COPIRELEM

(Commission permanente des I.R.E.M. pour l'enseignement élémentaire)

Actes du XXX$^{\text{ème}}$ Colloque national des Professeurs et Formateurs de Mathématiques chargés de la formation des maîtres.

« Trente ans d'activités de la COPIRELEM au service de la formation des maîtres : acquis et perspectives. »

AVIGNON
19, 20 et 21 mai 2003

IREM de Marseille
Université de la Méditerranée

Un grand merci à :

L'IUFM d'Aix-Marseille pour son soutien financier.

A la Mairie d'Avignon, qui a su palier la défaillance de l'Université d'Avignon et du Conseil Général de Vaucluse, sans l'aide obstinée de laquelle ce colloque n'aurait pas pu se tenir.

Au site IUFM d'Avignon pour son assistance matérielle sans faille et le dévouement de son personnel.

A l'IREM de Marseille et tout particulièrement à sa directrice et à son secrétariat.

Mais aussi merci à tous les participants à ce colloque et à tous les conférenciers et responsables d'ateliers ou de communications qui ont su ne pas nous tenir rigueur des quelques difficultés matérielles que nous avons pu rencontrer au cours de ces trois journées, et qui ont toujours gardé le sourire sans jamais adopter l'état d'esprit du consommateur exigeant, tout au contraire, ils nous ont toujours accueilli avec une compréhension bienveillante pleine de reconnaissance qui réchauffe le coeur.

Merci à toute l'équipe de la COPIRELEM pour son soutien, ses conseils et son assistance.

Merci tout particulièrement à Pierre EYSSERIC pour son aide dans la réalisation des actes de ce colloque.

Merci aussi à tous les anciens de la COPIRELEM qui ont, par leur présence à ce trentième colloque, encourager leurs successeurs à continuer leur travail pour promouvoir un enseignement des mathématiques de qualité, porteur de valeurs partagées, au bénéfice des élèves de l'école primaire.

Merci enfin au soleil qui a su égayer nos récréations et à la douceur de l'air qui a rendu les rues de la ville propices à la flânerie et à la découverte.

Claude MAURIN
Responsable local de l'organisation

SOMMAIRE

Ateliers

TABLE RONDE
CONFÉRENCES
FORUM

30 ANS D'ACTIVITÉS DE LA COPIRELEM, LA RETRAITE N'EST PAS POUR DEMAIN !...

Marie-Lise Peltier

Joël Briand

Catherine Houdement

Résumé :
Cette table ronde a pour but de mieux faire connaître la COPIRELEM à tous. Nous l'avons conçue en trois partie, la première retrace rapidement la naissance et l'histoire de cette commission, la seconde présente, parmi les différentes missions qu'elle s'est données, celles qui conduisent à des questions vives, la troisième fait le point sur les différentes stratégies de formation utilisées actuellement par les formateurs en mathématiques des IUFM.

Pourquoi cette table ronde ?

Nous avons souhaité vous proposer une sorte de témoignage, nous avions envie de transmettre la mémoire d'une institution, d'accrocher le nouveau à l'ancien…

Pour l'anecdote, c'est au cours d'un dîner entre membres de la COPIRELEM, à la fin du séminaire de nouveaux formateurs à Maxéville (2001), que l'idée de consacrer un temps de ce 30ème colloque anniversaire de la COPIRELEM pour transmettre à tous les participants cette sorte de patrimoine collectif constitué au fil des ans a germé dans nos esprits.

La métaphore d'une course de relais avec passage de témoins nécessitant un temps de course commun évoque pour nous assez bien le fonctionnement et le travail de cette commission, travail d'équipe, volonté de construire une culture commune sur le plan national, d'avancer sans faire fi du passé mais au contraire en essayant de capitaliser ce qui a été produit et de tenir compte des expériences passées, notamment pour relativiser les problèmes apparemment nouveaux, mais en fait plutôt récurrents de la formation des maîtres du premier degré.

Une première partie sera donc consacrée à une sorte d'historique de la commission à laquelle se livrera Marie-Lise Peltier.

Mais nous voulons également faire de cette table ronde un moment de réflexion sur les questions d'actualités et nous ferons donc un « zoom » sur plusieurs d'entre elles :

- la transmission des connaissances acquises en matières de formation en mathématiques des professeurs des écoles, l'évolution des sujets de concours de recrutement, la formation des nouveaux formateurs que présentera Joël BRIAND
- les stratégies de formation des maîtres du premier degré en mathématiques que présentera Catherine HOUDEMENT

HISTOIRE ET ÉVOLUTION DE LA COPIRELEM

Marie-Lise Peltier
IUFM de Haute Normandie, DIDIREM, Paris 7

Pour vous présenter les grandes lignes de l'histoire de notre commission, j'ai fait appel à Guy Brousseau, fondateur de la COPIRELEM, et à François Colmez qui en fut le premier responsable avec Guy. Tous les deux ont pris le temps de rechercher dans leur mémoire et dans leurs archives les éléments les plus importants et m'ont envoyé leurs notes qui m'ont aidé à faire ce retour en arrière. Qu'ils soient ici vivement remerciés et qu'ils veuillent bien me pardonner si je commets quelques erreurs, imprécisions ou mauvaises interprétations de leurs propos.

Pour que vous puissiez garder en mémoire les quelques éléments d'histoire que je vais vous livrer, je vous ai préparé quelques frises historiques (annexes1 et 2) vous donnant quelques informations sur

- le contexte politique (les ministres),
- le contexte institutionnel (les programmes, les modes de recrutement, les types de formation, le recrutement et la formation des formateurs),
- la COPIRELEM (ses responsables, les colloques, les stages et séminaires, les publications).

Il s'agit de « documents de travail », contenant sans doute des manques, des inexactitudes, voire des erreurs.

1. LE CONTEXTE DE LA CRÉATION DE LA COMMISSION

Nous n'allons pas retracer pas à pas l'historique de la naissance de la commission, nous allons juste rappeler pour les nouveaux parmi nous, ou les plus jeunes qui n'étaient peut-être pas encore nés à cette époque, que c'est dans le paysage du début des années 1970 que l'on trouve les ingrédients nécessaires à la création d'une commission permanente InterIREM pour l'école élémentaire.

La réforme des « mathématiques modernes » bat son plein, (rappelons que cette réforme a été initiée par un certain nombre de mathématiciens proches de BOURBAKI, à l'intérieur d'un grand courant, le structuralisme, dépassant les seules mathématiques). L'IG Lichnérowicz préside la commission chargée d'établir les programmes des « mathématiques modernes ». C'était une époque bouillonnante au cours de laquelle notamment des personnels de tous les corps d'enseignement se réunissent pour tenter de promouvoir ces mathématiques modernes et de former les enseignants de tous les niveaux. Dès 1964 G. Brousseau avait créé à Bordeaux avec l'appui de Jean Colmez un centre de recherche sur l'enseignement des mathématiques, le CREM, qui travaillait au niveau de l'enseignement élémentaire (cette équipe était constituée principalement de professeurs d'école normale de l'académie de Bordeaux, constituant « le groupe des 16 », qui étaient en relation avec d'autres professeurs d'école normale par l'intermédiaire d'un groupe de recherche maths sciences de l'INRDP[1] sous la direction de J-L Martinant, et en liaison avec la direction de la pédagogie du ministère[2]). En 1968,

[1] INRDP : ancien cycle de l'INRP, Institut National de Recherches Pédagogiques.
[2] Ancienne DE, Direction des Ecoles.

sur la base de cette première institution, les premiers IREM[3] sont créés, vite suivis par d'autres (1968-1975). La constitution et les règles générales des IREM avaient été présentées au colloque d'Amiens (Février 1968). Rappelons que c'est au cours des mêmes années (1970-1971) que l'IREM de Bordeaux sous l'impulsion de G. Brousseau, élabore le projet d'une école pour l'Observation, (école Michelet à Talence) et obtient gain de cause par la création du COREM[4]. Ce centre va permettre le développement des premiers travaux de recherche en didactique des mathématiques en permettant le rapprochement de l'Université et de l'école primaire. Pendant cette période, dans plusieurs IREM, notamment à Paris sous l'impulsion de F. Colmez et R. Douady se créent des groupes de recherche sur l'enseignement élémentaire dans lesquelles se retrouvent des instituteurs, des PEN[5], des universitaires intervenant dans la formation des instituteurs.

A cette époque, il n'existait pas encore une « commission nationale » mais des « colloques » ou des « rencontres sur l'élémentaire », groupes informels, rassemblant des personnes de différents IREM assez régulièrement (Rennes, Nantes…) et permettant de répandre des idées et de discuter des questions d'enseignement élémentaire des mathématiques. Les rapports avec à la fois la direction des écoles, l'inspection générale et le « directoire »[6] des IREM se sont établis ou renforcés[7]. Ainsi, en 1972, s'est tenu à Talence un colloque présentant les premiers résultats de recherche sur l'enseignement élémentaire effectuées au sein du CREM. C'est probablement au cours de ce colloque que G. Brousseau a lancé l'idée d'une commission nationale interIREM pour la recherche sur l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. C'est finalement en 1973 que la commission nationale, créée et présidée par G. Brousseau, puis par F. Colmez, voit le jour. Elle doit son sigle COPIRELEM « COmmission Permanente des IREM pour l'enseignement ÉLÉMentaire » à Michel Rouquairol, professeur au lycée de Meaux. Le terme « commission » ne fait pas référence aux commissions inter IREM qui n'existaient d'ailleurs pas à cette époque, il fait davantage référence à une « commission ministérielle » car elle comprenaient des membres du ministère, mais elle était financée par les IREM pour les participants qui n'étaient pas du ministère. Elle était « permanente » du fait de la reconnaissance de la nécessité d'un instrument de relais régulier pour la distinguer des commissions temporaires du ministère qui réglaient des questions d'actualité.

Un premier rassemblement regroupant plus d'une centaine de participants animateurs IREM (PEN, Professeurs du secondaire et du supérieur, instituteurs, IDEN) a eu lieu en 1974 à Melun, autour de l'école de l'Almont (modeste réplique de l'école Michelet que

---

[3] IREM : Institut de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques.

[4] COREM : Centre d'Observation et de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques.

[5] PEN : Professeurs d'Ecole Normale.

[6] Ancienne dénomination de l'ADIREM

[7] Il faut se souvenir que les IREM avaient de gros moyens aussi bien financiers qu'en ce concerne les heures. Certains IREM avaient officiellement des instituteurs comme animateurs Une commission nationale des IREM, présidée par A. Lichnérowicz, regroupait chaque année des chefs de service du ministère, l'Inspection Générale (Magnier) avec les directeurs d'IREM et déterminait les différents moyens en personnel et financiers pour l'ensemble. Les recteurs exécutaient les décisions prises. Quand le ministère avait « un problème » il n'était pas rare qu'il fasse appel aux IREM, par exemple pour l'instauration du DEUG des normaliens.

Les contraintes administratives étant assez légères, le travail consistait essentiellement à faire circuler les idées et les résultats de recherche et à mobiliser l'ensemble des PEN (les IDEN faisaient souvent appel à des animateurs de l'IREM pour intervenir lors des conférences pédagogiques à l'intention de leurs instituteurs, le samedi après-midi !!).

Quand les moyens ont commencé à diminuer (après 1976), la COPIRELEM a su obtenir des subventions de la Direction des Ecoles (bien épaulée par l'IG Dumas à l'époque).

l'IREM de Paris avait pu faire ouvrir en 1973). Parallèlement la commission nationale s'est étoffée et un colloque national a été organisé chaque année, le premier à Orléans (1974), le second à l'Alpe d'Huez (1975), organisé par L'IREM de Grenoble et son directeur Monsieur Julien. Pour ce colloque les participants étaient invités à apporter leurs skis et les horaires de travail étaient aménagés pour que les congressistes puissent skier l'après midi et travailler le soir après dîner !

Le modèle de la COPIRELEM a été souvent envié : Il a été reproduit pour le secondaire par J-L. Ovaert sous le cigle COPREM. L'ADIREM voulait d'ailleurs absorber la COPIRELEM dans la COPREM, mais il était clair pour les membres de la commission qu'à la première occasion, les questions d'enseignement élémentaire seraient sacrifiées au profit du secondaire. Finalement l'absorption n'a pas eu lieu, puis la COPREM a disparu. Actuellement à nouveau, la création d'une commission analogue à la COPIRELEM pour le second degré est en cours et la question de l'éventuelle absorption de la COPIRELEM par cette nouvelle commission reste à l'ordre du jour.

2. DES PREMIERS TRAVAUX À L'EXPLICITATION DES MISSIONS QUE SE DONNE LA COMMISSION

Si une analyse théorique des difficultés inhérentes à la diffusion des connaissances et à la transformation des pratiques des enseignants n'était pas vraiment envisagée à ce moment, la conscience qu'il était nécessaire d'accompagner les enseignants pour qu'ils puissent mettre en œuvre la réforme, et qu'il était nécessaire de les aider par des propositions concrètes d'activités était partagée par beaucoup d'animateurs IREM.

Ainsi dans les différentes académies, les groupes élémentaires des IREM ont construit et expérimenté, parfois évalué de nombreuses activités pour l'école élémentaire, avec des degrés de scientificité variés. Dans certains IREM (Bordeaux, Grenoble, Strasbourg, Paris pour n'en citer que quelques uns) ces travaux ont été les premiers travaux de recherche en didactique, menés avec la rigueur scientifique liée à la recherche, dans d'autres, il s'est agi davantage d'une période de recherche action innovation très bouillonnante, donnant lieu à de nombreuses publications locales et à de nombreux stages de formation continue.

Tandis que dans certains IREM la recherche en didactique se structurait et que des situations de classe étaient construites et analysées en termes d'ingénieries didactiques, la COPIRELEM se donna très vite un double objectif :

- regrouper les travaux présentant des activités de classe pour l'école élémentaire,
- et réfléchir, notamment au cours des colloques, à la question de la formation d'instituteurs. On peut penser que ce double objectif était étroitement lié à la spécificité des animateurs de cette commission qui étaient pour leur très grande majorité, depuis le début, des « professeurs d'école normale » et donc à ce titre chargés de la formation initiale et continue en mathématiques des instituteurs et qu'il était accrédité par les équipes de recherche en didactique.

Ainsi, dans le cadre du premier objectif, la commission a rédigé d'une part des documents à destination des instituteurs (et des formateurs), « les aides pédagogiques », documents regroupant des activités de classe, d'abord diffusés par les IREM puis publiés avec le concours de l'APMEP (collection Elem'math). La première brochure avait été élaborée par une équipe de volontaires réunis à Grenoble, les autres ont été mises au point lors des réunions de la commission. On trouve ainsi la multiplication, la division, le triangle à l'école élémentaire, les aides pédagogiques pour le CP, pour le CE, pour le CM (géométrie, décimaux, résolution de problèmes). Pendant cette période, des travaux analogues sont menés à l'INRP dans l'Equipe ERMEL.

