répond et vient montrer les déplacements.
P : " Qu'est-ce qu'on pouvait faire à part le faire monter par là ? "
Akim : " Le faire descendre "
P : " Le faire descendre. Par exemple si on le faisait descendre par ici ? " *P dessine une flèche de couleur*
P : " Qu'est-ce qui se passait ? Tu fais la flèche. Ça partait par là, et l'autre qu'est-ce qu'il faisait ? " et Akim répond " pareil ". P : " Pareil, ça veut dire quoi, ça veut dire ça ? ". *Les élèves répondent non après que P a dessiné la deuxième flèche dans le même sens. Karim dessine alors correctement la flèche correspondante indiquant le mouvement.*
P : " Voilà, je te remercie. Vous avez remarqué qu'en les faisant glisser de la sorte les deux figures, eh bien, les figures, on les retrouvait de l'autre côté de manière… "
Un élève : " Qui se ressemble "
P : " Qui se ressemble de quelle manière ? "
Un autre élève : " Identique "
P interroge quelques élèves qui répondent tous " identique ". P écrit au tableau : **symétrique**

Tout au long de ce passage, l'action enseignante reconstruit une mémoire collective officielle pour la classe. Professeur et élèves peuvent la montrer afin de désigner à tous les problèmes posés et de mener à bien le projet d'enseignement. Cette mémoire ostensive, répond à la réalisation de deux moments de l'étude des mathématiques.

D'une part, le professeur construit, avec les élèves, *un milieu pour l'enseignement des savoirs nouveaux*. Le milieu, tel qu'il a été défini par Guy Brousseau en didactique, est le système dénué d'intentions qui est l'antagoniste du sujet apprenant. La dialectique des actions du sujet sur le milieu et des rétroactions produites par le milieu en retour est un élément important du processus d'apprentissage. À cet effet, le professeur produit avec les élèves un ensemble de souvenirs (soit qu'il les juge tels *a priori*, soit qu'il ait préalablement organisé les conditions de leur production), et il donne à voir leurs éléments pertinents (supposés dorénavant se rapporter à des notions communes à un nombre suffisant d'élèves de la classe). Il montre ainsi que l'intention d'enseigner rencontre l'intention d'apprendre et il engage chacun dans une activité didactique collective. Dans cette observation, lorsqu'ils ne sont plus accomplis mais rappelés, désignés et montrés, les gestes des élèves évoqués par le professeur l'engagent à produire un système sémiotique *ad hoc* : les flèches.

D'autre part, le professeur désigne *les pratiques relatives au savoir qui vont devenir officielles, donc attendues, et qu'il faudra avoir apprises*. Cette institutionnalisation passe par l'homogénéisation des pratiques personnelles antérieures des élèves, ce qui suppose une reconstruction du passé. Cela n'implique ni le souvenir ni la mémorisation exacte, mais un " travail de mémoire " à deux niveaux : public, par la production de la mémoire ostensive, et privé, par la transformation conjointe d'une mémoire personnelle idoine à cette dernière.

À la conjonction des deux démarches de reconstruction mémorielle, publique et privée, apparaissent souvent les malentendus. C'est ce qu'illustre l'épisode qui suit :

P : " Qu'avez-vous remarqué en faisant tourner la figure verte ? *[P lit la question écrite sur la feuille]* On va écrire une petite phrase. Alors, on l'a dessiné au tableau ".
Un élève : " On a remarqué que l'autre figure tourne en même temps "
P : " Elle tourne en même temps et dans le sens inverse. Alors l'autre figure, comment on va l'appeler ? On va l'appeler… "
Des élèves répondent : " Verte "
P : " On va l'appeler la figure symétrique… "

La séance se poursuit et le travail est proposé sans que la transformation de la mémoire personnelle de certains élèves ne puisse se produire : il s'ensuit, pour eux, une grande incertitude qui se manifeste au mieux par un brouhaha (l'un cherche son cahier, l'autre fait tomber son crayon, le troisième demande à son voisin ce qu'il en est, etc.), au pire par des mouvements de chahut spontané (des petits bruits auxquels le professeur répond en arrêtant le cours pour faire de la discipline).

DIRIGER DE MANIÈRE SYNCHRONE LA CONSTRUCTION DES MÉMOIRES PRATIQUE ET OSTENSIVE : UN EXEMPLE

Il s'agit d'un dispositif d'ingénierie didactique mis en place dans une classe de 3^{e}, qui vise à enseigner la résolution des systèmes de deux équations à deux inconnues, et dont on décrit rapidement les grandes lignes dans ce qui suit. On donne tout d'abord aux élèves des problèmes du premier degré, du même type, donc qui relèveront tous de la même technique lorsqu'elle aura été enseignée, en leur disant simplement qu'ils sont capables de les résoudre. Voici l'un d'entre eux :

Deuxième problème :
Un grand hôtel dispose de 50 chambres et peut recevoir 83 personnes. Il y a des chambres pour une personne et des chambres pour deux personnes. De combien de chambres pour une personne et de combien de chambres pour deux personnes dispose cet hôtel ?

Les groupes d'élèves se lancent dans la résolution, en utilisant pour cela des types variés d'ostensifs. Voici quelques-unes des productions recueillies :

Deuxième problème.
Pour trouver le résultat, nous avons encore effectué une soustraction. Nous avons soustrait le nombre de personnes au nombre de chambres. Donc 83-50 est égal à 33. Alors il y a 33 chambres de 2 lits et 17 chambres à 1 lit. "

Ou, plus laconiquement :

2ème problème
83 – 50 = 33
Donc il y [a] 33 chambres de 2 lits.
50 – 33 = 17
Donc il y [*de nouveau manque le a*] 17 chambres de 1 lit.

La rédaction suivante introduit, quant à elle, de nombreux ostensifs (encadrements, flèches, disposition des calculs, signes) à propos de l'usage desquels le groupe s'est sans doute accordé :

Problème n°2
Il y a 50 chambres et 83 personnes.
Pour 80 personnes et toujours 50 ch.

$$\begin{array}{llcll}
30 & \text{chambres à 2 lits} & \rightarrow & 30 \times 2 = & 60 \\
+ & & & & + \\
20 & \text{chambres à 1 lit} & \rightarrow & 20 \times 1 = & 20 \\
\downarrow & & & & = \\
50 & & & & 80 \\
 & & & & \underline{+3} \\
30 + 3 = 33 & (33 \times 2) + 17 = & \longrightarrow & & 83 \\
20 - 3 = \underline{{}^{+}17} & & & & \\
\quad\quad 50 & & & &
\end{array}$$

À ce stade, les élèves n'en sont encore qu'à l'exploration d'une solution. C'est donc “ par tâtonnement ” qu'ils parviennent à trouver les nombres du résultat.

Dans un deuxième temps, après avoir vu que ces problèmes peuvent être modélisés par des systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues, les élèves sont invités à y revenir afin de réaliser la modélisation et de les résoudre ; la technique de résolution n'est évidemment pas encore enseignée et c'est l'objectif d'enseignement visée.

Dans les lignes qui suivent, on suit l'évolution des productions de la même élève pour le même problème :

Troisième problème :
Dans un refuge de montagne, il n'y a que des chambres à deux lits et des chambres à 4 lits. Aujourd'hui elle affiche complet, 30 randonneurs occupant tous les lits des 12 chambres du refuge. Combien de chambres à 2 lits et combien de chambres à 4 lits y a-t-il dans le refuge ?

Avant qu'elle ne dispose des ostensifs associés à l'écriture d'un système d'équations, elle avait résolu ce problème de la manière suivante :

> *Chambres à 2 lits*
> *Chambres à 4 lits* } *30 randonneurs*
>
> ---
>
> 12 chambres
> 12 $\rightarrow$ au moins 2 personnes = 24
> 30 – 24 = 6÷2$\times$
> $\downarrow$
> si on divise 6 par 2 ça fait 2 × 3 randonneurs à placer 2 + 2 = 4
> donc
> 3 chambres à 4 lits et 9 chambres 2 lits

Maintenant qu'elle dispose des ostensifs appropriés, elle peut alors les utiliser pour écrire :

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 2x + 4y = 30 \end{cases}$$

Ce qui la conduit à développer sa propre " créativité " mathématique, sous la forme de deux techniques lui permettant de retrouver la solution précédente. La première est la suivante :

> $2x+4y=30$
> $x+y=30-x-3y$
> $12=30-x-3y$
> $x+3y=30-12$
> $x+3y=18$
> $x+y=18-2y$
> $12=18-2y$
> $2y=18-12$
> $2y=6$
> $y=3$
> $x=12-3=9$

La technique, " inventée " par cette élève, consiste donc à faire apparaître la première équation à partir de l'autre afin de substituer à la première la constante à laquelle elle est égale, et à itérer le procédé jusqu'à " disparition ", dans la deuxième équation, d'une des inconnues. Ceci permet, au bout d'un certain nombre d'étapes, de la résoudre comme équation du premier degré à une inconnue, et à en tirer la valeur de la deuxième inconnue.

Cette élève parvient, dans un deuxième temps, à perfectionner sa technique, et elle écrit alors :

> $\begin{cases} x + y = 12 \\ 2x + 4y = 30 \end{cases}$
>
> Plus court $\rightarrow$ $2x + 4y = 30$ $\qquad$ $2(x + y) + 2y = 30$

$2(x + y) = 30 - 2y$
$2 \times 12 = 30 - 2y$
$24 = 30 - 2y$
$2y = 30 - 24$
$2y = 6$
$y = 3$
$x = 12 – 3 = 9$

Il s'agit donc d'une amélioration de la technique précédente, qui va dans le sens d'une économie, dans la mesure où la double itération du procédé consistant à faire apparaître $x + y = 12$ dans $2x + 4y = 30$ peut être remplacée par une factorisation par 2 après décomposition de $4y$.

Cette pratique ostensive permet un travail de la technique qui va dans le sens d'une économie, identifiée par l'élève, et qui contient et s'appuie sur la mémoire de la technique précédente, moins élaborée. C'est ainsi, encore une fois, un travail de la mémoire pratique qui permet un travail de la technique. Il n'a pas échappé que cette technique n'a pu être créée et vivre que grâce aux coefficients particuliers du système et que, par ailleurs, les techniques dont l'enseignement est l'objet, techniques d'addition et de substitution d'une inconnue, et non d'une équation comme le fait cette élève, n'émergent pas encore du travail d'étude qu'elle mène.

Cet état de fait peut alors être judicieusement utilisé par le professeur, en engageant la classe à travailler sur la portée de cette technique. La technique montrée nous mène-t-elle à la solution à tout coup ? Sinon, dans quels cas fonctionne-t-elle ? Et comment faire dans les cas de systèmes pour lesquels elle est inapplicable ? Que sont ces systèmes et pourquoi est-elle inopérante alors ? Dans ces cas peut-on l'adapter, l'améliorer ou doit-on la rejeter ?

La dimension technologique qui produit, commande, justifie et rend compréhensibles les techniques disponibles à cet instant, peut alors être travaillée par la classe ; ce qui tend à synchroniser la mémoire ostensive, publique et montrée, et la mémoire pratique qui se construit simultanément dans le travail de production d'éléments de réponse.

Arrivé en ce point, un constat s'impose : la voie préconisée dans cet article semble n'en être encore qu'au stade expérimental. C'est sans doute vrai, ce qui n'empêche évidemment pas de tenter son exploration. Elle est néanmoins délicate car elle tend à rendre l'élève, ou plutôt le collectif des élèves, chronogène : c'est-à-dire producteur du temps de l'étude des questions mathématiques desquelles émerge le savoir que l'on souhaite enseigner, ce qui n'est guère dans les habitudes générales d'enseignement.

En outre emprunter cette voie suppose, d'une part, une solide analyse mathématique préalable de la notion à enseigner, des ostensifs et non-ostensifs qui lui sont attachés et qui permettent le travail mathématique qui lui est associé et, d'autre part, une analyse et une imagination didactiques tout aussi solides pour concevoir et mettre en œuvre le dispositif afférent.

Signalons pour conclure que la difficulté ne relève pas du domaine de l'impossible puisque l'expérience a été tentée et réussie au niveau du CM2 à propos de l'enseignement des fractions ; le lecteur curieux pourra en trouver le compte rendu dans Sensevy 1998.

BIBLIOGRAPHIE

Bosch M. & Chevallard Y. (1999) : *La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique*, Recherches en didactique des mathématiques, 19/1, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 77-124.

Bourdieu P. (1980) : *Le sens pratique*, Éditions de minuit, Paris.

Brousseau G. (1990) : *Le contrat didactique : le milieu*, Recherches en didactique des mathématiques, 9/3, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 309-336.

Brousseau G. & Centeno J. (1991) : *Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant*, Recherches en didactique des mathématiques, 11/2&3, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 167-210.

Candau J. (1998) : *Mémoire et identité*, PUF, Paris.

Centeno J. (1995) : *La mémoire didactique de l'enseignant*, thèse posthume inachevée, LADIST, Bordeaux.

Descartes R. (1637; 1947) : *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*, Éditions Pierre Cailler, Genève.

Halbwachs M. (1925 ; 1994) : *Les cadres sociaux de la mémoire*, Postface de G. Namer, Albin Michel, Paris.

Halbwachs M. (1950 ; 1997) : *La mémoire collective*, Préface et postface de G. Namer, Albin Michel, Paris.

Leroi-Gourhan A. (1964) : *Le geste et la parole II, La mémoire et les rythmes*, Albin Michel, Paris.

Matheron Y. (2001) : *Une modélisation pour l'étude didactique de la mémoire*, Recherches en didactique des mathématiques, 21/3, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 207-245.

Matheron Y. & Salin M-H (2002) : *Les pratiques ostensives comme travail de construction d'une mémoire officielle de la classe dans l'action enseignante*, Revue Française de Pédagogie, n° 141, INRP, Paris, pp. 57-66.

Mercier A. (1995) : *La biographie didactique d'un élève et les contraintes temporelles de l'enseignement*, Recherches en didactique des mathématiques, 15/1, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 97-142.

Namer G. (1987) : *Mémoire et société*, Méridiens Klincksieck, Paris.

Sensevy G. (1998) : *Institutions didactiques. Étude et autonomie à l'école élémentaire.* PUF, Paris.

LIAISON CM_2-$6^{ÈME}$ ET CONTRAT DE PROGRÈS

VIVRE UNE CLASSE MATHEMATIQUE AU COLLEGE

Françoise VALA-VIAUX

IEN Circonscription Gap-Buëch *(Hautes-Alpes)*

Résumé : Dans cet article Françoise Vala-Viaux présente un dispositif d'animation pédagogique qui a fonctionné dans le cadre d'une liaison CM2 $6^{ème}$.

L'originalité de ce type de formation a consisté à préparer et à encadrer, pendant une semaine, en février 2004, une classe de mathématique réunissant les élèves d'une classe de CM2 et de deux classes de sixième issus du même bassin scolaire.

1 - PREAMBULE

Aborder le sujet des difficultés rencontrées dans leurs apprentissages scolaires par les élèves, leurs origines et leurs conséquences, reste encore difficile. Proposer des solutions peut souvent tenir de la gageure tant la charge affective et la culpabilité des enseignants et des élèves eux-mêmes est forte.

Il faut sans aucun doute provoquer des changements dans le fonctionnement des écoles. Mais l'efficacité s'appuie sur les conditions qui favorisent une évolution, voire une rénovation des pratiques professionnelles plutôt que d'en imposer directement le principe. La tradition des réformes, circulaires et injonctions parachutées qui laissent de côté les problèmes concrets de mise en oeuvre ne facilite pas l'implication des enseignants.

Une pédagogie de la réussite se soucie des modes et de la diversité des rythmes d'acquisition des élèves ainsi que de la nature des souffrances scolaires. Il faut donner aux enseignants les moyens pédagogiques de construire et pratiquer des démarches centrées sur l'élève.

Il est indispensable aussi de mutualiser les énergies, de cibler les opérations chargées de sens.

Il est donc nécessaire de s'appuyer sur l'analyse des faits, sur les acquis des enseignants de terrain mais aussi sur l'état actuel des recherches en sciences de l'éducation et plus particulièrement pour notre sujet de préoccupation, sur la didactique des mathématiques et créer ainsi des relations fortes entre théorie et pratique.

Enfin, et surtout, il faut convaincre; convaincre bien sûr les enseignants des premier et second degrés, mais aussi les parents sans oublier les élèves eux-mêmes.

Les IEN ont en charge le pilotage de la mise en oeuvre d'une pédagogie de la réussite pour tous les enfants de toutes les écoles de leur circonscription. II leur appartient donc de préparer, de déclencher, d'animer et de gérer la rénovation des pratiques de classe et des apprentissages. Même s'il a toujours été laissé aux équipes de terrain une large autonomie de propositions et de mise en oeuvre dans le cadre d'une politique éducative académique et départementale, les réticences de tous ordres ne manquent pas qui entravent les dynamiques locales.

L'expérience des « classes lecture-écriture » en ZEP, des acquis universitaires en didactique des mathématiques, une expérience de formatrice et la conviction personnelle et inébranlable qu'il n'existe pas de fatalisme de l'échec scolaire, m'ont amenée à proposer dès l'année 1999-2000, dans la circonscription dont j'ai la charge, la mise en oeuvre de classes mathématiques à l'attention d'élèves de cycle III et d'élèves de 6e

2 - CONSTATS

C'est l'ampleur des écarts existants entre les résultats des élèves aux évaluations nationales CE2 en français et en mathématiques au détriment de ce dernier et l'accroissement du phénomène aux évaluations nationales 6e qui a amené l'équipe de circonscription Buéch et St-Bonnet (Hautes-Alpes) à proposer une action spécifique en direction des enseignants des premier et second degrés pour les élèves de cycle III et 6ème par secteurs de collège.

L'évaluation fait partie intégrante de la pratique pédagogique et constitue un élément régulateur, pour l'enseignant dans son action didactique, pour l'élève dans la construction de ses savoirs. C'est aussi un moyen de renforcer l'articulation nécessaire des activités d'enseignement du maître et des activités d'apprentissage de l'élève. L'élaboration de réponses pédagogiques adaptées aux besoins des élèves est en effet une des conditions de l'efficacité dans les apprentissages.

Elle ne devrait pas se limiter à de simples constats mais prendre en compte les acquisitions méthodologiques, l'analyse des erreurs récurrentes commises et permettre en outre de comprendre les chemins cognitifs suivis par l'élève. Les actions de réajustement, aussi bien en amont qu'en aval, devraient s'appuyer réellement sur chaque sujet apprenant, ses acquis du moment et ses stratégies familières, devraient s'organiser à partir de ce que chaque élève sait ou sait faire et accompagner ainsi son cheminement dans le cadre d'un contrat de réussite individuel et négocié.

Beaucoup d'enseignants du premier degré sont entrés progressivement dans une « culture de l'évaluation » ou du moins ont pris conscience de la nécessité de s'appuyer sur des observables mais restent complètement démunis en ce qui concerne les moyens pédagogiques pour construire et pratiquer de nouvelles démarches centrées sur les élèves.

Les enseignants du second degré, restent encore réticents, n'associent pas encore suffisamment leurs élèves à un bilan réflexif sur leurs savoirs et savoir-faire de début d'études secondaires.

3 - BREF HISTORIQUE

Dès janvier 1989, le Recteur M. Migeon, dans son rapport sur « la réussite à l'école » proposait des actions de soutien ou de reprise d'apprentissage pour les élèves présentant des déficits d'apprentissage.

Pour mettre fin à la dramatique rupture vécue par beaucoup d'élèves à leur entrée en 6ème, il importe d'assurer une continuité des contenus et surtout des modalités d'intervention pédagogique entre premier et second degré. L'harmonisation réelle ne peut se concevoir alors que par de véritables négociations, régulations et actions au service des élèves et doit largement dépasser le cadre de la convivialité de réunions ordinaires.

Depuis plusieurs années, dans la circonscription, nous avions travaillé sur la continuité des apprentissages au sein du cycle III. Lors des commissions d'harmonisation CM2-6ème, les professeurs de collège présents et les enseignants concernés avaient procédé à des études comparatives de leurs programmes respectifs. Ce travail avait permis une meilleure connaissance, en amont ou en aval, des contenus d'apprentissage.

Le document départemental intitulé «continuité des apprentissages au cycle des approfondissements » élaboré par des enseignants de la circonscription de Gap, a servi de support à une réflexion par secteur de collège. Cet outil, qui se présente sous forme de fiches concentrant sur une même page les savoirs d'un champ disciplinaire, les compétences disciplinaires et les compétences transversales a été donné à chacun des interlocuteurs.

Les savoirs et compétences reconnus essentiels pour suivre une scolarité réussie au collège ont été indiqués en gras.

En italique apparaissent les éléments du programme que les professeurs du collège ont estimés non indispensables et qui peuvent être traités avec moins d'exigence dans le cadre de l'école primaire. Cette réflexion a été menée au sein de commissions mixtes et les documents entérinés par secteurs de collège sont devenus les bases de travail de chacun.

La constitution d'équipes mixtes d'enseignants d'écoles et de collège, motivés et expérimentés, a semblé, avant une éventuelle généralisation de ce dispositif, être une condition indispensable pour envisager une réflexion en continu sur les apprentissages des élèves et le suivi de cohortes.

L'optique constructiviste de l'appropriation des connaissances qui s'oppose à celle d'une transmission de « celui qui sait à celui qui ne sait pas » a été résolument choisie par l'équipe de circonscription.

Dans cette perspective, il s'agissait d'intégrer le rôle prépondérant que jouent les divers types d'interactions élève-enseignant, élève-élève, élève-objet de l'apprentissage et de faire évoluer ainsi les représentations encore tenaces du rôle actuel dévolu à chacun dans la majorité des classes.

L'équipe de circonscription ne cherchait pas à fournir une classe mathématique « clé en main » mais plutôt à déclencher une dynamique, à rassurer, à autonomiser les enseignants afin qu'ils deviennent eux-mêmes acteurs de leur nouvelle démarche.

En conséquence, la construction de démarches pédagogiques qui fassent droit aux rythmes et réactions particulières des élèves mais aussi aux spécificités des savoirs mathématiques en question a été laissée à l'initiative de chacun.

Les enseignants volontaires se sont rencontrés, ont vécu un stage commun, ont acquis une culture pédagogique forte, notamment en ce qui concerne les notions de contrat de réussite, la démarche de recherche en mathématiques et les contenus d'apprentissage.

L'installation de nouveaux savoir-faire professionnels va de pair avec l'accès à « la clarté cognitive », théorie générale que nous devons à J. Downing et J. Fijalkow et doit comporter différentes phases dont nous ne devons pas plus faire l'économie en formation d'adulte qu'en classe.

La première phase dite de compréhension est souvent assimilée dans le langage courant à la motivation, terme vague mais qui sous-entend que l'apprenant est assez avancé dans sa compréhension et son investissement, ce qui explique l'appel à enseignants volontaires.

Si le potentiel dans le premier degré fut dès le début conséquent, il fallut réitérer les demandes auprès des principaux de collège pour travailler sur plusieurs sites en septembre 2000.

Dans un premier temps, le but de l'équipe de circonscription était de permettre à chacun des enseignants volontaires de répondre avec pertinence à ces deux questions :

Pourquoi les élèves se heurtent-ils aux mêmes difficultés mathématiques ?

C'est-à-dire qu'il était nécessaire de comprendre la succession des ruptures nécessaires et épistémologiques des savoirs essentiels en mathématiques

Comment organiser les apprentissages en classe pour redonner du sens à leur construction et prendre le temps de l'appropriation des « noyaux durs » ?

Il s'ajoutait alors le souci de prendre en compte le rôle spécifique et le fonctionnement des différentes phases de l'apprentissage et le rôle de l'analyse des erreurs.

C'est pourquoi la formation proprement dite a comporté quatre phases distinctes :

- un stage initial conçu comme démarche active de construction de nouveaux savoir-faire professionnels et animé conjointement par l'équipe de circonscription et un professeur de mathématiques d'IUFM ;
- des temps communs supplémentaires consacrés à la préparation de la semaine tant en ce qui concerne la mise au point de l'articulation logique des différentes séances d'apprentissage dans la journée et pendant la semaine, que la réflexion à propos de la constitution des groupes mixtes d'élèves à la fois dans les groupes de besoins et les groupes d'intérêt ;
- le suivi-accompagnement de la mise en pratique avec l'implication d'un puis des deux conseillers pédagogiques s'intégrant durant la semaine à l'équipe d'encadrement et la venue régulière du professeur de mathématiques formateur ainsi que de l'IEN, observateurs et « renvoyeurs » des réussites mais aussi des difficultés ;

- l'évaluation du dispositif quelques semaines plus tard durant une synthèse formatrice.

4 - LE PROJET CLASSE MATHEMATIQUE

- une classe de CM2 et une classe de 6^{e} (enseignants volontaires) du même bassin de recrutement ;
- des classes en résidence une semaine au collège de rattachement et/ou dans l'école élémentaire la plus proche ;
- un encadrement élargi permettant un fonctionnement par ateliers (moitié de classe) ;
- un projet élaboré conjointement (premier et second degré) autour d'une dominante mathématique et des difficultés essentielles des élèves concernés ;
- un contrat individualisé conçu à partir de <u>besoins identifiés</u> par les enseignants (évaluations nationales 6^{e}, évaluations communes proposées aux classes concernées et des <u>intérêts formulés</u> par les élèves).

5 - LES OBJECTIFS

- construire ensemble (enseignants école et collège) des accompagnements pédagogiques et didactiques cohérents pour permettre une continuité des apprentissages entre cycle III et 6^{e} ;
- limiter les problèmes de morcellement, de dispersion, de linéarité des apprentissages mathématiques qui provoquent une perte de sens et de motivation ;
- relier le langage mathématique aux connaissances langagières de la langue française (polysémie des mots) ;
- utiliser des activités langagières structurées pour favoriser des retours réflexifs sur les raisons de la réussite ou de l'échec, sur les différentes procédures et stratégies employées en fonction des variables de la situation proposée (méta-cognition) ;
- apprendre en situation d'interactions (élèves/élèves et mathématiques/français) ;
- construire et/ou renforcer des compétences disciplinaires et transversales dans des situations d'action et évaluer les écarts constatés ;
- rendre l'élève acteur dans la construction de ses savoirs et dans le cadre d'un contrat de travail négocié ;
- offrir aux élèves des occasions de s'adapter à des situations et des problèmes nouveaux et de développer d'autres schèmes de réponses adaptées.

Il semblait indispensable de travailler aussi sur :

- les représentations

Comment aider les élèves à mettre en mots, à conserver et à utiliser leurs « savoirs du moment » ?
Comment les accompagner dans la lisibilité de leur travail et la prise de conscience de leurs progrès ?
Il paraissait donc indispensable de leur fournir un temps d'élucidation et de réflexion.

- la conceptualisation

A quel type d'objet de connaissance les enfants réfèrent-ils l'objet qu'on leur propose ?

- les procédures

Comment s'y prendre pour analyser les réussites et les échecs ?

6 - LES CONTENUS – UN EXEMPLE

Organisation de la semaine *(classe mathématique du 2 au 6 février 2004)*

Après plusieurs années de déroulement des classes mathématique au mois de novembre et des constats de difficultés récurrentes d'organisation pour le collège, il a été proposé de saisir l'opportunité des « semaines blanches » pour Veynes.

En effet, tous les ans, fin janvier ou début février, les classes de 6e partent à tour de rôle une semaine en montagne pour vivre en particulier un cycle de ski (le massif du Dévoluy est situé à quelques kilomètres). Cette période a aussi été choisie pour le déroulement du stage « entreprise » des élèves plus âgés. La juxtaposition de ces deux événements libère à la fois des locaux et des professeurs.

Une réflexion interne et la souplesse des horaires ont permis d'organiser une classe mathématique durant l'année 2004 avec deux classes de 6e et une classe de cycle III (seuls les élèves de CM2 sont venus en car) d'un regroupement pédagogique d'écoles rurales du Dévoluy dont les élèves découvraient le collège.

Les temps consacrés aux mathématiques se sont articulés sous forme de huit ateliers, répartis sur les huit demi-journées. Ces ateliers abordaient :

- la numération
- les programmes de construction
- la lecture d'énoncé
- les repérages temporels

Chaque champ a fait l'objet, au cours du mois précédent, d'une évaluation diagnostique identique pour les élèves de CM2 et de 6e . En fonction des résultats, les élèves, quels que soient leurs classes, ont été répartis en cinq groupes homogènes. La constitution des groupes a donc évolué en fonction des domaines abordés.

Emploi du temps *(cf. annexe 1)*

Deux axes de travail ont été privilégiés :

choix des champs qui ont posé le plus de problèmes aux élèves, au vu des résultats aux évaluations et des observations effectuées par les enseignants ;

chaque champ sera abordé deux fois dans la semaine afin d'approfondir les sujets d'étude, de donner une cohérence à l'ensemble et de donner du temps pour chacun ;

- alternance des ateliers privilégiant l'entrée « langue » ou l'entrée « mathématiques » afin de permettre la construction de liens privilégiés entre le français et les mathématiques.

Un exemple du contenu des ateliers *(cf. annexe 2)*

Il s'agissait, en premier lieu, de confronter chaque élève aux problèmes de langues spécifiques, de lecture, de fonctionnement textuel, de rigueur de l'expression. Le professeur de français restait donc très concerné.

La coopération « français/mathématiques » a permis d'ouvrir des perspectives nouvelles prenant appui sur les compétences de chacun des professeurs.

Un grand chantier de « ré apprentissage » a été décidé en numération. Il a été prolongé en histoire à propos de la frise chronologique qui pose des problèmes importants jusqu'en 3ème pour certains élèves.

A partir du constat de l'absence de préoccupation en ce qui concerne la présentation et le soin portés à l'écriture du travail en mathématiques, il a semblé indispensable de redonner le goût à « l'esthétique » (au-delà des contenus) à partir de supports de qualité et d'une attention particulière portée à un « carnet personnel ».