Pour illustrer le second objectif de réflexion sur la formation, je citerai les actes de divers colloques et tout particulièrement celui de Bombannes (1979), organisé par l'IREM de Bordeaux, qui avait pour titre « Elaboration de documents en vue de la formation initiale et continue des maîtres » dans lequel on sent très bien le lien très net entre la COPIRELEM et les recherches naissantes en didactique des mathématiques, et le début de la réflexion (encore balbutiante) sur des stratégies de formation. Joël Briand et Catherine Houdement reviendront sur ces questions.

3 PÉRENNITÉ DES MISSIONS INITIALES MAIS AUSSI ADAPTATIONS SUCCESSIVES AUX CONTRAINTES INSTITUTIONNELLES

L'instabilité en ce qui concerne les choix de l'institution pour la formation de ces maîtres n'est pas d'aujourd'hui, c'est une caractéristique récurrente dans notre pays dont l'histoire de la COPIRELEM est ponctuée !

Très vite, les colloques ont été structurés en ateliers A, dans lesquels les participants travaillent sur des questions d'apprentissage, et des ateliers B où sont débattus des questions d'actualités relatives à la formation, formation qui évolue chaque année avec la mise en place des « doublettes », puis les créations successives du DEUG, mention enseignement du premier degré, puis des DEUG à dominantes, puis la mise en place de divers modèles de formations initiales spécifiques (FIS) adaptées à des publics recrutés de diverses manières, notamment titulaires de n'importe quel DEUG ou diplômes équivalents, sans compter tous les modèles de formation qui ont été mis en œuvre pour les divers recrutements par concours interne).

Les échanges entre formateurs de différentes académies et de différents départements, sur les choix faits localement pour mettre en œuvre ces différentes formations (qui cohabitaient souvent en parallèle) et les synthèses qui en sont faites par la commission vont permettre à la COPIRELEM de rester un interlocuteur avisé pour les instances ministérielles.

Pendant les années 80-90, l'idée que la formation des maîtres en mathématiques devait inclure, outre les savoirs mathématiques, des savoirs spécifiques, savoirs didactiques en cours de constitution, savoirs professionnels pas encore vraiment cernés et qu'une formation efficace ne pouvait pas être une juxtaposition de savoirs académiques et d'une initiation à la pratique, par le biais de stages par exemple, commence à diffuser largement.

4. LA CRÉATION DES IUFM, UN NOUVEAU TOURNANT

Les stages du PNF

Lorsque la loi d'orientation présentée par Jospin en 1989 est votée, un nouveau tournant se profile pour la formation des maîtres avec la création des IUFM qui signait la fin des Ecoles normales. La COPIRELEM réagit immédiatement en pensant que l'un de ses rôles est de capitaliser les nombreux travaux élaborés dans les écoles normales et les groupes élémentaires des IREM, travaux souvent non finalisés qui s'étaient transmis souvent de bouche à oreille, notamment au cours des colloques. Pendant 5 années (entre 1991 et 1997), la COPIRELEM a donc proposé un stage inscrit au PNF dont le but était de produire des documents pour la formation des professeurs, non seulement de capitaliser des travaux existant, mais de les revisiter et de les repenser en tant que réflexion didactique sur la formation. Ainsi le document issu du premier stage (Cahors 1992) est organisé en fonction « d'entrées didactiques » : dialectique outil objet, et jeu de cadres. Les documents présentent de nombreuses situations de formation professionnelles qu'Alain Kuzniak (1994) qualifiera de situations de formation par homologie. On trouve également dans ces documents des situations de transposition ainsi qu'un certain nombre d'informations permettant aux formateurs de développer les approches culturelles et historiques de certains concepts.

En 1995 à Angers un atelier se préoccupe déjà de l'intégration des nouveaux formateurs de PE, un autre réfléchit aux tests de pré recrutement en IUFM. Certaines conférences élargissent le champ de réflexion à des domaines extérieurs à la didactique des mathématiques (E. Bautier 1995)

La COPIRELEM étendait de cette manière la mission d'aide à la formation continue des formateurs de maîtres qu'elle avait mise en œuvre dans le cadre des colloques annuels (relayant de ce fait la DE dans cette mission de formation continue de ces personnels PEN et IEN).

Une réflexion sur le concours de recrutement des PE

Pendant toute la décennie 1990-2000, les recherches universitaires sur la formation des enseignants (en mathématiques et ailleurs) se sont développées, les études des liens entre enseignement et apprentissage, des effets des pratiques enseignantes sur les apprentissages des élèves, etc. se sont multipliées. La COPIRELEM a essayé de contribuer à sa manière à la diffusion des résultats de ces recherches et a œuvré pour que la formation des PE en deux ans ne soit pas la juxtaposition d'une année de bachotage pour l'obtention du concours et d'une pseudo année de formation professionnelle. Elle a défendu l'idée qu'il était nécessaire que la professionnalisation intervienne dès la première année d'IUFM. Pour cela, elle a envoyé régulièrement des contributions aux instances ministérielles tant pour la définition de l'épreuve de mathématiques du concours que pour l'écriture d'un programme de concours et de formation de seconde année. En 1997, lors du colloque de Saint Etienne, la COPIRELEM propose un plan de formation initiale des futurs professeurs d'école en en définissant les objectifs, les contenus et les méthodes. Ce texte, adressé au ministère de l'époque, a été remanié au cours du séminaire de Maxéville(2001) et envoyé à nouveau au ministère.

Dès les années 94, 95, 96, plusieurs membres de la COPIRELEM ont réussi à proposer des sujets de mathématiques dans lesquels de véritables questions de didactique, fondamentales à nos yeux, étaient posées aux candidats (H. Péault, Nantes 96), Joël reviendra sur cette question. En 1996, le ministère crée une commission à laquelle participe des membres de la COPIRELEM pour rédiger une note ministérielle (6 nov.96) donnant un certains nombre de recommandations à l'attention des concepteurs de sujets.

Puis progressivement les formateurs en IUFM ont été écartés de la conception des sujets puis même de la correction des épreuves. La COPIRELEM et l'IREM de Bordeaux qui s'étaient donné la tâche de rédiger des annales du concours depuis 1992, ont poursuivi ce travail mettant en évidence la pauvreté de certains sujets, l'apparition massive de questions naïves, de questions pour lesquelles un candidat formé avaient moins de chance de donner la réponse attendue qu'un candidat non formés, etc.

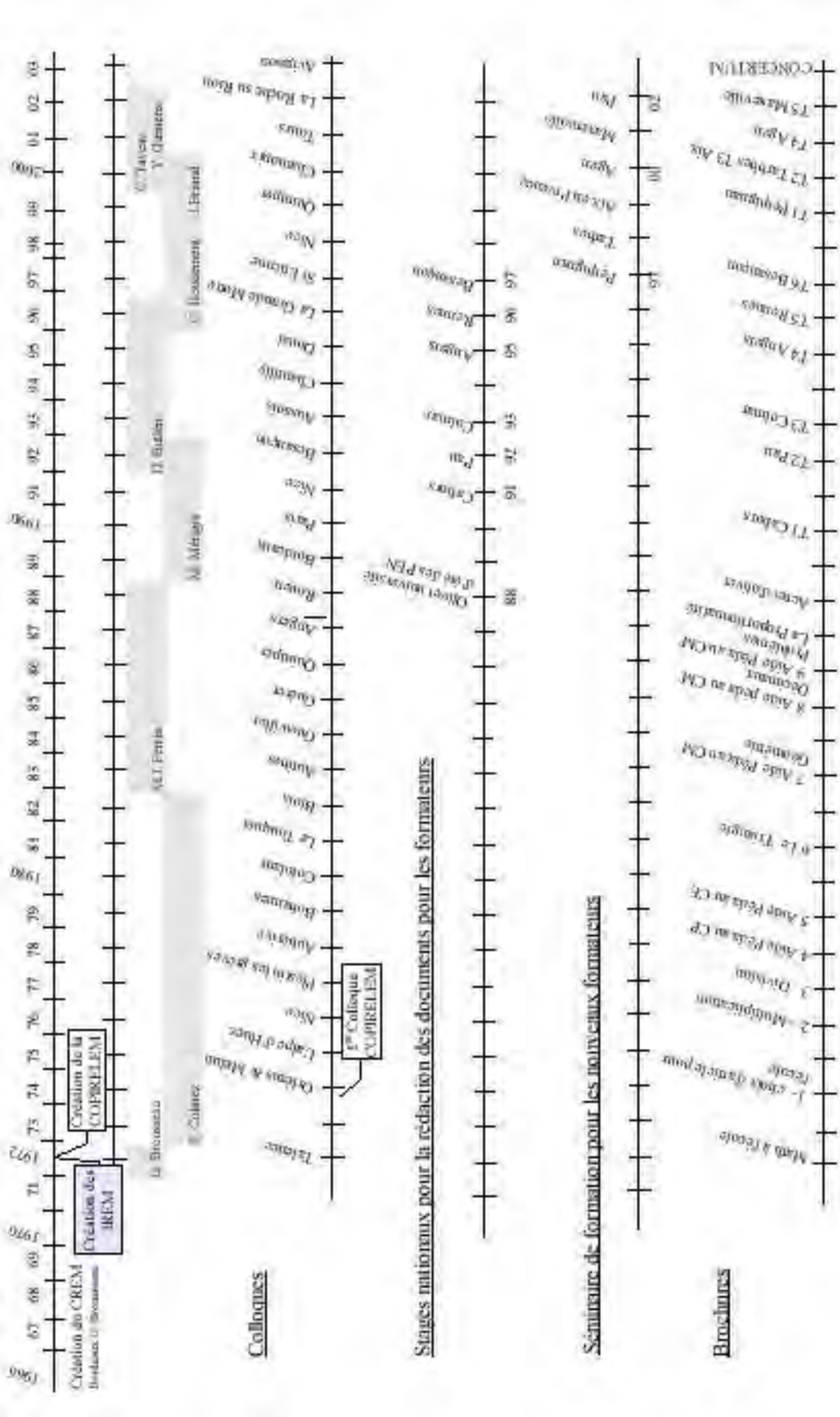
La formation de formateur

Parallèlement à la création des IUFM, l'augmentation du nombre de places aux concours de PE a conduit à de nouveaux recrutements de formateurs, du second degré ou du supérieur, dans un premier temps sur des postes à temps complet, puis, plus récemment, sur des postes en service partagés laissant peu de temps aux « nouveaux » pour s'adapter à un métier très différent de celui de professeur de collège, de lycée ou du supérieur. La COPIRELEM s'est alors tournée vers les IUFM (en 1997) pour proposer un séminaire annuel de formation de nouveaux formateurs en IUFM pour le premier degré. Grâce au soutien des IUFM, le premier s'est déroulé à Perpignan en 1997 et chaque année depuis, ce séminaire accueille trente à quarante nouveaux collègues encadrés par les membres de la commission.

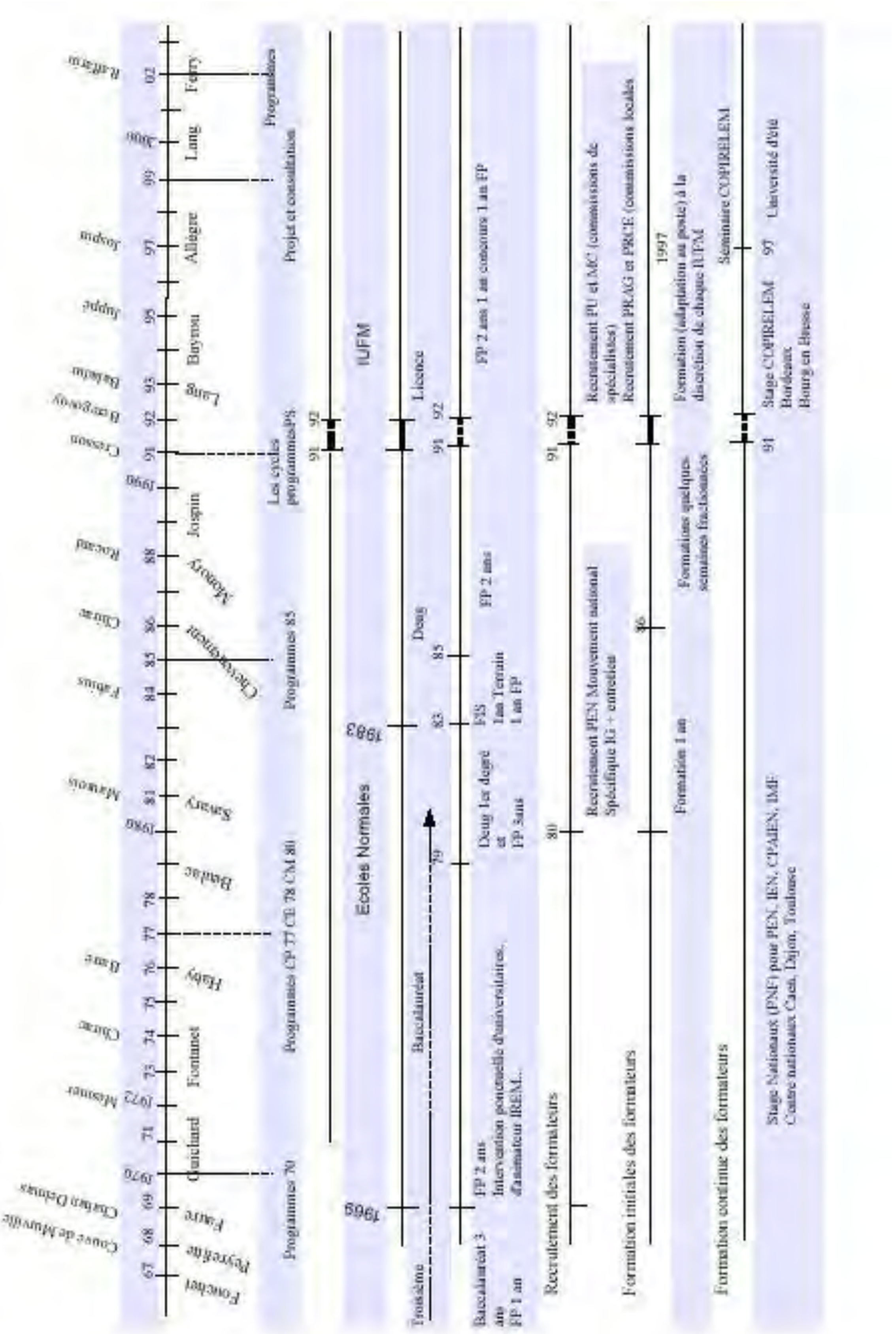
Nous avons conçu ce séminaire pour tenter d'éviter le retour à une formation juxtaposant des apports « théoriques » en mathématiques et une formation pratique transversale, en proposant aux nouveaux collègues une réflexion sur à la fois sur les divers savoirs spécifiques pour enseigner les mathématiques à l'école et sur les stratégies possibles à mettre en œuvre dans le cadre d'une formation professionnelle d'adultes.