Des temps spécifiques ont permis à chaque élève de gérer son dossier personnel et de conserver les découvertes de la journée, les obstacles et difficultés rencontrées, les étapes de son cheminement (stratégies employées), les règles ou lois mathématiques comprises (des formulations à la formalisation)

Atelier numéro 1 : *« polysémie »*

- *Prendre conscience de la spécificité du langage mathématique par rapport au langage courant*

- Reconnaître la polysémie d'un certain nombre de termes employés en mathématiques et dans le langage courant

Atelier numéro 2 : *« numération »*
- Fixer notre système de numération décimale en manipulant d'autres systèmes de numération et en prenant conscience des ressemblances et différences

Atelier numéro 3 : *« la phrase »*
- Formuler une démarche et une réponse correctes à un problème mathématique en employant à bon escient des phrases en langage mathématique et/ou des phrases en « français »

Atelier numéro 4 : *« numération »*
- Donner du sens aux termes « chiffre », « nombre », « dizaine », « dixième », « unité » (valeur positionnelle des chiffres)

Atelier numéro 5 : *« programme de construction »*
- Différencier l'emploi des articles défini/indéfini dans un programme de construction
- Repérer et employer les formes injonctives (infinitif/impératif) dans un programme de construction

Atelier numéro 6 : *« lecture d'énoncés »*
- Rechercher et trier les données utiles d'un énoncé
- Rédiger un énoncé de problème mathématique

Atelier numéro 7 : *« programme de construction »*
- Rédiger un programme de construction

Atelier numéro 8 : *« frise chronologique »*
- Concevoir deux types de frises (normée/non normée)
- Repérer la place et le rôle du zéro, de la notion d'origine sur une droite normée ; revoir les notions de « siècle » et « millénaire »

Le déroulement *(cf annexe 3)*

Afin de cibler avec précision les contenus de la classe mathématique, des évaluations diagnostiques ont été proposées sur :

La lecture d'énoncés
Les procédures de construction
La phrase
Le vocabulaire mathématique
La chronologie
La numération (évaluation $6^{ème}$)
La frise historique et la chronologie.

Ces évaluations préparées, pour la première fois et conjointement, par l'enseignante de la classe de CM2, l'équipe de circonscription et les professeurs de mathématiques, de français et d'histoire du collège, ont d'abord été échangés par email, puis ont été affinés par l'ensemble des adultes enseignants et enfin proposés aux élèves dans chaque classe concernée (sans difficulté particulière en élémentaire et sur les temps de « remédiation » en $6^{ème}$ début janvier).

Un premier bilan a été effectué « à chaud » le vendredi 13 février 2004 au collège avec tous les intervenants.
Un bilan « du ressenti, du vécu » a aussi été mis en place dans chaque classe avec les élèves.

Puis, après les vacances d'hiver, en mars, des évaluations, semblables aux premières, ont été à nouveau proposées. Les résultats ont montré une augmentation significative des réussites pour chacun mais surtout une capacité beaucoup plus importante à expliciter ses procédures de résolution.

Le bilan du projet (cf annexe 4)

Ce projet reste à renouveler, à la demande de l'ensemble des enseignants.

Cependant, la lourdeur du dispositif requière la mobilisation de l'équipe de circonscription et d'un nombre de professeurs concernés plus important.

Les réunions de préparation et de synthèse-bilan doivent être prises en compte par l'institution, non seulement pour le premier degré mais aussi pour le second degré. Il semble que les stages de circonscription de liaison CM2-6ème, inscrits au plan départemental ou académique de formation, pourraient être supports à ces temps spécifiques.

On peut de plus imaginer différents types de classes, supports à la mise en jeu des compétences transversales : Lire, écrire parler (classe musique, classe histoire, classe sciences…).

En fonction des affinités, des difficultés rencontrées par les élèves des divers enseignants des premier et second degré, on pourrait imaginer quatre projets par an. (un par classe de 6ème du collège de Veynes, travaillant aux côtés d'un ou de deux CM2… selon le nombres d'élèves).

7. CONCLUSION

La conscience des difficultés qui s'accumulent, l'intériorisation de l'échec sont des expériences douloureuses qui occultent chez les élèves leurs capacités à se réaliser dans des domaines où leurs atouts sont pourtant bien réels.

Les aider à dominer des difficultés passagères, souvent normales et inhérentes aux apprentissages eux-mêmes avant qu'elles ne deviennent inquiétantes et génératrices d'une dévalorisation de la personne, est aujourd'hui la priorité pour les équipes pédagogiques.

Tous les élèves dont les résultats aux évaluations nationales CE2 et 6^{e} (mais aussi intermédiaires) révèlent une insuffisance devraient bénéficier d'actions d'accompagnements spécifiques et d'évaluations ciblées tout au long de l'année scolaire.

Au-delà des programmes personnalisés d'aide aux élèves les plus en difficulté, il est indispensable d'envisager des situations de soutien ou d'approfondissement pour d'autres dont les acquisitions, sans être déficientes, restent encore fragiles. Il est nécessaire d'agir pour tous afin d'éviter que se constituent de futurs parcours d'échec.

C'est cette dynamique collective qu'il conviendrait de généraliser pour que le cycle III de l'école primaire et la sixième de collège réussissent pleinement dans leur fonction conjointe et cohérente d'approfondissement voire de ré apprentissage des acquisitions essentielles.

C'est dans le cadre des évaluations-accompagnements d'équipes d'école (voir l'article du colloque 2003) que l'équipe de circonscription a pu envisager une réelle appropriation de nouveaux savoir-faire professionnels en alternant, après négociation avec les enseignants, des séances d'effectuation, d'observation et d'analyse de séances au sein d'une même problématique (même champ disciplinaire ou même phase d'une démarche d'apprentissage).

Mais c'est aussi dans le cadre d'une mutualisation des compétences professionnelles et spécifiques des professeurs des écoles et des collèges au sein d'une réflexion pédagogique nourrie par des formateurs des premier et second degrés que l'on pourra réellement envisager un accompagnement cohérent et efficace des élèves au sein d'un cursus scolaire.

ANNEXE 1 Classe mathématique Collège de Veynes/ école de St Etienne en Dévoluy. du 2 février au 6 février 2004.1

	Lundi 02/02		Mardi 03/02			Jeudi 05/02		Vendredi 06/02	
8h15-9h45	Travail sur les évaluations 6e	*Transport 9h 9h45 CM2*	Cours 6e	*Transport 9h 9h45 CM2*		Cours 6e	*Transport 9h 9h45 CM2*	Travail sur les évaluations 6e	*Transport 9h 9h45 CM2*
	Accueil et récréation		*Accueil et récréation*			*Accueil et récréation*		*Accueil et récréation*	
10h00-11h30	Atelier 1 Polysémie Groupes de besoin P		Atelier 3 La phrase mathématique et/ou, littérale Groupes P			Atelier 5 Programmes de construction, étude de textes Groupes de besoin P		Atelier 7 Programmes de construction, écriture mathématique Groupes de besoin P	
11h30 - 12h	Bilan / carnet de bord		Bilan / carnet de bord			Bilan / carnet de bord		Bilan / carnet de bord	
12h - 12h45	*Repas*		*Repas*			Repas		*Repas*	
12h45-13h30	Jeux de logique		Jeux de logique			Jeux de logique		Jeux de logique	
13h30-15h	Atelier 2 Numération 1 Groupes de besoin N		Atelier 4 Numération 2 Groupes de besoin N			Atelier 6 Lecture d'énoncés Groupes de besoin P		Atelier 8 Frise chronologique Groupes aléatoires	
15h-5h30	Bilan / carnet de bord		Bilan / carnet de bord			Bilan / carnet de bord		Bilan / carnet de bord	
15h00-15h30 *15h30-16h30*	Cours 6e	*Transport Retour CM2*	Cours 6e	*Transport Retour* CM2		Cours 6e	Transport *Retour CM2*	Récréation. Bilan avec les conseillers pédagogiques	Transport *Retour* CM2

Groupes P : *Polysémie (5 groupes) en fonction des évaluations. (polysémie, phrase, lecture)*
Groupes N : *Numération, (5 groupes) en fonctions des évaluations.*
Groupes aléatoires : *5 groupes (par ordre alphabétique*

A AMELIORER

Eviter les cours pour les collégiens de 8h15 à 9h45.
Améliorer les temps consacrés au bilan et au carnet de bord.
Etre plus au clair sur la notion de trace. Qui écrit quoi et pourquoi ?

ANNEXE 2

ATELIER LECTURE D'ÉNONCÉ

1/A la Cité des Fleurs, il y a 11 immeubles en construction: 8 immeubles de 4 étages et 3 immeubles de 6 étages.
Il y a 4 appartements par étage ;
7 fenêtres par appartement.
« Quel travail se dit le menuisier chargé de poser les fenêtres. Je suis sûr qu'il y a autant de fenêtres qu'au château de Versailles. »
Mais le menuisier ne savait peut-être pas qu'au château de Versailles il y a 2143 fenêtres.
Son affirmation est-elle juste ?

2/Voici une série d'informations données « en vrac ».
a) Regroupe celles qui pourraient appartenir à un même énoncé de problème.

b) Sur une grande feuille, organise ces informations et trouve
- Ce qu'elles te permettent de calculer;
- À quelle(s) questions tu pourrais finalement répondre.

c) Maintenant rédige correctement l'énoncé de ce problème et propose-le à un camarade. Comparez votre travail.

Prix d'un kg de farine	Heure d'arrivée au marché.	Prix d'un kg de myrtilles surgelées
1€50	9h30min	4€50
Prix d'un kg de beurre	Temps de préparation du gâteau aux myrtilles	Temps nécessaire pour aller de chez Mélanie au marché.
6€	25 min	30 min
Nombre d'œufs nécessaires pour faire un gâteau aux myrtilles pour 6 personnes	Heure de passage du livreur de la Redoute chez Mélanie.	Poids de farine nécessaire pour faire un gâteau aux myrtilles pour 6 personnes.
4	10h20	200g
Prix d'un bouquet de 12 tulipes	Prix du journal *Tévérama*	Temps de cuisson du gâteau aux myrtilles
5€	2€	35 min.
Prix d'une douzaine d'oeufs	Prix du même gâteau chez le pâtissier	Distance de la maison au marché.
2€	8€50	1250m
Prix d'un paquet de 6 yaourts	Heure à laquelle le gâteau doit être cuit	Poids de beurre nécessaire pour faire un gâteau aux myrtilles 6 personnes)
2€	11h20 min	125g
Nombre de personnes dans la famille	Nombre de personnes invitées	Temps passé chez le marchand de journaux.
6	12	10 min ;
Nombre de yaourts nécessaires pour faire un gâteau aux myrtilles pour 6 personnes.	Prix d'une bombe de crème Chantilly	Poids de myrtilles nécessaire pour un gâteau pour 6 personnes.
2	3€	0,5kg

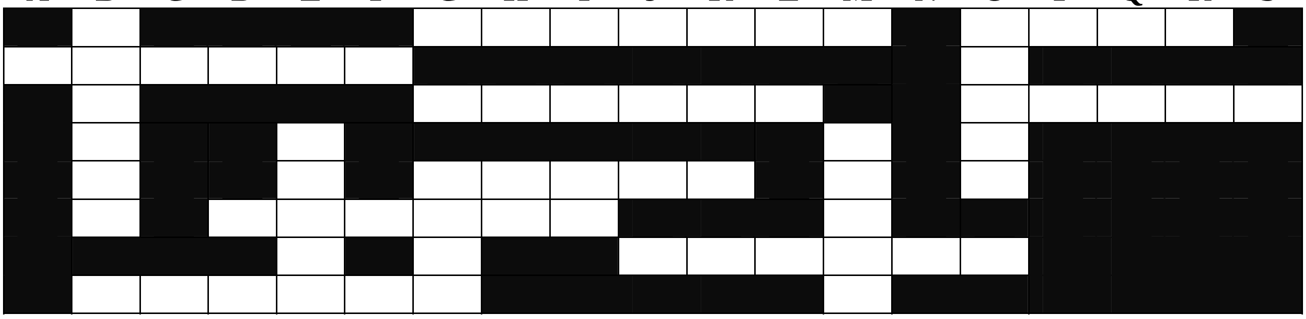
ANNEXE 2 (suite)

ATELIER VOCABULAIRE DE BASE DE LA GEOMETRIE

1) Activité 1 : mots croisés

- Consigne : remplis ces grilles de mots croisés grâce aux définitions qui te sont proposées.

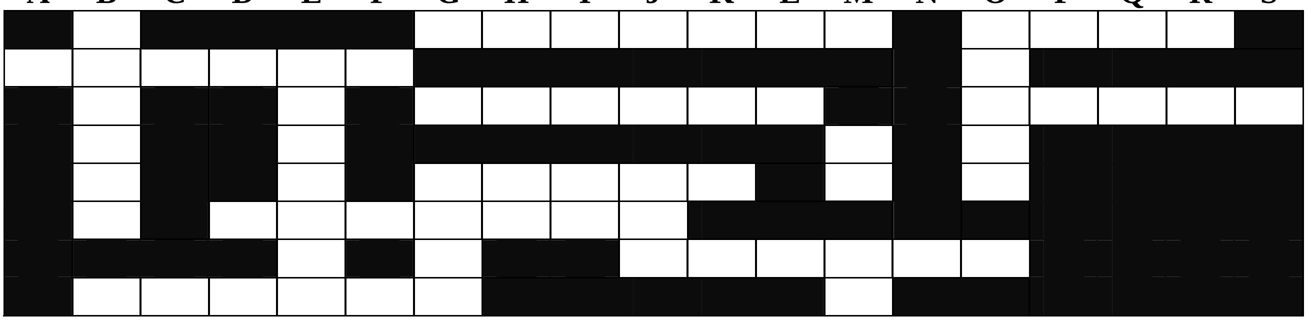
A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S



Horizontalement :
1. Au portique, entre la balançoire et le toboggan. Ce point t'oblige parfois à t'arrêter en pleine course ! **2.** Si ta chaise l'est, tu peux grimper dessus sans crainte. **3.** Ce n'est pas à gauche. On peut ranger des livres dessus dans la bibliothèque. **5.** Il y en a beaucoup dans les poissons de rivière, mais ici, il n'y en a qu'une ! **6.** Si tu t'y mets, tu gênes tout le monde.
7. Lequel des Hautes-Alpes préfèrerais-tu gravir ? **8.** Aéré, social ou commercial, tu aimes t'y retrouver avec tes amis.

Verticalement :
B. Le cinquième de « Harry Potter » vient de sortir. **E.** De suspension, il y en a trois, mais final, il n'y en a qu'un. **G.** De repos sur l'autoroute. **H.** Après le do dans la gamme.
I. Participe passé de « avoir ». **M.** Quand on n'a pas assez dormi, on aime en faire un petit après le petit déjeuner. **O.** A sauter, pour les petites filles ou les boxeurs.

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S



Horizontalement :
1. Quadrilatère ayant deux côtés non consécutifs parallèles appelés bases. Un polygone en a plusieurs, mais ici, il n'y en a qu'un ! **2.** Le cube en est un. **3.** Une infinité de points tous alignés. Segment qui a pour extrémités de centre d'un cercle et un point du cercle. **5.** Le cube en possède douze mais ici, le mot est au singulier. **6.** Le point d'un segment à égale distance de ses extrémités. **7.** Un quadrilatère en possède le même nombre que ses côtés (mot au singulier). **8.** Celui d'un cercle est unique.

Verticalement :
B. S'exprime souvent en m3. **E.** On utilise une lettre en majuscule pour le nommer. **G.** Mesure d'une surface. **H.** Désigne la longueur du segment **[RE]**. **I.** Désigne la longueur du segment **[EU]**. **M.** Le résultat d'une addition. **O.** Segment qui relie deux points d'un cercle.

ANNEXE 2 (suite)

ATELIER « LA PHRASE »

Activité 1 : **trier des démarches**

Les démarches suivantes sont toutes tirées de réponses d'élèves aux évaluations que vous avez passées récemment.

Découpez puis triez en tas devant vous les recherches des élèves en mettant ensemble celles qui se ressemblent. Expliquez vos choix.

Attention : ne vous occupez que de la démarche ; ne tenez pas compte de la réponse !

Des collégiens partent en Angleterre en autocar. Ils quittent leur collège un soir à 21h, et arrivent à Londres, le lendemain à 7h30. Combien de temps a duré le voyage ?

Écris toutes tes recherches : (calculs, frise, sauts...)

J'ai fais 20H aller à 7H30, J'ai trouvé 11H30 min

①

Réponse : Le voyage a duré 11H30 min

Écris toutes tes recherches : (calculs, frise, sauts...)

20h → 8h = 12h - 30 min = 11h 30 min

②

Réponse : ~~11h~~ Le voyage a duré 11h30 min

Écris toutes tes recherches : (calculs, frise, sauts...)

20H 4H00 24H 3H 3H 3H 6H 1H30 7H30

③

Réponse : Le voyage à durée 11H30

Écris toutes tes recherches : (calculs, frise, sauts...)

Je suis parti de minuit et j'ai compté jusqu'à 7H30 puis je suis parti de 20H jusqu'à minuit.

④

Réponse : 11 H30

Écris toutes tes recherches : (calculs, frise, sauts...)

20h + 4h = 24h

24h + 7h30 = 7h30

4h + 7h30 = 11h30

⑤

Réponse : ~~[illegible]~~ Le temps du voyage a duré 11h30.

ANNEXE 2 (suite)

Activité 2 : **trier des démarches (suite)**

Les démarches suivantes sont tirées des mêmes évaluations. Quelles remarques pouvez-vous faire en tenant compte de ce qui a été dit dans l'activité 1 ?

Écris toutes tes recherches : (calculs, frise, sauts...)

4,00
6,00
1,30
1,30

8 → 12 = 4h   12 → 6 = 6h   6 → 7h30 = 1,30h

Réponse : le voyage a duré 11h 30 min (18)

Écris toutes tes recherches : (calculs, frise, sauts...)

de 20H à ~~mi~~ 00H00 il y a 4 heure et de 00H00 à 7H30 il y a 7 heure 30

7h30 + 4h = 11h30

Réponse : le voyage dure 11H30. (19)

Écris toutes tes recherches : (calculs, frise, sauts...)

24 − 20 = 4   20|21|22|23|24|1|2|3|4|5|6|7,30

4 + 7,30 = 11,30   ~~10,30~~

Réponse : Le trajet a duré 11h 30mm (20)

Écris toutes tes recherches : (calculs, frise, sauts...)

le calcule le nombre l'heure pour arrivé à : 20 + 4 = 24

7,30 se calcule l'heure de trajet : 7,30 + 4 = 11,30

~~20h + 6h = 2h 5 fois plusieur quatcate~~

Réponse : Le voyage à durait 11h30 (21)

Activité 3 : **rédiger une réponse**

1) Observe maintenant les réponses 3, 4, 5, 11, 13, 14, 19 et 21 à ce même exercice.

Ces réponses contiennent toutes un résultat correct : 11h30. Cependant, elles ont toutes fait l'objet de remarques de la part du professeur qui les a corrigées. Pour chaque réponse, mets toi à la place du professeur et souligne les incorrections que tu peux constater.

ANNEXE 3

Évaluation lecture d'énoncés

Exercice 1:

Barre dans le texte les nombres qui ne sont pas directement utiles pour répondre à la question du problème.

Le portugais Magellan quitte l'Espagne le 10 août 1519 avec 256 hommes répartis sur 5 navires. Il contourne l'Amérique du Sud, découvre l'océan Pacifique, atteint les Indes le 26 janvier 1521.

En 1522, seulement 18 marins réussissent à rentrer en Espagne à bord de 2 navires. Le premier tour du monde est accompli.

Combien de marins de l'expédition ne sont pas rentrés en Espagne ?

Exercice 2:

Lors du tournoi de fin de d'année, les 4 sixièmes, 6°I-6°2-6°3 et 6°4 se sont affrontées sur une épreuve d'athlétisme.

La 6°4 est arrivée avant la 6°2 mais après la 6°3.

La 6°I a terminé bonne dernière.

Retrouve l'ordre d'arrivée de chaque classe et inscris tes réponses ci-dessous.

6°1 . ... 6°2 : .... 6°3 : .... 6°4: ....

Exercice 3

Camping des trois chênes	
Tarif par jour	
Adulte	8,50€
Enfant (jusqu'à 10 ans	4,25€
Emplacement pour une caravane	7,00€
Emplacement pour une toile de tente	4,00€
Animaux autorisés	gratuit

Pierre et Catherine, accompagnés de leur fille Léa de 7 ans, de leur fils Charles, 11 ans et de leur chien, installent leur caravane dans ce camping. Ils souhaitent y rester trois jours.

Combien paieront-ils pour une journée ?

Ecris tes calculs

Réponse : ....

Exercice 4 :

Au départ de Neuville à 7h30 min, M. Martin constate que le compteur kilométrique de sa voiture indique 34 528 km.

Il s'arrête 10 minutes dans une station essence. Il la quitte à 7 h 48 min et arrive à Bourgneuf 30 minutes plus tard Le compteur indique alors 34 558 km.

a) Ecris une question qui correspond au calcul: 7 h48 min- l0 min= 7h 38 min
   Question: ....
b) b) Ecris une question dont la réponse est 30 km.
   Question: ....

ANNEXE 3 (suite)

Évaluation frise chronologique du ....

Nom: .... Prénom : .... Classe: ....

1/ Place, au mieux, les six dates suivantes sur la frise chronologique.

La Révolution Française de **1789** - Le règne de Charlemagne, empereur de Rome au **IX**^{e} siècle - La naissance de Jésus Christ, en l'**an 0** - La fondation de Massilia (Marseille) **en l'an 600 avant Jésus Christ** - Ton année de naissance - La Première Guerre Mondiale de **1914 -1918.**

2/ Résous ce problème en utilisant la méthode de ton choix.
Manu et Martin partent en voyage.
Quand Manu et Martin quittent Lyon, il est 7h25min. Ils mettent 2h55min pour aller à Clermont-Ferrand, puis 4h25min pour atteindre Poitiers, Martin dit alors : « Pour aller de Poitiers à Royan, il faut encore trois heures et demie. » « Que c'est long ! » soupire Manu en se replongeant dans la lecture de sa bande dessinée.

A quelle heure Martin et Manu arriveront-ils à Royan ?

Écris toutes tes recherches : (calculs, frise, sauts...)

Réponse :

ANNEXE 3 (suite)

Évaluation numération romaine du ....

Nom: .... Prénom : .... Classe: ....

1/ Écris les nombres suivants en lettres :

I .... XXIII ....
III .... XXXVII ....
VI .... XL ....
IX .... LX ....
XII .... CXXII ....
XIV .... CMXCIX ....

2/ Écris les nombres suivants en chiffres romains :

2 .... 51 ....
4 .... 101 ....
7 .... 522 ....
11 .... 1499 ....
27 .... 1500 ....

3/ Classe ces Rois de France dans l'ordre chronologique, du premier régnant au dixième :

Louis XIII le Juste	**1er**	
Louis XVI	**2ème**	
Louis XIV le Grand	**3ème**	
Louis IX (Saint Louis)	**4ème**	
Louis XI	**5ème**	
Louis XVIII	**6ème**	
Louis VII le Jeune	**7ème**	
Louis VI le Gros	**8ème**	
Louis VIII le Lion	**9ème**	
Louis XV le Bien-Aimé	**10ème**	

ANNEXE 3 (suite)

Évaluation lecture d'énoncés

Exercice 1:

Barre dans le texte les nombres qui ne sont pas directement utiles pour répondre à la question du problème.

Le portugais Magellan quitte l'Espagne le 10 août 1519 avec 256 hommes répartis sur 5 navires. Il contourne l'Amérique du Sud, découvre l'océan Pacifique, atteint les Indes le 26 janvier 1521.

En 1522, seulement 18 marins réussissent à rentrer en Espagne à bord de 2 navires. Le premier tour du monde est accompli.

Combien de marins de l'expédition ne sont pas rentrés en Espagne ?

Exercice 2:

Lors du tournoi de fin de d'année, les 4 sixièmes, 6°I-6°2-6°3 et 6°4 se sont affrontées sur une épreuve d'athlétisme.

La 6°4 est arrivée avant la 6°2 mais après la 6°3.

La 6°I a terminé bonne dernière.

Retrouve l'ordre d'arrivée de chaque classe et inscris tes réponses ci-dessous.

6°1 . ... 6°2 : .... 6°3 : .... 6°4: ....

Exercice 3

Camping des trois chênes **Tarif par jour**	
Adulte	8,50€
Enfant (jusqu'à 10 ans	4,25€
Emplacement pour une caravane	7,00€
Emplacement pour une toile de tente	4,00€
Animaux autorisés	gratuit

Pierre et Catherine, accompagnés de leur fille Léa de 7 ans, de leur fils Charles, 11 ans et de leur chien, installent leur caravane dans ce camping. Ils souhaitent y rester trois jours.

Combien paieront-ils pour une journée ?

Ecris tes calculs

Réponse : ....

Exercice 4 :

Au départ de Neuville à 7h30 min, M. Martin constate que le compteur kilométrique de sa voiture indique 34 528 km.

Il s'arrête 10 minutes dans une station essence. Il la quitte à 7 h 48 min et arrive à Bourgneuf 30 minutes plus tard Le compteur indique alors 34 558 km.

c) Ecris une question qui correspond au calcul: 7 h48 min- l0 min= 7h 38 min
   Question: ....
d) b) Ecris une question dont la réponse est 30 km.
   Question: ....

ANNEXE 3 (suite)

Exercice 5 :

Relie chaque calcul au morceau de texte correspondant, **reconstitue l'énoncé** du problème puis rédige sa solution.

et 2 cafés à 1, 40 €	4 x 2,35 = 9,40
Le barman calcule le montant de la commande.	20 - 12,20 = 7,80
A la terrasse d'un café, Gaétane commande 4 sodas à 2,35 €	2,80 + 9,40 = 12,20
Gaétane lui tend un billet de 20 €; combien lui redonne-t-il ?	2 x 1,40 = 2,80

....
....
....
....

Exercice 6 :

Voici des informations et des calculs.
Tu vas devoir t'en servir pour compléter l'énoncé d'un problème.

Prix indiqués dans une boulangerie :

Croissant: 0,61 € Eclair au chocolat: 1,22 € Tarte: 5,50 € Baguette: 0,67 €-

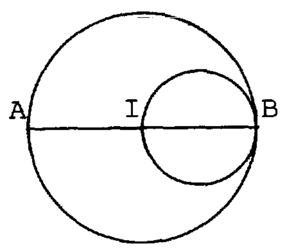
Calculs effectués : (2 x 0,61) + (4 x 1,22) = 6,10
10 - 6,10 = 3,90

Complète l'énoncé en n'oubliant pas les questions correspondants aux calculs effectués.

Simon entre dans une boulangerie avec un billet de 10 euros..
....
....
....
....

Evaluation programme de construction

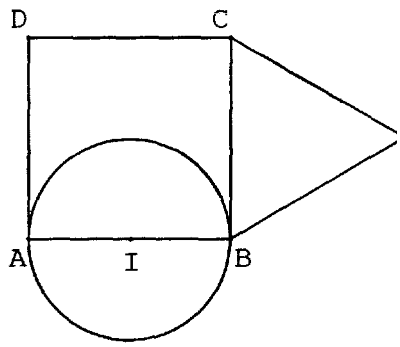
Exercice 1 :



Complète le programme de construction de la figure :
Place deux .... A et B tels que AB = ... cm.
Place le .... I du segment [AB].
Trace le cercle de ....1 et de .... [AI].
Trace le cercle de .... [IB].

Exercice 2 :

Rédige un texte qui permet à quelqu'un qui ne voit pas la figure de la tracer.



....
....
....
....
....
....

ANNEXE 4

Bilan enfants.
Travail collectif des CM2.

Positif	Négatif
• Différents professeurs rencontrés. • On s'habitue aux changements de salles; • On s'habitue au self. • On fait de nouvelles rencontres. • On retrouve nos anciens camarades ; (6è, 5è, 4è..) • Travail très intéressant au niveau des maths et du français. • C'est bien d'être avec les 6èmes. (« Ce qu'ils savent, ce que nous savons,... c'est assurant. »)	• Comportement de certains élèves Façade: je ne travaille pas, je m'en moque. Agitation : je dis n'importe quoi. Se faire remarquer: En faisant l'idiot, c'est plus facile ! ! • Certains ateliers étaient trop longs pour rester concentrés. • Les cigarettes dans les toilettes. • Les 6ème ont pas leur matériel. • Ils ont tout pour réussir mais ils font les idiots. • Non respect du matériel collectif.

CM du Dévoluy

Classe mathématique, évaluations de départ.

											Phrase					
Prénom	Lecture	%	Procédu	%	Chronol	%	Numéra	%	N.Roma	%	Voca	%	Phrase	%	Chrono	%
Cylia	14	46,67	3	30,00	7	46,67	6	30,00	12,5	39,06	1	8,33	12	52,17	1	14,29
Maëlle B	28	93,33	8	80,00	15	100,00	16	80,00	29,5	92,19	8	66,67	21	91,30	7	100,00
Florian	18	60,00	5	50,00	11	73,33	10	50,00	24	75,00	7	58,33	16	69,57	0	0,00
Carole	25	83,33	6	60	6	40	16	80	28,50	89,06	8	66,67	17,00	73,91	7	100
Estelle	27	90,00	5	50,00	5	33,33	15	75,00	23,5	73,44	8	66,67	17	73,91	7	100,00
MaëlleL	26	86,67	5	50,00	5	33,33	14	70,00	24,5	76,56	4,5	37,50	16	69,57	7	100,00
Loïc	10	33,33	2	20,00	6	40,00	8	40,00	18,5	57,81	2	16,67	14	60,87	0	0,00
Marion	27	90,00	2	20,00	7	46,67	15	75,00	26	81,25	6	50,00	19	82,61	7	100,00
Charlie	22	73,33	4	40,00	7	46,67	12	60,00	28	87,50	2	16,67	13	56,52	0	0,00
Damien	16	53,33	5	50,00	6	40,00	14	70,00	30	93,75	7	58,33	13	56,52	7	100,00
Florent	16	53,33	3	30,00	3	20,00	4	20,00	4	12,50	1	8,33	14	60,87	7	100,00
CLASSE	20,82	69,39	4,36	43,64	7,09	47,27	11,82	59,09	22,64	70,74	4,95	41,29	15,64	67,98	4,55	64,94

Réussite aux évaluations de MARS.