Je laisse maintenant à Joël le soin de développer ces deux derniers points.

Annexe 1


Création du CREM
Création des IREM
Création de la COPIRELEM
Colloques
1er Colloque COPIRELEM
Stages nationaux pour la rédaction des documents pour les formateurs
Séminaire de formation pour les nouveaux formateurs
Brochures

Annexe 2



Fouchet Peyrefitte Faure Guichard Fontanet Haby Beulac Savary Chevènement Monory Jospin Lang Bayrou Allègre Lang Ferry
Couve de Murville Chaban Delmas Messmer Chirac Barre Mauroy Fabius Chirac Rocard Cresson Beregovoy Balladur Juppé Jospin Raffarin
Programmes 70
Programmes CP 77 CE 78 CM 80
Programmes 85
Les cycles programmesPS
Projet et consultation
Programmes
Ecoles Normales
IUFM
Troisième
Baccalauréat
Deug
Licence
Baccalauréat 3 ans FP 1 an
FP 2 ans Intervention ponctuelle d'universitaires, d'animateur IREM...
Deug 1er degré et FP 3ans
FIS 1an Terrain 1 an FP
FP 2 ans
FP 2 ans 1 an concours 1 an FP
Recrutement des formateurs
Recrutement PEN Mouvement national Spécifique IG + entretien
Recrutement PU et MC (commissions de spécialistes)
Recrutement PRAG et PRCE (commissions locales
Formation initiales des formateurs
Formation 1 an
Formations quelques semaines fractionnées
Formation (adaptation au poste) à la discrétion de chaque IUFM
Formation continue des formateurs
Séminaire COPIRELEM
Stage Nationaux (PNF) pour PEN, IEN, CPAIEN, IMF
Centre nationaux Caen, Dijon, Toulouse
Stage COPIRELEM Bordeaux Bourg en Bresse
Université d'été

UN ZOOM SUR LES COLLOQUES, LES ANNALES, LE SEMINAIRE DES NOUVEAUX FORMATEURS

Joël Briand
IUFM d'Aquitaine, DAEST Bordeaux 2

Je propose de « zoomer » sur trois types d'actions conduites par la COPIRELEM : les colloques, les annales du concours CRPE, le séminaire des nouveaux formateurs.

1. LES COLLOQUES

Pour illustrer l'objectif de réflexion sur la formation, je rappelle que, dès 1970, alors qu'il fallait dans l'urgence, former les instituteurs : (cf. la circulaire qui accompagne les programmes du 2 janvier 1970 : « *le programme provisoire doit être remplacé par un programme véritablement rénové dès que le personnel du premier dergé sera en mesure de l'enseigner* »), les IREM sont sollicités (rapport de l'IG M. Beulaygue). C'est dans cette mouvance qu'ont lieu les premières rencontres IREM réunissant des professeurs d'école normales, des instituteurs, des IDEN, des conseillers pédagogiques : Orléans 72.

Depuis les premiers colloques, il s'agit de réunir des professeurs « chargés de la formation des maîtres ». Ce sera une ligne directrice essentielle de la COPIRELEM. Les objectifs se font précis dès les premiers colloques :

Je prendrai l'exemple du colloque de Bombannes en 1979 organisé par l'IREM de Bordeaux, qui avait pour titre « Elaboration de documents en vue de la formation initiale et continue des maîtres ».

L'introduction est claire : il s'agit d'*« Améliorer la formation mathématique des enfants [qui] est la finalité principale des formateurs dans les écoles normales. La formation des maîtres n'est qu'un moyen pour améliorer cette formation. La formation mathématique des enfants exige la mise en œuvre et la conduite par les maîtres de situations spécifiques du concept visé et du stade de développement des enfants. Ces situations ne peuvent pas êtres trouvées seulement par une simple combinaison de principes théoriques de psychopédagogie et de mathématiques, ni par une simple transmission des pratiques des maîtres. Elles sont l'objet avec les formés (élèves-maîtres ou maîtres formation continue) d'une activité originale, que nous appelons didactique des mathématiques qui comporte pour eux des moments propres de réflexion théorique d'observation et de réalisations d'enseignement »*

Et de préciser les finalités de la formation :

« A l'égard des formés, il s'agit pour les formateurs de :

** mettre à leur disposition des informations variées, abondantes et faciles d'accès, allant des tours de main pratiques jusqu'aux informations scientifiques, centrées non seulement sur les comportements généraux des enfants et des maîtres au cours de l'enseignement, mais aussi sur ceux qui son spécifiques de chaque concept mathématique enseigné (informations de didactique des mathématiques)*

** développer une attitude active et créative dans leur travail de façon à ce qu'il suscitent cette même attitude chez leur élèves*

** créer les besoins d'informations complémentaires en favorisant les attitudes d recherche, l'observation des enfants, le recours aux méthodes expérimentales, l'évaluation et la remise ne cause ».*

Le projet présenté dans cette introduction est ambitieux : il s'agit de constituer des « dossiers », classés d'après le problème central qui y est traité dans les catégories suivantes : « mathématiques, enfants, méthodologie et renseignements professionnels, didactique théorique, épistémologie »

Ce texte introductif affirme la détermination de la COPIRELEM de s'approcher des recherches naissantes en didactique des mathématiques, ainsi qu'amorcer une réflexion (encore balbutiante) sur des stratégies de formation.

Lorsque l'on analyse ces documents, plusieurs constats peuvent être faits. D'une part, les bibliographies proposées sont contemporaines de l'époque, elles montrent l'influence encore nette de l'épistémologie génétique, mais simultanément elles présentent déjà des critiques du point de vue strictement piagétien et intègrent à la fois des recherches en didactiques sur le sujet (A. Bessot, C. Comiti, G.Brousseau et l'école Jules Michelet), des recherches de l'INRP et celles des différents IREM.

Par ailleurs, on constate que la formation consiste alors essentiellement en des observations de classes et d'expérimentation avec les élèves, un apport théorique par le professeur d'école normale et la présentation d'activités issues de brochures IREM ou de l'INRP.

2. TRAVAIL DE LA COPIRELEM DE 75 À 90

Innovation et didactique : les débats à l'intérieur de la commission sont vifs : ils révèlent un tiraillement entre la culture de pratiques innovantes de certains groupes, la recherche d'activités mathématiques nouvelles pour intéresser les instituteurs et leurs élèves, et le souhait d'autres membres d'accepter le jeu de la théorisation naissante pour ré-interroger les contenus déjà là.

Ces débats, ont toujours été fructueux parce que, comme toute commission IREM, la COPIRELEM, c'est aussi une part de militantisme : les personnes s'estiment, au delà de leurs approches d'abord divergentes. C'est un point fort et permanent que je retiendrai de la COPIRELEM. Sans doute, à l'origine, la culture des professeurs d'école normale a joué : leur travail les mettait à la fois aux prises avec l'organisation de la classe (travail avec des instituteurs dans le cadre d'heures prises en compte dans leurs services, même si leur dénomination était désuète « direction morale et pédagogique ») et avec des objets théoriques naissants. L'idée est vite venue de faire partager les expériences de formation vécues ici où là. En cela, cet objectif de travail de la commission a été et reste un ciment solide.

3. UN TOURNANT : LES IUFM

Lorsque la loi d'orientation présentée par Jospin en 1989 est votée, un nouveau tournant se profile pour la formation des maîtres, avec la création des IUFM qui signe la fin des écoles normales.

La COPIRELEM réagit immédiatement en pensant que l'un de ses rôles est de capitaliser les nombreux acquis des travaux élaborés dans les écoles normales et les groupes élémentaires des IREM. Comme l'a déjà dit Marie-Lise, pendant 5 années (1992-1997), la COPIRELEM a proposé un stage inscrit au PNF dont le but était de produire des documents pour la formation des professeurs en intégrant une réflexion didactique sur les rapports enseignement/apprentissage et sur la formation.

Ainsi le document issu du premier stage (Cahors 1992) est organisé en fonction « d'entrées didactiques » : dialectique outil objet, et jeu de cadres. Un premier glossaire de didactique est constitué.

Dans ces PNF, le thème des stratégies de formation prend corps. (C'est à cette époque que des recherches sur la formation des maîtres se développent [Kuzniak, Houdement, Peltier]). Nous y reviendrons plus tard.

Cette démarche d'organisation de stage vers un public de formateurs n'est sans doute pas étrangère à la naissance de liens qui se sont alors tissés avec, à l'époque, la direction des écoles. La COPIRELEM est alors un interlocuteur reconnu. C'est l'époque de rapprochements avec les Inspecteurs de l'éducation Nationale dont très peu étaient de culture scientifique et les conseillers pédagogiques.

Par la suite, les thèmes retenus pour les stages nationaux du PNF concernent principalement des domaines généraux (violence à l'école, etc.) sans que soient questionnés voire établis les éventuels liens entre les difficultés globales que rencontrent élèves et professeurs dans les établissements et questions d'apprentissages et d'enseignement.

La COPIRELEM produit à cette époque des textes d'orientation (à la demande du Ministère, d'autres commissions IREM, ou d'IUFM) sur des sujets en liaison soit avec des thèmes mathématiques de la scolarité obligatoire :

- Les décimaux (1996) : édition prise en charge par la commission premier cycle.
- La géométrie de l'école au collège : avec la commission premier cycle.
- Proposition de contenu de formation pour les professeurs des écoles (texte en 1994, remanié en 1997).
- Les élèves en difficulté en mathématiques à l'école élémentaire (1996). Texte diffusé auprès des IEN par le ministère.

4. LA FORMATION INITIALE DES PROFESSEURS DES ECOLES

La COPIRELEM œuvre pour que la formation des PE en deux ans ne soit pas la juxtaposition d'une année de bachotage pour l'obtention du concours et d'une pseudo année de formation professionnelle. Elle défend l'idée qu'il est nécessaire que la professionnalisation intervienne dès la première année d'IUFM.

A ce propos, on ne mesure pas toujours suffisamment la dissymétrie qui existe entre la formation initiale et continue des professeurs du premier degré et celle des professeurs du second degré. Là aussi, la COPIRELEM doit, sans cesse, y compris au sein des IREM, réexpliquer cet état de fait.

En 1994, lors du colloque de Saint Etienne, la COPIRELEM propose un plan de formation initiale en mathématiques des futurs professeurs d'école. Les principes, objectifs et méthodes sont les suivants :

L'enseignement des mathématiques s'adresse à des étudiants ayant suivi des cursus universitaires variés, donc de niveaux scientifiques divers. Il s'intègre à une formation pluridisciplinaire nécessitée par la polyvalence du métier de professeur d'école.

Cet enseignement est donc résolument orienté vers la préparation professionnelle, ce qui implique à la fois un approfondissement de certaines des connaissances mathématiques que les professeurs d'école auront à enseigner et un corps de connaissances particulières, de nature plus didactique et épistémologique.

Les contenus s'appuient sur l'étude des concepts mathématiques permettant une bonne compréhension des notions à enseigner dans le premier degré, en rapport avec les situations d'apprentissage. Dans le cas où certains étudiants rencontrent des *difficultés dans la maîtrise de ces savoirs, il convient de leur proposer un module complémentaire dit "de soutien" : celui-ci est centré sur les connaissances directement nécessaires au cours, et non sur le rattrapage d'un hypothétique niveau mathématique général minimum.*

Ces concepts sont vus à travers des études de phénomènes d'enseignement, des approfondissements mathématiques, des analyses historiques et épistémologiques, éclairés par des outils de la didactique.

L'enseignement se structure autour d'activités telles que :

- résolution de problèmes ;

- observations de classes et d'élèves, en situation de travail mathématique ;

- exercices de préparation, de conduite et d'analyse de séances, en liaison avec des maîtres-formateurs ;

- analyses de supports pédagogiques (manuels, fichiers, logiciels, didacticiels, jeux éducatifs, matériels, moyens audiovisuels, instruments d'évaluation,...),

- études de textes extraits de revues pédagogiques et de comptes rendus de recherches,

- analyses d'exercices et de réponses d'élèves,

- et bien sûr nombreux exercices mathématiques.

Il s'agit, en effet, de ne pas de recommencer les erreurs des années 70. Rappelons-nous la façon dont nos collègues mathématiciens envisageaient, sans recul, la conversion des instituteurs des années 70 à la sacro-sainte mathématique moderne par ces cours du soir de mathématiques.

5. L'EPREUVE DE MATHÉMATIQUES DU CONCOURS

Les contenus de formation sont dépendants des concours préparés. En cela, les sujets de concours nous concernent. La COPIRELEM a envoyé régulièrement des contributions aux instances ministérielles tant pour la définition de l'épreuve de mathématiques du concours que pour l'écriture d'un programme de concours et de formation de seconde année.

Prenons l'exemple de la construction des sujets : dès les années 94, 95, plusieurs membres de la COPIRELEM ont réussi à proposer des sujets de mathématiques dans lesquels de véritables questions de didactiques, fondamentales à nos yeux, étaient posées aux candidats. (Hervé Péault (IREM Angers). Il s'agissait de ne pas confondre les mathématiques que le PE allait devoir enseigner et celles dont il avait besoin pour conduire une analyse professionnelle.

Au colloque de Douai 1995, un atelier avait pris comme objet d'étude un sujet intégré , sujet dans lequel, l'étude d'une situation de classe faisait appel simultanément à la connaissance mathématique enseignée, à des concepts de didactique de base.

En 1996, par une collaboration avec des membres de la COPIRELEM et le ministère, une note ministérielle (6 nov.96) précise quelques recommandations à l'attention des concepteurs de sujets. Cette note est envoyée aux concepteurs de sujets, ou devrait l'être…

Progressivement les formateurs en IUFM ont été écartés de la conception des sujets puis, par décision ministérielle de la correction des épreuves. Subsiste çà et là des participations.

Il faut que nous saisissions les nouvelles directives ministérielles pour réaffirmer notre présence lors de la constitution des sujets, lors de l'élaboration d'un corrigé. Il faut analyser les sujets donnés dans nos académies, faire remonter les réactions. Par ailleurs, nous devons être vigilants quant aux modifications de cette épreuve originale et décriée.

6. LES ANNALES

Pourquoi la COPIRELEM et des annales ? Parce que des annales peuvent constituer un instrument de régulation de la formation des professeurs des Ecoles .

- En direction des étudiants : qui apprennent, au travers des sujets à mieux appréhender la spécificité des mathématiques qui leur seront nécessaires dans leur métier.
- En direction des décideurs : Cadre de l'éducation nationale qui compulse les annales lorsqu'il deviendra président de jury.
- En direction des concepteurs de sujet : quelle que soit leur origine, les désignés peuvent avoir recours aux annales pour concevoir de nouveaux sujets.
- En direction des formateurs : les sujets obéissent à une loi bien connue : celle du consensus. Le risque est d'une uniformisation vers le bas et la réduction des sujets à des mathématiques de troisième, agrémentées de commentaires de salon sur des leçons plus ou moins inventées.

Des commentaires, des pistes de réflexion adressées aux formateurs peuvent être profitables. Le risque, si on n'y prend garde est de s'ériger en donneur de leçon. D'où la nécessité d'une grande rigueur et d'un retour constant à des fondements théoriques.

- Du point de vue des contenus :

Faire évoluer les sujets pour mieux comprendre l'imbrication entre les trois partie (cf : travaux de Douai 95 et sujet Nantes 96).

L'évolution de la rédaction des annales est intéressante. Dès l'année 1993, la COPIRELEM demande à l'IREM de Bordeaux de prendre en charge la rédaction des annales. Les annales des années 93à 97 traitent à la fois les sujets mais aussi en font une critique quelquefois rude sur le fond. Ce qui ne va pas sans créer quelques vagues au sein même de la COPIRELEM. Le fait de débattre dans les annales pose problème aux candidats lecteurs de ces annales.

En 98, la COPIRELEM décide donc de séparer les annales et un document qui s'adressera aux formateurs. Malheureusement un seul document de ce type sortira, sans doute parce que les formateurs étant écartés de la construction des sujets, il y avait là une lassitude, un constat d'impuissance.

La COPIRELEM a continué à rédiger des annales des sujets de concours en mettant en évidence la pauvreté de certains sujets, l'apparition massive de questions naïves, de questions pour lesquelles un candidat formés avaient moins de chance de donner la réponse attendue qu'un candidat non formés, etc.

Les annales actuelles de la COPIRELEM tiennent compte, autant que faire se peut, de ce qu'attend un candidat dans sa préparation au concours, tout en signalant, la cas échéant la faiblesse de certains sujets. Le discours s'est atténué. Le forum de discussion des origines n'a pas retrouvé une autre place. Il y a là un chantier à ouvrir à nouveau.

Les résultats de la recherche effectuée en 94 par Marie-Lise Peltier qui mettent en évidence que : « rares sont les sujets qui proposent des scénarios ou des compte-rendus de séances ». « 65% proposent des énoncés de problèmes, ou/et des extraits de manuels » reste d'actualité. Les sujets depuis 98 continuent à être encombrés de questions naïves ou floues.

7. LE SÉMINAIRE NATIONAL DES NOUVEAUX FORMATEURS EN IUFM

Pourquoi un séminaire de nouveaux formateurs en IUFM ? Pour répondre à cette question je citerai l'introduction du premier séminaire à Perpignan :

« La plupart des membres de la COPIRELEM et la grande majorité des participants aux manifestations qu'elle organise sont des formateurs de professeurs des écoles en ***IUFM****. Il était donc tout naturel que la COPIRELEM offre un temps d'accueil aux nouveaux collègues en* ***IUFM*** *pour faire partager des expériences, des projets. Une culture commune existe déjà, avec ses tendances, ses débats. Ceci nous paraît essentiel. L'arrivée de nouveaux collègues doit être source d'enrichissements mutuels, d'exigences nouvelles d'explicitation pour les anciens, de prise de conscience d'existence d'un champ spécifique de connaissances pour les nouveaux ».*

Nous avons conçu ce séminaire dans un souci constant d'intégrer la didactique des mathématiques dans les formations professionnelles. Le séminaire, à l'origine réparti sur 4 jours, se déroule maintenant sur 5 jours : en fait, 2 jours réservés aux membres de la COPIRELEM (séminaire interne) sont une réunion COPIRELEM et deux jours, et maintenant trois, de séminaire externe où les anciens et les nouveaux travaillent ensemble.

Voici le texte de présentation de la brochure du 4ème séminaire (Agen, 2000) :

« Le rendez-vous d'Agen fut le quatrième séminaire de formation des nouveaux formateurs de mathématiques en IUFM.

Depuis la création de ce séminaire en 1997, le nombre croissant de nouveaux collègues qui s'inscrivent montre à l'évidence la nécessité et l'intérêt de ce type de rencontre.

En 1997, le pari n'était pas gagné d'avance, puisqu'il s'agissait de proposer une offre de formation sans financement particulier. Les IUFM ont tout de suite répondu présents pour prendre en charge, majoritairement, leurs nouveaux formateurs.

Ce séminaire est donc la preuve concrète d'une collaboration efficace entre la COPIRELEM (Commission permanente des IREM pour l'enseignement des mathématiques à l'école primaire), et au travers d'elle les IREM, et les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres ».

8. LES QUESTIONS ACTUELLES

La COPIRELEM a toujours voulu permettre à tout groupe IREM ou toute personne d'un IREM intéressée par les mathématiques de l'école primaire et par la formation des enseignants de l'école primaire en mathématiques de trouver des écrits, des publications, des lieux, des personnes lui assurant une formation ou auto-formation qui n'ignore pas les travaux effectués en didactique des mathématiques ou dans son voisinage immédiat.

Le colloque est un lieu de communication des travaux issus des différents IREM. De nombreux IREM (Besançon, Bordeaux, Dijon, Brest, Grenoble, Lille, Limoges, Montpellier, Paris 7, Rouen, entre autres) publient vers l'enseignement primaire :

La revue Grand N de l'IREM de Grenoble constitue actuellement une base d'articles très utiles en formation des maîtres. Les liens avec la COPIRELEM sont forts. De nombreux sites, à commencer par www.ac-grenoble.fr/irem/sommairegrandN.pdf donnent la liste des articles. Cela constitue un point de départ fonctionnel, par exemple pour la réalisation d'un mémoire. Le PE dispose rapidement d'un cadre théorique-pratique et d'une bibliographie accessible.

Prenons l'exemple de la géométrie à l'école élémentaire : un site canadien a répertorié pas moins de 50 articles de la revue grand N traitant ce sujet :

(www.er.uquam/nobel/r35100/ressources/biblio/biblio/géometrie_primaire_G.html)

Les IREM, dans ce cas jouent leur rôle de lien entre les recherches universitaires en didactique des mathématiques et la formation des professeurs.

- Actuellement, des groupes IREM travaillent sur l'école primaire.
- Les recherches en didactique se font dans des laboratoires universitaires parfois liés aux IUFM (par les personnes ou/et par des conventions). La COPIRELEM, dont la plupart des membres sont formateurs en IUFM doit concilier ses origines IREM et la culture des groupes de travail, la connaissance des travaux en didactique des mathématiques et les impératifs de la formation.
- Les thèmes actuels, mis en avant en formation par les institutions ministérielles et périphériques (fracture scolaire, violence à l'école, etc.) ne sont pas questionnés sur leurs liens avec les apprentissages en général et les apprentissages spécifiques à une discipline en particulier.
- Le rabattement éventuel du concours à un contrôle de connaissances de type académiques va rassurer les instances les plus rétrogrades, faisant s'éloigner l'idée que l'enseignant en mathématiques du primaire est un professionnel, et considérant que « pour enseigner les maths au primaire, il suffit de bien connaître les maths du collège ». La question « que doit demander une institution à de futurs enseignants dans un concours et lors d'une formation professionnelle reste d'actualité ».

La menace de rabattre l'enseignement des mathématiques à des utilitaires, d'abandonner toute initiation réelle à une pensée rationnelle, scientifique reste bien d'actualité, quelles que soient les orientations politiques des ministères (Allègre 1999).

CONCLUSION

Les premières décennies ont montré que les exigences de cohérence théorique avaient fait avancer la commission (PNF), tout en gardant son rôle d'aide à la formation des formateurs d'enseignants.

- Il ne faut pas retomber dans la compilation de travaux mis côte à côte, sans souci de synthétisation, bref retomber dans l'innovation.
- Les nouveaux formateurs de professeurs des écoles doivent, alors que leur formation ne les y incite pas toujours, prendre connaissance d'un corpus de travaux théoriques que les anciens ont souvent vécu, à des degrés divers, en « temps réel ». La tentation est de revenir au spontanéisme : cours théorique et visites en classe. Si les IREM veulent défendre leur héritage, c'est en permettant que des groupes de travail accueillent ces formateurs ainsi que des instituteurs ou professeurs des écoles, mais en ont-ils actuellement les moyens. La COPIRELEM a les défauts de ses qualités : son action nationale la rend suspecte de désertion locale.
- Il faut prouver que les thèmes actuels déjà évoqués, ainsi que les thèmes de formation, comme par exemple les « analyses de pratiques » ne peuvent pas être indépendants des questionnements d'ordre didactique (didactique disciplinaire). Cette position est contestée par beaucoup de formateurs en sciences de la formation. La COPIRELEM a les moyens d'argumenter sur ce point et de diffuser auprès des IUFM.
- La COPIRELEM se doit donc de contribuer à aider tous les nouveaux formateurs à s'informer, à prendre en compte les résultats de la recherche, à transposer ce travail dans

leur travail de formateur. Il y a là un gros travail qui ne se substitue pas au travail de diffusion des résultats dans des cadres de séminaires de laboratoires ou nationaux de didactique, mais qui les complètent.

- Pour cela, la COPIRELEM doit se sentir épaulée par la communauté des mathématiciens et en particulier par les actuels directeurs d'IREM afin qu'elle puisse sereinement poursuivre un travail de diffusion des résultats de la recherche en didactique des mathématiques pour l'école

UN ZOOM SUR LES STRATÉGIES DE FORMATION DES PROFESSEURS DES ÉCOLES UTILISEES PAR LES FORMATEURS EN MATHÉMATIQUES

Catherine Houdement
IUFM de Haute-Normandie et DIDIREM Paris 7.

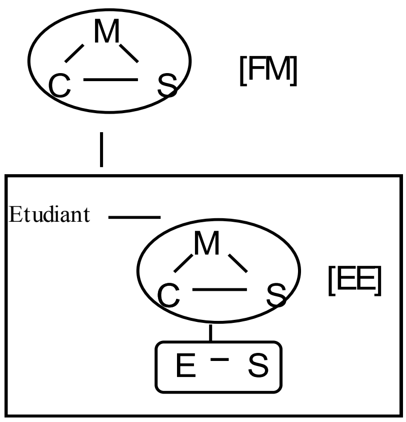
Une des caractéristiques de notre culture commune, à nous, professeurs de mathématiques et universitaires exerçant en IUFM, participant à la COPIRELEM et/ou suivant ses travaux, est, me semble-t-il, une certaine expertise dans la formation d'adultes à l'enseignement des mathématiques en primaire. Ce texte livre donc une réflexion actualisée sur les stratégies de formation utilisées actuellement par les formateurs de mathématiques des IUFM.

DES TRAVAUX ANTÉRIEURS

Déjà dans les années 1990, certains ont cherché à théoriser cette expertise pour mieux la communiquer. A.Kuzniak (1994) a essayé de construire un cadre d'analyse des stratégies de formation des maîtres du premier degré en mathématiques. Il s'est alors appuyé sur les stratégies pratiquées en Ecoles Normales (pour les étudiants ayant le baccalauréat puis le DEUG) et dans les IUFM naissant, partant de l'hypothèse qu'elles correspondaient à un point d'équilibre entre les contraintes de la formation des maîtres et ses visées (ce qu'on peut résumer par un enseignement « adapté » des mathématiques à l'école primaire). L'étude n'a pas porté sur des propositions de stratégies idéales de formation des maîtres en mathématiques, mais sur des stratégies existantes, dont le recueil et l'analyse ont constitué le corps des recherches.

A.Kuzniak a cherché à repérer des éléments de cohérence professionnelle et j'ai à l'époque élargi cette recherche de cohérence en explicitant les critères de choix des formateurs, par exemple pour répartir les thèmes mathématiques entre première et seconde année de formation, pour choisir une stratégie plus adaptée aux « débutants »…

La recherche nous a donc amenés à délimiter des stratégies de formation que nous avons typées à partir d'un découpage des savoirs. Précisons d'abord quelle modélisation du système à observer nous avons retenue. A.Kuzniak a introduit le schéma suivant pour décrire le système de formation des maîtres [FM].



[FM] I.U.F.M.

[EE] Ecole Elementaire

Le formateur (M) en IUFM opère à l'intérieur d'un groupe classe (C) pour transmettre un savoir. Le savoir en jeu dans le système de formation (que nous appellerons savoir de formation) est donc celui qui permet à au professeur interagissant dans une classe d'école primaire de produire des connaissances mathématiques chez des élèves.

Le système est complexe dans la mesure où tout se joue sur un double niveau : savoirs professionnels du formateur → savoirs professionnels du professeur d'école, élève d'un groupe classe dans le système [FM] ; savoirs professionnels du professeur d'école, maître d'une classe dans le système [EE] → savoir mathématique des élèves. Il existe donc une double transposition, un double niveau de conceptions, conception de l'apprentissage de l'élève dans EE (vite dit behavioriste ou constructiviste), conception de la formation d'adultes à l'enseignement (dans FM).

Dans nos travaux de thèse (Houdement et Kuzniak 1996), nous avions déjà décomposé le savoir de formation (dont une partie était la didactique des mathématiques, savoir savant de l'enseignement des mathématiques alors en constitution) et posé les questions suivantes :

- la didactique des mathématiques prend elle en compte tout ce qui fait acte d'enseignement ?
- son développement est-il suffisant pour permettre un travail de transposition suffisamment riche et incontestable ?

L'étude que nous avons menée s'est restreinte à la formation en mathématiques, même si une autre complexité existe de tout temps dans [FM], celle de la polyvalence (de la formation et de l'exercice).

Je souhaiterais ici reprendre ce regard sur les pratiques.

UN DÉCOUPAGE DES SAVOIRS REVISITÉ

Je choisis là un paradigme d'analyse des pratiques « toutes professions confondues » et j'essaie modestement de décliner ses entrées pour revisiter les pratiques actuelles de formation en IUFM des maîtres enseignant les mathématiques dans le premier degré.

Pour ce faire, je m'appuie sur un modèle de transmission des savoirs que Schön (1994) a contesté, mais que j'essaie d'enrichir en intégrant ses apports. Il y aurait trois types de savoirs liés à l'exercice d'une profession :

- (α) des savoirs savants, souvent pré-requis à l'entrée dans une formation professionnelle classique,
- (β) des savoirs de la « science appliquée » : savoirs techniques nécessaires à l'exercice effectif de la profession,
- (γ) des savoirs de la « non-science », non pris en charge par la science.