											Phrase					
Prénom	Lecture	%	Procédu	%	Chronol	%	Numéra	%	.Romain	%	VOCA	%	Phrase	%	Chrono	%
Cylia	16	53,33	4	40,00	6	40,00	6	30,00	7,5	23,44	5	41,67	17	73,91	6	85,71
Maëlle B	26	86,67	8	80,00	14	93,33	18	90,00	30,5	95,31	11	91,67	22	95,65	7	100,00
Florian	18	60,00	6	60,00	12	80,00	10	50,00	29,5	92,19	10	83,33	12	52,17	4	57,14
Carole	29	96,67	8	80,00	8	53,33	12	60,00	32	100,00	8	66,67	17	73,91	6	85,71
Estelle	28,5	95,00	8	80,00	12	80,00	19	95,00	30,5	95,31	10	83,33	19	82,61	7	100,00
Maëlle L	24	80,00	6	60,00	6	40,00	11	55,00	26,5	82,81	7	58,33	15	65,22	7	100,00
Loïc	14	46,67	3	30,00	6	40,00	10	50,00	18,5	57,81	6	50,00	20	86,96	4	57,14
Marion	29	96,67	7	70,00	7	46,67	16	80,00	29,5	92,19	10	83,33	16	69,57	7	100,00
Charlie	26,5	88,33	7	70,00	13	86,67	12	60,00	29,5	92,19	5	41,67	13	56,52	0	0,00
Damien	26	86,67	8	80,00	13	86,67	10	50,00	31	96,88	9	75,00	16	69,57	4	57,14
Florent	19	63,33	4	40,00	0	0,00	5	25,00	15,5	48,44	5	41,67	17	73,91	2	28,57
CLASSE	23,27	77,58	6,27	62,73	8,82	58,79	11,73	58,64	25,50	79,69	7,82	65,15	16,73	72,73	4,91	70,13

Communication D1

UN DISPOSITIF DE FORMATION DES PE2 EN MATHÉMATIQUES SUR LE SITE DE BLOIS, IUFM D'ORLÉANS-TOURS.

Jean-Claude Lebreton,
Patrick Wieruszewski
IUFM d'Orléans-Tours, site de Blois (41).

Résumé :

Ce dispositif est basé sur un contrat entre les professeurs formateurs et les stagiaires. Ce contrat se compose de huit principes directeurs et d'une organisation originale des heures de formation.

Pour l'essentiel, des groupes de PE2 animent, dans certaines conditions, des séances de mathématiques, avec un accompagnement des formateurs.

Pour plus de précisions, on peut consulter le site : *jclebreton.ouvaton.org*

PLAN DE FORMATION :

Il s'agit d'un résumé.

Cinquante-cinq « heures-stagiaires » sont allouées aux mathématiques dans le plan de formation des PE2. Trois dispositifs accompagnent cette dotation horaire : des Cours Magistraux (5 heures **CM**), des séances de Travaux Dirigés (40 heures **TD**, dont 10 « réservées » à la maîtrise de la langue) et des séances de Travaux Pratiques (10 heures **TP**).

1. Les heures **CM** (*assurées par A. Pressiat*) ont pour fonction de présenter et d'exemplifier des modélisations de l'enseignement des mathématiques. Les modèles qui sont référencés sont :
   - La Théorie des Situations de G. Brousseau.
   - La Théorie Anthropologique du Didactique de Y. Chevallard.

2. Les heures **TP** (*assurées par JCL et PW*) se passent dans la salle informatique où nous présentons aux stagiaires des logiciels de **géométrie dynamique** (***Cabri-Géomètre***, ***Geonext*** et ***Declic***), avec comme finalité de préparer une séance utilisant ces outils.

3. Les heures **TD** (*assurées par JCL, PW et les PE2*). C'est pendant ces séances que notre dispositif se développe.
   - En début d'année, nous présentons les conceptions de l'apprentissage, en liaison avec les **CM** ; puis nous animons un premier **TD** sur les mathématiques au cycle I.
   - A partir du mois de décembre débutent les animations de séance par les groupes PE2.

CONTRAT ENTRE LES FORMATEURS ET LES PROFESSEURS DES ECOLES STAGIAIRES.

L'objet de la communication a consisté à expliciter les principes directeurs qui nous ont conduits à mettre en place ce dispositif de formation (cf. annexe).

La partie importante, non toujours visible, dans notre contrat est l'accompagnement des stagiaires dans leur travail effectif de préparation du **TD**.

- Le choix du « sujet » à étudier par les stagiaires est libre : nous leur en proposons quelques-uns, a priori, mais il est possible d'ouvrir la liste des thèmes.
- Une fois le « sujet » choisi, nous pouvons commencer notre accompagnement qu'on peut résumer avec le tableau ci-après :

Premier « rendez-vous » :	**Deuxième « rendez-vous » :**	**Troisième « rendez-vous » :**
Il s'agit d'un premier contact avec le groupe. Ce contact intervient rapidement, dès le choix du « sujet ». Dans la plupart des cas, les deux formateurs sont présents. Nous fournissons des pistes de travail, des références bibliographiques[1], le cadre de l'animation est fixé, en relation avec la fiche contrat. Une date est négociée, si possible en relation avec les stages en responsabilité. Le travail « en autonomie » des stagiaires peut alors commencer.	Il a lieu, en général, une semaine avant l'animation de la séance. Il a pour but de faire le point sur ce qui est prévu. Les stagiaires nous indiquent sur quels points ils ont choisi de faire travailler leurs collègues[2]. La question du besoin en matériel est aussi débattue. On aborde aussi la question de l'évaluation par les « auditeurs » de la séance.	L'objet de ce rendez-vous est de se mettre au clair sur ce qui va figurer dans la disquette ou le CD-Rom que les stagiaires vont nous rendre. Nous avons alors un débat « à froid » sur le **TD**. La question qui guide notre débat est : « ***Pensez-vous que vos collègues PE2 sont en possession de « pistes de travail » pour l'animation d'une séquence en classe sur le sujet traité ?*** ». Autre point important : le document rendu au professeur doit être lisible et utilisable par des PE2 qui n'ont pas assisté à la séance.

- Globalement, ces **TD** s'étalent sur la période allant de <u>décembre à mars</u>. En général, deux séances **TD** sont en parallèle sur l'emploi du temps. Une semaine avant, les PE2, non animateurs, ont la liberté de choisir le **TD** qui leur convient, parmi les deux qui seront traités. À cet effet, une fiche d'inscription est affichée à l'accueil. Ce qui fait que chaque PE2, en plus d'avoir été une fois animateur, a l'occasion de participer à sept ou huit **TD** en tant qu'auditeur. Les professeurs participent activement au **TD**, en tant qu'auditeur et veillent à la qualité scientifique des propos tenus et des engagements des animateurs.

- Cette année 2004-2005, nous essayons d'associer les maîtres-formateurs (*des cycles II et III pour le moment*) à notre dispositif, en les invitant à venir assister à un des trois rendez-vous et à la séance **TD**.

- En ce qui concerne l'évaluation du module de mathématiques de l'année PE2, nous validons positivement tout PE2 qui a participé à :

[1] À ce propos, la bibliographie du CONCERTUM sert beaucoup, d'autres ressources sont aussi indiquées.
[2] À ce niveau, il nous faut nous assurer que ce qui est prévu « tient » dans les conditions du **TD**.

1. La préparation de l'animation d'une séance (travail en équipe, lecture des indications bibliographiques, …).
2. L'animation proprement dite.
3. La mise en forme d'un document électronique[3].

🗗 Toutes les productions se trouvent ensuite sur le site référencé page précédente[4].

[3] Se reporter à la fiche contrat.

[4] Malgré une relecture des productions des PE2, quelques coquilles, erreurs et fautes d'orthographe subsistent encore !

Annexe

Principes directeurs et organisation des 50 heures de formation en pédagogie et didactique des mathématiques pour l'année 2004-2005.

Principes :

1) Quel que soit l'horaire imparti, on ne peut couvrir tout ce qu'il faut enseigner à l'école primaire : il **faut donc faire des choix de contenus**.

2) Des recherches et des travaux ont été mené en didactique des mathématiques, en épistémologie et en pédagogie dans divers domaines : un futur enseignant PE doit savoir que ces travaux existent et savoir où les trouver pour un approfondissement éventuel.

3) Les changements de programme sont inéluctables : changement de ministre, de gouvernement, de majorité, ... Ce qui nous intéresse, c'est l'aspect diffusion des différents travaux et documents officiels. La **didactique des mathématiques,** qui a pour objet d'étudier plus particulièrement les phénomènes liés à l'enseignement et à l'apprentissage, est une branche récente qui n'a qu'une trentaine d'années d'existence et de nombreux domaines concernant l'enseignement des mathématiques sont encore à étudier.

4) Ceux qui ont effectué une année de PE1 sont, en général, frappés par la diversité des pratiques de classe. Cela peut être dû à la personnalité du maître, à ses choix professionnels et éthiques. Mais cela est aussi dû au fait, outre les conceptions sur l'apprentissage, que plusieurs programmations de l'étude d'un objet mathématique sont possibles ainsi que plusieurs progressions. Il y a, certes, des passages obligés (on ne peut, par exemple, apprendre la multiplication avant d'avoir vu l'addition !) mais ce ne sont pas toujours des "pré requis", au sens usuel du terme : on peut ne pas connaître ses tables d'addition et pouvoir comprendre la multiplication.

5) Des compétences variées vont être travaillées : préparation, réalisation, analyses de séquences, débats entre pairs, analyse de pratiques, ... En mathématiques, de nombreux documents existent (manuels et livres du professeur, littérature professionnelle, brochures spécialisées, CD Rom et logiciels, ...) permettant de travailler en classe. Pour la plupart, ils sont disponibles au CRD.

6) <u>Proverbe chinois</u> :

"J'entends et j'oublie
Je vois et je me souviens
Je fais et je comprends".

7) Travailler en équipe, s'insérer dans un projet sont des compétences qui seront d'autant plus développées qu'elles auront été cultivées dès la formation initiale.

8) La formation ne se termine pas à la fin de l'année de PE2. Un accompagnement au premier poste est prévu les deux années suivantes. Lectures personnelles et formation continuée prolongent ce dispositif.

Organisation de l'année :

Les séances de mathématiques seront de plusieurs types :

1) Quelques séances seront animées par les formateurs en début d'année sur les conceptions d'apprentissage, sur les mathématiques en maternelle et sur la maîtrise de la langue en co-animation avec les formateurs de français.

2) Trois cours magistraux (**CM**) seront dispensés pendant le premier trimestre.

3) Huit séances seront animées par les PE2 dont une sur *"mathématiques et français transversal"* (voir modalités ci-dessous).

4) En cours d'année, des séances seront consacrées à l'étude de logiciels d'apprentissage, de didacticiels et de logiciels de géométrie dynamique.

Séances animées par les PE2 :

1) Il est demandé de constituer des équipes de trois à cinq PE2 qui travailleront autour d'un thème précis, à partir de documents fournis par les formateurs ou recherchés par les membres du groupe.

2) Chaque groupe devra animer une séance durant 2 heures : moments courts d'exposé, travaux proposés aux collègues : analyse de manuels, analyse d'activités, mises en situation, traces écrites de toute nature, ...

3) Dès sa constitution, chaque groupe rencontre un formateur pour obtenir des références bibliographiques et avoir un premier échange.

4) Ensuite, il rencontrera un formateur au moins une fois avant son animation pour présenter son projet et débattre des modalités et contenus retenus.

A l'issue de la séance, chaque stagiaire devrait pouvoir repartir avec des idées d'activités et des conseils pour la classe.

5) Enfin, chaque groupe devra laisser une trace informatique, complétée éventuellement de documents écrits, qui sera mise à disposition des autres collègues sur le site de l'IUFM ou sur un CD-ROM disponible en fin d'année scolaire.

Ne pas oublier d'inclure une bibliographie ciblée, l'intérêt de chaque ressource devant être commenté par quelques lignes.

6) Les critères d'évaluation sont les suivants (*cf. plan de formation, § Évaluation et validation des modules d'enseignement*) :

- ***avoir préparé en équipe l'animation de la séance.***
- ***avoir lu les références bibliographiques minimales données.***
- ***avoir animé une séance.***
- ***avoir rédigé un document informatique, prenant aussi en compte le déroulement de la séance.***

7) Thèmes proposés :

- **Les nombres décimaux au cycle 3.**
- **Les problèmes additifs et soustractifs, du CP au CM2.**
- **La proportionnalité.**
- **Les problèmes multiplicatifs et de division.**
- **La division au cycle 3.**
- **La géométrie (domaine à préciser par chaque groupe).**
- **La numération.**
- **Problèmes et Situations-Problèmes.**
- **Mathématiques en maternelle.**
- **Jeux et mathématiques.**

- **Utilisation de logiciels.**
- **L'écrit et l'oral en mathématiques.**
- **Le calcul mental.**
- **Grandeurs et mesures, …**

9) Bilan de fin de formation :

A l'issue de l'année, chacun devra avoir amélioré ses compétences en pédagogie et en didactique des mathématiques.

Par exemple, être capable de :

a) citer les principales ressources (ouvrages, sites Web, ...) concernant l'enseignement des mathématiques et susceptibles d'être utiles dans son activité professionnelle.

b) présenter les lignes directrices de l'enseignement de la numération, l'enseignement des nombres décimaux, l'enseignement des opérations élémentaires, des exemples d'activités qui permettent d'aborder le programme de géométrie à l'école, établir des progressions argumentées.

c) donner les caractéristiques d'une situation-problème, d'un problème ouvert, …

d) élaborer et exploiter une situation d'évaluation, évaluer le travail dans la classe, diriger la rédaction de traces écrites.

e) …

RAISONNEMENT PLAUSIBLE VERSUS RAISONNEMENT DE NÉCESSITÉ : OÙ EST LA FRONTIÈRE ?

Richard CABASSUT

Formateur à l'IUFM d'Alsace
richard.cabassut@alsace.iufm.fr

Résumé :
Cet article présente l'une des facettes d'un travail de thèse en cours, sous la direction de B.PARZYSZ. L'auteur s'intéresse à deux types de raisonnements, le “ raisonnement plausible ” et le “ raisonnement de nécessité ” et s'interroge sur les modalités de passage de l'un à l'autre. Alors que le raisonnement dit “ de nécessité ” est reconnu car de la forme : *A est vrai et (si A alors B) vrai, donc B est nécessairement vrai*, le raisonnement dit “ plausible ” est moins étudié : *B est vrai et (si A alors B) vrai, donc A est davantage plausible*.
Il montre la présence de ces deux types de raisonnements dans les programmes, des outils pédagogiques et des productions d'élèves de l'école primaire. Il analyse que ce qui est souvent un raisonnement de nécessité pour l'élève n'est qu'un raisonnement plausible pour le mathématicien. Il s'interroge sur le rôle que doit jouer le professeur dans ces situations.

Éclairage théorique et questionnement

1.1 Argumentation et démonstration

En mathématique, l'école primaire est le lieu de l'initiation à l'argumentation alors que le collège est le lieu de l'initiation à la démonstration. Commençons par différencier ces deux notions.

1.1.1 pour les non-mathématiciens

Pour [Perelman 1999, pp. 1-3], “ l’argumentation est la manière de présenter et de disposer les arguments ; le terme désigne aussi l’ensemble des arguments qui résulte de cette présentation. En logique formelle, dans son sens technique, le mot “argument” indique une valeur déterminée, susceptible d’être substituée à une variable dans une fonction. Dans son sens usuel, l’argument est soit un raisonnement destiné à prouver ou à réfuter une proposition donnée, soit une raison avancée à l’appui d’une thèse ou contre celle-ci. Dans ce sens, on opposera l’argument à la preuve, et l’argumentation à la démonstration. C’est uniquement dans ce cas que l’argumentation présente une spécificité méritant une étude particulière. [...] L’étude de l’argumentation analysera les techniques discursives permettant de provoquer ou d’accroître l’adhésion d’un auditoire aux thèses qu’on présente à son assentiment. Cette définition met en évidence ce qui différencie profondément l’argumentation de la démonstration. Celle-ci est une déduction visant à prouver la vérité ou la probabilité calculable de sa conclusion, à partir de prémisses admises comme vraies ou probables. Par opposition à la démonstration, qui peut se présenter sous la forme d’un calcul, l’argumentation vise à persuader ou à convaincre, et n’est concevable que dans un contexte psychosociologique. Alors que la démonstration se déroule d’une façon abstraite, indépendamment de tout autre contexte que celui du système, qu’elle est correcte ou incorrecte, étant ou non conforme aux règles d’inférence du système, l’argumentation recourt à des arguments, relevants ou irrelevants, plus ou moins forts, plus ou moins adaptés à l’auditoire auquel ils s’adressent. Le raisonnement argumentatif se fonde non sur des vérités impersonnelles, mais sur des opinions concernant des thèses de toute espèce : le champ d’application de la théorie de l’argumentation dépasse ainsi largement celui de la théorie de la démonstration, car les argumentations portent sur tout ce qui peut être objet d’opinion, jugement de valeur ou jugement de réalité, l’adéquation d’une théorie ou l’opportunité d’une décision. Une démonstration fournit des preuves contraignantes, une argumentation présente des raisons pour ou contre une thèse déterminée ”. Dans cette approche la démonstration remplit une fonction de preuve par des raisonnements déductifs contraignants, à l’intérieur d’un système, que nous qualifierons de raisonnements de nécessité, alors que l’argumentation remplit une fonction de persuasion par des raisonnements, plus ou moins convaincants pour un auditoire, que nous qualifierons de raisonnements plausibles.

1.1.2 Pour des didacticiens des mathématiques

Par exemple, pour Houdebine [1990, p.26], une argumentation est un “ texte ou discours dont le but est de convaincre un partenaire. Le texte contient des arguments, c’est-à-dire des affirmations destinées à convaincre et ces arguments sont liés par des mots qui structurent le texte en vue de convaincre. L’argumentation dépend du partenaire à laquelle elle s’adresse. Elle n’a vraiment de sens que s’il y a quelqu’un à convaincre ” ; une démonstration est “ un texte argumentatif spécifique des mathématiques (structure particulière, arguments pris parmi des résultats déjà énoncés), dont la sémantique est liée à la résolution de problème et à la preuve ”.
Pour Duval [1992, p. 42-43], “ une argumentation n’est pas une démonstration [...] Pour qu’un raisonnement puisse être une démonstration, il est nécessaire qu’il soit un raisonnement valide[1]. L’argumentation, au contraire, est un raisonnement qui n’obéit pas à des contraintes de validité mais à des contraintes de pertinence. Cette différence est classiquement exprimée par le fait que l’une aurait pour objectif la vérité et l’autre viserait la vraisemblance et la conviction d’autrui ou de soi-même ”. Alors que pour Houdebine une démonstration peut être une argumentation, c’est impossible pour Duval. Cependant chez les deux auteurs se retrouve le fait qu’une démonstration est constituée de raisonnements de nécessité et ne peut pas être constituée de raisonnements de plausibilité. Par contre, dans une argumentation, il est possible d’utiliser un raisonnement de plausibilité pour accroître la conviction, la vraisemblance ou la pertinence.
Pour [Ermel 1999, p.42] “ dans une argumentation les arguments ne sont donc pas reliés en fonction d’un lien logique formalisé, mais en fonction de leur contenu. D’une certaine manière, le raisonnement déductif s’apparente à un calcul, l’argumentation à un discours ”. Voilà ici, pour la démonstration, les raisonnements de nécessité qui correspondent à la nécessité de la logique ou du calcul. Mais pour Ermel, l’argumentation est orientée vers le sémantique alors que la démonstration s’oriente vers le syntaxique.

[1] A propos de la validité d’un raisonnement, Duval [1995, p.212] précise : “ la validité d’un raisonnement dépend du respect de règles pour l’organisation des propositions entre elles, et non pas du contenu des propositions ”.

1.1.3 Y a-t-il une argumentation mathématique ?

On peut se poser la question de l'existence ou de la spécificité d'une argumentation mathématique.

[Balacheff 1999 a, p.1] s'interroge : “ L'argumentation a-t-elle une place dans l'enseignement des mathématiques ? Certains répondent positivement, et on voit même déjà l'argumentation apparaître explicitement comme objet d'enseignement dans certains curricula. Je voudrais proposer ici au débat la thèse selon laquelle il n'y aurait pas de continuité ni celle de rupture entre argumentation et démonstration (ou preuve en mathématique), mais une relation complexe et constitutive du sens de chacune : l'argumentation se constitue en un obstacle épistémologique à l'apprentissage de la démonstration, et plus généralement de la preuve en mathématique. Comprendre la démonstration c'est d'abord construire un rapport particulier à la connaissance en tant qu'enjeu d'une construction théorique, et donc c'est renoncer à la liberté que l'on pouvait se donner, en tant que personne, dans le jeu d'une argumentation. Parce que ce mouvement vers la rationalité mathématique ne peut être accompli qu'en prenant effectivement conscience de la nature de la validation dans cette discipline, il provoquera la double construction de l'argumentation et de la démonstration. L'argumentation dans la pratique commune est spontanée, comme le soulignent ceux qui travaillent le discours. Forgée dans les échanges familiaux, dans la cour de l'école, dans des circonstances multiples et souvent anodines, la compétence argumentative de l'élève est à l'image des pratiques familières : elle va de soi. La classe de mathématique est l'un des lieux où l'existence de cette pratique peut être révélée parce que soudain elle apparaît inadéquate (mais les situations pour susciter cette prise de conscience sont difficiles à construire). Ce serait même à mes yeux une erreur de caractère épistémologique que de laisser croire aux élèves, par quelque effet Jourdain, qu'ils seraient capables de production de preuve mathématique quant ils n'auraient qu'argumenté ”.

Pour [Ermel 2001 a, p.30-31] il existe une argumentation mathématique : “ argumenter, c'est d'abord justifier ce qu'on dit, c'est-à-dire étayer un énoncé par un autre énoncé [...] Il ne faut pas perdre de vue la spécificité de l'argumentation en mathématiques où il s'agit d'établir la vérité d'une proposition, dans un domaine donné, en faisant appel à des connaissances et à des raisonnements, et où des règles du débat sont différentes puisqu'il s'agit d'administrer la preuve d'une proposition […] Apprendre à argumenter en mathématiques, c'est d'abord être capable de se dégager d'arguments extra-mathématiques. La vérité d'une proposition ne dépend pas du statut, social ou scolaire, de son énonciateur, une proposition n'est pas vraie parce que c'est un bon élève qui l'a formulée, mais pour de toutes autres raisons, parce qu'elle repose sur des connaissances mathématiques reconnues et acceptées de tous ”.

“ L'argumentation en mathématique (s'appuyant sur un corpus de définitions et de théorèmes bien établis), doit comporter, comme argumentation heuristique, des “ sous-programmes ” de raisonnement valide, même si on ne sait pas encore relier ces différents sous-programmes pour arriver à un arbre déductif complet qui corresponde à une démonstration. Selon nous l'argumentation mathématique consiste à établir au moyen de raisonnements la valeur de vérité d'une proposition mathématique (ce qui suppose que ces raisonnements sollicités soient reconnus comme licites lors des débats constitués par la classe). Ce travail d'argumentation mathématique se distingue donc de celui de l'argumentation tel qu'il peut se développer dans d'autres domaines par son cadre et son objet, mais aussi par les critères qui permettent d'évaluer les propositions ” [Ermel 1999, p.43].

[Pedemonte 2002, p.291-292] précise : “ L'argumentation en mathématiques a toujours une finalité, un objectif qui détermine son orientation [...] L'argumentation mathématique doit être justificative [...]Le caractère justificatif de l'argumentation mathématique s'exprime dans sa forme : le raisonnement, qui est “ la démarche d'une inférence explicite qui dérive l'affirmation d'une proposition à partir d'une ou plusieurs propositions données ” (Duval, 1995, p.209). C'est pourquoi l'argumentation en mathématiques doit convaincre, et non persuader. Elle doit modifier les opinions en faisant appel à la raison. Elle doit être acceptée par un auditoire universel et non particulier [...] Le but d'une démonstration est de valider (qui est plus que convaincre), et elle s'adresse à un auditoire universel (l'ensemble des mathématiciens). Finalement, la démonstration est une argumentation particulière ”.

Après avoir montré la variété de points de vue, nous allons proposer une distinction entre argumentation et démonstration reposant sur la distinction entre raisonnement plausible et raisonnement de nécessité. Nous empruntons cette dernière distinction à Toulmin.

1.2 Arguments de nécessité et arguments de plausibilité

Toulmin propose “ la distinction entre arguments nécessaires et probables : c'est-à-dire entre les arguments dont la garantie nous autorise à avancer sans équivoque la conclusion (qui peut donc être accompagnée du qualificatif modal “ nécessairement ”) et ceux dont la garantie ne nous habilite qu’à tirer une conclusion provisoire (nuancée par le mot “ probablement ”), sujette à de possibles exceptions (“ vraisemblablement ”) ou conditionnelle (“ pourvu que… ”) ”. [Toulmin 1993, trad. P.d.B., p.184]. Cette distinction rappelle la distinction d’Aristote entre les preuves analytiques et les preuves dialectiques. Les démonstrations mathématiques utilisent uniquement des arguments nécessaires qui expriment des conditions suffisantes pour la réalisation de la conclusion, et s’interdisent d’utiliser des arguments probables qui expriment des conditions nécessaires. Du fait de cette ambiguïté du mot “ nécessaire ” nous préfèrerons l’expression “ argument de nécessité ” où la nécessité se réfère aux conditions “ suffisantes ” pour réaliser la conclusion (et non pas aux conditions “ nécessaires ” de réalisation de la conclusion). De même nous préfèrerons le mot “ plausible ” au mot “ probable ” pour trois raisons essentielles : d’une part le mot “ probable ” est très connoté en mathématiques et l’usage de Toulmin dépasse largement cette connotation ; d’autre part le mot “ plausible ” utilisé en mathématiques par Polya [1958] correspond bien à des raisonnements dont la conclusion n’est pas nécessaire sans connotation probabiliste ; enfin dans le cadre d’une comparaison avec l’Allemagne (qui ne fait pas l’objet de cet article) le terme “ plausible ” correspond à des mentions répétées dans les programmes allemands [Cabassut, 2003, p.759-760].

1.3 Raisonnement plausible dans l’enseignement des mathématiques

Coppé a souligné l’importance du raisonnement plausible mis en jeu dans la vérification dans les travaux d’élèves du secondaire : “ nous soulignons que c’est la limitation de l’incertitude plutôt que la certitude absolue qui est visée par l’élève [...] il peut faire une vérification qui lui apportera plus ou moins de certitude ou bien qui lui montrera que son résultat est faux ” [Coppé 1993, p.211-215] même si “ les processus de vérification sont faits la plupart du temps, dans le cadre du travail privé de l’élève, c’est-à-dire qu’ils ne sont pas montrés au professeur ” [ibid. p.209].

Balacheff a mis en évidence chez les élèves de collège deux types de preuves pragmatiques qui relèvent du raisonnement plausible : “ l’empirisme naïf consiste à assurer la validité d’un énoncé après sa vérification sur quelques cas ” et l’expérience cruciale “ désigne une expérimentation dont le résultat permet de choisir entre deux hypothèses [...] ce type de validation se distingue de l’empirisme naïf en ce que celui qui y recourt pose explicitement le problème de la généralisation et le résout en “ pariant ” sur la réalisation d’un cas qu’il puisse reconnaître pour aussi peu particulier que possible ” [Balacheff 1999 b, p.206].

Pedemonte signale que le raisonnement plausible est introduit par Pierce sous le nom d’abduction, en utilisant également le terme de plausibilité et montre son utilisation par les élèves du secondaire dans la phase de conjecture précédant l’élaboration d’une démonstration [Pedemonte 2002, p. 68].

Pour Durand-Guerrier, “ une assertion est dite contingente si sa vérité et sa fausseté sont toutes deux possibles ” [Durand-Guerrier 1996, p.237], éventuellement à un instant donné où on n’a pas encore les moyens de savoir si l’assertion est vraie ou fausse. Elle montre l’existence d’énoncés contingents, non seulement chez les élèves du secondaire, mais également dans la classe de mathématiques tout au long de la scolarité obligatoire et au-delà, dans les pratiques de classe, dans des récréations mathématiques, dans les manuels. Pour certains de ces énoncés contingents, le raisonnement mobilisé peut être un raisonnement plausible. L’exemple de la preuve par 9 est éloquent : elle renforce la plausibilité du résultat sans le certifier.

Tietze classifie les différents “ arguments de plausibilité :

(a) preuve à travers des arguments, qui sans doute accroissent la plausibilité, mais qui ne présentent pas une justification suffisante : par exemple l’indication d’après des faits analogues ou semblables, déjà reconnus comme vrais, le dessin d’une image ou d’un graphique ;

(b) justification du fait qu'on déduit de déclarations à vérifier des déclarations exactes respectivement acceptées[2] ; (c) vérification sur des cas isolés (induction incomplète) ". [Tietze 2000, p.158 ; trad. R.C.].

Le (b) exprime la conception du raisonnement plausible qu'expose Polya : de A, à vérifier, on déduit B ; comme B est exact ou accepté, on en déduit que A est davantage plausible. Ce qui peut se reformuler en : (si A alors B) vrai, et B est vrai, alors A est davantage plausible [Polya 1958].

1.4 Raisonnement plausible versus raisonnement de nécessité

Au terme de cet examen des différents points de vue théoriques, nous proposons d'adopter les définitions suivantes. Considérant des propositions A et B :

- un raisonnement de nécessité est de la forme : A est vrai et (si A alors B) vrai, donc B est nécessairement vrai.
- un raisonnement plausible est de la forme : B est vrai et (si A alors B) vrai, donc A est davantage plausible.

Lorsque dans une validation, la vérité de la conclusion est nécessaire, nous appellerons le raisonnement de validation une preuve ou une démonstration ; lorsqu'elle est plus ou moins plausible nous l'appellerons argumentation.

Une démonstration est une validation qui ne mobilise que des raisonnements de nécessité.

Une argumentation est une validation qui mobilise des raisonnements de nécessité ou de plausibilité. En ce sens une démonstration est une argumentation limite, sans aucun raisonnement de plausibilité, la plausibilité devenant maximale c'est-à-dire certitude.

Une argumentation ou une preuve mathématiques sont des argumentations ou des preuves pour lesquelles les raisonnements précédents, les propositions A et B concernent des objets mathématiques et les énoncés conditionnels (si A alors B) sont des énoncés mathématiques (définition, axiome, propriété, théorème).

Le terme de " démonstration " est souvent réservé aux preuves abstraites ou formelles, comme par exemple les preuves mathématiques. Si la validation nécessite une réalisation matérielle (preuve expérimentale) ou se base sur ce que l'on voit (preuve visuelle) ou sur le contenu et non la forme d'une proposition supposée vraie (preuve sémantique), le terme de " preuve " à celui de " démonstration " est souvent préféré. Certains auteurs comme [Balacheff 1988, p. 31] limitent le terme de " démonstration " aux seules preuves mathématiques. Dans les traductions, aux mots " preuve " et " démonstration " ne correspondent bien souvent que le seul mot " Beweis " en allemand ou le seul mot " proof " en anglais.

1.5 Questions à partir d'un exemple

Considérons un exemple inspiré de [IREM Paris 7 2002, p.19-29][3]. Le problème suivant a été proposé à des élèves de sixième[4] : " dessinez un polygone à 6 côtés, à 7 côtés, à 8 côtés, à 9 et à 10 côtés. Trouver le nombre de diagonales pour chacun des polygones. Trouver le nombre de diagonales pour un polygone à 100 côtés. Faire une rédaction de la démarche qu'on a suivie ".

Voici une réponse inspirée[5] par le témoignage de l'élève Jules concernant un octogone (dont le nombre de diagonale vaut $5\times8/2=20$) :

---

[2] Begründung dadurch, dass man aus der zu überprüfenden Aussage richtige bzw. akzeptierte Aussagen herleitet.

[3] IREM Paris 7, *Expériences de narration de recherches en mathématiques*, IREM Paris 7/ ACL-Editions Kangourou, Paris, 2002.

[4] On pourrait également le proposer à des élèves de cycle 3.

[5] Nous avons modifié le texte de l'élève pour abréger l'exemple. Cet exemple n'est donc pas authentique et vise simplement à illustrer les questions.

“ [1ère partie] A ce moment là nous pensions qu’il fallait multiplier le nombre de diagonales partant d’un point par le nombre de côtés divisé par 2 […] j’ai refait un polygone et là j’ai trouvé 20 diagonales, notre logique marchait. Mais nous n’étions pas sûr sauf Alexi, Fabrice
[2nde partie] et nous avons fait le polygone à 9 côtés : on a trouvé 27 diagonales on était sûr que notre logique marchait ”.

Formalisons le raisonnement de la 1ère partie.
Soit la proposition A : “ Le nombre de diagonales D(n) d’un polygone à n côtés vaut le nombre de diagonales issues d’un sommet (n-3) multiplié par le nombre de côté n divisé par 2 ”
Soit la proposition B : “ pour un octogone dessiné D(8)=20”
Le raisonnement de la première partie peut être schématisé sous la forme suivante :
B est vrai par vérification par comptage sur l’octogone dessiné ;
(si A alors B) vrai d’après la règle logique d’instanciation valable en mathématiques : si (pour tout polygone à n côtés, D(n)=(n-3) ×n/2) alors (pour un polygone à 8 côtés, D(8)=20) ; cette règle est une règle de raisonnement déductif qui part du général pour déduire le particulier ;
d’où le raisonnement plausible : B est vrai et (si A alors B) vrai, donc A est davantage plausible.
L’élève n’est pas sûr de la vérité de A : “ nous n’étions pas sûr ”.
Ici il a coïncidence entre le raisonnement plausible produit dans l’argumentation de l’élève Jules et le raisonnement plausible d’une argumentation mathématique car la propriété “ si A alors B ” utilisé ici est une propriété logique reconnue en mathématiques.

Par contre dans la deuxième partie la schématisation du raisonnement de Jules peut être la suivante.
Soit la proposition A : “ Le nombre de diagonales D(n) d’un polygone à n côtés vaut le nombre de diagonales issues d’un sommet (n-3) multiplié par le nombre de côté n divisé par 2 ”.
Soit la proposition B : “ pour un octogone dessiné D(8)=20 et pour un ennéagone donné D(9)=27 ”.
B est vrai par vérification par comptage sur l’octogone et l’ennéagone dessinés ;
(si B alors A) est vrai d’après un raisonnement inductif partant du particulier et induisant le général. Il correspond à l’empirisme naïf de [Balacheff 1987, pp. 163-165] qui “ consiste à tirer de l’observation d’un petit nombre de cas la certitude de la vérité d’une assertion ”. Ce raisonnement n’est pas accepté en mathématiques ; par contre dans la vie quotidienne[6] ce raisonnement peut être pratiqué.
[Blanché 1999, p.8-9] rappelle que, sous une forme nettement plus élaborée que l’empirisme naïf, le raisonnement inductif fonde les sciences expérimentales : “ Depuis Aristote, qui l’a introduit, le mot d’induction s’est chargé peu à peu d’un sens nouveau. Outre la distinction, qu’Aristote connaissait, entre l’induction complète ou totalisante, qui est rigoureuse, et l’induction généralisante ou amplifiante, qui se risque à étendre à un ensemble ce qui n’a été reconnu que sur quelques-uns de ses éléments, le mot en est venu à désigner, à l’époque moderne, le procédé par lequel se construisent les sciences expérimentales, qui consiste à s’élever, de l’observation des faits, à l’hypothèse d’une loi explicative ”.
Dans cette seconde partie Jules déclare être sûr de la vérité de la proposition B : ce qui s’analyse comme un passage du raisonnement plausible, accepté par la logique mathématique,

[6] Rappelons que des chercheurs invoquent même une logique de la vie quotidienne sous différentes dénominations : “ logique de la vie quotidienne ” [Stein 1986, p. 14], “ logique naturelle ” [Grize, 1996], “ logique en action ” [Toulmin 1993 p.181], “ logique appliquée ” [Toulmin 1993 p.315], “ logique pratique ” [Toulmin 1993 p.320], “ logique de la pratique ” [Bourdieu 1980, p.134], “ le raisonnement pratique ” [Audi,1989]. On peut également étudier d’autres logiques dans d’autres institutions : en droit [Perelman 1963, Haarscher 1994], dans les sciences expérimentales [Carnap, Chalmers, Hempel], en philosophie [Perelman 1952]…

de la première partie, à un raisonnement de nécessité de la logique quotidienne, mais rejeté par la logique mathématique.
On voit donc que la différence entre ces deux raisonnements tient d'une part à l'énoncé conditionnel mobilisé (qui sont en quelque sorte[7] réciproques l'un de l'autre : si A alors B dans la première partie, si B alors A dans la seconde partie) et d'autre part à la modalité de la conclusion (A est davantage plausible dans la première partie alors que A est sûr dans la seconde partie). Les points communs entre les deux raisonnements correspondent aux données communes (B est vrai) et à la conclusion commune (A est vrai) à la modalité près (A est plausiblement vrai contre A est sûrement vrai).

Voici une justification utilisant des raisonnements de nécessité acceptés en mathématiques et proposés par [IREM Paris 7 2002, p.35] :
“ A chaque fois que le nombre de côtés augmente de 1, le nombre de diagonales partant de chaque sommet augmente aussi de 1 Donc, il ne nous reste plus qu'à multiplier le nombre de diagonales partant de chaque sommet par le nombre de côtés et de diviser par deux car 1 diagonale vaut deux sommets. Nous avons trouvé aussi que le nombre de côtés moins 3 nous donne le nombre de diagonales partant de chaque sommet donc pour 100 il fallait faire : (100-3)×100÷2=4850 ”.

La frontière entre les raisonnements de nécessité ou de plausibilité n'est donc pas toujours très claire, notamment lorsque les logiques de référence et les énoncés conditionnels mobilisés ne sont pas explicités.
Nous allons donc observer où se situe cette frontière dans les programmes d'enseignements, dans des manuels de classe ou dans des productions d'élèves. Nous essaierons d'observer la position du maître dans ce contexte.

Les programmes

1.6 Dans les domaines non mathématiques

Les nouveaux programmes[8] de l'école élémentaire rappellent dans les domaines transversaux l'importance de l'exercice du débat réglé “ la tenue de débats où chacun doit savoir réfréner sa parole, laisser la place à celle de l'autre et comprendre son point de vue - même quand on ne le partage pas -, chercher à le convaincre en argumentant, est la première forme d'éducation la démocratie ” [p.48]. “ En sciences les nouveaux programmes prévoient que l'enfant réalise lui-même ses expériences et tienne un cahier d'observations. Acteur et responsable de la manipulation qu'il accomplit, il rend compte par écrit de l'expérimentation. C'est l'occasion par excellence d'apprendre à argumenter, à décrire, à présenter des hypothèses, à en peser la valeur ” [p.9]. Des objectifs des sciences expérimentales et de la technologie sont : “ participer activement à un débat argumenté pour élaborer des connaissances scientifiques en en respectant les contraintes (raisonnement rigoureux, examen critique des faits constatés, précision des formulations, etc.), utiliser à bon escient les connecteurs logiques dans le cadre d'un raisonnement rigoureux ” [p.175]. L'argumentation est évoquée dans différents autres domaines (littérature de jeunesse [p.187], géographie [p.218], …).
On observe donc la pratique de l'argumentation et de raisonnement de preuve ou de justification dans des domaines autres que les mathématiques. Blanché[9] précise : “ Le raisonnement est d'abord un moyen de preuve ou de justification. La façon la plus normale d'établir une proposition qui n'est pas immédiatement évidente, c'est de montrer qu'elle se rattache […] à telle autre dont la vérité est reconnue : ou bien elle en est la conséquence et alors la preuve est rigoureuse (démonstration mathématique) ou inversement elle l'a comme conséquence et alors la conclusion est seulement probable

[7] La proposition B n'est pas tout a fait la même dans chaque partie mais correspond dans les deux parties à un cas particulier de la proposition A.
[8] Ministère de l'éducation, *Qu'apprend-on à l'école élémentaire ?* , CNDP/XO Editions, 2002.
[9] BLANCHE Robert, *Raisonnement*, Encyclopédie Universalis, 1995

(preuve expérimentale) ". Cette pratique peut donner lieu à des raisonnements plausibles comme c'est le cas pour les preuves expérimentales ou à des raisonnements de nécessité comme dans le travail sur les connecteurs logiques évoqués ci-dessus.

Il nous semble intéressant d'éclairer les programmes de l'école primaire par ceux du collège, ce qui permet de mieux marquer les continuités et les ruptures. La rénovation des programmes de collèges précise la place de l'argumentation et de la validation dans le pôle des sciences[10].
" Au-delà de la perception directe, l'observation est assistée au collège par l'emploi d'*instruments*, objets techniques qui étendent les possibilités des sens. Elle est complétée par l'utilisation d'appareils de *mesure* et par l'exploitation mathématique des résultats qu'ils fournissent. […] La *démarche expérimentale* contribue, au-delà de la simple observation à une représentation scientifique, et si possible explicative, du monde […] Dans la continuité de l'école primaire, les programmes du collège privilégient pour les disciplines scientifiques une *démarche d'investigation* […] La démarche d'investigation scientifique présente des analogies entre son application au domaine des sciences expérimentales et celui des mathématiques. La spécificité de chacun de ces domaines, liée à leurs objets d'étude respectifs et à leurs méthodes de preuve, conduit cependant à quelques différences dans la réalisation. Une éducation scientifique complète se doit de faire prendre conscience aux élèves à la fois de la proximité de ces démarches (résolution de problèmes, formulation respectivement d'hypothèses explicatives et de conjectures) et des particularités de chacune d'entre elles, notamment en ce qui concerne la validation, par l'expérimentation d'un côté, par la démonstration de l'autre " [p.2-3]. Parmi les différents moments d'une séance d'investigation on notera :

- " la formulation de conjectures, d'hypothèses explicatives, de protocoles possibles :

- formulation orale ou écrite de conjectures ou par les élèves (ou les groupes) ;
- élaboration éventuelle d'*expériences*, destinées à valider ces hypothèses ;
- communication à la classe des conjectures ou des hypothèses et des éventuels protocoles expérimentaux proposés ;

- l'investigation ou la résolution du problème conduite par les élèves :

- moments de débat interne au groupe d'élèves ;
- contrôle de l'isolement des paramètres et de leur variation, description et réalisation de l'expérience (schémas, description écrite) dans le cas des sciences expérimentales ;
- description et exploitation des méthodes et des résultats ;
- recherche d'éléments de justification et de preuve, confrontation avec les conjectures et les hypothèses formulées précédemment ;.

- l'échange argumenté autour des propositions élaborées :

- communication au sein de la classe des solutions élaborées, des réponses apportées, des résultats obtenus, des interrogations qui demeurent ;
- confrontation des propositions, débat autour de leur validité, recherche d'arguments ; en mathématiques, cet échange peut se terminer par le constat qu'il existe plusieurs voies pour parvenir au résultat attendu et par l'élaboration collective de preuves " [p.3]

Se voit très nettement la distinction, commune aux sciences expérimentales et aux mathématiques, entre :
- une phase hypothétique avec des hypothèses (explicatives) pour les sciences expérimentales et des conjectures pour les mathématiques, basée sur des raisonnements plausibles,
- une phase déductive de validation des hypothèses ou des conjectures, soit par le recours à un raisonnement plausible dans le cas de l'expérimentation dans les sciences expérimentales, soit par le recours à un raisonnement de nécessité dans le cas de la démonstration en mathématiques ou par exemples dans le cas de validations non mathématiques recourant seulement à des éléments de logiques.
Alors que le terme démonstration n'apparaît que pour les seules validations mathématiques, les termes justifications ou preuves sont utilisés pour les validations en sciences ou en mathématiques.

[10] Ministère de l'Éducation, *La rénovation des programmes du collège, Consultation sur les projets proposés par le groupe d'experts, Introduction commune à l'ensemble des disciplines du pôle* [des sciences], 31 mars 2004, consulté le 5/05/04 sur le site : http://eduscol.education.fr/index.php?./D0082/consultecoll.htm

1.7 En mathématiques au cycle 2

Dans le document d'application[11] des programmes de mathématiques du cycle 2, il est fait référence au développement de l'argumentation dans le débat sur le “ vrai ” et le “ faux ” et au statut particulier de la preuve en mathématiques [p.5] : “ Faire des mathématiques, penser des objets “abstraits ” comme les nombres, les figures, débattre du “ vrai ” et du “ faux ” en utilisant des connaissances partagées qui permettent de dépasser l'argument d'autorité, c'est commencer à s'approprier des éléments de la culture scientifique […] La confrontation des résultats et des démarches dans des moments de débat, où la classe s'apparente à une petite “ communauté mathématique ”, permet de développer les compétences dans le domaine de l'argumentation […] Ces situations d'argumentation offrent une première occasion de sensibiliser les élèves à la question du statut particulier de la preuve en mathématiques. Si dans certains cas, celle-ci relève d'une expérience, dans d'autres cas elle s'appuie sur des connaissances mathématiques ”. Ici la preuve expérimentale et la preuve mathématique se distinguent bien. Dans la suite du document d'application du cycle 2, il est précisé à propos du calcul posé [p.6] qu' “ une part essentielle de l'activité doit résider dans la recherche de la compréhension et de la justification des techniques utilisées ”. La place centrale pour la résolution des problèmes [p.7] a pour “ but de développer chez les élèves un comportement de recherche et des compétences d'ordre méthodologique : émettre des hypothèses et les tester, faire et gérer des essais successifs, élaborer une solution originale et en éprouver la validité, argumenter ”. Le test des hypothèses ou la gestion des essais successifs correspondent à une démarche expérimentale dans Les recours aux calculatrices, tableurs et logiciels “ offrent l'occasion d'une approche plus expérimentale des mathématiques ” [p.9]. Mais “ il convient de distinguer les tâches de constat ou d'observation, qui invitent l'élève à lire une réponse sur le matériel, des tâches d'anticipation qui lui demandent d'élaborer, de construire par lui-même une réponse dont il pourra ensuite vérifier la validité en revenant à l'expérience ” [p.10]. La géométrie est le lieu de la confrontation entre le raisonnement qui s'appuie sur le constat et l'observation et le raisonnement qui s'appuie sur les connaissances ; au cycle 2 l' appui porte sur le premier de ces raisonnements : “ Au cycle 2, lors de la résolution de la plupart des problèmes de géométrie, les élèves vont d'abord prélever des propriétés de façon perceptive, puis être amenés à utiliser les instruments de géométrie pour vérifier les hypothèses émises. Par exemple, pour tracer un carré en choisissant quatre points parmi un ensemble de points donnés, au début du cycle, les élèves tracent simplement ce qu'ils pensent être un carré, alors qu'en fin de cycle ils accompagnent ce tracé d'une vérification qui s'appuie sur des propriétés du carré (longueur des côtés et angles droits, par exemple) et fait appel à l'usage d'instruments de géométrie. Au cycle 2, toutes les propriétés utilisées peuvent d'abord être perçues, avant d'être vérifiées à l'aide d'instruments ”. On remarquera que la vérification instrumentale reste de nature expérimentale et correspond à des définitions fonctionnelles et non pas formelles.

1.8 En mathématiques au cycle 3

Le document d'application[12] des programmes de mathématiques du cycle 3 confirme les intentions précédentes en mentionnant les approfondissements suivants. A propos de la résolution de problèmes est travaillée particulièrement la compétence “ argumenter à propos de la validité d'une solution produite par soi-même ou par un camarade (ceci suppose que les élèves ne pensent pas que la démarche est unique, et donc que l'enseignant accepte des démarches différentes) ” [p.13]. “ Le calcul mental réfléchi est l'occasion de rencontrer diverses façons d'effectuer un même calcul et d'avoir à justifier celle qui a été choisie, ce qui peut donner lieu à des premières activités de preuves ” [p.25]. En géométrie “l'objectif principal est de permettre aux élèves de se familiariser avec les objets du plan et de passer progressivement de géométrie où les objets et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie où ils le sont par un recours à des instruments et par la connaissance de certaines propriétés […] L'argumentation à propos des outils utilisés, des propriétés mobilisées et des résultats obtenus constitue une part importante du travail des élèves ” [p.30]. S'amorce ici le passage du raisonnement plausible basé sur la perception et la vérification instrumentée au raisonnement de nécessité basé sur la connaissance des propriétés.

---

[11] Ministère de l'Éducation, *Mathématiques cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2)*, CNDP, juillet 2002

[12] Ministère de l'Éducation, *Mathématiques cycle des approfondissements (cycle 3)*, CNDP, juillet 2002

“ Argumenter à propos de la validité d’une solution ” [p.41] est une compétence d’école primaire. Cependant le raisonnement déductif n’est pas une compétence exigible en fin d’école primaire même si le recours aux connaissances mathématiques et aux propriétés en remplacement de la perception ou de l’expérimentation est encouragé et ouvre la voie au raisonnement déductif. Aucune distinction claire entre conjecture et propriété admise ou validée n’est proposée, sans doute parce que dans la plupart des cas une validation mathématique par le seul raisonnement n’est pas possible. Par exemple en géométrie “ les activités du domaine géométrique ne visent pas des connaissances formelles (définitions), mais des connaissances fonctionnelles ” [p.30]. De ce fait des connaissances fonctionnelles basées sur la perception ou la vérification instrumentale ne permettent pas une validation mathématique par le seul raisonnement. Deux cas très fréquents permettent une validation par le raisonnement : la réfutation d’une conjecture par un contre-exemple, et la vérification exhaustive d’une propriété sur un ensemble fini.

1.9 En mathématiques au collège

Dans le cadre de la rénovation des programmes de collège[13] “ les mathématiques participent à l’enrichissement de l’emploi de la langue par les élèves, en particulier par la pratique de l’argumentation ” [p.1]. En géométrie il s’agit de “ passer de l’identification perceptive (la reconnaissance par la vue) de figures et de configurations à leur caractérisation par des propriétés (passage du dessin à la figure) [p.1][…] La question de la preuve occupe une place centrale en mathématiques. La pratique de l’argumentation pour convaincre autrui de la validité d’une réponse, d’une solution ou d’une proposition ou pour comprendre un “phénomène ” mathématique a commencé dès l’école primaire et se poursuit au collège pour faire accéder l’élève à cette forme particulière de preuve qu’est la démonstration. Si, pour cet objectif, le domaine géométrique occupe une place particulière, la préoccupation de prouver et de démontrer ne doit pas s’y cantonner […] En particulier, l’enseignant doit préciser explicitement qu’un résultat mathématique qui n’est pas démontré est admis [p .2] […] Dans le prolongement de l’école primaire, la place accordée à l’oral reste importante. En particulier, les compétences nécessaires pour la validation et la preuve (articuler et formuler les différentes étapes d’un raisonnement, communiquer, argumenter à propos de la validité d’une solution) sont d’abord travaillées oralement en s’appuyant sur les échanges qui s’instaurent dans la classe ou dans un groupe, avant d’être sollicitées par écrit individuellement [p .3] […] Le travail expérimental (calculs numériques avec ou sans calculatrice, représentations à l’aide ou non d’instruments de dessin et de logiciels) permet d’émettre des conjectures. La résolution de problèmes vise à donner du sens aux connaissances travaillées, puis à en élargir les domaines d’utilisation. Ces démarches s’accompagnent de la formulation de définitions et de théorèmes. Les élèves sont conduits à distinguer conjecture et théorème, à reconnaître les propriétés démontrées et celles qui sont admises. L’initiation au raisonnement déductif permet aux élèves de passer de l’utilisation consciente d’une propriété mathématique au cours de l’étude d’une situation à l’élaboration complète d’une démarche déductive dans des cas simples ” [p.12]

Au collège l’objectif d’accès au raisonnement déductif et à la démonstration est clairement énoncé ; le collège est donc bien le lieu de passage de l’argumentation à la démonstration. On marque une dichotomie entre ce qui est admis et ce qui est démontré, sans évoquer de positions intermédiaires. Conjecture et théorème sont clairement distingués.

Des manuels scolaires et des productions d’élèves

1.10 problème de contraintes

Dans un manuel :

Ce problème est proposé par le manuel [Ermel 2001 b, p.68] sous l’énoncé suivant :

“ Dans ma tirelire j’ai 32 pièces de monnaie. Je n’ai que des pièces de 2 € et des billets de 5 €. Avec ces 32 pièces et billets j’ai 97 €. Combien y a-t-il de pièces de 2 € et de billets de 5 € dans ma tirelire ? ”

[13] Ministère de l’éducation, *La rénovation des programmes du collège, Consultation sur les projets proposés par le groupe d’experts, Mathématiques* , 31 mars 2004, consulté le 5/05/04 sur le site : http://eduscol.education.fr/index.php?./D0082/consultecoll.htm

Différentes procédures sont envisagées ; par exemple :
- par un premier essai aléatoire puis des ajustements successifs (soit diminution du nombre de pièces et augmentation du nombre de billets ou le contraire) ; il faut compléter en prouvant l'unicité de la solution trouvée ;
- par une procédure systématique en se fixant une des contraintes, par exemple le montant total disponible : commencer par partir du nombre maximum de billets possibles auquel on adjoint des pièces ; puis diminuer systématiquement le nombre de billets ; cette procédure exhaustive permet d'assurer l'unicité de la solution.

Concernant l'unicité, Ermel précise [p.72] : “ Peu d'élèves sont capables de justifier en mettant en évidence le fait, par exemple, qu'échanger une pièce de 2 € pour un billet de 5 € de façon à conserver le nombre de pièces et de billets produit un changement en plus ou en moins de 3 €, ce qui, donc, modifie la somme et de conclure en disant qu'il est impossible d'avoir une autre solution avec un nombre différent de pièces de 2 € et de billets de 5 € ”.

Le seul raisonnement plausible susceptible d'apparaître concerne l'unicité de la solution : “ Si on modifie le nombre de pièces et de billets la somme ou le nombre de pièces change donc il n'y a pas d'autres solutions ”. Cette affirmation est vérifiée sur quelques exemples puis induite.

<u>Production d'élèves :</u>

Examinons quelques productions d'élèves concernant la justification ou la réfutation de propositions relatives au problème précédent extraites de [Massardier, Taquet 2004 p.27-29].

Les élèves arrivent par différentes procédures (aléatoire, par réajustement ou systématique) à trouver une solution : les raisonnements conduits sont des raisonnements de nécessité s'appuyant sur le calcul. Lorsqu'une preuve proposée est incorrecte (une erreur de calcul ou une contrainte non respectée), elle est réfutée par un autre élève (correction du calcul ou mise en évidence de la contrainte non respectée).

Pour montrer son unicité les deux preuves envisagées par le manuel apparaissent dans l'extrait suivant [ibid. p.28-29].

“ L'enseignante : Alors, y a-t-il d'autres possibilités d'obtenir 97 euros avec 32 pièces et billets que 11 billets de 5 euros et 21 pièces de 2 euros ?
L'enseignante : […] Léa, alors qu'est-ce que tu as répondu oui ? non ?
Léa : On a répondu non.
L'enseignante : Pourquoi ?
Léa : Parce que lui (en montrant son camarade) il a calculé la 2 et moi là 5.
L'enseignante : Est-ce que tout le monde a compris ce que ça veut dire 'on a fait la 2ou la 5' ?
Pas de réponse
L'enseignante : Alors qu'est-ce que tu veux dire par là ?
Léa : J'ai fait la table de 2 et il a fait la table de 5.
L'enseignante : Donc vous avez testé la table de 2 et de 5. Les autres est-ce que vous pensez que ceci est un bon argument ? Où est-ce que vous pensez que ce n'est pas un bon argument ?
Jean-Baptiste : Si on fait la table de 5 et que ça ne marche pas, c'est sûr que la table de 2 ça ne marche pas non plus.
L'enseignante : Tu veux bien expliquer s'il te plaît ?
Jean-Baptiste : Ca ne sert à rien de le faire avec la table de 2 c'est pareil.
L'enseignante : En fait tu veux dire que si on commence par la table de 2 ou de 5 c'est pareil car c'est une addition donc si on fait 5 x 11 + 2 x 21 ou 2 x 21 + 5 x 11 c'est pareil.
Jean-Baptiste : Oui
L'enseignante : Bon, alors est-ce que le fait d'avoir testé toute la table de 2 ou de 5 est un bon argument pour dire qu'il n'y a qu'une seule solution ?
La classe : Oui
L'enseignante : D'accord, bon qui a un autre argument ?
Pas de réponse
L'enseignante : Raquel ?
Raquel : Je n'ai pas trouvé

L'enseignante : Alors prouvez-moi qu'il n'y a qu'une seule solution ? Qui a un argument ? Pablo ?
Pablo : Il n'y a pas d'autres solutions car à partir de 2 x 20 + 5 x 12 ça fait 100 et on dépasse à chaque fois et donc si on rajoute 1 on dépasse encore plus.
L'enseignante : D'accord tu penses que quand on fait la table des 5, on commence par 5 x 19 car au delà c'est trop grand et que ce n'est pas possible.
Pablo : J'ai fait 20 x 2 c'est 40 et après 5 x 12 ça fait 60 et si on additionne les deux ça fait 100. Et à chaque fois si on enlève un multiple de la table de 2 et on rajoute 5, ça fera toujours + 3 et alors on dépasse 97.
L'enseignante : Pablo, est-ce que tu peux réexpliquer pour que tes camarades comprennent bien ce que tu veux dire ?
Pablo : Si on fait 5 x 11 + 2 x 21, ça fait 97. Si on fait 5 x 12 + 2 x 20, ça fait 100. Si on fait 5 x 13 + 2 x 19, ça fait 103. Donc à chaque fois on ajoute 3.
L'enseignante : Donc on aura une somme différente à chaque fois…Donc comme vous l'avez dit il y a deux façons de démontrer : soit on fait toute la table de 5 et on teste toutes les possibilités et on s'aperçoit qu'il n'y en a qu'une ; soit on s'aperçoit que quand on change le nombre de pièces et de billets d'un côté et de l'autre ça augmente de 3 ou ça diminue de 3 donc ça n'est pas possible d'avoir une autre solution. Donc il n'y a qu'une seule solution ".

L'unicité donne lieu à des raisonnements de nécessité s'appuyant sur une étude exhaustive ou sur un raisonnement par l'absurde.

1.11 problème d'optimisation

<u>Dans un manuel :</u>

[Ermel 2001 a, p.75] propose la situation problème suivante au niveau d'un CM1 : " chercher dans les décompositions additives d'un nombre celle(s) dont le produit est le plus grand ".

Examinons les différents raisonnements acceptés en mathématique et envisagés par le livre.

- Des réfutations qui constituent à l'aide d'un contre-exemple des preuves de la fausseté d'une proposition : " " ce n'est pas parce qu'il y a beaucoup de termes qu'on a forcément un grand produit ", " ce n'est pas en ne prenant que deux " grands nombres " (en décomposant 14 en deux nombres) que l'on a un grand produit "… " [ibid. p.76] " par exemple, pour 10 prendre 5 et 5 " proposition pouvant être infirmée : " Quand on a un 5, on fait 2 et 3 ", ce qui est validé par le calcul : 3×2=6 et 6 est plus grand que 5 " [ibid. p.77]
- Des raisonnements de plausibilité s'appuyant sur la vérification sur des exemples : "pour avoir le plus grand nombre, " il faut décomposer " ou bien " il faut beaucoup de nombres ", […] " si on veut un plus grand produit, on utilise 2, 3, 4 " "[ibid. p.77].
- Des raisonnements de nécessité pour valider une méthode de recherche du produit le plus grand.

Pour cette dernière catégorie " il ne s'agit pas d'institutionnaliser une solution mathématique, ni de faire une démonstration synthétisant les étapes de résolution. Si les élèves font des propositions de méthodes s'appuyant sur les multiples de 3, celles-ci peuvent aboutir à des formulations du type :
- " Si c'est un multiple de 3, on décompose en 3+3+3+…+3 et on fait le produit des 3 ".
- " Si c'est un multiple de 3 " plus 2 ", on décompose en 3+3+…+3+2 et on fait le produit ".
- " Si c'est un multiple de 3 " plus un ", on fait 3+3+…+3+4, on fait le produit (avec le dernier 3 et 1 on fait 4). "

Pour établir la preuve de ces propositions, le maître peut être amené à expliciter deux propriétés qui n'ont pas été formulées auparavant :
- si on remplace dans une décomposition tout nombre supérieur ou égal à 5 par deux termes différents de 1, le produit de ces 2 termes sera plus grand, donc on ne garde comme termes du produit que des 2 ou des 3 (4 étant égal à 2×2, 1 et 0 n'étant pas réellement utiles ! ;
- si on remplace 2×2×2 par 3×3, le produit sera plus grand, donc on conserve parmi les termes d'un produit que un ou deux 2 " [ibid. p.78].

On voit la prudence du livre qui rappelle que la production de démonstration n'est pas un objectif de l'école primaire. Le travail sur le raisonnement de nécessité exige un travail sur la de formulation des énoncés à valider et des propriétés utilisées lors des validations.