Ce nouveau modèle résulte de la réduction d'hypothèses paradoxales : d'une part, celle, déjà ancienne (épistémologie positiviste), qui déclare que l'exercice d'une profession est du type science appliquée (savoirs α et β), d'autre part que l'exercice d'une profession nécessite une part non seulement incommensurable à la science (savoir γ), mais aussi au compagnonnage (l'apport de Schön). Pour mieux illustrer mon propos, je vais maintenant essayer de décliner chaque type de savoirs relativement à l'aspect professionnel « enseigner les mathématiques à l'école primaire ».

Les savoirs (α **)** recouvrent d'abord les **savoirs mathématiques et épistémologiques (** α m**)** nécessaires à l'enseignement des mathématiques à l'école. Ces savoirs dépassent la simple connaissance des mathématiques de l'école, ils nécessitent une prise de recul (id est une culture enrichie) et une recomposition de savoirs scolaires, comme par exemple mettre en relation proportionnalité et agrandissement de figures, homothéties et fonctions linéaires. Ces savoirs nécessaires sont en effet réexaminés à l'aune de l'intention d'enseignement à des enfants de 6 à 11 ans : pour la division des entiers par exemple, l'étude analytique d'algorithmes variés de division euclidienne est plus utile au futur enseignant que celle de la connaissance de la structure d'anneau euclidien. Ces dernières années, et c'est un fait remarquable, ont émergé des recherches sur l'enseignement de **nouveaux savoirs,** sans qu'il soit toujours possible de définir précisément leur champ de rattachement (mathématique ? épistémologique ? didactique ?) : ainsi l'énumération (Briand 1993) lié à l'étude du savoir dénombrer ; les connaissances spatiales (Berthelot Salin 1992) ; les paradigmes géométriques (Houdement-Kuzniak 1999).

Il serait erroné de limiter la rubrique (α) aux savoirs mathématiques : les savoirs savants comprennent donc aussi d**es savoirs didactiques** (α d). Ces savoirs correspondent à des résultats stabilisés sur l'enseignement des mathématiques parce qu'ils ont montré leur pertinence (ou leur cohérence avec les travaux cognitifs et de psychologie sociale, leur reproductibilité) parce qu'ils sont devenus consensuels[8]. Le lecteur pensera immédiatement à la théorie de situations didactiques, la dialectique outil objet, la notion de champ conceptuel, la transposition et l'approche écologique… Ces divers travaux ne trouvent pas nécessairement leur origine uniquement dans une réflexion sur l'enseignement des mathématiques, mais ils ont montré leur pertinence pour ce but.

Il est remarquable que cette rubrique ne soit pas close : elle est amenée à s'enrichir des résultats de nouvelles recherches, aussi bien pour (α m) que (α d). Cette remarque vaudra aussi pour les autres savoirs.

D'autres travaux existent issus d'un questionnement didactique, par exemple sur l'enseignement à des types d'élèves particuliers (AIS) ou particularisés (ZEP), mais dans la mesure où ils ne sont pas nécessairement stabilisés, ni consensuels, ils figurent plutôt sous la rubrique suivante.

Les savoirs (β **)** correspondent à la mise en œuvre de ces savoirs savants, au fait de les décliner dans l'enseignement et de les croiser encore avec d'autres apports (psychologie, pédagogie, sciences de l'éducation…). Ce sont en quelque sorte déjà des savoirs de la pratique[9], mais des savoirs écrits et consensuels. On pourrait dire que ERMEL[10] produit de la science appliquée… On pourrait dire que les manuels scolaires déclarent comme intention de produire de la science appliquée… ou, pour certains, essaient d'appliquer ce que la science a produit de certain et extrapolent sur ce que la

[8] Attention ces savoirs ne seront pas transmis tels quels, ils nécessitent eux aussi une transposition.

[9] Notons que ce sont des savoirs de la pratique qui ont permis, par observation et analyse de régularités et volonté de permettre de la reproductibilité, de faire émerger des théories par exemple didactiques.

[10] Equipe de Recherche sur l'Enseignement des mathématiques de l'INRP notamment dans ses ouvrages *Apprentissages Mathématiques à l'Ecole Elémentaire* (CP au cours moyen, 1977 à 1982), puis *Apprentissages Numériques et Résolution de Problèmes* (GS, CP au CM2 1990 à 1999)

science n'a pas pris en charge. On pourrait dire aussi que les IUFM, vues comme écoles professionnelles, sont chargées principalement d'enseigner cette science appliquée, du moins que les attentes des formés concernant les IUFM portent beaucoup sur cet aspect là.

Les savoirs (γ) forment ce que Schön appelle le savoir d'expérience. Il affirme qu'ils ne peuvent pas être pris en charge par une science. Ils se décomposeraient en :

- ($\gamma 1$), les tours de main, ce que permet d'observer le compagnonnage, l'accompagnement de proximité[11] ;
- mais aussi ($\gamma 2$), la capacité à réfléchir, liée à un travail sur l'appareil conceptuel (voire psychique) du praticien.

Pour Vergnaud, ($\gamma 2$) est une façon d'expliquer le décalage entre la forme opératoire et la forme prédicative de la connaissance. Pour Schön, l'accès à ($\gamma 2$) ne peut se faire ni par simple observation, ni par simple échange avec un expert. Il nécessite la mise en place de ce que qu'il nomme une réflexion en cours d'action (RCA) et une réflexion sur l'action (RSA).

Ce choix de modélisation, appliqué comme je l'ai déjà signalé sur des stratégies constatées de formation des maîtres du premier degré en mathématiques, me semble présenter plusieurs intérêts : le premier est d'expliquer certains avatars de cette formation ; le deuxième de préciser la typologie des stratégies actuelles de formation ; la troisième de décrire un nouveau type de démarches, dite analyse de pratiques.

UN ESSAI D'ANALYSE DE QUELQUES AVATARS DE LA FORMATION EN MATHÉMATIQUES DE FUTURS ENSEIGNANTS

Un premier avatar serait en effet de confondre les deux systèmes EE et FM et de réduire le savoir mathématique **(**αm) de FM au savoir mathématique de EE. Ainsi il suffirait que le professeur sache les mathématiques **de** l'école primaire pour pouvoir enseigner les mathématiques **à** l'école primaire[12]. Cela conduit à ne plus enseigner de mathématiques aux futurs professeurs des écoles enseignants ou à n'exiger pour leur recrutement que la réussite aux exercices de fin d'école primaire.

Une autre difficulté de la formation à l'enseignement vient du fait suivant **:** des mathématiques, en l'occurrence (αm), sont, selon ce modèle, un des supports de (β), mais (β) vise à faire apprendre des éléments de mathématiques ; il devient donc tentant de rendre (β) transparent, donc indirectement d'ignorer **(**αd**)** pour ne garder comme composantes nécessaires à l'enseignement que **(**αm**)** et l'incontournable ($\gamma 1$) (ou bien de penser qu'on infère (β) à partir de ($\gamma 1$)). Cet avatar peut toucher toutes les formations d'enseignants de mathématiques, premier et second degrés confondus[13].

Une troisième tentation serait de concevoir une formation axée sur des **(**β**)** généraux en oubliant que **(**β**)** ne prend son sens que fondé sur (α). Ce serait notamment le cas

[11] ce que Kuzniak avant nommé le « troisième savoir ».
[12] Certains projets de réforme récents du concours de recrutement des professeurs des écoles allait dans ce sens.
[13] Il me semble que la formation par CPR était gagnée par cette tentation.

par exemple si on faisait fi des spécificités disciplinaires (voire thématiques) des didactiques ou encore si on oubliait que les futurs professeurs des écoles entrant en IUFM ont, quel que soit leur profil universitaire antérieur, des lacunes en (α) : ces lacunes sont en effet au minimum partielles en (αm) puisqu'un certain nombre de connaissances mathématiques nécessaires à l'enseignement des mathématiques ne peuvent être enseignées que dans une problématique d'enseignement[14], et ces lacunes sont souvent totales[15] en (αd).

Ainsi le formateur de mathématiques d'enseignants du premier degré (et c'est une spécificité de ce degré) devrait à l'heure actuelle au minimum prendre en charge simultanément **une formation complémentaire en (α)** et **une formation en (β)** et travailler sur une articulation entre ces savoirs. L'IUFM devrait aussi dispenser une formation en savoirs (γ).

UNE DESCRIPTION DES STRATÉGIES DE FORMATION EN MATHÉMATIQUES DES PROFESSEURS DES ÉCOLES

Je vais essayer de préciser succinctement les dominantes stratégiques actuelles en m'appuyant sur la typologie en cinq classes[16] faite par Kuzniak et le découpage des savoirs initié par Schön, en gardant présente la dominante mathématique.

Les stratégies de monstration privilégient la transmission d'un modèle de l'enseignement des mathématiques par l'observation de sa mise en œuvre dans les classes élémentaires. Elles reposent sur un « savoir observer » le maître en exercice et une coopération avec le formateur (notamment l'utilisation de grilles d'observation). Il s'agit d'aider les étudiants à construire une pratique en leur montrant des éléments (pédagogiques ou didactiques) et en les faisant imiter ou distancier. Sous la forme imitation, c'est le mode le plus ancien (« leçon modèle ») d'initiation aux pratiques professionnelles.

Ces stratégies travaillent essentiellement sur (γ1) ; pour en profiter pleinement, il est bien utile de connaître le (αm) en jeu ; elles étaient utilisées par les formateurs dans notre étude de 1995 sur du savoir mathématique maîtrisé par les étudiants professeurs des écoles. Actuellement elles sont souvent doublées d'une phase de distanciation (c'est ainsi que le formateur montre des leçons non modèles), ce qui permet notamment d'atteindre les savoirs (β). On peut placer sous cette rubrique les séances d'analyse collective, dirigée par un formateur en didactique des mathématiques, de films vidéo de séances de mathématiques effectuées par un PE2.

Les stratégies d'homologie sont aussi fondées sur l'imitation, mais une imitation du formateur par l'étudiant. Le formateur vise que ce dernier mette en place un modèle d'enseignement inspiré de celui qu'il a pu vivre en tant qu'étudiant dans le centre de formation. Le formateur enseigne conformément à sa conception de ce que doit être l'enseignement à l'école élémentaire. Dans une certaine mesure, le fonctionnement [FM] est considéré comme « homologue » au fonctionnement [EE].

---

[14] ce que pourraient prendre en charge les licences pluridisciplinaires ;
[15] sauf pour les étudiants ayant suivi certaines licences ou DESS.
[16] Pour plus de détail consulter Houdement et Kuzniak (1996).

Ces stratégies travaillent sur (αm), (β) (les techniques mises en place par le formateur vis à vis des étudiants) et (γ1) (les tours de main du formateur pour gérer le groupe classe). En 1995, elles étaient en effet privilégiées pour l'étude des domaines souvent lacunaires pour les PE : grandeurs et mesure, fonctions numériques, géométrie.

Ces stratégies sont aussi souvent accompagnées d'une phase d'analyse et de distanciation (vers la construction de (αd)), notamment pour pointer, dans la conception d'une séquence, les outils didactiques utiles à sa construction et son analyse.

Les stratégies culturelles sont les stratégies qui privilégient l'accroissement des connaissances des étudiants dans un domaine précis, sans préjuger de la mise en œuvre opérée dans les classes par ces mêmes étudiants. Elles peuvent porter sur du savoir mathématique (cas -que nous espérons fictif- des professeurs en IUFM qui se limiteraient uniquement à la préparation de la partie mathématique du concours) ou du savoir didactique (cas des cours magistraux de didactique, peu usuel du temps des Ecoles Normales où ce savoir didactique n'était pas aussi constitué). Elles travaillent essentiellement sur (α), (αm) ou (αd) et ne se préoccupent ni de (β), ni de (γ1).

Les stratégies de transposition se proposent de transmettre des savoirs de référence, mais portant sur la pratique de la classe, ce qui les distingue des stratégies culturelles. Pour étudier ces stratégies, il est important de préciser les savoirs retenus et les modes de transposition mis au point. Les stratégies de transposition sont très dépendantes de savoirs non figés, ce sont des stratégies en évolution susceptibles de se transformer.

Elles supposent (αm) et (γ1) connus ; elles travaillent essentiellement sur (β) : à long terme elles contribuent à construire un nouvel (αd).

Les stratégies de recherche applicative : le formateur essaie de contrôler le processus de transposition de (α) en aidant des petits groupes d'étudiants à analyser des séances qu'ils ont eux-mêmes préparées et menées. Ces dispositifs coûteux ont pu s'exercer pour les PE2 de 1999 à 2001 dans certains IUFM (notamment Rennes et Créteil).

Ces stratégies visaient essentiellement (β), mais renforcent (γ1) et permettent des retours sur (α).

Existe-il des stratégies idéales ? Là n'est pas le propos de cet exposé qui ne fait qu'essayer de décrire des pratiques existantes. De plus les stratégies réellement utilisées par les formateurs restent souvent mixtes même sil se dégage une dominante « étiquetable ». Toujours est-il que l'on peut ranger les stratégies précédentes, relativement au savoirs de formation définis plus haut, selon le type de savoir supposé déjà connu, de savoir visé ou de savoir en jeu (savoir travaillé mais pas nécessairement visé) :

	(α m)	(α d)	(β)	(γ 1)	(γ 2)
Monstration	connu		possible	visé	
Homologie	visé	possible	visé	visé	
Culturelles	l'un ou l'autre est visé				
Transposition	connu	possible	visé	connu	
Recherche applicative	possible		visé	en jeu et visé	

Il est bien visible que les pratiques de formation par groupe définies précédemment n'offrent pas d'occasion de travailler (γ 2).

UNE COMMANDE DE L'INSTITUTION : LES « ANALYSES DE PRATIQUES »

Dans les IUFM depuis 2000, une injonction ministérielle institue des heures dites d'Analyse de Pratiques dans la formation des professeurs du premier et du second degré parfois au détriment d'entrées plus disciplinaires. Cette injonction apparaît comme l'imposition d'une **démarche** de formation sans précision sur les savoirs en jeu.

Deux hypothèses semblent a priori possibles concernant cette décision :

- une plus « scientifique » : cette proposition s'appuie sur la reconnaissance de l'insuffisance, pour la formation, du modèle de la science appliquée (où l'approche disciplinaire est forte) ; elle fonctionne sous l'hypothèses suivante : il existe des savoirs non conscients qui font partie de l'expertise, que des dispositifs permettant aux étudiants de saisir la complexité de l'acte d'enseignement et nommés « analyses de pratiques » se chargent de « débusquer » ;
- une plus « économique» : cette décision régule le recrutement des formateurs dans la mesure où une entrée par l'analyse de pratiques rend illisible les contingents horaires disciplinaires, et donc n'exige pas un nombre fixe d'heures de « spécialiste d'une discipline » ;

En réalité on a tort de croire que le processus d'analyse des pratiques désigne un ensemble de buts et de procédés sur lesquels tout le monde s'entend ; il existe diverses écoles et façons de procéder. J'aime assez bien la typologie retenue par S.Nadot (in MJER 2003) sur laquelle je m'appuie ici.