Production d'élèves :
Examinons quelques productions d'élèves concernant la justification ou la réfutation de propositions relatives au problème précédent extraites de [Massardier, Taquet 2004 p.30-37].
Des élèves proposent les différents arguments suivants :
“ - “ Les grands nombres ne permettent pas d'obtenir de grands produits. Par exemple : 12 x2=24 alors que 2x2x2x2x2x2x2=128 ”
- “ Un grand nombre de termes ne donne pas forcément un grand produit. Par exemple : 1x1x1x1x1x1x1x1x1x1x1x1x1=1 ”
Pour Florina : “ il faut prendre un chiffre, l'additionner plusieurs fois et le multiplier ensuite […] Pour 18, on fait 2 + 2 + 2 jusqu'à 18 puis après on multiplie les 2 et on trouve ”. Jean-Baptiste réfute cette proposition en donnant un contre-exemple : “ Non, ce n'est pas la meilleure méthode parce que le résultat ça fait 512 et j'ai trouvé 648[14] avec d'autres chiffres ”. Paloma affirme “ il ne faut pas utiliser 0 ”. Thomas valide cette affirmation en énonçant une propriété : “ On peut pas utiliser 0 parce que si on multiplie quelque chose par 0 on a toujours 0 ”
Paloma continue “ il ne faut pas utiliser 1 ”. Alexander valide cette proposition en formulant avec ses mots une propriété : “ Si on multiplie 1 par quelque chose on aura toujours la même chose ”.
Pour Léa : “ il ne faut pas prendre des grands nombres ”. Thomas valide cela par un exemple : “ si on a envie d'avoir 24 et qu'on utilise 22 par exemple, on n'a plus que 2 donc ça fera 44 mais si on utilise des petits nombres ça fera un plus grand nombre que 44 ”.
Paloma suggère : “ il faut utiliser les nombres 2 et 3 ”. Ce à quoi un groupe réplique “ faux car 4 = 2 + 2 → 2 x 2 = 4 ; le 4 peut être utilisé aussi ”.

Il faut dire la difficulté pour un élève à expliciter son argumentation comme l'illustre l'extrait suivant :
“ L'enseignante : Paloma ?
Paloma : Il faut utiliser des petits nombres des 2, des3.
L'enseignante : Pourquoi ?
Paloma : …
Thomas : Moi, je pense qu'en utilisant seulement des 2 et des 3 on n'obtiendra pas les plus grands nombres, il faut aussi utiliser 4, 5, 6
L'enseignante : Pourquoi ?
Thomas : Il faut pas que les nombres soient trop petits non plus.
L'enseignante : Ce n'est pas un argument ça…essaie d'être plus précis.
Thomas : …
L'enseignante : Bon pour toi il faut utiliser des nombres de 2 à 6.
Léa : Moi ; je pense qu'il faut prendre des 3 et des 2.
Jean-Baptiste : Moi aussi, c'est avec des 2 et des 3 que j'ai trouvé les plus grands nombres.
L'enseignante D'accord, puisqu'on n'arrive pas à se décider vous allez vous mettre par groupe de six et testez ces deux propositions (Proposition 1 : Il faut utiliser des nombres de 2 à 6 ; Proposition 2 : il faut utiliser les nombres 2 et 3). Vous écrirez pour chacune d'elles si vous pensez qu'elle est vraie ou fausse et vous expliquerez pourquoi ” [ibid. p.35]

Le travail en groupe permettra de réfuter la proposition 2 à partir de contre-exemples mais ne permettra pas de prouver la proposition 1.

On observe que la plupart des argumentations produites sont des réfutations par contre-exemple.
Aucun groupe n'a pu produire une preuve correcte de la méthode générale proposée dans le manuel. Ce problème d'optimisation ne peut pas être résolu par une étude exhaustive dès que le nombre devient important (pour 100 l'étude exhaustive serait trop longue). Il exige un repérage des propriétés à utiliser (comme celles citées par le manuel) pour éliminer des

[14] En effet 648= 3 x3x3x3x2 x2x2

décompositions additives. La preuve est sans doute trop complexe en terme de résultats intermédiaires à repérer et d'enchaînement des arguments par rapport aux problèmes précédents.
Dans la réfutation suivante :
“ - il faut utiliser des nombres de 2 à 6 : faux car 6 = 3 + 3 → 3 x 3 = 9 (à l'oral les élèves ont rajouté qu'il valait mieux donc utiliser deux 3 plutôt qu'un 6) et 5 = 3 + 2 → 3 x 2 = 6 (toujours à l'oral les élèves en ont déduit qu'il valait mieux utiliser 2 et 3 plutôt que 5) ” on aperçoit l'amorce d'une méthode générale qui consiste à décomposer un facteur du produit en une somme dont le produit des termes est supérieur au facteur décomposé. Mais les élèves n'ont pas eu l'idée de cette généralisation.

1.12 Critère de divisibilité par trois

Relatons une séquence observée dans une classe de CM2 et consacrée à la découverte des critères de divisibilité par 3 ou 9. Les élèves sont confrontés au problème suivant : peut-on répartir 21 élèves autour de 3 tables, avec autant d'élèves à chaque table ? La consigne est de répondre sur le cahier, d'appeler la maîtresse qui contrôle individuellement le résultat. Puis la correction est proposée au tableau à partir de l'explication orale d'un élève. Le problème se résout par la division de 21 par 3 donne 7.
On réitère la même procédure avec des nombres plus grands 102, 231, 396 de personnes à répartir en 3 tables. Au bilan la maîtresse signale que la procédure est longue et demande si un élève connaît une procédure plus courte. Un élève propose d'effectuer la somme des chiffres d'un nombre : si elle est divisible par 3 le nombre est divisible par 3.
La maîtresse vérifie au tableau la procédure sur 102, 231, 396. Elle énonce la règle générale avec l'aide de l'élève. Puis elle propose de l'appliquer aux nombres de la liste suivante : 25, 56, 69, 152, 195, 212, 234, 804, 922.
Cette observation pose le problème de la validation d'une propriété mathématique dont la démonstration est hors des objectifs de l'école primaire. Ici la validation s'effectue par un raisonnement plausible. Est-il souhaitable d'indiquer qu'une preuve mathématique sera disponible au collège ? Le glissement d'un raisonnement plausible à un résultat admis, sans marquer clairement que le raisonnement plausible ne constitue pas une validation mathématique, ne risque-t-il pas d'entretenir l'équivoque chez l'élève ? Le marquage de cette distinction risque-t-il de troubler l'élève et d'entretenir le doute sur tous les résultats admis ?

Conclusion

A travers l'étude théorique, l'étude des programmes puis celles de manuels scolaires et de productions d'élèves nous avons voulu mettre en évidence les éléments suivants :
- les élèves mobilisent des raisonnements plausibles dans la vie quotidienne ou dans la formulation de conjectures en mathématiques,
- les élèves mobilisent des raisonnements de nécessité dont la rationalité n'est pas acceptée en mathématiques : par exemple des raisonnements inductifs ; pour mettre en évidence ces raisonnements il faut faire expliciter aux élèves les arguments qu'ils utilisent ;
- les élèves mobilisent des raisonnements de nécessité en mathématiques : il est important de faire expliciter les arguments qu'ils utilisent pour vérifier si ce sont des arguments mathématiques ;
- la principale difficulté des élèves est dans la formulation et l'explicitation des arguments : cette difficulté est normale au niveau de l'école primaire pour laquelle le raisonnement de nécessité n'est pas une compétence exigible.

Cependant il apparaît souhaitable que le maître aide à faire les distinctions entre le nécessaire et le plausible, entre la preuve mathématique et les autres types de preuves, entre preuve et argumentation. Ces distinctions prépareront au raisonnement déductif et à la démonstration qui sont des compétences à acquérir en fin de collège. Mais faire ces distinctions oblige souvent à expliciter ce qui est difficilement formulable pour l'élève. On voit une fois de plus le rôle délicat du maître comme passeur de frontière entre le plausible et le nécessaire.

Bibliographie

BALACHEFF Nicolas (1987) Processus de preuve et situations de validation, *Educational Studies in Mathematics* p.147-176.
(1988) *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège.* Thèse, université Joseph Fourier de Grenoble.
(1999 a) L'argumentation est-elle un obstacle ? Invitation à un débat..., *La lettre de la Preuve,* Mai-Juin.
(1999 b) Apprendre la preuve, *Concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle,* Presse Universitaire de France, Paris, pp.197-236.
BLANCHE Robert (1995) *Raisonnement*, encyclopédie Universalis.
CABASSUT Richard (2003) Enseigner la démonstration en mathématiques c'est quoi ? pourquoi ? pour qui ? comment ? Eléments de réponses à partir de l'étude des programmes des premières années de l'enseignement secondaire en France et en Bade-Wurtemberg, in *Bulletin de l' APMEP*, n° 449.
COPPE Sylvie (1993) *Processus de vérification en mathématiques chez des élèves de première scientifique en situation de devoir surveillé,* Thèse , université Claude Bernard de Lyon.
DUVAL Raymond (1992) Argumenter, Démontrer, Expliquer: continuité ou rupture cognitive?, revue *Petit x*, n°31, pp.37-61, 1992.
(1993) Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif, en collaboration avec M.A. Egret, revue *Repère*s IREM, n°12.
(1995) *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels,* Peter Lang .
DURAND-GUERRIER Viviane (1996) *Logique et raisonnement mathématique Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication,* thèse de doctorat, Université Lyon1.
ERMEL Equipe de didactique des mathématiques (1999) *Vrai ? Faux ?...On en débat ! De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3,* Institut National de Recherche Pédagogique, Paris.
(2001 a) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes, cours moyen (première année),* INRP, Hatier, Paris.
(2001 b) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes, cours moyen (deuxième année)*, INRP, Hatier, Paris, septembre 2001
HOUDEBINE Jean (1990) Démontrer ou ne pas démontrer, voilà la question, in revue *Repères* n°1, 1990
IREM Paris 7 (2002) *Expériences de narration de recherches en mathématiques,* IREM Paris 7/ ACL-Editions Kangourou, Paris.
MASSARDIER Sandryne, TAQUET Séverine (2004) *Comment préparer les élèves , dès l'école élémentaire, à l'apprentissage de la démonstration mathématiques ?,* mémoire de CAPE, IUFM d'Alsace.
MINISTERE de l'Education (2002) *Qu'apprend-on à l'école élémentaire ?* , CNDP/XO Editions.

(2002) *Mathématiques cycle des approfondissements (cycle 3),* CNDP.
(2002) *Mathématiques cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2)*, CNDP.
(2004) *La rénovation des programmes du collège, Consultation sur les projets proposés par le groupe d'experts, Mathématiques*, consulté le 5/05/04 sur le site :
http://eduscol.education.fr/index.php?./D0082/consultecoll.htm
(2004*) La rénovation des programmes du collège*, *Consultation sur les projets proposés par le groupe d'experts, Introduction commune à l'ensemble des disciplines du pôle* [des sciences], consulté le 5/05/04 sur le site :
http://eduscol.education.fr/index.php?./D0082/consultecoll.htm
PEDEMONTE Bettina (2002) *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*, thèse Université Joseph Fourier, Grenoble.
PERELMAN Chaïm (1999) Argumentation, Encyclopédie *Universalis*, CDROM 1999.
POLYA Georges (1958) *Les mathématiques et le raisonnement plausible*, Gauthiers-Villars, Paris.
STEIN Martin (1986) *Beweisen*, Texte zur mathematische-naturwissenschaftlich-technischen Forschung und Lehre, Band 19, Verlag Franzbecker, Bad Salzdetfurth.
TIETZE Uwe-Peter , KLIKA Manfred, WOMPERS Hans, FÖRSTER F. (2000) *Mathematiksunterrichts in der Sekundarstufe II, Band I,* Vieweg.
TOULMIN Stephen (1993) *Les usages de l'argumentation*, (traduction), Presses universitaires de France, Paris.

CHRONIQUE DE STAGES DE FORMATION CONTINUE : UNE SEMAINE CONSACRÉE À LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES.

Claire Gaudeul
IUFM de Lille
Odile Verbaere
IUFM de Lille

Résumé :
Partage d'expérience de formation continue.

1 INTRODUCTION

Nous utilisons occasionnellement les outils de formation diffusés lors de colloques, nous apprécions de pourvoir construire les nôtres en profitant d'expériences et d'analyses relatées dans les actes des colloques et des stages Copirelem. Il nous a semblé possible à notre tour d'apporter une contribution sur la base de plusieurs formations réalisées ensemble. De février 2001 à janvier 2004, nous avons construit ensemble et partiellement co animé 9 stages d'une semaine. Nous présentons ici l'origine de ces stages afin de permettre de situer les cadres dans lesquels nous avons travaillé, puis nous indiquons nos priorités pour ces formations et nous décrivons plus particulièrement trois outils que nous utilisons : la mise en situation d'ouverture du stage, un recueil de problèmes qui de TP d'appropriation des IO est devenu une sorte de fil conducteur du stage, et l'utilisation d'une séance en classe au cœur de la semaine. Nous donnons pour finir des éléments d'évaluation de ces formations, en particulier pour l'un d'eux : ce stage a été le support d'un mémoire de maîtrise en sciences de l'éducation[1], nous ne reprenons pas ici l'analyse de ce mémoire axé sur l'analyse de pratique, mais nous profitons de certains des éléments recueillis lors des entretiens.

2 ORIGINE DES STAGES

Les stages que nous évoquons ici sont de deux types :

1. des stages d'une semaine en circonscription réalisés à la demande d'un IEN suite à un constat relatif aux évaluations nationales CE2 [décalage croissant entre les résultats obtenus en lecture compréhension et ceux en résolution de problèmes] ; il s'agissait de toucher à travers ces stages le maximum d'enseignants de la circonscription, école après école[2], 3 stages cycle 2 en 2001 et 2002, 3 stages cycle 3 en

[1] Fabienne Kilbertus, « L'analyse de pratiques en formation continue, une aide à l'amélioration des compétences professionnelles des enseignants ? ».

[2] L'équipe de circonscription a changé ; la demande est restée mais le suivi de cette étude des résultats des évaluations nationales n'a pas été assuré.

2003 et 2004. Au départ, les participants étaient plus ou moins volontaires ; la conseillère pédagogique devait « susciter des candidatures » ; cette année les demandes étaient supérieures au nombre de places. Ces stages nous sont totalement confiés.

2. des stages du plan départemental de formation à notre initiative. Le plan de formation départemental du Nord nous offre la possibilité, outre des stages longs liés à la mise en responsabilité des PE2, de proposer des stages d'une semaine offerts à tous les maîtres du département. L'idée nous est venue d'utiliser ce cadre pour tenter d'apporter des éléments de réponse à des questions récurrentes sur la collection ERMEL : régulièrement, dans les animations de circonscription sur le thème de la résolution de problèmes, des maîtres intéressés par des situations de la collection ERMEL disaient ne pas savoir comment s'y prendre, des Maîtres d'Accueil Temporaires s'interrogeaient en voyant des PE s'essayer à une démarche ERMEL. Le public de ce type de stages est constitué de maîtres volontaires qui viennent parfois de loin. Nous avons encadré quatre stages de cycle 2, les stages du cycle 3 quant à eux recueillent peu d'inscrits et ont du mal à ouvrir.

Nous donnons en annexe un descriptif succinct du déroulement de deux stages.

3 NOS OBJECTIFS

Dans chacun des stages, indépendamment des publics et des intitulés, nous avons l'ambition d'agir sur la conception que les maîtres peuvent avoir de l'activité mathématique et de son enseignement. Nous souhaitons en particulier **engager les participants dans des pratiques d'enseignement qui laissent de la place aux problèmes de recherche**.

Il nous semble qu'il y a (au moins) trois étapes incontournables :

- permettre de concevoir qu'il peut exister autre chose que les problèmes d'application
- faire partager l'idée que laisser une place à l'activité de recherche contribue aux apprentissages en mathématiques des élèves
- donner des repères pour une mise en œuvre dans les classes dès le retour de stage

Nous introduisons ce travail de fond en lien avec des contenus d'apprentissages, de manière à

- permettre aux participants de repérer qu'il peut y avoir des problèmes « clés » relativement aux connaissances que l'on souhaite voir acquérir aux élèves
- donner, sur quelques entrées des programmes, des éléments de progression faisant une large place à des problèmes analysés ensemble.

Cette orientation nous semble préférable pour un stage d'une semaine à celle qui consisterait en un travail plus centré sur les problèmes ouverts.

Les attentes initiales des stagiaires peuvent être très différentes naturellement, aussi nous avons le souci de les faire adhérer à notre démarche, nous veillons à ne pas trahir l'intitulé du stage, et à prendre en compte des demandes formulées par les stagiaires à l'entrée et en cours de semaine.

4 LES PÔLES FORTS DE LA SEMAINE

Au fur et à mesure des réalisations, la semaine s'est structurée autour de trois éléments clés du dispositif, une mise en situation autour de « La vache et le paysan », un document recueil d'énoncés de problèmes intitulé « méli-mélo » et une séance en classe.

a. « La vache et le paysan » (1h 30 environ)

Nous démarrons le stage par un problème emprunté à Hervé Péault[3] et adapté à des fins de mise en situation : il s'agit pour nous de faire vivre aux stagiaires ce que vit un élève à qui on explique une problème alors qu'il est enfermé dans son raisonnement ; cette phase où trois voire quatre solutions pour un « simple » problème additif se trouvent confrontées fait l'objet d'une adhésion unanime ; le ton est donné : on a le droit de se tromper, l'essai et l'erreur font partie de l'activité mathématique, de l'activité d'enseignement ; on rit beaucoup, le stage est parti.

Un paysan se rend au marché. Il achète une vache 5000 F. Il la revend 6000 F. Se ravisant, il la rachète 7000 F. Il la revend de nouveau 8000 F.

A-t-il gagné de l'argent, et dans ce cas combien ? A-t-il perdu de l'argent, et dans ce cas combien ? Ou n'a-t-il rien gagné ni perdu ?

b. Le « méli-mélo » (2 à 3 heures en plusieurs étapes)

L'idée de départ était de disposer d'une banque d'énoncés de problèmes, point de départ d'un TP destiné à clarifier ce qu'étaient les différents types de problèmes mentionnés dans les IO :

- problèmes pour apprendre à chercher / problèmes pour apprendre4 (pour construire les notions mathématiques) /
- problèmes de recherche / problèmes d'application et de réinvestissement.

Nous avons rassemblé dans un document appelé « méli-mélo » des énoncés de problèmes de tous les types concernés, le niveau d'enseignement en est précisé, voire parfois la période de l'année. Ce méli-mélo contient également quelques références aux livres du maître.

Après une présentation rapide de ce qui est dit dans les IO concernant les problèmes, les stagiaires ont à parcourir le méli-mélo et pour chaque problème ont à :

- trouver la catégorie à laquelle il appartient
- chercher l'intention probable du maître qui donne ce problème à ce niveau, apprendre à chercher ou travailler une notion

[3] dans Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Cahors 1991 ; puis Carnets de route de la COPIRELEM, Concertum tome 3, pages 57 à 62.
[4] terminologie utilisée par Dominique Valentin (conférence donnée à Lomme le 6/12/2000)

- se demander, quand le problème vise l'apprentissage d'une notion mathématique, à quel moment de l'apprentissage on le place et quelle fonction il remplit
- chercher, pour les problèmes destinés à apprendre à chercher, quelles sont les procédures d'élèves prévisibles, s'il s'agit d'un problème ouvert ou d'un problème complexe et ce qui s'apprend à travers sa résolution.

Très vite il est apparu que les maîtres s'emparaient du temps consacré à chercher les réponses à ces questions pour échanger sur leurs pratiques, leurs interrogations, leurs difficultés ; ils se mettent à confronter « l'ancien » et le « nouveau », leurs pratiques et ce qu'ils devinent derrière ce méli-mélo : même les plus en retrait au départ sont alors « dans le stage ».

Ce méli-mélo a évolué dans le temps et progressivement nous lui avons donné d'autres fins que la catégorisation des problèmes.

Au fur et à mesure des réalisations nous avons fait une plus large place aux problèmes pour apprendre et cherchons maintenant à privilégier un thème par stage : les problèmes du méli-mélo y renvoient.

La présentation des problèmes, les aides à la représentation font partie des thèmes abordés : ils s'appuient sur la sélection du méli-mélo ;

<u>pour le cycle 2 :</u>

- problème présenté matériellement et par oral (commander des bandes de 5 pétales pour fabriquer des fleurs, Ermel CP)
- présentation de problèmes sur fichier, consécutive à des problèmes identiques proposés matériellement (Cap Maths CP, Livre du Maître p. 179 et Livre de l'élève p. 90)
- énoncés combinant texte et images (quelle fonction aux images ?)
- problèmes apparemment voisins qui appellent des procédures différentes (« les chats » dans « J'apprends les maths, CP » et « les tigres » dans Ermel CP)
- etc.

<u>pour le cycle 3 :</u>

- aide à la représentation des problèmes (les boîtes de craies, Ermel CE2)
- fonction des feuilles de résolution (problème des œufs, le trésor des pirates, Ermel CE2)
- présentation matérielle du problème et autovalidation (les bandes colorées, Ermel CM1).

Parmi nos objectifs « cachés », le nécessaire étalement dans le temps du travail sur les opérations s'appuie sur l'exemple du champ conceptuel des problèmes additifs / soustractifs :

- rapport avec les IO et le document d'application des programmes pour le cycle 2,
- distinction procédures personnelles / procédures expertes ;

Ce thème est introduit par des problèmes additifs / soustractifs de différents types glissés ici et là dans le méli-mélo.

c. Une séance en classe (presque une journée en tenant compte de la préparation et de l'exploitation) :

Dans la perspective de déclencher une modification des pratiques des participants dès leur retour de stage, il nous semble aujourd'hui pertinent, voire essentiel, d'introduire dans la semaine une séance en classe. Cette séance a la double fonction de provoquer chez les stagiaires une analyse de leur propre pratique et de leur donner une représentation de ce que peut être une séance de recherche en mathématique. Le premier dispositif a été construit pour un accueil en école d'application dans la classe d'une EMF, puis constatant les effets de cette forme de travail, nous l'avons adaptée pour une classe ordinaire. Dans les deux cas, nous voulons éviter la leçon modèle et nous recherchons l'implication des stagiaires dans l'analyse et la prise de certaines décisions.

<u>Rencontre avec une EMF et sa classe de CP :</u>

Dans trois des quatre stages cycle2 que nous avons organisés à l'IUFM, nous avons passé une matinée en école d'application, avec observation de classes de CP. Nous souhaitions que les stagiaires rencontrent une EMF et puissent la questionner sur sa pratique (nos EMF connaissent et utilisent en général la démarche ERMEL). A chaque fois nous avons rencontré l'EMF avant le stage, présenté notre démarche et préparé avec elle le déroulement du point de vue des enfants et du point de vue des stagiaires. En janvier 2002 (et mars 2003**)** dans des classes de CP nous avons utilisé le problème des tigres (ERMEL CP p 166 et article « Dis, fais moi un dessin » de Yves Girmens[5])

« Au cours d'une chasse aux tigres, les hommes du village ont tué ... tigres. Pour les ramener jusqu'au village, il faut deux hommes pour porter un tigre. Combien faut –il d'hommes pour rapporter tous les tigres tués ? »

Pour la plupart des enfants le nombre de tigres retenu est 54, un objectif étant la prise de conscience que le dessin des 54 tigres et de leurs porteurs, s'il permet en principe de répondre à la question, n'est pas très efficace... Nous estimons qu'il faut pour cela au moins deux séances. Les stagiaires observent seulement la première (le mardi matin), mais les productions de la deuxième (le jeudi) nous sont transmises le dernier jour du stage.

La matinée du mardi se déroule en quatre temps :

1. en salle des maîtres : prise de contact des stagiaires avec l'EMF, qui fait une présentation rapide de sa classe et de sa programmation en mathématiques.
2. 30 à 40 minutes dans la classe de CP : premier temps de travail autour du problème : appropriation collective de l'énoncé, recherche individuelle.
3. retour dans la salle des maîtres pour construire la suite de la séance : les réactions à chaud sont assez vives (54 c'est beaucoup, c'est trop, ils ne peuvent pas réussir, pourquoi les mettre volontairement en échec ...) puis l'analyse des productions (massivement des dessins, parfois très réalistes ; quelques symbolisations progressives ; rares procédures numériques) et la préparation de la suite à donner reçoivent la plus grande attention des stagiaires qui entrent de fait dans la compréhension de notre démarche.

[5] Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques- Besançon 1997 ; puis Carnets de route de la Copirelem, Concertum tome 1 (sans les productions d'élèves mises en annexes dans le premier document).

4. Retour dans la classe : observation de la mise en commun menée par l'EMF en fonction du scénario décidé par le groupe en salle des maîtres. La classe conclut qu'il n'est pas utile de dessiner les rayures des tigres et l'enseignant annonce que les enfants chercheront à nouveau le jeudi. (A la fin du stage nous avons analysé les productions de la deuxième étape : l'évolution des procédures est nette !)

Ce travail d'observation, avec participation à l'analyse et à la prise de décision est plébiscité par les stagiaires et apparaît dans les entretiens menés après le stage de 2002 comme déterminant dans la possibilité d'évolution de pratiques des stagiaires. D'une part l'aspect concret et pratique de la visite de classe est apprécié, les stagiaires se sentent rejoints dans leurs préoccupations quotidiennes et la démarche de résolution de problème devient plus crédible ; la crainte de recevoir en stage des directives inapplicables est grande !!! Et d'autre part, un décalage parfois très grand entre ce qui a été observé et les pratiques des participants est mis à jour (la seule évocation pourrait masquer ce décalage) mais ce constat de décalage appartient à chacun par le retour réflexif que l'observation engendre, des échanges informels entre stagiaires le laissent percevoir, mais nous veillons de bout en bout à ne rien formuler à ce sujet qui risquerait d'être ressenti comme un jugement, nous accueillons avec respect et bienveillance les questionnements et commentaires des participants.

<u>Séance dans une classe ordinaire</u>

Dans la circonscription où nous sommes intervenues, il n'y a pas d'école d'application, aussi nous avons modifié le dispositif et inclus au programme du stage la construction et l'observation d'une séance dans la classe d'un des enseignants participant au stage. Nous avons la confiance de la conseillère pédagogique et sa complicité est déterminante pour la préparation. Avec son aide, nous choisissons et sollicitons un(e) stagiaire pour accueillir le groupe dans sa classe le temps d'une résolution de problème le jeudi matin du stage.

Nous allons rencontrer l'enseignante dans son école environ 2 semaines avant le stage, nous choisissons un problème et faisons avec elle une première analyse de celui-ci, nous vérifions que les conditions de son appropriation par les élèves de la classe seront réunies. L'objectif est de donner à cette enseignante une longueur d'avance sur ses collègues dans la réflexion sur ce problème et sa mise en œuvre. Nous voulons qu'elle soit sécurisée au maximum. Nous élaborons ensemble un pré-programme de la matinée, alternant observation en classe et analyse dans une autre salle, mais le contrat est que la préparation aura lieu pendant le stage le mardi après midi : Il s'agit pour nous d'impliquer l'ensemble du groupe de stagiaires dans cette séance.

Ce travail préparatoire collectif vise trois objectifs. Le premier est celui qui est annoncé d'abord : ne pas laisser peser la responsabilité de la séance sur l'enseignant qui accepte de recevoir le groupe. Son « talent » est largement sollicité pour la mise en œuvre effective, mais une partie des choix s'effectue collectivement. Deuxièmement, du point de vue de la formation « didactique » des participants, cette préparation de séance est l'occasion de faire formuler le questionnement qui traverse nécessairement ce type de préparation (formulation des consignes ? travail individuel ? collectif ? des aides ? quand et comment ? mise en commun ? avec quels objectifs ? écrits de communication ? de solution ?...) et de mettre en discussion les effets de telle ou telle décision. Dans la réflexion sur les aides nous privilégions l'aide à la représentation plutôt que l'aide à la résolution et c'est pour beaucoup une nouveauté. Enfin, relativement à l'observation de la séance elle-même, ce travail préalable oriente l'observation des stagiaires sur les élèves plus que sur l'enseignante. D'une part ses choix ne font plus guère de mystère puisqu'ils ont été réfléchis ensemble et d'autre part les enjeux de chaque phase du problème sont identifiés par les stagiaires qui sont donc en appétit relativement à ce que les élèves pourront produire. Or il nous semble essentiel de développer chez les enseignants cette posture d'observation des élèves et d'analyse de leurs productions orales et écrites.

La matinée se déroule dans l'école en deux temps en classe, avec un moment d'analyse entre les deux pour prendre les décisions relatives à la suite à donner.

Concernant ce fonctionnement, les bilans de fin de stage font apparaître un intérêt unanime pour la séance en classe et quelques réserves sur le temps dévolu à sa préparation, ce qui ne nous surprend pas dans un bilan « à chaud », mais nous n'avons pas d'éléments pour évaluer les effets réels de cette préparation, et notre conviction est que ce travail préparatoire est déterminant.

5 BILANS DES STAGES

A la fin de chaque stage, nous demandons un bilan individuel écrit, assez bref autour de trois pistes simples et assez ouvertes : « **+** : j'ai aimé.. » ; « **-** : je n'ai pas aimé... » ; « **?** : les questions qui me restent ... ».

Il ressort de ces écrits que le stage est vécu comme *très en prise sur la pratique de classe* ; les exemples d'activités pour la classe, les situations « *concrètes* » sont très appréciées ; en particulier la séance en classe et l'utilisation de vidéos (10 à 15 minutes de visionnement avec un questionnement) qui contribue à « *donner une idée de ce à quoi peuvent ressembler certaines situations* ». Le fait que nous prenions en compte les ressources ordinaires des enseignants (manuels scolaires) et que nous apportions les livres du maître et d'autres documents est souligné positivement.

Les points de vue sont plus partagés concernant certains apports ressentis comme théoriques, ainsi le travail sur les problèmes additifs et soustractifs en lien avec les IO du cycle 2, sur la numération, sur la division.

Au-delà des ressentis ainsi collectés, nous espérions connaître l'évolution des résultats des évaluations CE2 et 6ème de la circonscription qui nous avait sollicitées, mais suite à un changement d'équipe, le traitement des résultats est différent et nous n'avons pas de retour de ce côté-là.

Mais nous avons un autre retour, sous la forme d'entretiens réalisés par Fabienne Kilbertus dans le cadre de son mémoire de maîtrise de science de l'éducation. Nous avions accepté qu'elle assiste au stage « Les maths au cycle 2 : un apprentissage basé sur la résolution de problèmes » en janvier 2002 et les stagiaires ont accepté de répondre à ses questions deux mois après. **Ces entretiens nous donnent des indications précises sur des changements effectifs exprimés par les 12 stagiaires**.

- Toutes les stagiaires déclarent avoir mis en œuvre dans leur classe de nouvelles activités. Elles disent avoir « essayé » toutes les situations « vues » pendant le stage (lors de la séance en classe ou par quelques minutes de vidéo) ; ainsi que quelques activités évoquées pendant le stage, notamment si au cours de la semaine des collègues ont dit les avoir utilisées précédemment. 6 stagiaires disent avoir utilisé de nouvelles activités (tirées du ERMEL) qui n'avaient pas fait l'objet d'une présentation pendant le stage.

- Tous les entretiens mentionnent des changements dans la conduite de classe : les enseignants laissent plus de place à la recherche des élèves, 9 parmi les 12 ont pu mettre en œuvre une certaine différenciation.
- Toutes les enseignantes expriment que ces changements ont un effet positif sur l'implication et la motivation des élèves, 7 parmi les 12 repèrent un effet sur la réussite et les progrès des élèves notamment les élèves en difficulté.

Nous avons été renforcées dans nos choix par ces témoignages de changements effectifs dans les pratiques. Nous transcrivons pour conclure des extraits d'un entretien dans lequel l'enseignante, exprime un « avant » et un « après ». Un certain bonheur d'enseigner « autrement » transparaît, nous savons bien qu'il n'est pas seulement le fruit de notre action, mais il nous semble pouvoir être un encouragement pour tous les formateurs dont nous sommes.

Au sujet de la séance en classe...

... Il y a aussi tout le travail qu'on a fait ensemble, sur la mise en commun utile à faire après un temps de recherche des enfants, qui était intéressant. Bien sélectionner, quoi sélectionner, et on n'était pas tous d'accord sur ce qu'on allait leur demander, comment bien leur faire comprendre qu'il y a des procédures différentes pour résoudre un problème,leur faire expliciter aussi. Et surtout c'est ça que le stage m'a apporté et m'a fait changé : Je trouve qu'on donne plus la parole aux enfants, on leur permet plus de s'expliquer ; et pour nous, on se rend compte de ce qu'ils ont voulu faire dont on ne se rend pas toujours bien compte en regardant leur travail. Et eux, quand ils peuvent expliquer, ils progressent et dans la mise en commun ils apprennent des autres. Je trouve maintenant qu'il y a plus d'échanges dans ma classe, que les enfants tiennent plus compte de ce que les autres ont fait. Et pour les enfants en difficulté, j'étais surprise parce que ils donnent leur avis, ils trouvent des démarches, des idées … et on les écoute…

Au sujet des élèves en difficulté

J'ai toujours eu un contact avec des maîtres spécialisés pour m'aider. J'avais déjà un regard particulier envers eux, mais maintenant je leur laisse plus le temps de s'exprimer. Et, suite au stage, j'ai changé ma disposition de classe pour pouvoir travailler davantage en groupe. D'ailleurs le stage m'a vraiment été profitable, même en lecture j'ai changé ma façon de travailler, ... pour favoriser le travail d'échange.

...

C'est plus fatiguant mais je les trouve plus actifs. Je leur demande un peu plus d'expliquer comment ils ont trouvé pour aider ceux qui sont un peu perdus. D'ailleurs je pars d'avantage des erreurs des enfants pour construire ma séquence au pied levé, on prend des propositions et on analyse, on regarde pourquoi cette solution va, pourquoi celle-là ne va pas et ce qu'on pourrait faire pour l'améliorer. C'est pas toujours évident de parler, d'expliquer pour un enfant, et puis parfois on n'ose pas faire refaire aux enfants, on croit que cela va les lasser, et puis non …on peut leur faire refaire, ils repartent.

Au niveau de tes conduites de classe, as-tu changé quelque chose ?

Oui, ça a changé : avant, c'était beaucoup de relations maîtres élèves, maintenant c'est maître élèves et élèves entre eux. Je n'aurais peut-être jamais osé le faire avant. Avant, je voyageais dans la classe, maintenant je voyage encore plus. Je vois plus leurs façons de faire, je comprends mieux leurs démarches et les échanges sont vraiment *profitables. D'ailleurs avant, quelquefois, je voyais les enfants bailler, je me disais, ils n'ont pas assez dormi, ... la télévision. Non, c'est parce qu'ils s'ennuyaient, tout simplement. J'ai l'impression qu'ils s'ennuient moins maintenant, c'est valorisant, ils disent : c'est déjà l'heure ? Ca a passé vite ! Donc je me dis que cela a changé aussi pour eux, c'est plus motivant. Ils ne participaient pas avant, c'étaient toujours les mêmes, tandis que là je dis que même si ils font peu, ils font quand même. J'ai aussi travaillé pendant les vacances pour revoir ma façon de faire en maths mais aussi en lecture. Maintenant quand ils travaillent en groupes ils ont tous quelque chose à dire, et ça je ne l'avais pas avant. Ils sont plus dedans. La grande difficulté c'est de trouver le bon groupe, pour que cela fonctionne bien et qu'ils aient tous leur mot à dire, pas être étouffé par un leader. Mes groupes je les change souvent, ...et puis, quand ils travaillent en groupe je leur donne à tous les mêmes situations mais je ne vais pas avoir avec tous les mêmes exigences. Ils font en fonction de ce qu'ils peuvent faire. Avant il y en avait qui attendaient que cela se passe, parce que cela était trop difficile pour eux ou qu'ils n'avaient pas envie, au niveau des phases de recherche, avant la trace écrite. Je trouve que maintenant c'est plus profitable parce qu'il a cherché, avant il ne faisait rien, maintenant il est pris dans le groupe.*

...

BIBLIOGRAPHIE RÉDUITE

- *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques,* J. JULO (Presses Universitaires de Rennes, 1994) : un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement.
- *Comment font-ils ?* (*l'écolier et le problème de mathématiques*), Rencontres Pédagogiques n° 4 (INRP, 1984)
- *Vrai ? Faux ? On en débat ! De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3*. ERMEL (1999) INRP Didactiques des disciplines : mise en place de séances pour l'apprentissage du raisonnement.
- Articles de la revue *Grand N*, IREM de Grenoble :

  n°51 : "Problème ouvert, problème pour chercher", R. CHARNAY (1992)

  n°63 : "Le choix des problèmes pour « la résolution de problèmes »" C. HOUDEMENT (1999)

  n°69: «Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes" JULO (2002)

  n°69 : «Sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire" COPPE, HOUDEMENT

  n° 71 : " La résolution de problèmes en question " HOUDEMENT (2003)

  Numéro spécial *Points de départ* (de problèmes).(2003)

Annexe 1: planning de deux stages

En Janvier 2002, une semaine de stage départemental « Les maths au CP, un apprentissage basé sur la résolution de problèmes » :

- une phase de Brain-Storming consacrée à faire le point sur les premiers apprentissages numériques, sur ce qui s'est probablement construit en maternelle et qu'il convient d'évaluer à l'entrée du CP.
- travail à partir du méli-mélo sur les différents types de problèmes organisé autour d'une séance en classe sur la recherche d'un problème ouvert ; c'est à partir de cette séance qu'a été menée la réflexion sur la gestion des séances de résolution de problèmes (quelle gestion pour quel type de problèmes, quelle fonction allouée aux moments collectifs).
- mise en situation par TP sur le thème de la numération pour permettre aux stagiaires de revisiter leurs connaissances.
- réflexion sur l'organisation des apprentissages en CP, structurée autour de deux questions :
    - la dizaine, à quel moment et comment l'introduire ?
    - quels problèmes jalonnent les trois grandes phases mentionnées dans le manuel Ermel ?
- travail sur les différentes formes de calcul, précédé d'une présentation du champ des problèmes additifs / soustractifs à partir d'une série d'énoncés extraits des évaluations nationales.

En novembre 2002, un stage en circonscription « La résolution de problèmes au cycle des approfondissements » :

- mise en situation (« La vache et le paysan ») pour démarrer la semaine
- travail de catégorisation des problèmes dans un méli-mélo organisé autour d'une séance en classe sur un problème ouvert (« faire 23 ») préparée par l'ensemble du groupe et suivie d'une analyse a posteriori
- mise en situation sur des problèmes de reproduction de figures en géométrie
- questionnement sur l'entrée méthodologique en résolution de problèmes
- différents types d'écrits en résolution de problèmes
- Ces deux derniers points n'ont pas eu le développement prévu en raison du retard pris sur les autres thèmes.

Variantes et évolution

Le premier stage cycle 2 a été intitulé « mathématiques au CP, un apprentissage basé sur la résolution de problèmes » ; à la demande de stagiaires nous l'avons fait évoluer vers « mathématiques au cycle 2, un apprentissage... ».

La diversité des publics, dans le 2ème cas, présente des avantages mais aussi des inconvénients :

- les stages CP drainent un public de maîtres de CP mais aussi de GS qui souhaitent s'informer de ce à quoi ils préparent leurs élèves : la liaison GS / CP est l'un des axes du travail et l'on peut vraiment y réfléchir à une progression des apprentissages en CP ; les problèmes traversent le stage mais sont presque au second plan.

- les stages cycle 2 ont un public qui va de la GS au CE1, et il y est très difficile de mener le travail évoqué précédemment sans mécontenter les maîtres de CE1 qui se trouvent alors moins bien pris en compte.

Quoi qu'il en soit, l'axe central reste toujours la compréhension du système de numération et l'entrée dans le calcul ; la place des problèmes qui jalonnent ces apprentissages est une préoccupation première, les problèmes pour apprendre à chercher relevant de l'entrée dans une attitude de recherche.

Concernant les stages cycle 3, le travail sur les problèmes de recherche se partage généralement entre les problèmes ouverts [quelle gestion de classe pour la recherche ?] et les problèmes complexes [les écrits de solution et leur évolution au long du cycle 3]. L'accroche des stages de cycle 3 à un contenu est plus difficile à réussir que pour le cycle 2 : nous avons testé et rejeté la division (on s'y perd, trop délicat), la géométrie (fonctionne assez bien) et la numération (choisie cette année en raison des mauvais résultats des circonscriptions aux évaluations 6ième) ; sur ce thème, la séquence ERMEL consacrée au « livre du million » s'est avérée très concluante.

CHACUN SON CHEMIN
UN PROBLÈME DE PARTAGE
APPRENTISSAGES NUMÉRIQUES AU CYCLE 2

Jeanne Bolon
IUFM de l'académie de Versailles

Résumé :

Le DVD *Chacun son chemin - Un problème de partage au cycle 2* a été conçu pour la formation initiale ou continue des enseignants d'école primaire sur la pédagogie différenciée. Il illustre des dispositifs pédagogiques qui articulent gestion collective de la classe et gestion individuelle en fonction de l'état de savoir des élèves. Trois classes, s'appuyant sur la documentation ERMEL, traitent un problème de partage (non équitable ou équitable).

Le DVD comporte plusieurs parties :

* des séquences de classe, en GS, CP et CE1,
* des entretiens avec les enseignantes de ces classes,
* des zooms sur certains aspects de la différenciation.

Il comporte également des textes : transcriptions des séquences de classe, bibliographie, suggestions d'utilisation

Le DVD *Chacun son chemin - un problème de partag*e a été présenté au cours du colloque COPIRELEM 2004. Il fait suite à un atelier du colloque COPIRELEM de Tours (2001), dont le compte-rendu, remanié, avait fait l'objet d'un article dans la revue *Grand N*[1].

Ce DVD est bâti autour de trois prises de vue dans des classes de cycle 2 (grande section, cours préparatoire, cours élémentaire première année) sur le thème mathématique des partages équitables ou inéquitables.

Notre équipe (maîtres-formateurs, conseillers pédagogiques de circonscription, maître de conférences et inspectrice de l'éducation nationale) a cherché à répondre une demande constante des collègues d'enseignement élémentaire : comment faire pour pratiquer la pédagogie différenciée ? Certes les documents issus de l'expérimentation ERMEL fournissent des exemples intéressants à exploiter en formation initiale ou continue. Nous avions envie de faciliter l'entrée dans ces textes en montrant, par l'image, que de jeunes collègues arrivaient à mettre en oeuvre certains dispositifs de différenciation.

[1] BOLON J. (2002), Pédagogie différenciée en mathématiques : mission impossible ou défi ?; *Grand N n° 69*, p. 63-82.

Le choix des trois classes a été facile, l'équipe ERMEL ayant mis à l'épreuve certaines situations mathématiques dans des écoles du département des Hauts-de-Seine. Pour le DVD, les trois classes ont traité de problèmes mathématiques voisins - le thème du partage - avec des procédés de différenciation qui présentaient à la fois unité et diversité.

Les trois enseignantes mettent en œuvre au quotidien des exigences déontologiques fortes : tout élève a le droit d'apprendre quel que soit son niveau, tout élève a le droit d'être respecté, quelles que soient ses erreurs. Le DVD, sans constituer un inventaire des procédés de différenciation utilisables en mathématiques, illustre quelques-uns d'entre eux : la constitution des groupes de deux ou des groupes de quatre, le choix des valeurs numériques, l'étayage des élèves sans « tuer le problème ». Plus généralement, il montre qu'il est possible de conjuguer une gestion collective (même thème de travail pour tous) et une gestion individuelle en fonction de l'état de savoir de l'élève.

Dans les trois classes, on retrouve des principes communs d'organisation du travail mathématique :

- *lancer la résolution de problème*, c'est à dire aider les élèves à prendre en compte les contraintes et possibilités de la situation, faciliter leur appropriation de la situation, fixer les rôles de chacun,
- *aider les élèves sans "tuer" le problème*, c'est-à-dire accompagner les élèves là où ils en sont, par une préparation, une prise de notes en séance, des relances individualisées,
- c*onclure provisoirement* selon l'une des modalités habituelles, expliquer, évaluer ou valider.

Nous avons conçu le DVD pour une utilisation individuelle ou collective, en formation initiale ou en formation continue. L'arborescence prévoit pour chaque niveau de classe trois rubriques : la classe, l'entretien avec l'enseignante et un zoom.

Pour chaque niveau de classe, une prise de vue a été faite sur deux journées de classe consécutives. Un montage d'une vingtaine de minutes met en valeur les dispositifs de différenciation et rend compte des coupes faites. Un entretien avec l'enseignante met en valeur son projet de classe. Un retour sur certaines images permet d'illustrer les conditions de la différenciation.

L'arborescence propose également des visions synthétiques sur les trois niveaux : les éléments de différenciation communs (par exemple, le respect des élèves plus lents), les éléments illustrés sur un seul niveau (par exemple, l'importance accordée à la langue en mathématiques), les progrès dans les apprentissages numériques.

Le cédérom contient également des textes : le décryptage des séances de classe et des entretiens, un bibliographie, et l'ensemble de la notice du DVD.

Ce DVD n'aurait pas vu le jour sans le soutien de l'inspection académique des Hauts-de-Seine.

Organisé dans le cadre de la formation continue départementale, un groupe de formateurs s'est constitué en 1999-2000 pour tenter de faire le point sur les dispositifs effectivement utilisés dans les classes en les situant par rapport aux études menées sur le thème de la différenciation, en particulier en mathématiques. Partant des travaux de l'équipe ERMEL, notre groupe s'est posé les questions suivantes :

- en quoi consiste la pédagogie différenciée définie par le ministère,
- quelles sont les conditions favorables à sa mise en œuvre dans le domaine mathématique ?

- que peut-on mettre en place en formation initiale et continue ?

La première année, nous avons beaucoup lu, nous avons eu des entretiens avec des maîtres formateurs experts, nous avons étudié à la loupe les textes officiels. La deuxième année, nous nous sommes rendus dans des classes pour mieux comprendre les enjeux, les contraintes et les possibilités de conception et de mise en œuvre des directives ministérielles. La troisième année, nous avons mis en chantier le DVD, nourris des réflexions accumulées durant les années précédentes. Grâce à la collaboration avec le CRDP de l'académie de Versailles, nous avons bénéficié d'une équipe technique intéressée par les questions pédagogiques.

Nous espérons que le produit commercialisé par le CRDP intéressera les utilisateurs futurs autant qu'il nous a passionnés durant sa mise au point.

POUR COMMANDER

CHACUN SON CHEMIN - UN PROBLÈME DE PARTAGE - Apprentissages numériques au cycle 2
Éditeur : CRDP de l'académie de Versailles - CDDP des Hauts-de-Seine
Réf : 7802MM21

Renseignements CDDP92 : 01 41 41 59 59
CRDP de l'académie de Versailles - 584 rue Fourny - ZI - BP 326 - 78533 BUC Cedex
ou au CRDP ou CDDP de votre académie

Prix : 30 € (participation aux frais d'envoi si par correspondance : 4 €)

COMPTER SUR LES ERREURS POUR COMPTER SANS ERREURS :

ÉTAT DES LIEUX SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA NUMÉRATION DÉCIMALE DE POSITION AU CYCLE 3.

Véronique Parouty
Conseillère pédagogique
La Rochelle

Résumé :

Cette communication présente les résultats d'une recherche menée dans le cadre du DESS d'Ingénierie du Conseil pédagogique .Année 2002-2003. Le Directeur de la formation est Monsieur Michel Fayol. Aussi, la méthodologie adoptée est-elle très centrée sur l'expérimentation, la mesure et le traitement statistique.

Trois questions ont été le point de départ du travail qui s'est appuyé sur des tests et questionnaires auprès des élèves de cycle 3 et des enseignants :

- dans quelle mesure, la numération décimale est-elle bien installée au cycle 3 (du CE2 au CM2) ?
- comment les enseignants repèrent-ils les erreurs de leurs élèves et quels dispositifs de remédiation conçoivent-ils ?
- les résultats des élèves peuvent-ils s'améliorer si les enseignants les font travailler sur des exercices faisant fonctionner de manière privilégiée l'aspect positionnel de la numération ?

Les résultats de ce travail semblent montrer qu'un gros effort de formation des enseignants sur ce sujet est nécessaire.

1. PRÉSENTATION DES HYPOTHÈSES :

La recherche a d'abord porté sur les élèves du cycle 3, puis sur les enseignants.

1. hypothèses au niveau des élèves :

La numération décimale de position est une notion qui me semblait complexe dans le sens où elle est difficile à construire et difficile à évaluer.

Ainsi ai-je émis **l'hypothèse que la numération décimale de position n'était pas nécessairement bien installée au cycle 3 et que cela pouvait passer inaperçu au cours du cycle**.

Nombre d'enseignants du cycle 3 ne font pas de la numération décimale de position un objectif prioritaire dans l'enseignement mathématique. Peut-être, d'une part, ont-ils eu tendance à mettre l'accent sur la géométrie puis sur la résolution de problèmes, mais surtout sur la lecture, pour atteindre des performances meilleures aux évaluations nationales ; peut-être aussi, considèrent-ils l'apprentissage de la numération décimale de position comme étant " l'affaire du cycle 2 " au même titre que l'apprentissage de la lecture.

Or, la maîtrise de le numération décimale de position me semble fondamentale pour construire et maîtriser d'autres compétences comme, par exemple, les calculs et *a fortiori*, les calculs posés. La gestion de " la retenue " est au cœur du problème dans les trois techniques élémentaires (l'addition, la soustraction et la multiplication). En outre, je fais le pari que si la numération de position n'est pas bien comprise par l'élève, celui-ci éprouvera des difficultés à " travailler " (au sens de manipuler) les nombres décimaux à virgule.

Selon moi, l'enseignant qui propose trop tôt ou trop souvent des techniques opératoires à ses élèves risque de mettre en place une mécanique, efficace au niveau du résultat, mais d'occulter aussi efficacement, l'incompréhension par les élèves du fonctionnement de la numération de position à travers la technique.

Enfin, je pense que la plupart des enseignants abordent les nombres à virgule en prenant appui sur la mesure (essentiellement, mesure de longueur) et non sur les fractions. Le choix est confortable pour l'enseignant mais il est certainement préjudiciable pour l'élève . La partie décimale du nombre est alors considérée par l'élève comme un nombre entier juxtaposé à la partie entière et séparé par une virgule. L'introduction des nombres décimaux au cours moyen est pourtant l'occasion de mesurer le niveau de maîtrise de la numération de position et de l'asseoir.

Afin de vérifier si mon hypothèse est fondée, je me suis tout d'abord appuyée sur la lecture de la synthèse des évaluations nationales CE2 2002, 6° et 5° . En CE2, le score de réussite global atteint 64,4% dans le domaine " travaux numériques ", cachant des disparités selon les items : la soustraction pose problème si elle est à retenue (score variant de 36,5 à 45%) , la multiplication de 29 par 10 (31%) alors que c'est 29 dizaines ; l'item 39 (850 - 600) n'est réussi qu'à 37%. Dans le domaine de la " numération écrite et orale ", l'item 81 " utiliser l'algorithme décimal de la numération par 10 " n'est réussi (ZEP et Hors ZEP confondus) qu'à 56%.

En 6°, dans le champ " numération et écriture des nombres ", il est précisé que les items liés " au sens de l'écriture à virgule ont présenté plus de difficulté. "

Il ressort de cette première lecture que la numération décimale de position fait obstacle au cycle 3 et au-delà. Seuls certains items sont révélateurs de cette lacune. Les techniques opératoires quant à elles, semblent se consolider d'année en année mais elles ne permettent pas de distinguer l'aspect mécanique de l'aspect raisonné du calcul car, seul, le résultat de l'opération est évalué.

- **La bonne compréhension du fonctionnement de la numération décimale de position est-elle le garant d'une réussite en calcul et cela, même au moment de l'introduction des nombres décimaux à virgule ?**
- **Inversement, peut-on imaginer que la maîtrise des techniques opératoires ne s'accompagne pas d'une compréhension meilleure de la numération de position ?**

La lecture des travaux menés par des didacticiens et des chercheurs m'incite à explorer plus finement cette voie. Rémi Brissiaud (2003), par exemple défend l'idée qu'il est indispensable de retarder l'apprentissage de " l'addition en colonne " au cycle 2 car elle ne permet pas de comprendre le sens de la numération décimale. Il développe sur tout le cycle 2 l'idée que c'est en affirmant les compétences en calcul qu'on participe à la construction durable de la numération de position.

Roland Charnay (1999,p.97), dans : " Pourquoi des mathématiques à l'école ? " dénonce les enseignants qui transmettent des mécanismes aux élèves pour ne pas les déstabiliser notamment en ce qui concerne l'approche des nombres décimaux : " Pour ne pas déstabiliser les élèves, on évite de déstabiliser leurs connaissances ".

En outre, l'équipe ERMEL à laquelle participe Roland Charnay développe, dans tous les niveaux de classe, l'intérêt de faire travailler les élèves sur le principe décimal de notre numération : " un travail approfondi sur les principes de la numération orale doit permettre des réinvestissements féconds dans les domaines du calcul mental. " (ERMEL CE2 2000 p. 278). Les nouveaux programmes vont eux-mêmes dans ce sens : " on peut exploiter des erreurs du type 0,5x 3= 0,15 pour revenir sur la signification des écritures décimales " (page 27 document d'accompagnement du cycle 3).

Un lien semble donc établi entre numération décimale de position et calcul. La numération de position occupe une place centrale dans les travaux numériques.

- **S'il est avéré, à l'échelle locale, que les erreurs relevant de la numération décimale de position, sont présentes au cycle 3, alors, est-il possible de construire un dispositif de remédiation efficace ?**
- **En outre, un travail de remédiation centré exclusivement sur la numération positionnelle, a-t-il des effets positifs dans le domaine du calcul ?**

2. hypothèse au niveau des enseignants :

J'émets **l'hypothèse que nombre d'enseignants ne mettent pas en place des dispositifs d'évaluation mettant en évidence les erreurs relevant de la numération de position dans les travaux numériques de leurs élèves.**

Par voie de conséquence**, je m'interroge de savoir s'ils conçoivent des dispositifs de remédiation qui visent à installer durablement la numération de position chez leurs élèves.**

- **Si des erreurs de numération décimale de position sont effectivement constatées chez les élèves de cycle 3, alors, on peut s'interroger de savoir s'il conviendrait de former les enseignants au traitement de ces erreurs soit pour y remédier, soit pour prévenir leur apparition ou leur résurgence.**

Cette action sera expérimentée sur plusieurs groupes d'enseignants, avant d'être évaluée.

En un premier temps, je vais tenter de vérifier si les élèves de cycle 3 éprouvent réellement des difficultés dans le domaine de la numération de position à l'échelle locale.

Ensuite, j'analyserai ces erreurs et je concevrai un dispositif de remédiation que je soumettrai à l'expérimentation pour en mesurer l'efficacité sur les mêmes élèves.

A l'appui des résultats, je concevrai une formation sur le traitement des erreurs de numération de position. Je mènerai l'action de formation auprès de plusieurs publics d'enseignants et j'en mesurerai les effets.

2. MISE À L'ÉPREUVE DES DEUX PREMIÈRES HYPOTHÈSES :

Hypothèse 1 : La numération décimale de position est mal installée chez les élèves de cycle 3.
Hypothèse 2 : Un lien existe entre la numération et le calcul.

1. Description du protocole :

1. *La population :*

L'expérimentation a porté sur les trois niveaux du cycle 3 : CE2, CM1 et CM2 à peu près dans les mêmes proportions. Soit, en tout : 421 élèves sur différentes circonscriptions de La Rochelle et de ses environs, situées en ZEP et hors ZEP.

La population a été scindée en deux groupes d'effectifs identiques et aux caractéristiques communes : un groupe témoin et un groupe expérimental. Cette distinction n'aura d'importance que pour la validation de l'hypothèse 3.

2. *La nature des tests : [annexe 1]*

La situation A. <u>Contenu :</u> Pour carreler une pièce, il faut 8564 carreaux. Les carreaux sont vendus par paquets de 100. Combien de paquets faut-il commander ?

La situation A, aussi dite " des carrelages " est inspirée d'une situation ERMEL déclinée du CP au cycle 3, en faisant varier uniquement l'habillage et la taille des nombres (on parle de craies au CE2, de trombones au CM1…)

Une conférence de Roland Charnay, sur le traitement des erreurs, tenue à Poitiers en avril 2003, dans le cadre du DESS, a garanti le fondement de mon choix. En effet, selon lui, il y a trois niveaux d'évaluation. Pour illustrer sa réflexion, il a donné deux exemples : un en géométrie et un autre en numération.

<table>
<tr><td colspan="2">Trois niveaux d'évaluation en géométrie</td><td colspan="2">Trois niveaux d'évaluation en numération</td></tr>
<tr><td colspan="4">Niveau 1
La mémorisation ou le simple rappel de connaissances. C'est la restitution</td></tr>
<tr><td>Exemple</td><td>A quoi reconnaît-on deux droites parallèles ?</td><td>exemple</td><td>Montre le chiffre des centaines dans 1 203 586</td></tr>
<tr><td colspan="4">Niveau 2
L'application. L'enfant est encore tenu informé, explicitement, de la notion travaillée.</td></tr>
<tr><td>exemple</td><td>Construis une parallèle à partir de deux points.</td><td>exemple</td><td>Ajoute 2 dizaines et 3 centaines à 1 236</td></tr>
<tr><td colspan="4">Niveau 3
Résolution de problème, analyse. L'enfant a besoin de mobiliser ses connaissances sur la notion qui n'est pas explicitée, pour résoudre une situation-problème.</td></tr>
<tr><td>exemple</td><td>Décris cette figure de manière à ce que ton camarade puisse réaliser exactement la même.
(pour cette figure, il sera nécessaire de parler de parallèles dans la description : c'est juste sous-entendu)</td><td>exemple</td><td>Il y a 1 203 586 trombones. On veut les ranger dans des boîtes de 100. Combien de boîtes peut-on remplir ?</td></tr>
</table>

Il ne fait pas l'ombre d'un doute que la situation A du test des élèves, sur les carrelages, relève du niveau 3 d'évaluation. Or, c'est uniquement au niveau 3 que l'on peut prétendre évaluer l'acquisition d'une notion ou d'un concept. C'est en ce sens, que cette situation A , dite " des carrelages ", me semble *a priori* un indicateur des plus pertinents sur le degré de maîtrise de la numération de position.

La situation B. <u>Contenu :</u> dictée de nombres
CE2 : [B1] 5 203 – [B2] 8 013 – [B3] 20 036- [B4] 6 000 231 – [B5] 6 200 025
CM1 : [B1] 263 000 750 – [B2] 25 085 330 –[B3] 36 000 052 –

[B4] 2 000 000 013- [B5] 12 000 800 200
CM2 : [B1] 2 000 000 013- [B2] 12 000 800 200 – [B3] 425 023 –
[B4] 85,1 (mais dicter 85 et 1/10) – [B5] 43,003 (mais dicter 43 et 3/1000).

Il s'agit de voir si la valeur positionnelle de la numération est acquise par les élèves en prenant comme indicateur la place et le nombre de zéros. Ce que j'appelle : la gestion des zéros. Par exemple, pour le nombre 6 000 231, si l'erreur porte sur les chiffres 6, 2, 3 et 1, je ne considère pas réellement cette erreur caractéristique de la numération positionnelle (défaut d'attention, problème auditif, difficulté d'association orale et écrite….). En revanche, si l'enfant écrit tous les chiffres qu'on entend lorsqu'ils sont dictés, c'est à dire le 6, le 2, et 31…mais que l'erreur se situe au niveau des zéros, soit parce que ceux-ci sont en nombre insuffisant, soit parce qu'ils sont mal positionnés… alors, cette erreur sera considérée comme indicateur de la mauvaise compréhension du système positionnel de la numération. Erreur codée 8.