Les Analyses de Pratiques se différencient par le but poursuivi et le rôle du formateur.

1. L'Analyse de Pratiques peut viser l'acquisition de savoirs techniques : il s'agit de comparer l'activité réalisée et l'activité prévue, d'identifier la tâche, de mesurer l'écart entre l'activité programmée et l'activité effective.
   Le formateur est un médiateur de savoirs et travaille sur (β).
2. L'Analyse de Pratiques peut viser un travail sur l'implication du praticien dans la situation (un des inspirateurs en est Balint médecin hongrois) : il s'agit d'identifier les problèmes qui se posent, ce qui préside, pour chacun, compte tenu de son histoire personnelle, à la manière de le résoudre.
   Le formateur est un spécialiste de psychologie clinique (travail sur un (γ 2) clinique)
3. L'Analyse de Pratiques peut viser un travail sur le savoir du praticien dans la pratique (l'inspirateur en est Schön avec les notions de RCA et RSA) : il s'agit de

comprendre la situation problématique, ce qui sous-tend les prises de décision, les perceptions les jugements. C'est moins un travail sur l'implication du praticien (au sens clinique) que sur ses connaissances en acte : cette analyse de pratique fonctionne sous l'hypothèse d'un savoir caché dans l'agir professionnel, d'un savoir intuitif.
Le formateur est un expert de la formation et travaille sur un (γ 2) intuitif.

Bien entendu l'Analyse de Pratiques de type 1 est nécessairement liée aux savoirs disciplinaires et didactiques. Cette analyse de pratique est tout à fait de notre ressort dans la mesure où elle s'intéresse à des pratiques d'enseignement de mathématiques : elle serait qualifiée avec notre typologie de monstration-transposition ou de recherche applicative. Elle a existé dans les IUFM bien avant l'injonction ministérielle (voir par exemple à Rennes les Ateliers de Pratique Professionnelle de G.Le Poche)

L'Analyse de Pratiques de type 2 ne peut être prise en charge que par des spécialistes de psychologie clinique.

L'Analyse de Pratiques de type 3 recouvre un champ de connaissances inhabituel dans sa globalité pour le formateur de mathématiques, mais simultanément cette analyse lui offre l'occasion de toucher à la singularité, au caractère personnel de la recomposition, par le futur enseignant, des savoirs nécessaires à l'enseignement. Elle accède en partie à ce savoir (γ 2) que les stratégies décrites précédemment ne semblaient pas prendre en compte.

Elle permet aussi de débusquer des trous de connaissances dans la formation des maîtres, y compris en didactique des mathématiques et d'éventuellement réguler (après coup[17]) ces lacunes ou ces contresens. Nous sommes plusieurs formateurs au sein de la COPIRELEM à avoir tenté cette « aventure » de l'Analyse de Pratiques de type 3, après quelques heures de formation et un cahier des charges précis (notamment selon les modalités du GEASE[18]), puis avoir échangé sur nos expériences respectives[19]. C'est pourquoi je pense fermement qu'il ne faut pas se dessaisir de l'Analyse de Pratiques de type 3, mais y être présent, pour lui conserver une ouverture didactique.

Se lancer par contre dans l'animation systématique de ce type de séances (dont les champs d'action varient entre l'institutionnel, le pédagogique, le didactique, le social et le personnel) devrait résulter d'un choix personnel, appuyé par des lectures, une pratique d'entraînement préalable et contrôlée et une supervision organisée.

CONCLUSION

Ce zoom sur les stratégies de formation permet, me semble-t-il, de montrer que nous avons une culture riche et de multiples possibilités d'adaptation aux nouvelles

---

[17] Dans des séances plus classiques que l'analyse de pratiques
[18] **G**roupe d'**E**ntraînement à l'**A**nalyse de **S**ituations **E**ducatives
[19] Elle nous a permis, dans nos IUFM de traiter de phénomènes scolaires :
- de pratiques spécifiques : ZEP, AIS ;
- des problèmes relationnels généraux : avec parents, collègues, avec instances, avec des cas limites : enfants violents, enfants inhibés, enfants surdoués,
- des problèmes d'enseignement mal analysés et pourtant relevant aussi du didactique (évaluation d'élèves, désintérêt d'élèves….) : dans ce cas elle nous permet de faire à d'autres occasions des apports mathématiques et surtout didactiques , de envoyer à des lectures …. bref de **trouver une niche** pour certaines de nos interventions.

contraintes. Encore faut-il que notre spécificité soit reconnue et défendue... Et que nous soyons enthousiastes à nous former toujours davantage.

S'il est capital de valoriser et de développer davantage la spécificité de la didactique des mathématiques, il serait illusoire de penser qu'actuellement, à elle seule, elle peut rendre compte de toute acte d'enseignement de mathématiques. Il me semble intéressant de « sortir du cadre » pour interroger des approches complémentaires et fondées.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BERTHELOT R et SALIN M.H. (1992*) L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire.* Thèse de l'Université de Bordeaux I.

BLANCHARD-LAVILLE C., NADOT S. (sous la direction de) (2000) *Malaise dans la formation des enseignants*. Paris : L'Harmattan.

BRIAND J. (1993) *L'énumération dans le mesurage des collections, un dysfonctionnement de la transposition didactique*. Thèse de doctorat. Bordeaux I

BROUSSEAU G. (1970-1990) *Théorie des situations didacti*ques. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BRUN J. dir (1996) *Didactique des mathématiques*. Lausanne : Delachaux et Niestlé.

COPIRELEM (1991, 92, 93, 95, 96, 97) *Documents pour la formation des professeurs des écoles en didactique des mathématiques.* IREM de Paris 7.

COPIRELEM (1997 à 2003) *Les cahiers du formateur*. IREM de Paris 7.

COPIRELEM (2003) *Concertum. Carnets de route de la COPIRELEM.* ARPEME.

MJER (2003) *Analyse de pratiques et professionnalité des enseignants*. Les Actes de la DESCO. SCEREN. CRDP Basse-Normandie.

HOUDEMENT C. (1995) *Projet de formation des maîtres du premier degré en mathématiques : programmation de stratégies*. Thèse de doctorat. Paris : Université de Paris 7.

HOUDEMENT C. et KUZNIAK A. (1996) Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* vol 16/3. Pages 289-322. Grenoble : La Pensée Sauvage.

HOUDEMENT C. et KUZNIAK A. (1999) Quelques éléments de réflexion sur l'enseignement de la géométrie : de l'école primaire à la formation des maîtres**.** Revue *Petit X* n°51. Pages 5-21. IREM de Grenoble.

HOUDEMENT C. et KUZNIAK A. (2000) Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 20/1. Pages 89-116. Grenoble : La Pensée Sauvage.

KUZNIAK A. (1994) *Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs des maîtres du premier degré*. Thèse de doctorat. Paris : Université de Paris 7.

NADOT S., (2002) De la position d'expert à celle d'analyste. Le cas des chefs d'établissements. *Recherche et formation* n°39 : Analyse de pratiques : approches psychosociologique et clinique.

SCHÖN D.A.(1983) *The reflexive practitioner : how professionals think in action.* Basic Books Inc. USA. Traduction 1994 : *Le praticien réflexif. A la recherche du savoir caché dans l'agir professionnel* Collection Formation des maîtres. Editons Logiques. Québec.

VINGT ANS DE DIDACTIQUE EN 1993 ! OÙ EN EST-ON DIX ANS APRÈS ?

Marie-Jeanne Perrin-Glorian,
I.U.F.M. Nord-Pas-de-Calais
et Equipe DIDIREM, Paris 7

Résumé :
Petit panorama de la didactique des mathématiques concernant l'enseignement dans le premier degré et la formation des professeurs des écoles.

Le colloque qui nous réunit est le trentième organisé par la COPIRELEM. A cette occasion, la commande des organisateurs était de brosser l'évolution au cours des dix dernières années des recherches en didactique des mathématiques concernant le premier degré (enseignement et formation des maîtres. Il y a dix ans nous faisions l'état des lieux de 20 ans de didactique des mathématiques en France. Qu'en est-il dix ans plus tard ? Programme ambitieux que je ne ferai qu'esquisser.

Je suis donc partie du volume des actes du colloque des vingt ans de didactique, j'ai repris les conférences plénières et les communications qui concernaient le premier degré, puis j'ai regardé les articles parus dans Recherches en didactique des mathématiques entre 1993 et 2002, les thèses, les actes des colloques de la COPIRELEM de 1993 à 2001. Je me suis placée du point de vue des chercheurs et j'ai négligé toutes les publications qui s'adressent aussi aux enseignants comme Grand N, ou les travaux de l'équipe Ermel. Même en me restreignant ainsi, il était impossible dans le temps imparti de faire une synthèse de l'ensemble et j'ai choisi de m'intéresser plus particulièrement à la géométrie et aux études concernant l'enseignant. Ce sont donc ces deux thèmes que je vous présenterai dans les parties II et III, après une petite description d'ensemble que je conclurai par une réflexion sur l'évolution des problématiques et des cadres théoriques, et avant de me risquer à proposer quelques perspectives. Evidemment, il s'agit d'une synthèse personnelle dans la mesure où j'ai fait des choix, n'ai retenu que certains aspects des travaux mentionnés. Le tout est bien incomplet et je demande à tous ceux dont les travaux ne sont pas pris en compte ou sont déformés parce que je n'en ai retenu que certains aspects, de bien vouloir me pardonner.

I. ELÉMENTS POUR UN INVENTAIRE

1- Les perspectives en 1993

Au cours du colloque de 1993, à travers les différentes conférences plénières, les orateurs ont cherché à dresser un bilan de vingt ans de didactique, à marquer des avancées, pointer des questions et dégager quelques perspectives pour la didactique. Je retiendrai quatre points essentiels qui reviennent dans plusieurs des conférences :

1) La portée de la didactique des mathématiques et ses relations avec d'autres disciplines du champ des sciences de l'éducation au sens large.

2) Le développement des cadres théoriques.
3) Les enjeux de la didactique pour l'enseignement des contenus mathématiques.
4) L'étude de l'enseignant, les rapports avec les enseignants et la formation des enseignants.

J'en écarte un cinquième qui est celui du cadre institutionnel de développement de la didactique et des enjeux politiques sous-jacents. En 1993, c'était le début de la mise en place des IUFM, comme le soulignait André Rouchier dans sa conférence ; dix ans plus tard, nous sommes dans une période de restructuration qui va peut-être amener certains changements dans les conditions de développement de la didactique des mathématiques, mais je m'en tiendrai aux questions purement scientifiques.

1) Elargissement du champ de la didactique des mathématiques et relation avec d'autres disciplines

Dans sa conférence, Guy Brousseau note un élargissement de la définition de la didactique des mathématiques de *"science des conditions spécifiques de l'acquisition provoquée des connaissances mathématiques"* (p. 51[1]) à *"science des conditions spécifiques de la diffusion des connaissances mathématiques utiles au fonctionnement des institutions humaines"* (p.52) ce qui comprend la communication des savoirs, les acquisitions spontanées et il dit plus généralement que *"la didactique des mathématiques ambitionne de décrire les échanges et transformations de savoirs à différentes échelles, aussi bien l'échelle des relations interculturelles du monde que celle d'une classe ou d'une leçon particulière."* (p. 52) De son côté, Yves Chevallard considère dans sa communication à ce même colloque que la didactique des mathématiques doit désormais dépasser l'horizon de la classe, sortir du "terroir" pour investir le territoire de la didactique des mathématiques et que ceci suppose une évolution qui la restructure en secteurs différenciés. Jean Brun examine l'évolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques et conclut sur 3 niveaux où le cognitif fait nécessairement partie de l'analyse didactique des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage : la filiation et les ruptures des connaissances au sein des champs conceptuels ; les conversions réciproques entre savoirs constitués et connaissances spontanées au travers de situations qui représentent différentes pratiques et différentes fonctions des savoirs ; l'organisation et les réorganisations personnelles des savoirs dans la durée. De son côté, Paolo Boero soulève la question des rapports de la didactique avec la psychologie des apprentissages et la sociologie de l'éducation. Quelle complémentarité ? Jusqu'à quel point peut-on emprunter et intégrer des éléments théoriques non homogènes issus de cadres théoriques différents ?

2) Le développement des cadres théoriques

Les progrès dans le développement des cadres théoriques et la nécessité de poursuivre les efforts dans cette direction sont soulignés par tous les conférenciers. Le point de vue institutionnel qui a émergé au cours des années 1980 avec le concept de transposition didactique commence, avec le concept de rapport au savoir, rapport institutionnel et rapport personnel, à proposer des outils pour une étude plus précise de ce qui se passe au niveau des professeurs et des élèves. La distinction entre

[1] Dans tout le paragraphe 1, sauf mention contraire, les numéros de pages renvoient aux Actes du colloque sur les vingt ans de didactique parus aux éditions de La pensée Sauvage en 1994.

connaissances et savoirs[2], travaillée dans ses rapports avec la théorie des situations mais aussi avec l'épistémologie génétique et la théorie des champs conceptuels comme le montrent les questions relevées par Jean Brun, traduit d'une certaine manière la prise en compte du point de vue institutionnel et des contraintes qu'il a identifiées, y compris par des chercheurs se rattachant principalement à d'autres cadres théoriques. Elle sera utilisée pour préciser l'action de l'enseignant dans l'institutionnalisation (transformation de connaissances en savoirs) et lors de la dévolution ou d'aide en cours de résolution (transformation de savoirs en connaissances).

En pointant les perspectives pour la didactique des mathématiques, Guy Brousseau souligne la nécessité d'une *meilleure articulation des concepts théoriques,* ce qui devrait *"en assurer la cohérence et permettre à la communauté d'exercer la vigilance nécessaire (...) s'accompagner d'un dégraissage et ainsi favoriser la communication et le positionnement de ces concepts par rapport à des résultats de domaines voisins"* (p. 62-63). En particulier, les termes théoriques devraient pouvoir être repris mais c'est difficile *"s'ils diffusent prématurément dans des institutions qui projettent sur eux un sens différent"* (p. 62). Cette articulation est pour lui nécessaire non seulement pour la communication entre chercheurs mais aussi pour celle entre chercheurs et formateurs non chercheurs et entre chercheurs et enseignants. *"Une articulation plus serrée des connaissances de didactique devrait permettre le contrôle de leur diffusion à plusieurs niveaux. D'autant plus que les formations en didactique, assurées par des enseignants non chercheurs en didactique, risquent de se développer."* (p. 63). Mais il souligne aussi la nécessité de l'amélioration des rapports avec l'objet d'étude et en particulier la nécessité de continuer à faire des observations de longue durée : *"L'observation régulière d'enseignements, sans lien immédiat ni avec la recherche en cours, ni bien sûr avec une activité professionnelle d'enseignement de la part de l'observateur, est encore indispensable à la constitution d'une sorte de botanique des espèces didactiques"* (p. 64).