Les situations C et D . <u>Contenu</u> :
pour C. Calcul en ligne.
CE2 : 42-17 = ? 46+25= ? 12x20= ?
CM1 : 92-37= ? 526+525= ? 126x200= ?
CM2 : 12,6 +26,42 = ? 22,16-10,8= ? 1,8x20= ?
Pour D Calcul posé (techniques opératoires)

CE2	5 2 6 0 2 + 8 0 8 9 + 3 1 2 7	6 2 3 - 8 5	1 0 6 8 x 5
CM1	5 2 6 0 2 + 8 0 8 9 + 3 1 2 7	6 2 3 - 8 5	1 0 6 8 x 5
CM2	5 2 6 0 2 + 8 0 8 9 + 3 1 2 7	5 6 2 3 - 2 0 8 5	1 0 6 8 x 2 0 5

Il s'agit de voir comment la retenue, située au cœur du système décimal (regroupement par 10 et échange 10 contre 1), est comprise par les élèves. Pour ce faire, je pense voir apparaître des erreurs caractéristiques où, par exemple, on ôte 3 à 5 , ne pouvant ôter 5 à 3, dans le cas de la soustraction. C'est ce qu'on appelle les stratégies de détournement, inventives, dénuées de sens mais permettant de poursuivre le mécanisme de calcul. Je précise qu'en faisant 5-3 au lieu de 3-5, il n'y a pas de doute sur la bonne compréhension du sens de la soustraction (en caricaturant à l'extrême, disons que l'enfant ne multiplie pas 5 par 3. Son “ bricolage ” reste inscrit dans le registre de la soustraction).

Il s'agit de débusquer des erreurs témoignant de l'absence de rétroaction du sujet sur son résultat. Par exemple, la proposition d'un nombre supérieur au nombre initial dans une soustraction : 623-85=662 au lieu de 538. En ce sens, l'enfant, ne lit plus “ 623 ”, soit une quantité globale, mais “ 3 ” puis, “ 2 ” et enfin “ 6 ”, soit une succession de chiffres dont il faut tenir compte pour appliquer l'algorithme de calcul. La lecture du nombre, perd, en quelque sorte, sa valeur cardinale.

Enfin, je pense voir l'émergence d'une erreur caractéristique, au CM2 avec les nombres à virgule. 22,16-10,8= 12,8 au lieu de 11,36. Je ne serai pas surprise de rencontrer 12,8 avec une fréquence significative. Cela mettrait en évidence le fait que l'enfant considère la partie décimale comme un entier séparé du précédent par une virgule.

Ces erreurs seront codées 8.

3. Le codage des tests :

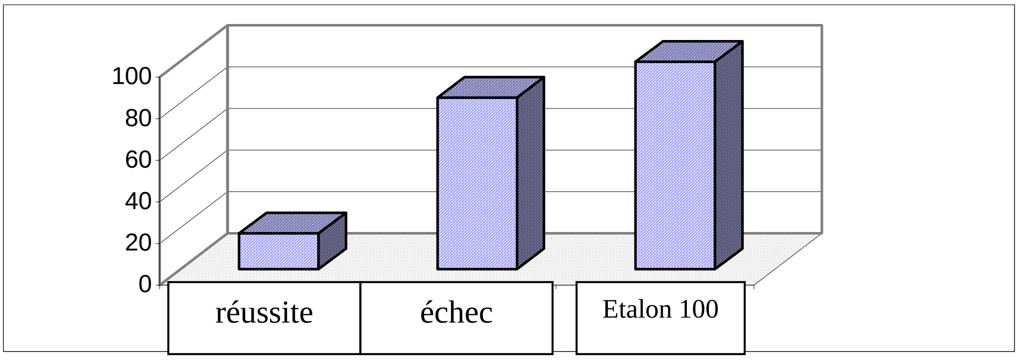
Le codage retenu s'inspire de celui des évaluations nationales CE2 et 6° :

Code 1 = réponse exacte ; code 9 = réponse erronée ; codage 0 = absence de réponse ; codage 8 = erreur caractéristique d'un manque de maîtrise de la numération décimale de position.

2. résultats et analyse :

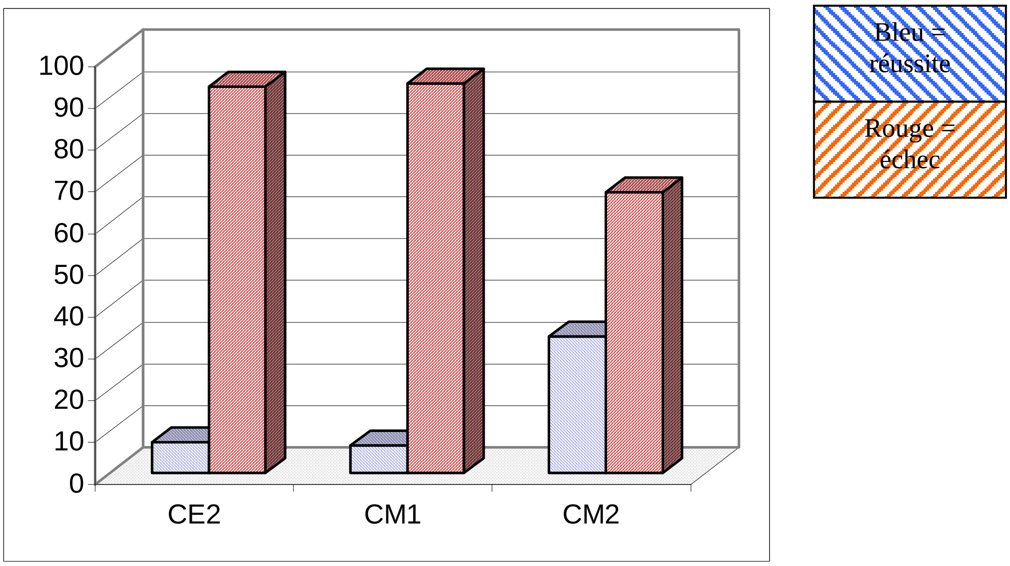
2.1 Situation A , dite " situation des carrelages "

a) Lecture globale



Echec massif. L'idée d'une rémédiation est fondée : elle répond à un besoin réel.

a) Lecture par niveaux de classe : CE2 , CM1 , CM2



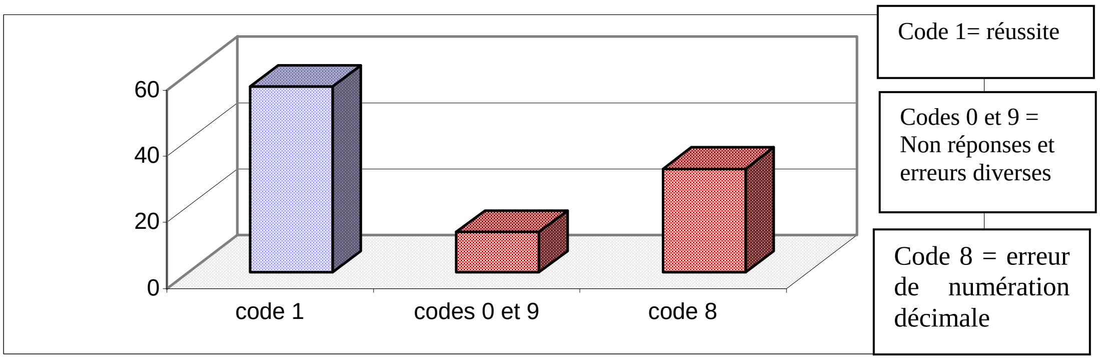
Le taux d'échec est comparable au CE2 et au CM1. On constate une baisse sensible du taux d'échec au CM2. Une analyse plus fine m'a permis de connaître la raison de ce changement soudain. Dès lors que les élèves disposent de l'algorithme de la division, ils l'utilisent pour résoudre la situation. Or, cette situation est proposée (avec des nombres plus petits) dès le CP. (ERMEL)

b) Lecture ZEP / Hors ZEP

Les performances sont meilleures en Hors ZEP qu'en ZEP. La différence, de dix points environ, est représentative des constats faits dans les évaluations nationales. Toutefois, le taux d'échec est aussi significatif en Hors ZEP qu'en ZEP avec un taux supérieur à 75%. Le dispositif de remédiation n'aurait aucun intérêt à se concentrer exclusivement sur la ZEP.

2.2 Situation B. La dictée de nombres (5 cases)

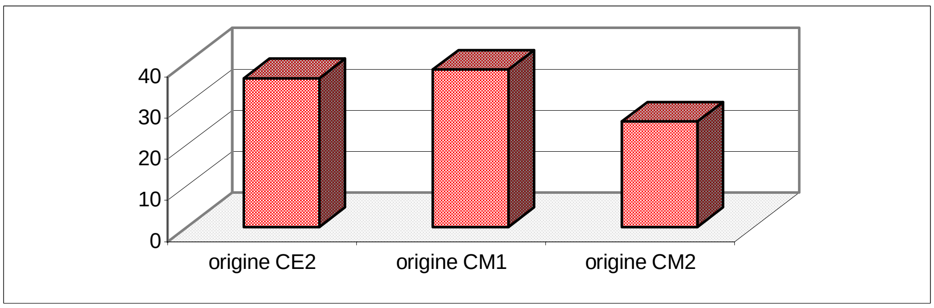
b) Lecture globale



Le taux d'échec, quoique légèrement inférieur à 50%, concurrence le taux de réussite à peine supérieur à 55%. L'exercice, pourtant classique, semble poser problème.

Les erreurs (de type 8) relevant de la mauvaise gestion des zéros ou virgules, sont 3 fois plus nombreuses que les autres erreurs ou les non réponses. Parmi ces erreurs de type 8, on rencontre tous les cas de figure : absence totale de zéros (mais chiffres dictés , présents dans l'ordre), zéros rejetés à la fin du nombre, abus du nombre de zéros, problème d'intercalation… Lorsque j'ai dépouillé les tests, j'ai remarqué en outre, que bien souvent, un enfant avait , soit tout “ juste ” soit, “ tout faux ” sur ses cinq cases.

c) Lecture des erreurs de type 8, selon le niveau de classe (CE2, CM1, CM2)



Il s'agit de savoir si les erreurs de type 8 se situent plutôt à un niveau du cycle qu'à un autre. La répartition est assez équilibrée sur le cycle avec, néanmoins, une baisse de l'occurrence de ce genre d'erreurs au CM2. Pour ce dernier niveau, on peut déjà dire que l'écriture des nombres à virgule, même si le problème de transcription se pose (3/1000 a posé problème) n'a pas eu une incidence très fâcheuse sur le score des CM2.

La difficulté liée à la gestion du zéro dans l'écriture des nombres, est, indéniablement, un problème de cycle et pas uniquement un problème de classe.

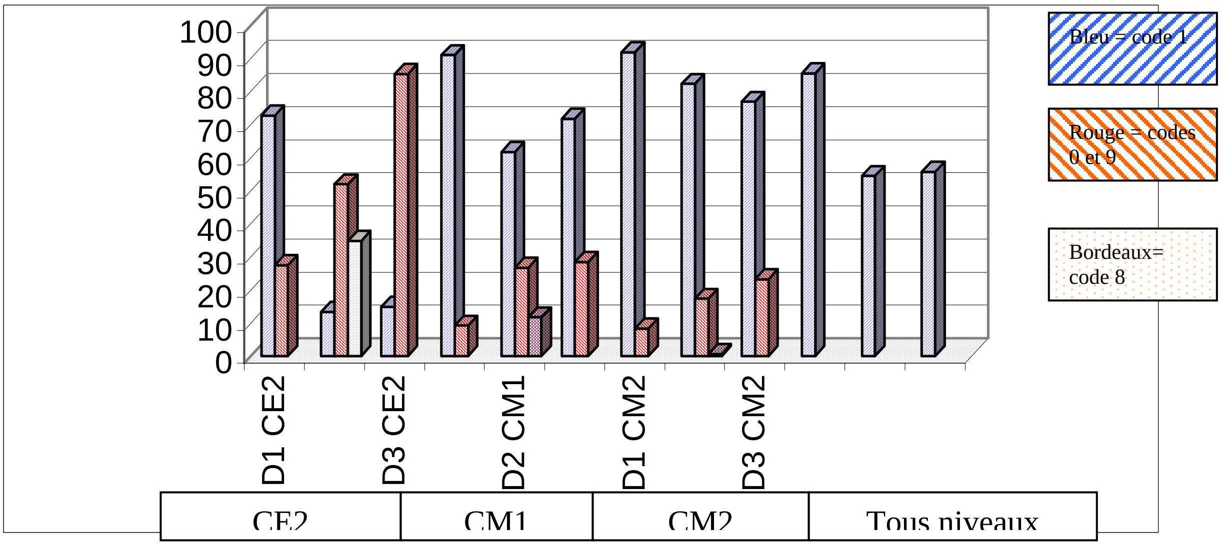
d) Lecture des erreurs de type 8 et de type 0 et 9 en ZEP et Hors ZEP

Qu'il s'agisse d'erreurs de type 8 ou des erreurs de type 0 ou 9, les pourcentages sont plus importants chez les élèves de ZEP que les chez les élèves de Hors ZEP et cela, dans les mêmes proportions, soit un écart d'environ 7 points.

En Hors ZEP comme en ZEP, ce sont les erreurs de type 8 qui dominent largement. Là encore, on peut dire que l'élaboration d'un dispositif de remédiation se justifie pour l'ensemble de la population.

2.3 Situation D . Les techniques opératoires

Le code 8 n'est appliqué qu'à la case D2. (par exemple 662 proposé comme résultat au lieu de 538) D1 = addition , D2 = soustraction , D3 = multiplication



Globalement, pour tous les niveaux confondus, l'addition est l'opération la mieux maîtrisée avec 85% de réussite. La soustraction et la multiplication obtiennent, quant à elles, les mêmes scores, soit environ 55%, on peut donc dire qu'elles sont toutes deux conjointement en cours d'apprentissage.- même si, dans le détail des classes, il semble que certains enseignants commencent par l'une plutôt que par l'autre-

Si on adopte une lecture diachronique sur le cycle, on peut constater que la technique de l'addition atteint un seuil vers le CM1 (peu d'évolution au CM2) . En ce qui concerne la soustraction et la multiplication, la progression au cours du cycle est visible (surtout pour la soustraction) pour atteindre en CM2, des taux de réussite très acceptables, supérieurs à 75%.

D'après ces premières estimations, on est en droit de dire que les algorithmes de calculs se portent plutôt bien à l'école élémentaire. Cette conclusion ne surprend pas car cet apprentissage est invétéré dans les pratiques.

L'analyse de D2 est intéressante dans la mesure où cette opération (la soustraction) a vraiment posé le problème de la retenue aux élèves (erreurs de type 8). Face à cette difficulté, les enfants ont eu des comportements déjà caractérisés dans le cadre théorique et dans la présentation de la démarche d'expérimentation : ils n'ont pas abdiqué et ont proposé un résultat, coûte que coûte ; ils ont " bricolé " une réponse avec ce qu'ils croyaient savoir de la soustraction (on enlève le nombre le plus petit au nombre le plus grand) ; ils n'ont pas eu de stratégie de rétroaction qui leur aurait permis de voir le manque de pertinence du résultat (celui-ci supérieur au nombre initial).

Or, cette réponse erronée (type 8) représente presque 35% des réponses au CE2 et encore 11,66% des réponses au CM1 (1 erreur sur 3 est caractérisée par le codage 8), pour disparaître, il est vrai, au CM2. Cette disparition au CM2 peut trouver plusieurs explications dont celle-ci : la maîtrise peut venir d'un entraînement intensif dispensé par l'école.

3. Synthèse des résultats :

Avant tout, je précise, que je n'ai pas omis de parler de la situation C. Dans ce cadre-là, son analyse aurait un peu fait perdre de vue l'opposition que je mets en place entre la numération et les algorithmes de calcul (posés). En outre, comme je l'ai déjà évoqué, il est difficile de savoir, pour le calcul en ligne si l'enfant a usé de stratégies de calcul sophistiquées, mettant en œuvre ses connaissances sur la numération ou si, au contraire, il a transposé des techniques issues de l'apprentissage des techniques opératoires posées. (problèmes de l'analyse des erreurs " off-line ")

Réponses à l'hypothèse 1 :

- Les erreurs de type 8 , relevant sous diverses formes, de la numération décimale de position, sont suffisamment fréquentes pour qu'un dispositif de remédiation centré sur la numération, prenne sens.

Réponses à l'hypothèse 2 :

- Il n'y a qu'à mettre en balance, le score de réussite global à la situation D1 avec le taux d'échec à la situation A [82%], pour comprendre que la maîtrise des algorithmes ne dépend pas de la maîtrise de la numération positionnelle et décimale. Qu'inversement, la technique toujours mieux maîtrisée au cours du cycle, des algorithmes de calcul ne s'accompagne pas nécessairement, d'une meilleure compréhension de la numération.

3. 3 - MISE À L'ÉPREUVE DE LA TROISIÈME HYPOTHÈSE :

Hypothèse 3 : Les résultats en numération peuvent être améliorés par la mise en place d'un dispositif de remédiation fondé sur le sens de la numération.

1. Mise en œuvre du protocole :

Pour le groupe expérimental, les enfants reçoivent des situations diversifiées [un exemple en annexe 2], tous les 20 jours, de janvier à fin avril. Le dispositif a pour objectif de faire évoluer les performances dans le domaine numérique de manière plus significative que dans le groupe témoin. Les " exercices " portent exclusivement sur la numération mais les effets attendus concernent aussi bien la numération (situations A et B) que les calculs (situations C et D).

Pour le groupe témoin, je fais également des envois de manière à garder les enseignants en contact. Il leur est demandé de rendre compte de quelques activités numériques menées en classe. Ainsi, ne change-t-on pas leur pratique habituelle.

En ce qui concerne les situations envoyées aux enseignants du groupe expérimental, elles observent plusieurs règles fondamentales :

-d'une part, les situations ne se veulent pas formelles et elles ne sont donc pas extraites de manuels scolaires, de fichiers mathématiques ; elles évitent le recours à des " outils " sacralisés et presque " ritualisés " à l'école élémentaire jusqu'à perdre leur sens (tableau de numération, par exemple). Elles demandent une mise en œuvre de la part de l'enseignant et donc une adaptation de la part de l'élève.

-elles sont fondées sur trois notions majeures, constitutives de la numération positionnelle décimale, à savoir : le regroupement par un multiple de 10 (100 - 1 000 000

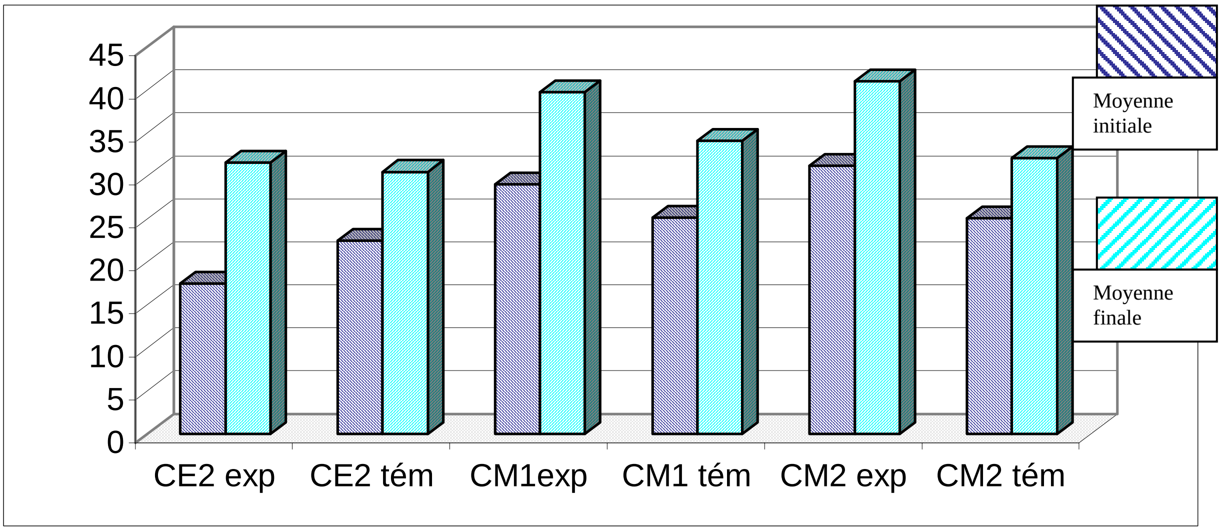
…) ; les échanges (10 contre 1 , 10 centaines contre 1 millier…) ; la décomposition (5 630 000 c'est : 30 000 + 5 000 000 + 600 000 …, par exemple)

-elles sont, le plus souvent, ouvertes c'est à dire qu'elles n'appellent pas une seule procédure de résolution et invitent ainsi les enseignants à se saisir de la diversité des cheminements empruntés par les élèves pour instaurer des débats.

-elles sont très diversifiées pour maintenir l'enfant en éveil mais aussi parce qu'un concept se construit et se mesure à travers plusieurs situations. (Vergnaud)

2. résultats et analyse :

2.1 Prise en compte des niveaux de classe : CE2, CM1, CM2



Visiblement, tous les groupes ont vu leurs scores évoluer entre le test initial et le test final. C'est peu surprenant dans la mesure où plusieurs mois ont séparé le test initial du test final. Les enseignants, de toute évidence, ont poursuivi des apprentissages dans leur classe en vue d'obtenir des progrès de la part de leurs élèves. L'effet du temps est donc significatif.

Au test final, les moyennes obtenues par le groupe expérimental sont supérieures aux moyennes obtenues par le groupe témoin et cela, même lorsqu'au test initial, le groupe expérimental avait une moyenne inférieure à celle du groupe témoin (tel est le cas du CE2).

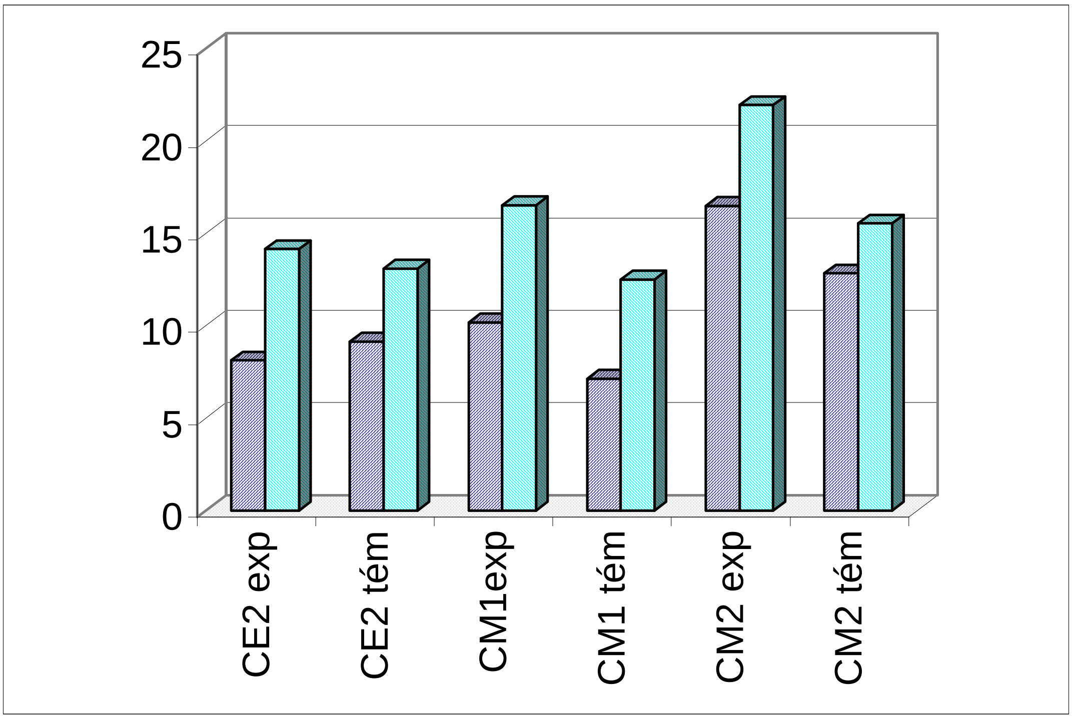
Enfin, ces remarques valent pour chaque niveau. On peut supposer que le dispositif a été bénéfique à tous les niveaux du cycle.

La confrontation de cette première lecture au traitement de la statistique inférentielle [annexe 3a] le tableau d'analyse de variance atteste qu'il y a véritablement eu une évolution positive pour les deux groupes, mais plus importante pour le groupe expérimental. Je peux donc affirmer que le dispositif de remédiation s'est avéré efficace.

2.2 Lecture comparative : l'effet sur les situations A et B comparé à l'effet sur les situations C et D

Les situations et les exercices proposés en remédiation étant axés sur la numération, il est intéressant de mesurer si l'effet porte exclusivement sur les exercices de numération [A et B] ou s'il porte aussi sur les situations de calcul [C et D].

- Les situations A et B réunies et notées sur 30 points maximum

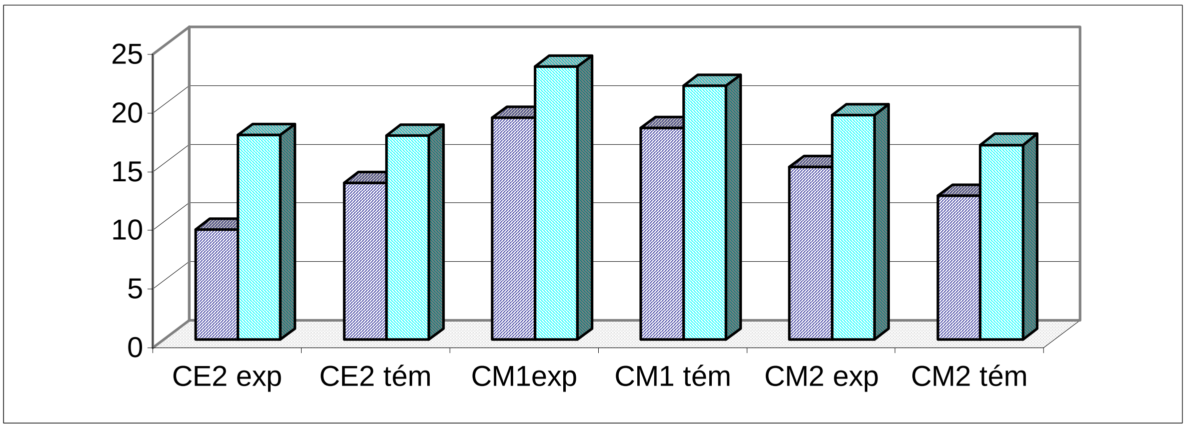


La différence de moyenne entre le test initial et le test final, entre le groupe expérimental et le groupe témoin, est toujours positive et au profit du groupe expérimental et cela, pour chaque niveau. (par exemple, le groupe expérimental CE2 a eu un gain de 6,034 entre le test initial et le test final ; tandis que le groupe témoin CE2 a eu un gain de 3,95 points entre son test initial et son test final. Il y a donc eu progrès pour les deux groupes mais un progrès supérieur dans le groupe expérimental).

La confrontation à la statistique inférentielle [annexe 3b],conduit à conclure que la différence entre les deux groupes expérimental et témoin existe à l'état initial et à l'état final mais la progression des deux groupes n'est pas identique : elle est plus importante chez le groupe expérimental.

Cette dernière remarque m'autorise à dire que le dispositif de remédiation a eu un effet sur les exercices A et B. Le travail en numération a contribué à améliorer les compétences des élèves dans le champ de la numération par rapport à un enseignement “ normal ” c'est à dire sans mise en œuvre d'un dispositif spécial.

- Les situations C et D réunies et notées sur 30 points maximum



Les groupes ont tous évolué entre le test initial et le test final.

Le gain est supérieur pour le groupe expérimental, surtout en CE2. Cette dernière remarque est intéressante pour mon travail. Si les CE2 ont fait évoluer leurs résultats en calcul grâce à la numération (contenu du dispositif), ce n'est sans doute pas anodin : c'est au CE2 que se jouent les apprentissages en calcul. Or, ces résultats m'incitent à penser que les compétences en calculs s'acquièrent d'autant mieux que la numération est comprise.

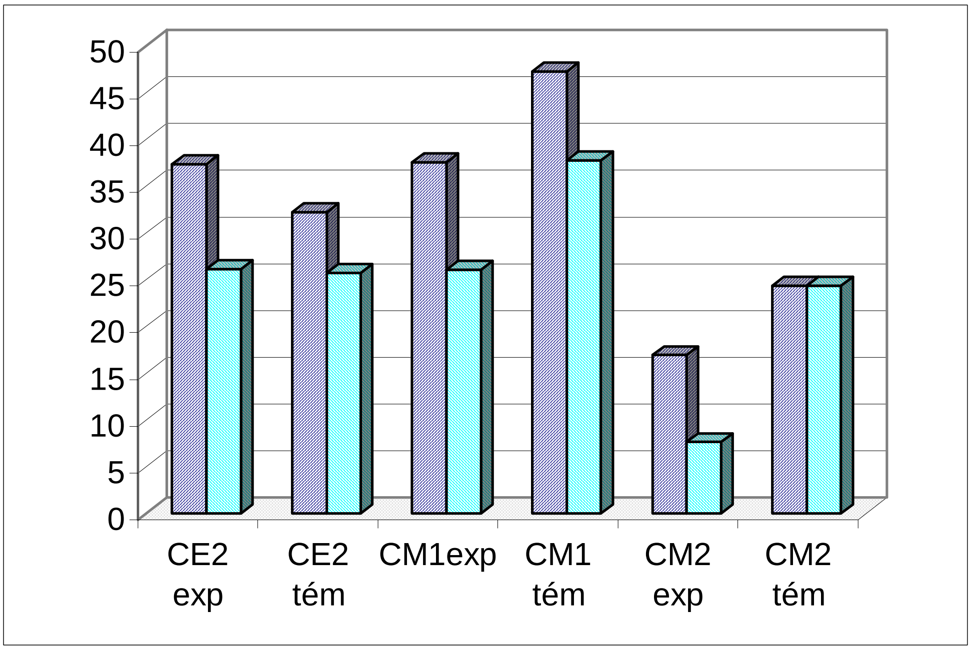
L'analyse de variance [annexe 3c] révèle qu'il y a eu une différence entre avant et après pour tous les niveaux mais plus importante pour les CE2.

Aussi puis-je conclure que le groupe CE2 expérimental a été le grand bénéficiaire du dispositif de remédiation, dans le domaine du calcul alors que le dispositif portait sur la numération. Le lien entre numération et calcul est avéré.