Gérard Vergnaud de son côté met l'accent sur la nécessité de capitaliser, de prendre en compte et d'intégrer les acquis antérieurs, notamment ceux de Piaget et Vygotski.

3) *Les enjeux de la didactique pour l'enseignement des contenus mathématiques*

Sur le plan des contenus, Guy Brousseau donne comme un des enjeux principaux de la didactique, ce qu'il appelle le défi de la scolarité obligatoire. Il note que l'enseignement actuel a hérité d'une culture primaire enseignable sur 5 ans à 60 à 70% de la population et d'une culture secondaire enseignable à 20% de la population sur 12 ans et se trouve incapable de concilier ces deux cultures en un enseignement obligatoire de 10 ans. La tentative des années 70 a échoué, il faut analyser cet échec et avancer des projets réaménagés. Il considère que cela ne peut se faire que par un travail transpositif sur les mathématiques elles-mêmes utilisant des connaissances de didactique. Il pointe notamment le cas des statistiques, relevé aussi par Rouchier qui y ajoute les débuts de l'analyse.

Dans sa conférence au colloque de Douai en 1995, Samuel Johsua nous dit, de son point de vue, où en est la didactique des mathématiques et des sciences. Il considère qu'elle "a déjà fait la preuve d'une belle productivité" mais que, jusque là, elle a eu tendance à se focaliser sur ce qu'il appelle "les moments héroïques" (Comment

[2] La connaissance est ce qui permet de prendre des décisions dans l'action. Le savoir peut se formuler, se dire. En général on parlera de savoir comme savoir reconnu dans une institution. Conne distingue en fait le savoir institué du savoir de l'individu qui est une connaissance reconnue par lui comme utile.

introduire une notion ? Comment changer les conceptions ?) et que l'enjeu est maintenant de s'attaquer aux moments plus ordinaires. *"En classe, cela correspond à tous les exercices répétitifs que l'on doit faire pour apprivoiser le nouveau territoire, c'est revisiter conceptuellement ce qu'on croit avoir appris et que finalement on n'a pas très bien compris. Cette façon de voir conduit à une didactique qui est moins héroïque, mais qui est peut-être finalement plus ambitieuse, et qui se donne pour tâche d'étudier l'ensemble des phénomènes d'enseignement, même ce qui apparaît le plus banal et répétitif".*

4) L'étude de l'enseignant, les rapports avec les enseignants et la formation des enseignants

Au moment du colloque des vingt ans de didactique, les études concernant les enseignants et la formation des enseignants sont encore peu nombreuses. Dans le contexte de la création des IUFM, la nécessité de leur développement est soulignée par beaucoup des conférenciers qui pointent aussi des questions théoriques reliées. Ainsi Gérard Vergnaud d'une part souligne l'émergence de la didactique professionnelle et l'importance de la notion de compétence, plus large que celle de connaissance pour penser cette question, d'autre part, il examine le rôle de l'enseignant à la lumière d'une analyse de l'activité des élèves et de la conceptualisation, à l'aide des concepts de schèmes et de champ conceptuel.

Guy Brousseau place parmi les enjeux celui de la formation des professeurs et souligne la difficulté de leur enseigner la didactique elle-même parce que *"la connaissance approfondie des conditions d'existence et de diffusion d'une connaissance paraît toujours plus complexe que la connaissance elle-même, ne serait-ce que parce qu'elle l'implique"*. Il considère que, pour les professeurs, les deux traitements doivent être confondus en un cours de mathématiques didactiques. En même temps il remarque que *"plus la formation se préoccupera concrètement de comprendre, décrire et préparer l'activité réelle des élèves, et des professeurs, (...) plus la didactique sera indispensable. Sauf évidemment si l'on postule que la pratique de l'enseignement rend inutile toute formation à ce sujet."* (p. 56-57). Il souligne aussi les contraintes externes, venant du système d'enseignement et de la société, dans lesquelles la didactique situe ses perspectives, notamment les attentes démesurées et les critiques excessives dont elle est l'objet : si ses résultats contredisent les connaissances pratiques ou de bon sens, ils sont alors rejetés ou ignorés ; s'ils vont dans le même sens, ils apparaissent comme évidents et inutiles. De même les ingénieries restent locales et leurs conditions de variabilité difficiles à communiquer parce qu'en trop grande rupture avec le fonctionnement actuel du système d'enseigne-ment. *"Dans ces conditions la didactique ne peut que décevoir car non seulement elle ne peut pas changer rapidement l'enseignement mais, en montrant les limites auxquelles on doit se résigner dans l'état actuel des connaissances, des techniques, des conditions culturelles, matérielles et économiques, elle risque de passer pour décourager à l'avance les tentatives concevables."* (p. 60)

A la même époque, au colloque COPIRELEM d'Aussois, en 1993, Philippe Perrenoud s'interroge sur l'apport de la recherche en éducation au sens large (y compris les didactiques) à la conception de la formation initiale des enseignants (en fait, il pense surtout aux enseignants du premier degré). Il distingue trois types d'apports : d'abord la construction des objectifs, du curriculum de formation des maîtres, l'aide à la transposition didactique de pratiques professionnelles, celles qui existent mais aussi certaines qu'on peut anticiper ; le chercheur peut en particulier formuler des aspects des pratiques effectives que les praticiens eux-mêmes ne disent pas volontiers. Le deuxième domaine est la conception de dispositifs et de démarches de formation, en particulier penser l'étayage mais aussi le désétayage ; enfin, les méthodes de formation, notamment en intégrant la recherche comme une des modalités de travail avec les futurs enseignants que l'on forme. Ce dernier point est mis en relief par le fait que Philippe Perrenoud souligne que, contrairement à ce qui se passe pour les domaines technologiques où on peut bénéficier des apports de la recherche sans rien en connaître parce que ces apports sont incorporés dans des produits, pour les sciences humaines, même s'il n'est pas nécessaire d'être chercheur soi-même, il faut au moins entrer dans le débat pour pouvoir utiliser les recherches. Brossant un programme de recherche pour vingt ans, il propose de croiser les trois types d'apports précédents avec cinq grands domaines de la formation des enseignants : le métier d'enseignant, le fonctionnement des établissements et des systèmes éducatifs ; la scolarisation de pratiques ou de savoirs ayant cours hors de l'école, le curriculum formel, la culture scolaire ; les pratiques pédagogiques, la relation, le groupe, la gestion de classe, la différenciation ; les processus de développement et d'apprentissage, la construction des connaissances et compétences ; les interactions didactiques, le curriculum réel, le travail scolaire. On peut discuter ce découpage qui relève des sciences de l'éducation et non de la didactique. En particulier, de mon point de vue, il y manque toutes les interrogations sur le savoir à enseigner qui se trouvent réduites derrière la scolarisation de savoirs ou de pratiques ayant lieu hors de l'école et l'appellation "curriculum formel". Cependant, on peut aussi s'interroger sur la conversion en didactique des mathématiques de chacune des rubriques qu'il mentionne.

2- Les travaux français et publications entre 1993 et 2002

1) Les communications au colloque des vingt ans de didactique

Au colloque pour les 20 ans de la didactique, en 1993, on relève 28 communications. Parmi celles-ci, 6 ont un contenu essentiellement théorique, 8 concernent directement le premier degré, 1 l'enseignement spécialisé, deux la classe de 6$^{\text{ème}}$. Les 11 autres concernent plutôt le second degré ou l'enseignement supérieur. Il est frappant de noter que, sur les 11 communications concernant le primaire ou la sixième, 6 se placent dans un cadre théorique référant à Piaget : schèmes et théorie des champs conceptuels, tous dans le domaine numérique, 4 à la théorie des situations didactiques associée éventuellement à un autre cadre théorique. La onzième est une étude empirique plutôt centrée sur les pratiques des enseignants de 6$^{\text{ème}}$ en géométrie. La théorie anthropologique est encore peu présente, et seulement sur le second degré ou le supérieur. A ce niveau, en revanche, une seule recherche se réfère à la théorie des champs conceptuels mais on y trouve des études mathématiques et épistémologiques, absentes en tant que telles dans le premier degré. Au niveau du contenu, 7 portent sur l'apprentissage de connaissances numériques, 2 sur la géométrie, 1 sur le raisonnement, 1 sur la formation des enseignants ; notons cependant que l'une des deux portant sur la géométrie porte aussi sur les choix des enseignants de sixième et leurs effets sur l'apprentissage des élèves.

2) Les thèses soutenues

Sur le site de l'ARDM[3], j'ai relevé vingt-quatre thèses soutenues entre 1993 et 2001 (voir liste en annexe) et s'intéressant à l'enseignement primaire dont trois soutenues en

[3] www.ardm.asso.fr

Espagne ou au Mexique. J'en ai ajouté trois autres que je connaissais, celles de Gérard Sensevy (1994), de Jeanne Bolon (1996) et Christiane Rolet (1996). Onze d'entre elles portent sur l'enseignement et l'apprentissage de concepts numériques, dont une sur l'enseignement spécialisé et deux sur les pratiques des enseignants ou la formation des enseignants à propos des décimaux ; deux portent sur la mesure, en relation avec les nombres ; six sur la géométrie, dont l'une sur l'enseignement spécialisé et deux sur la formation des enseignants ; trois sur d'autres sujets comme le raisonnement ou le travail à l'extérieur de l'école. Sur l'étude des pratiques des enseignants et la formation des enseignants, on trouve six thèses plus générales en plus des quatre déjà mentionnées portant sur un domaine particulier (décimaux ou géométrie). Les cadres théoriques principaux (pour ceux que j'ai pu identifier) sont le plus souvent la théorie des situations (14 fois), la théorie des champs conceptuels (4 fois), l'ergonomie cognitive (3 fois) en plus de cadres théoriques construits spécifiquement pour des études empiriques. La théorie anthropologique intervient de façon significative dans deux de ces thèses : en même temps que la théorie des situations dans celle de Robert Neyret sur l'enseignement des nombres dans la formation initiale des enseignants du primaire. La thèse de Gérard Sensevy s'appuie sur les travaux de Chevallard et sur la théorie des situations mais aussi sur des références sociologiques plus larges concernant les institutions.

3) Les articles parus dans Recherches en didactique des mathématiques

Sur les 17 articles relevés (voir tableau récapitulatif en annexe) dont le contexte est l'enseignement primaire, 8 articles ont, parmi leurs objectifs, un objectif théorique ; pour 6 d'entre eux, c'est en fait l'objectif principal. Au niveau des contenus mathématiques, 10 portent sur le domaine numérique, 3 sur la géométrie, tous au niveau du cycle 3, 2 sur la maternelle. Sept d'entre eux s'intéressent explicitement à l'enseignant : 4 portent principalement sur l'enseignant ou la formation des enseignants, 3 autres abordent explicitement la question de l'étude du rôle de l'enseignant. On a donc toujours peu de géométrie mais on peut constater le développement de l'étude du rôle de l'enseignant et de l'étude de classes ordinaires.

On peut aussi noter des évolutions sur le plan des cadres théoriques mobilisés :

- une diminution des études purement cognitives (deux)
- l'entrée de la théorie anthropologique, souvent en liaison avec la théorie des situations, dans l'étude du primaire et même du travail en classe primaire avec les travaux de Sensevy, Mercier, Leutenegger, et tout récemment Garcion-Vautour. Cette dernière recherche examine comment une enseignante de maternelle peut utiliser les rituels de début de journée pour constituer un milieu et un contrat didactique pour l'apprentissage ; elle étudie plus spécifiquement les phénomènes temporels et l'évolution de l'action de l'enseignant et des actions attendues des élèves avec des passages dans les deux sens du didactique à l'adidactique : par exemple, le milieu sert d'abord au maître pour guider les élèves puis ceux-ci doivent anticiper le guidage et enfin agir seuls. Le milieu n'est donc pas forcément antagoniste.
- l'affinement des cadres théoriques, l'articulation de cadres théoriques, notamment la théorie des situations et la théorie anthropologique pour l'étude de classes ordinaires, mais aussi l'apparition de l'ergonomie cognitive pour l'étude de l'enseignant comme effectuant un travail.

4) Les communications aux colloques de la COPIRELEM

Depuis 1994, une place est laissée à des communications aux colloques de la COPIRELEM. On peut en trouver un classement en annexe. J'ai volontairement écarté les ateliers, même si certains ressemblaient à des communications et étaient appuyés sur des recherches. Les tendances ne sont pas tout à fait les mêmes. On a ici depuis 1996 (sauf en 1998) une domination des articles concernant la formation des maîtres du primaire, ce qui est normal dans le contexte, et un meilleur équilibre entre numérique et géométrique. Quant aux cadres théoriques, ils sont plus variés mais souvent aussi moins explicites.

3- Conclusion : Evolution des problématiques et des cadres théoriques

Bien que mon étude soit assez restreinte, il me semble qu'on voit se dessiner une évolution assez nette des problématiques dans le sens annoncé en 1993. Dans la période précédente, on était passé d'études de laboratoires sur l'apprentissage des élèves à des études prenant en compte la complexité de la classe en même temps que l'interrogation du savoir lui-même dans le double mouvement de transposition ou de conversion entre savoirs et connaissances. On assiste au cours des dix dernières années à un passage d'une problématique d'ingénierie didactique visant à étudier des situations didactiques à l'étude du fonctionnement de classes ordinaires aussi bien du point de vue des élèves que du point de vue des enseignants. Ma thèse soutenue en février 92, qui était une des premières à s'intéresser à l'enseignement dans des classes ordinaires et même plutôt faibles, se plaçait dans la perspective de transfert d'ingénieries didactiques déjà expérimentées. Depuis, on a beaucoup plus cherché à étudier les pratiques ordinaires de professeurs sans intervention du chercheur (ou le moins possible) dans la conception de l'enseignement ou le déroulement de la classe. En même temps se développent aussi les études touchant à la formation des enseignants, soit sur les conceptions des futurs professeurs, soit sur ce qui se fait dans la formation, soit sur l'effet de formations. Mais ces effets sont cherchés du côté de la pratique observable des enseignants et non de l'apprentissage des élèves. Sur les contenus eux-mêmes, les études sont moins nombreuses en ce qui concerne le primaire mais les ingénieries didactiques expérimentales sont analysées en envisageant les conditions d'utilisation dans des classes ordinaires ou les contraintes de fonctionnement du maître (Comin, 2001, Gobert, 2001).