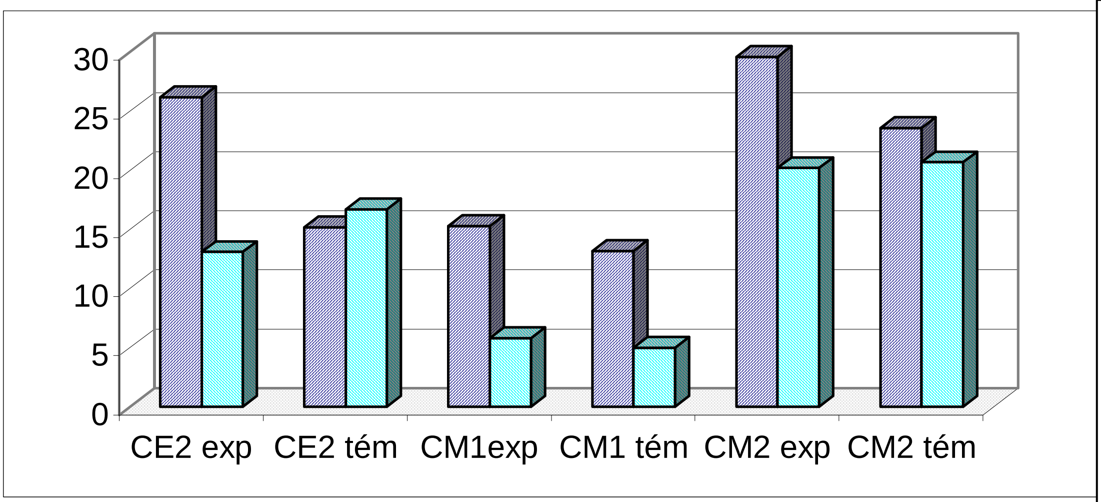
2.3 Lecture centrée sur les erreurs de type 8

Il s'agit de voir si le dispositif de remédiation a effectivement profité aux enfants qui en avaient besoin, en l'occurrence, à ceux qui faisaient des erreurs de type 8 (erreurs caractéristiques d'une numération décimale positionnelle mal maîtrisée).

- Situations CD et B. Proportion d'erreurs de type 8 sur les exercices B puis CD en pourcentages



Situation B



Situations C et D confondues

Le tableau d'analyse de variance [annexe 3d] indique que la diminution de la proportion d'erreurs dans les deux groupes a eu lieu mais cette diminution est plus sensible dans le groupe expérimental que dans le groupe témoin.
Donc, le dispositif de remédiation a eu une incidence positive, notamment sur les situations B et CD.

2.4 Gros plan sur un exercice spécifique.

La soustraction en ligne [C1] et la soustraction posée [D2]. Bilan sur l'évolution des erreurs de type 8.

Groupe expérimental Nombre de sujets ayant fait des erreurs de type 8		Groupe témoin Nombre de sujets ayant fait des erreurs de type 8	
Avant la remédiation	Après la remédiation	Avant la remédiation	Après la remédiation
C1 D2 91 44	C1 D2 65 10	C1 D2 58 17	C1 D2 49 17

Il ressort que la diminution des erreurs est nettement plus importante dans le groupe expérimental que dans le groupe témoin. Je suis de plus en plus amenée à valider mon hypothèse : une compréhension du système de numération, décimal et positionnel, garantit de meilleurs résultats en calcul. Le sens favorise les apprentissages.

3. Synthèse des résultats :

Avant, je précise que le codage 8 n'a pas été systématique pour tous les exercices. Par exemple, pour l'addition posée, il n'avait pas lieu d'être parce qu'au cycle 3, comme j'ai pu le montrer, l'algorithme est maîtrisé et ne laisse rien transparaître. Pour la situation A, toute erreur ou non réponse est considérée de fait comme relevant d'un défaut de compréhension de la numération de position, il n'y a pas eu de codage distinguant 0-9 et 8.

Réponses à l'hypothèse 3 :

- Le dispositif de remédiation centré sur la numération décimale de position, a eu un effet positif sur les élèves. Son efficacité a donc pu être démontrée.
- La remédiation a permis aux élèves d'améliorer leurs performances aussi bien dans le domaine de la numération [situations A et B] que dans le domaine du calcul [situations C et D]. Dans ce dernier domaine, il semblerait que les CE2 en aient bénéficié le plus.
- La remédiation a réellement profité aux élèves en difficulté dans la mesure où elle a agi directement sur les erreurs de type 8.
- Avec, ou sans remédiation, les élèves ont progressé dans leurs apprentissages, et cela, à tous les niveaux du cycle 3. Toutefois, le dispositif a permis aux élèves de faire plus de progrès que “ de coutume ”.

4. MISE À L'ÉPREUVE DE LA QUATRIÈME HYPOTHÈSE :

Hypothèse 4 : Les propositions de remédiation faites par les enseignants, renseignent sur leur conception de l'enseignement de la numération.
Un dispositif de formation pourrait faire évoluer les conceptions des enseignants sur l'enseignement de la numération décimale de position.

1. Mise en œuvre du protocole.

Il s'agit de trois groupes de 71 enseignants ayant leurs caractéristiques propres :

-Les TERR : sont les maîtres des 421 élèves qui ont participé au dispositif d'expérimentation

-les T1 : sont des enseignants titulaires 1° année et en stage à l'IUFM

-les TIT : sont des enseignants titulaires venus en formation à l'IUFM (stage de géométrie)

Les trois groupes sont scindés en deux : un groupe expérimental qui, bénéficiera d'une intervention et un groupe témoin qui n'en bénéficiera pas.

Chaque enseignant a reçu un questionnaire initial, sur le traitement des erreurs d'élèves.[annexe 4].

La catégorisation des réponses et le codage reposent sur une distinction fondamentale : soit la remédiation proposée fait un détour par le sens de la numération décimale de position (+ 1) ; soit, la proposition est de type formel et permet de réussir dans les limites de l'exercice proposé (+ 0) ; soit, la remédiation est jugée inadaptée, stérile voire, préjudiciable (relevant de “ l'obstacle didactique ”G. Brousseau) (- 1).

Pour plus de précisions voir [annexe 5] un ou deux exemples précis.

A l'issue des tests, les enseignants des groupes expérimentaux de chaque catégorie (TIT, TERR et T1), ont donc eu une formation d'une heure et demie sur :

-les origines de la numération décimale de position et sa définition ;

-les différents obstacles dont parle Guy Brousseau dans sa théorie des situations didactiques ;

-une situation déclenchante de conflit cognitif : la mise en perspective des résultats des élèves à la situation A des carrelages (échec massif) et leurs représentations.

Enfin, environ deux semaines et demie après le questionnaire initial, les enseignants ont tous passé un test final pour mesurer l'effet éventuel de la formation. Le test final était identique dans le codage et la catégorisation des réponses. Seul, l'habillage avait changé de manière à ce que les enseignants ne se sentent pas évalués.

2. Gros plan sur la perception de la situation A par les enseignants.

Lorsque j'avais fait passer le test initial aux élèves, j'avais demandé aux enseignants s'ils jugeaient la situation A (dite “ situation des carrelages ”), très facile, assez facile, difficile ou inabordable par des enfants de cycle 3 (du niveau de leur classe). J'avais obtenu les pourcentages de réponses suivants :

Très facile	Assez facile	**difficile**	inabordable
0%	12,903%	**85,365%**	4,878%

Il va sans dire, que j'ai été surprise de mesurer le décalage entre mon positionnement et celui des enseignants. Cette situation, déjà familière au CP (ERMEL), a semblé difficile, voire inabordable aux enseignants du cycle 3. Pourtant, la situation ne se voulait pas piégeante.

Rien d'étonnant donc, à ce que les élèves n'aient pas réussi. Cette analyse spontanée m'a conduite à supposer établi un lien entre la conception initiale des situations scolaires par les enseignants et la conception initiale des situations scolaires par les élèves. La conception des enseignants quant à une situation donnée, détermine-t-elle le niveau de réussite de leurs élèves pour cette même situation ?

Dubitative, j'ai posé la même question aux enseignants en formation, dans le cadre de mon protocole expérimental. A l'unanimité, tous les enseignants, des trois catégories, ont répondu soit qu'il s'agissait d'une résolution de problème, soit, à l'écrasante majorité, qu'il s'agissait d'une situation d'apprentissage de la division et d'ajouter que c'était impossible de demander cela à des CE2.

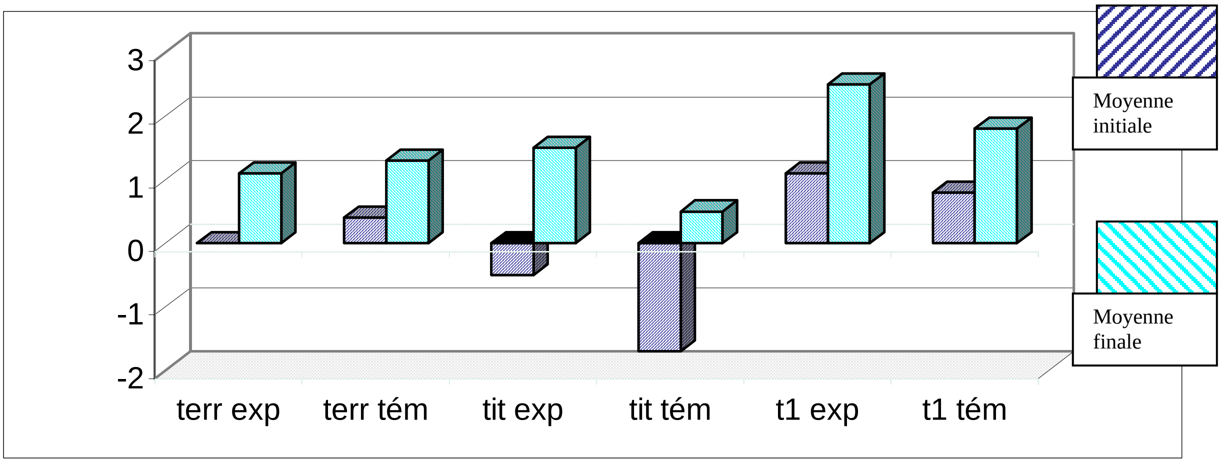
Je leur ai alors demandé, s'ils faisaient eux-mêmes une division pour trouver la réponse et , bien évidemment, ils ont tous répondu qu'ils " lisaient " le nombre de centaines, directement.

Je n'avais pas imaginé en préparant cette situation, dite " des carrelages ", que les enseignants donneraient cette interprétation. Ce qui m'étonne c'est que la situation change d'intérêt selon qu'ils la situent dans un contexte scolaire, ou dans un contexte quotidien, social. Ils attendent de leurs élèves des stratégies qu'ils ne mobilisent pas eux-mêmes.

La réflexion reste ouverte.

3. Résultats et analyse :

Mesure de l'impact de la formation sur les trois publics.



Le traitement statistique met en lumière l'effet nul de la formation.

-Pourquoi l'intervention n'a-t-elle pas eu d'impact caractéristique ?

J'avais un *a priori* et j'étais partie sceptique sur la possibilité de transformer des pratiques ou du moins des conceptions sur la durée courte et dense d'une intervention d'1H30. Je ne suis donc pas réellement surprise du résultat. Ce qui m'étonne, c'est l'évolution de tous les groupes.

-Comment expliquer que tous les groupes (exp. et tem , TIT, TERR et T1) aient évolué entre le temps 1 et le temps 2 ?

Plusieurs éléments d'explication peuvent être avancés sans certitude : soit les personnes du groupe expérimental ont discuté avec les personnes du groupe témoin sur des temps informels et ont fait ainsi " tache d'huile " ; soit le questionnaire final sous sa nouvelle présentation (avec une liste de propositions) a induit des comportements nouveaux et s'est ainsi apparenté à un outil de formation. Un conflit cognitif m'aurait échappé, les publics auraient ainsi confronté leur conception initiale (réponses rédigées dans le questionnaire initial) au questionnaire final (rempli de pistes de travail) et auraient pu modifier leur regard sur les pratiques. C'est une hypothèse.

-Pourquoi y a-t-il une telle différence de résultats, dès le questionnaire initial entre les deux groupes TIT et TERR, pourtant comparables dans leur composition ?

Il est possible que le passé du groupe TERR soit un élément d'explication. Les TERR ont participé à l'expérimentation menée sur leurs élèves. Pourtant, le groupe TERR expérimental, qui a été le seul à bénéficier du dispositif de remédiation, n'obtient pas des performances meilleures que le groupe TERR témoin (au questionnaire initial). Il n'est donc pas possible de dire que le dispositif expérimental pour les élèves a été un outil de formation pour les enseignants. En revanche, le seul fait d'avoir participé à une expérience sur les travaux numériques (en tant que membre du groupe expérimental ou en tant que membre du groupe placebo) a pu modifier le positionnement des enseignants. S'impliquer dans un projet collectif a peut-être une incidence positive.

-Enfin, pourquoi les T1 ont-ils des performances si élevées alors qu'ils n'ont pratiquement pas d'expérience ?

J'ai peut-être quelques éléments d'explication, qu'il faudra traiter avec précaution : Tout d'abord, il est possible que ces jeunes enseignants aient mis en correspondance les références théoriques (contenu explicite de mon intervention ou, plus implicite, dans le questionnaire) de mon dispositif avec les apports théoriques de l'IUFM, en formation initiale. Dans ce cas, il n'y aurait pas eu de déstabilisation mais une consolidation des compétences.

Ensuite, il est possible que ces jeunes gens, rompus à des exercices formels d'analyse de travaux d 'élèves, lors des épreuves préparatoires au concours du CRPE, aient intériorisé des “ schèmes ” de résolution qui les rendent plus performants que les autres enseignants.

Enfin, ces jeunes gens ont un lourd passé d'étudiant, ils sont habitués à tirer parti d'un cours, c'est à dire d'une intervention théorique dense et courte. Cela fait partie de leur “ habitus ”.

Réponses à l'hypothèse 4 :

- Les analyses d'erreurs faites par les enseignants révèlent en effet des difficultés à donner du sens à l'enseignement de la numération décimale de position. (cf. interprétation de la situation A ou encore, la proposition de faire ajouter un zéro, systématiquement à la partie décimale pour comparer 12,8 et 12,23 comme un “ truc pédagogique ”…)

- Quelle formation pourrait-on envisager pour faire évoluer le regard et les pratiques quant au traitement des erreurs relevant de la numération ?
  Laisser les équipes enseignantes gérer elles-mêmes la mise en place des PPAP, c'est prendre le risque de les laisser “ poser des rustines ” sans apporter de remédiation.
  Ne faudrait-il pas plutôt développer des formations sur l'identification des obstacles pour que les enseignants les repèrent mais aussi pour que les enseignants évitent de les consolider “ en voulant bien faire ”. Un peu comme en sciences (cf les travaux de Giordan et de Vecchi “ Comment faire pour que ça marche ? ” où les “ erreurs ” des élèves sont recensées, catégorisées par obstacles et donc anticipées)
  Là encore, la réflexion reste ouverte.

Bibliographie

ARTIGUE M., BROUSSEAU G., BRUN J., CHEVALLARD Y., CONNE F., VERGNAUD G., *didactique des mathématiques,* Delachaux et Niestlé, 1996

ASTOLFI J.P. , *L'erreur, un outil pour enseigner,* ESF éditeur, 1997

BARROUILLET P., CAMOS V " savoirs, savoir-faire arithmétiques et leurs déficiences ", dans *Les sciences cognitives et l'école,* puf, 2003

BRISSIAUD R., *Comment les enfants apprennent à calculer* ,RETZ 2003

BROUSSEAU G., *Théorie des situations didactiques,* La pensée sauvage édition, 1998

CHARNAY R *,Pourquoi des mathématiques à l'école ? ,* ESF éditeur, 1999

CHEVALLARD G. , *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné,* la pensée sauvage, 1985

COQUIN-VIENNOT D., GAONAC'H D., " psychologie et didactique : les notions fondamentales ", in *Manuel de psychologie pour l'enseignement,* HACHETTE Education, 2001

DE VECCHI G. & GIORDAN A., *L'enseignement scientifique : comment faire pour que " ça marche " ? ,* Z' éditions, 1989

ERMEL , *Apprentissages numériques CE2,* HATIER, 2000

FAYOL M. *, intelligences, scolarités et réussites ,* 1995

FAYOL M. *, L'enfant et le nombre,* Delachaux et Niestlé, 1997

GAONAC'H D. & COQUIN-VIENNOT D., " Psychologie et didactique : les notions fondamentales ", in *Manuel de psychologie pour l'enseignement,* Hachette éducation, 2001

GRANGEAT M., " Lev S. Vygotstky : l'apprentissage par le groupe ", in *Eduquer et former,* éditions sciences humaines, 2001

IFRAH G. , *Histoire universelle des chiffres,* Robert Laffont, 1994 réédité en 2000

JONNAERT P., *Compétences et socioconstructivisme,* De Boeck, 2002

VERGNAUD G. , " La théorie et les champs conceptuels ", in *Recherche en didactique des mathématiques,* vol.10/2.3, La pensée sauvage, 1990

Annexe 1

Tests initial et final par niveau de classe. Quatre situations : A B C D

Les évaluations CE2 CM1 et CM2 ont été remises sur des feuilles distinctes.

A	**CE2** Pour carreler une pièce , il faut 8 564 carreaux. Les carreaux sont vendus par paquets de 100. Combien de paquets faut-il commander ?
A	**CM1** Pour carreler une pièce , il faut 28 464 carreaux. Les carreaux sont vendus par paquets de 200. Combien de paquets faut-il commander afin de pouvoir tout carreler?
A	**CM2** Une barrique contient 66 864 millilitres de cidre. On veut remplir des bouteilles contenant chacune 2000 millilitres. Combien de bouteilles pourra-t-on remplir complètement si on vide la barrique ?
Espace de recherche : laisse la trace de toutes tes stratégies. Explique comment tu as trouvé ton résultat	
réponse :	

B	**Dictée de nombres.**				
CE2	5 203	8 013	20 036	6 000 231	6 200 025
CM1	363 000 750	25 085 330	36 000 052	2 000 000 013	12 000 800 200
CM2	2 000 000 013	12 000 800 200	425 023	85 et 1/10	43 et 3/1000

C	**Calcul en ligne.** Tu peux laisser les traces de ta stratégie au-dessous des opérations mais ne les pose pas.		
	C1	C2	C
CE2	42 - 17 =	46 + 25 =	12 x 20 =
CM1	92 - 37 =	526 + 525 =	126 x 200 =
CM2	12,6+26,42=	22,16 – 10,8=	1,8 x 20 =

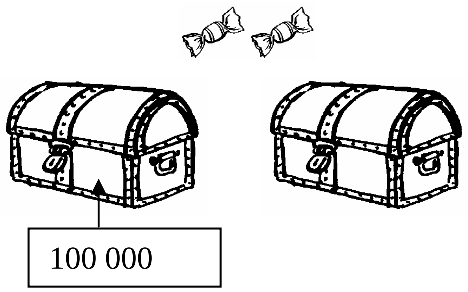
	D1	D2	D
D - CE2	5 2 6 0 2 + 8 0 8 9 + 3 1 2 7	6 2 3 - 8 5	1 0 6 8 x 5
CM1	5 2 6 0 2 + 8 0 8 9 + 3 1 2 7	6 2 3 - 8 5	1 0 6 8 x 5
CM2	5 2 6 0 2 + 8 0 8 9 + 3 1 2 7	5 6 2 3 - 2 0 8 5	1 0 6 8 x 2 0 5

Annexe 2

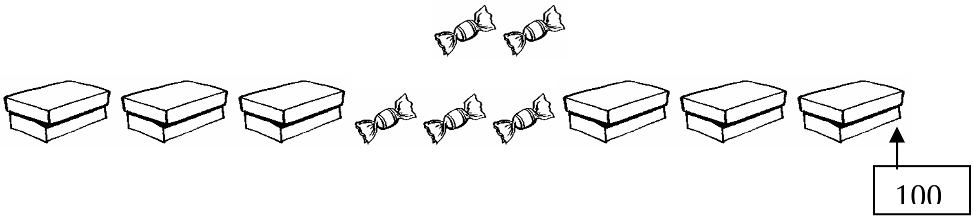
Deux exemples de situations données aux enseignants du groupe expérimental pour travailler la numération avec leurs élèves.

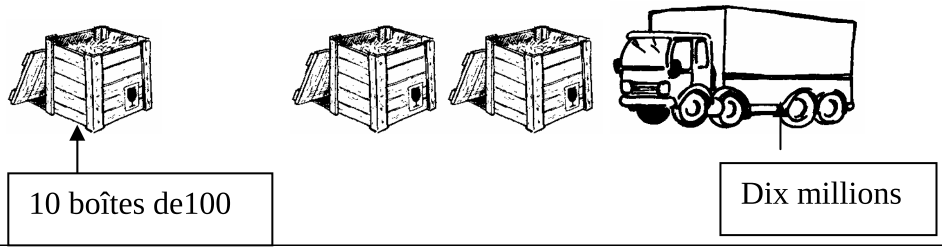
Combien de bonbons en tout ?

niveau *



Réponse :





Le partage

Voici deux pirates. Ils veulent se partager les pièces d'or, équitablement.

Aide-les

80 248 040 pièces d'or !

Tu as partagé ? grâce à toi, ils ne vont pas s'entretuer !

Mais ils ont un nouveau problème : chaque pirate veut transporter son trésor sur une île déserte. (chacun a son île déserte). Mais ils ont chacun un bateau qui ne peut transporter que 100 000 pièces à la fois.
Peux-tu prévoir <u>**sans poser d'opérations**</u>**, combien de voyages chaque pirate va devoir faire ?**

Annexes 3

Traitement statistique sur logiciel STATISTICA. [statistiques inférentielles]

3A.

Le tableau d'analyse de variance donne les résultats suivants :

-Il y a un effet de niveau [$F(2, 413)=13{,}97$; $p<.0001$ = CE2 < CM1 = CM2]
-Il y a un effet de groupe [$F(1, 413) = 8{,}52$; $p<.0001$ = expé > témoin]
-Il y a un effet du temps[$F(1,413) = 308{,}1$; $P< .00001$ = avant < après]
-Il y a un effet d'interaction entre le temps et le groupe [groupe ($F(1,413)= 10{,}18$; $p<.01$]

En outre, le fait qu'il y ait un effet de niveau significatif, m'amène à penser que la légère complexification des tâches au cours du cycle, et pour chaque situation du test (nombres plus grands au CM2 qu'au CE2, par exemple) n'a pas été préjudiciable pour la lecture des données recueillies.

3B

La confrontation à la statistique inférentielle conduit au résultat suivant :

-Il y a un effet de groupe [$F(1,413)=13{,}6$; $p<.0001$ = exp>tem]
-Il y a un effet d'interaction entre niveau et groupe [$F(2,413)=3{,}79$; $p<.001$]
-Mais comme il n'y a pas de prise en compte du temps, cette donnée ne m'intéresse pas. [pas d'effet d'interaction entre temps niveau et groupe $F<1$]
-En revanche, il y a un effet d'interaction entre temps et groupe [$F(1,413)=10{,}18$; $p<.01$].

3C

L'analyse de variance révèle que :

-Il y a un effet d'interaction entre temps et groupe expérimental et témoin [$F(1,413)=6{,}08$; $p<.02$]. Il n'y a pas de différence entre les deux groupes à l'état initial mais il y a une différence à l'état final. La progression a eu lieu pour les deux groupes mais elle est plus importante pour le groupe expérimental.
-Il y a un effet d'interaction entre temps, niveau et groupe [$F(2,413)=p<.05$] et un effet entre temps et niveau [$F(2,413)=3{,}64$; $p<.05$] c'est à dire

3D

J'interroge directement la statistique inférentielle :

-Il y a un effet d'interaction entre temps et groupe [$F(1,413)=8{,}79$;$p<.01$] . Il y a une différence entre les deux groupes à l'état final : le groupe expérimental fait moins d'erreurs que le groupe témoin alors que ce n'est pas le cas au test initial.

N.B. Les tableaux de chiffres sont placés dans les annexes de mon mémoire.

Annexe 4

Questionnaire initial remis aux enseignants.
Mesure de leur conception de l'enseignement de la numération décimale de position par le biais de leurs propositions de remédiation.

22,16-10,8 = 12,8 Cette erreur a été récurrente chez les élèves de CM2 au test initial. Question 1 (non prise en compte dans le traitement): ▪ Selon toi, qu'est-ce que l'élève n'a pas compris, au fond ? Question 2: ▪ Comment pourrait-on le lui faire comprendre, selon toi ? (et l'aider à progresser ?)	

Lorsqu'un enfant d'une classe Y veut ranger des nombres dans l'ordre décroissant, il commet toujours le même genre d'erreur : 615, 87 – **61,23 – 61,9** – 61 – 58, 742 Question 3: ▪ Que lui proposerais-tu pour éviter ce genre d'erreur ?	
Un enfant d'une classe X , calcule une soustraction → posée : 8 7 2 4 - 3 2 8 6 1 2 Cet élève commet souvent ce genre d'erreur. Question 4 ▪ Quelle « **explication** » orale lui donnerais-tu pour l'aider à refaire correctement son calcul. Joue le jeu , s'il te plaît, de **transcrire fidèlement** tes paroles.	

Annexe 5

Pour chaque question 1, 2, 3 ou 4, l'enseignant peut obtenir le score : -1 , 0 , 1
Aussi, le total de points du questionnaire peut-il osciller entre les deux bornes :
de -4 à 4 points.

question	score	Type de réponses correspondant à ce score	Justification de la catégorisation retenue
1	1	-détour d'apprentissage revenant sur le rôle du zéro dans l'écriture positionnelle. -détour par une interrogation des systèmes de numération étrangers (égyptien, …) -détour ou retour sur des jeux centrés sur la décomposition en sous-multiples de 10 : jeu du furet, jeu du fourmillon (ERMEL)… -utilisation du matériel (multibase, bouliers, abaques, compteurs, calculatrice) pour effectuer des regroupements et des échanges. -jeu du banquier pour revenir sur les échanges.	Remédiation axée sur le sens. Il s'agit de " soigner la racine du mal " et de retravailler la compréhension de la numération décimale de position
	0	-retour à l'entraînement sur tableau de numération : placer les nombres dans les colonnes, (certains utilisent des " wagons ")... -insister au cours de nouvelles dictées de nombres sur la correspondance oral écrit (succession des chiffres). Or, cela ne règle pas le problème des zéros. -apporter des " trucs " pédagogiques tels : mettre un point entre les classes de nombres ou un espace pour bien séparer…	Remédiation de type formel Utilisation d' " outils " en usage pour construire la compétence visée. Faire en sorte de permettre à l'enfant d'avoir une réponse juste mais sans être assuré de la compréhension " Poser des rustines "
	-1	-dictée de nombres reprise avec des nombres plus petits (c'est s'assurer de la réussite et éluder la gestion de la difficulté en adaptant l'exercice au niveau constaté des élèves, sans autre ambition) -insistance sur le même type d'exercice, repris et répété avec une fréquence plus grande -aucune réponse pour traiter la remédiation (cela peut signifier que l'erreur n'est pas un objet d'investigation dans la pratique de l'enseignant)	Remédiation inadaptée et qui peut parfois se révéler fâcheuse dans la mesure où elle crée ou conforte des obstacles.
2	1	-transcription en fractions décimales pour signifier que le dixième est l'unité partagée en dix -tout transcrire en centièmes -replacer les nombres sur une droite graduée en 1/10 et 1/100 pour mesurer l'écart approximatif -effectuer l'opération sur abaque pour opérer les regroupements et les échanges -mettre à l'enfant devant le caractère impertinent de son raisonnement en lui proposant de calculer 8/10 + 8/10. Il remarque de lui-même qu'il obtient le résultat 16/10 et non 16/100 (proposition faite par un seul enseignant)	Idem : retour au sens de la numération décimale de position
	0	-faire ajouter un zéro au rang des centièmes pour réaliser le calcul -faire poser l'opération dans un tableau de numération pour bien aligner les chiffres	Idem : " truc " pour réussir l'exercice par une aide à caractère formel
	-1	-passer par les mesures de longueurs ou de masses et transcrire dans une unité faisant disparaître la virgule -reprise de la technique de la soustraction (sans prendre en compte le problème de la numération décimale)	Idem : remédiation inadaptée (défaut d'analyse de l'erreur) ou installation d'obstacles didactiques voir page 17

3	1	-faire des transcriptions de fractions décimales en nombres à virgule et inversement -calcul directement sur abaque de manière à effectuer des regroupements et des échanges de 1 contre 10 -écrire tout en millièmes sur fraction décimale	idem
	0	-ajouter autant de zéros nécessaires pour obtenir le même nombre de chiffres dans la partie décimale et pouvoir ainsi comparer (une réponse qui est proche du –1 car elle peut installer l'obstacle suivant : appliquer la règle de comparaison d'entiers aux décimaux) -placer les nombres dans le tableau de numération en veillant à aligner la virgule et comparer ensuite colonne par colonne en partant de la gauche (application d'une règle) -Comparer comme le code alphabétique. Appliquer la règle de l'arbitraire : on compare ainsi chiffre après chiffre sans prendre en compte la valeur cardinale de ceux-ci.	idem
	-1	-faire faire des activités de rangement sur d'autres nombres –des entiers- -comparer les nombres deux à deux avant d'en comparer cinq -organiser un jeu de bataille (en quoi le jeu peut-il aider les enfants à dépasser cette difficulté de compréhension ?) -passer par les mesures en transcrivant tous les nombres dans une même unité faisant disparaître la virgule	idem
4	1	-Réalisation du calcul en utilisant du matériel multibase (cela favorise les regroupements et les échanges) -reprise de l'enseignement de la " technique " en veillant à lui donner sens (par rapport à la numération décimale) : casser la dizaine pour la transformer en 10 unités -calcul réfléchi par sauts successifs : 8724-2=8722 ; 8722-20=8702 ; 8702-10=8692 ;…. Travail sur la décomposition du nombre -activités de marchand avec manipulation de billets et de pièces nécessitant les échanges	idem
	0	-reprise de la technique opératoire avec ajout d'une dizaine en haut et d'une dizaine en bas (voir page 34). L'enfant peut réussir la soustraction sans avoir consolidé la notion de numération décimale -reprise de la technique en procédant comme une addition à trou (" pour aller à ") , sachant que la technique de l'addition est tellement automatisée au cycle 3 qu'elle ne pose plus de problème	idem
	-1	-faire faire des soustractions sans retenues -faire mettre des flèches aux enfants pour leur rappeler le sens de la soustraction (de haut en bas) . dans l'exemple, l'enfant n'inverse de sens que lorsque celui-ci fait problème. Le sens est maîtrisé. -faire comprendre à l'enfant que c'est impossible et en rester là sans autre forme de proposition	idem

Le questionnaire final figure dans les annexes du mémoire.
Les catégorisations sont identiques pour le questionnaire initial et pour le questionnaire final.