Cette évolution des problématiques va de pair avec un affinement des cadres théoriques. Dans l'observation des classes ordinaires, il est difficile de reconnaître des situations adidactiques. Différentes précisions sont apportées aux cadres théoriques pour mieux rendre compte de l'enseignement ordinaire. Par exemple, le modèle de structuration du milieu (Brousseau, 1990) prévoit plusieurs positions de l'enseignant rendant compte de son action en classe et de sa préparation du cours. Margolinas (1993) a étendu ce modèle pour prendre en compte d'autres positions de l'enseignant pouvant avoir un effet sur l'action en classe, une position "infradidactique" d'observateur de l'action des élèves et des positions "surdidactiques" de l'enseignant concevant un projet d'enseignement. Elle cherche aussi à identifier le milieu pour l'enseignant, utilisant ainsi le modèle pour identifier les possibilités d'apprentissage de l'enseignant en situation professionnelle. Bloch (1999) poursuit cette caractérisation du milieu du point de vue de l'enseignant. Dilma Fregona (1995, p. 96) distingue le milieu allié, caractéristique de l'ostension, qui contient déjà le savoir qu'on veut enseigner et le milieu antagoniste qui apporte des rétroactions aux actions du sujet de manière à provoquer une adaptation de ses connaissances. Le modèle du milieu est aussi utilisé dans l'analyse a priori de situations de classes ordinaires pour déterminer quelle part de la situation peut fonctionner de manière adidactique et quelles sont les interventions nécessaires de l'enseignant pour pallier les insuffisances éventuelles du milieu compte tenu des connaissances supposées des élèves (voir mes propres travaux Perrin-Glorian, 1999, et la thèse de Magali Hersant, 2001). Par ailleurs, Brousseau (1996) a élaboré une caractérisation des contrats didactiques à l'école d'été 1995, reprise et poursuivie par d'autres auteurs (Comiti et Grenier, 1997, Perrin-Glorian et Hersant, 2003). Cette catégorisation rend son usage plus fonctionnel.

De son côté, le cadre théorique défini par Yves Chevallard à partir du concept de transposition didactique s'est étoffé pour prendre le nom de théorie anthropologique du didactique en apportant des outils d'analyse plus précis du travail des élèves et du professeur à travers *l'analyse praxéologique* (Chevallard, 1997, 1999) qui propose d'identifier des types de tâches, des techniques pour les réaliser, des technologies pour justifier ces techniques et des théories qui permettent de structurer et fonder ces technologies. L'identification de différents *moments de l'étude,* qui reprend d'un point de vue institutionnel des distinctions faites d'un point de vue épistémologique et cognitif par Douady (1987) dans les différentes phases de la dialectique outil objet pour caractériser différentes actions du maître permettant la progression du savoir de la classe, permet de préciser les tâches par rapport à l'avancée du temps didactique. Ce cadre donne ainsi des instruments pour décrire l'activité mathématique du professeur, facilement utilisables dans les classes ordinaires.

L'articulation entre la théorie des situations et la théorie anthropologique progresse beaucoup au cours de cette période, en particulier grâce aux travaux de Mercier et Sensevy. Mercier (1998) regarde notamment ce qui se passe pour un élève particulier dans ce qu'il appelle la *biographie didactique* d'un élève et pointe des moments où un apprentissage se produit, éventuellement même à l'insu du professeur, dans ce qu'il appelle un épisode didactique. Dans son approche la dimension temporelle est essentielle pour distinguer par exemple le temps de l'élève du temps didactique, ce qui est aussi le cas dans les travaux de Sensevy (1996). Ces deux auteurs s'attachent justement aux moments moins héroïques de l'enseignement et de l'apprentissage, comme le souhaitait Johsua.

Une autre avancée est la *prise en compte de la dimension sémiotique* à partir des travaux de Duval d'une part, de Chevallard et Bosch de l'autre. Les travaux de Duval (1995) s'articulent plus difficilement avec les cadres théoriques de la didactique des mathématiques parce qu'ils se placent d'un point de vue linguistique et cognitif indépendamment du contenu mathématique lui-même, mais ils ont beaucoup contribué à attirer l'attention sur la non transparence des représentations et sur les difficultés cognitives liées à leur utilisation. Dans la perspective de Bosch et Chevallard (1999) au contraire les outils sémiotiques utilisés sont incorporés dans des pratiques et s'analysent avec elles.

En plus du développement des cadres théoriques "classiques" de la didactique des mathématiques, il faut noter le recours de plusieurs équipes de chercheurs aux concepts de l'ergonomie cognitive pour aborder l'étude des pratiques des enseignants comme l'expression d'un travail dans un environnement dynamique ouvert (Rogalski, 1999) et ainsi joindre à une analyse didactique du travail de l'élève et de son organisation par l'enseignant, une analyse du travail de l'enseignant en tant qu'exerçant un métier. Ce travail donne lieu à des activités dont il faut dégager certaines logiques ou lignes d'action (Robert, 2001) pour rendre compte de la manière dont l'enseignant investit ses marges de manœuvre à l'intérieur d'un système de contraintes externes ou internes dans l'espoir de dégager les régularités pour un même enseignant et entre enseignants différents. Cette approche fait l'hypothèse que les pratiques d'un enseignant non débutant forment un système complexe, cohérent, stable où l'expérience est renforcée par ces caractéristiques qu'elle contribue en même temps à renforcer. Cette approche se réfère aussi aux travaux de Clot qui distingue le genre, caractéristique de la profession, et le style de l'enseignement, qui réfère plutôt à l'individu.

Enfin, je voudrais remarquer que la communication s'est amorcée entre les travaux de didactique des mathématiques et certains travaux de sciences de l'éducation par des références réciproques. Il faut noter ici le rôle des équipes comme celle de Claudine Blanchard-Laville qui ont travaillé dans les dix dernières années à l'analyse d'un même corpus avec des cadres théoriques différents dans ce qu'elle appelle une approche co-disciplinaire (Blanchard-Laville, 1996, CREF, 2001) ou plus récemment, la mise en place de réseaux comme OPEN sur l'observation des pratiques enseignantes.

Cependant, au cours de ce travail de synthèse, une remarque s'est imposée à moi : il semble que les travaux s'intéressant aux élèves du primaire, notamment les thèses, se fassent plus rares, sauf en sciences de l'éducation. Les travaux étiquetés "didactique" sont davantage tournés vers l'étude du maître ou de la formation des maîtres. Cela s'explique peut-être en partie par des raisons institutionnelles : d'une part plusieurs directeurs de thèse potentiels sont maintenant sur des postes et dans des formations doctorales de sciences de l'éducation, d'autre part la plupart des didacticiens sont maintenant en poste dans les IUFM et eux-mêmes engagés dans la formation des maîtres.

Nous reviendrons sur des développements plus spécifiques des cadres théoriques dans les deux exemples choisis.

II. L'EXEMPLE DE LA GÉOMÉTRIE

La question qui m'a guidée dans ce paragraphe est "que nous apprennent les recherches sur l'enseignement de la géométrie ?". Evidemment, sur ce point aussi, ma réponse n'est qu'une synthèse personnelle de travaux essentiellement français et qui, même dans ce cadre restreint, ne prétend absolument pas à l'exhaustivité.

J'identifierai d'abord quelques questions qui me semblent se poser d'un point de vue didactique concernant l'enseignement de la géométrie à l'école primaire avant de passer en revue les principaux cadres théoriques utilisés en France pour les étudier, de donner des résultats de recherche en développant un peu plus l'exemple d'une recherche en cours à laquelle je participe.

1- Des questions de recherche sur l'enseignement de la géométrie

1) Quels contenus ? Qu'appelle-t-on géométrie à l'école élémentaire ? Quels objectifs à son enseignement ?

En premier lieu, il me semble qu'il n'y a pas vraiment de consensus concernant l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire. On s'accorde en général sur la nécessité d'apprendre à reconnaître quelques formes de l'espace et du plan et à connaître leurs propriétés, donc d'acquérir un certain vocabulaire, de savoir manipuler quelques instruments de tracé ou d'approcher la mesure des longueurs et des aires. Mais au-delà des objectifs culturels, y a-t-il un autre intérêt à enseigner la géométrie à l'école primaire ? Et d'abord qu'appelle-t-on géométrie ? Dans l'enseignement secondaire, la géométrie est le lieu privilégié de l'apprentissage du raisonnement et de la démonstration. Ces raisonnements concernent alors des objets théoriques idéaux définis par leurs propriétés. Fait-on vraiment de la géométrie à l'école primaire ou travaille-t-on sur des formes, des objets matériels, des dessins, la formation des concepts géométriques ne se faisant que plus tard ?

Je pense pour ma part qu'il faut dire que l'on fait de la géométrie dès qu'on raisonne sur des dessins qui pourraient être tracés avec des instruments, c'est-à-dire qui présentent des propriétés telles qu'elles donnent accès à la déduction, que l'on traite par le raisonnement des problèmes liés à l'espace, à des objets de l'espace, à des positions ou changement de position dans l'espace. Comme tout enseignement de mathématiques, l'enseignement de la géométrie à l'école primaire devrait poursuivre deux objectifs : la formation de base de tous pour la vie quotidienne et les autres disciplines, la poursuite de la formation en mathématiques et, pour ce qui nous occupe, la préparation à l'enseignement de la géométrie au collège. Berthelot et Salin (1992) disent que les mathématiciens considèrent la géométrie (euclidienne) comme la théorie de l'espace et que les programmes sont conçus comme si l'enseignement de la géométrie devait suffire à assurer les besoins en termes de connaissances spatiales des futurs adultes que sont les élèves. Ils doutent que ça soit le cas et constatent au contraire de grandes déficiences dans les connaissances spatiales des élèves et de beaucoup d'adultes.

Alors que vise et peut viser l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire ? La commission Kahane, après avoir souligné l'importance de l'enseignement de la géométrie pour développer la vision dans l'espace, l'apprentissage du raisonnement, l'éducation esthétique, pour traiter des problèmes de la vie courante, pour la formation des ingénieurs, des techniciens, des scientifiques et des mathématiciens eux-mêmes, prend position à ce sujet (bulletin APMEP n° 430, p. 588) : *"une connaissance familière de l'espace, avec une double fonction : permettre à chacun de maîtriser son environnement et servir de point d'appui pour l'apprentissage de la géométrie (...) repérage, déplacement, mesure mais aussi reconnaissance, représentation et construction d'objets géométriques"*. Le rapport précise ensuite qu'il est important que l'étude des relations spatiales d'un sujet avec son environnement *"reprenne sa place dans l'enseignement, en particulier en primaire, l'objectif étant d'acquérir une certaine familiarité avec les objets du plan et de l'espace avant même de parler de figures de géométrie"* ; qu'il ne faut pas *"sous-estimer cette phase, essentielle dans le développement de l'enfant comme dans l'histoire de l'humanité, dans laquelle les concepts géométriques les plus simples (point, droite, plan, courbe, etc.) peuvent prendre du sens"*. Des thèmes pour cette étude des relations spatiales sont donnés page 574. Le rapport souligne aussi l'importance du travail sur les figures: *"Outre cet aspect d'apprentissage de l'espace, et dans la perspective d'une utilisation plus importante de la figure à tous les niveaux, l'enseignement élémentaire peut aussi être le lieu d'un premier travail spécifique sur le thème "voir sur la figure". On entend essentiellement par ces mots des questions d'analyse et de reproduction de figures (planes). Le type de tâches visé pourrait consister, par exemple, à repérer sur un dessin des intersections et des alignements, à être capable de prolonger ou de déplacer certains éléments, à repérer des éléments non dessinés qui peuvent être utiles pour la construction, à décomposer la figure en sous-figures plus simples etc. Un tel apprentissage, qui n'existe nulle part en tant que tel, serait sans doute très utile pour la pratique de la géométrie au collège."*

2) Quelles difficultés d'apprentissage ?

Beaucoup de chercheurs se sont intéressés d'une part à la construction des connaissances spatiales chez les enfants, d'autre part aux difficultés d'apprentissage de la géométrie, notamment aux difficiles relations entre les aspects théoriques et les aspects matériels ou visuels des objets géométriques. Je ne développe pas ce point pour le moment. Nous y reviendrons lors de l'examen des cadres théoriques et des résultats des recherches.

3) Quelles situations d'apprentissage ?

Cette question fait référence aussi à un certain nombre de travaux sur lesquels nous reviendrons. Les situations sont évidemment construites en référence aux objectifs explicités et aux cadres théoriques utilisés. Il est hors de question de dresser une liste des résultats dans ce domaine mais nous en prendrons quelques exemples.

4) Quelle formation des enseignants ?

C'est une question largement ouverte. Peu de travaux concernent la formation des enseignants en géométrie. On peut citer le travail de D. Vergnes (2001) concernant les effets d'un stage de formation continue en géométrie mais qui interroge peu la formation elle-même. C. Houdement et A. Kuzniak (2000) travaillent aussi sur la formation des enseignants en géométrie mais leur approche est encore essentiellement théorique.

5) Quelles sont les pratiques effectives des enseignants en géométrie ?

Là non plus, il n'y a pratiquement pas de travaux hormis la thèse d'A. Mul. Les travaux sur les pratiques des enseignants soit ont évité de choisir un contenu précis, faisant au contraire varier les thèmes, soit ont pris un thème numérique comme la proportionnalité ou la résolution d'équations, mais ils portent plutôt sur le secondaire.

2- Cadres théoriques pour l'étude de l'enseignement de la géométrie

Les cadres théoriques pour appréhender ces problèmes sont des cadres théoriques généraux de didactique des mathématiques comme la théorie des situations ou la théorie anthropologique du didactique sur lesquels je ne reviendrai pas sauf au besoin pour des points précis et aussi des cadres théoriques plus spécifiques à la géométrie. C'est de ceux-là que je voudrais parler un peu. Je les ai classés en deux catégories : ceux qui sont en liaison forte avec la théorie des situations didactiques et ceux qui reflètent plutôt un point de vue épistémologique ou cognitif.

1) En liaison forte avec la théorie des situations didactiques

Un fondement essentiel de la théorie des situations est de modéliser une situation d'apprentissage d'une connaissance par une situation non didactique où un milieu, indépendant du sujet renvoie des rétroactions aux actions du sujet qui les interprète avec ses connaissances anciennes et les fait évoluer pour acquérir la connaissance nouvelle. La situation adidactique est la traduction d'une situation non didactique à l'intérieur d'une situation didactique. Elle a été construite par l'enseignant avec des intentions didactiques mais l'élève doit agir indépendamment de ces intentions didactiques.

Je rappelle rapidement le schéma classique (voir figure 1)

Dans ce modèle, un point très important concerne les modes de validation des actions et des déclarations de l'élève : quelles validations le milieu permet-il ? A quel moment le maître est-il obligé d'intervenir ?

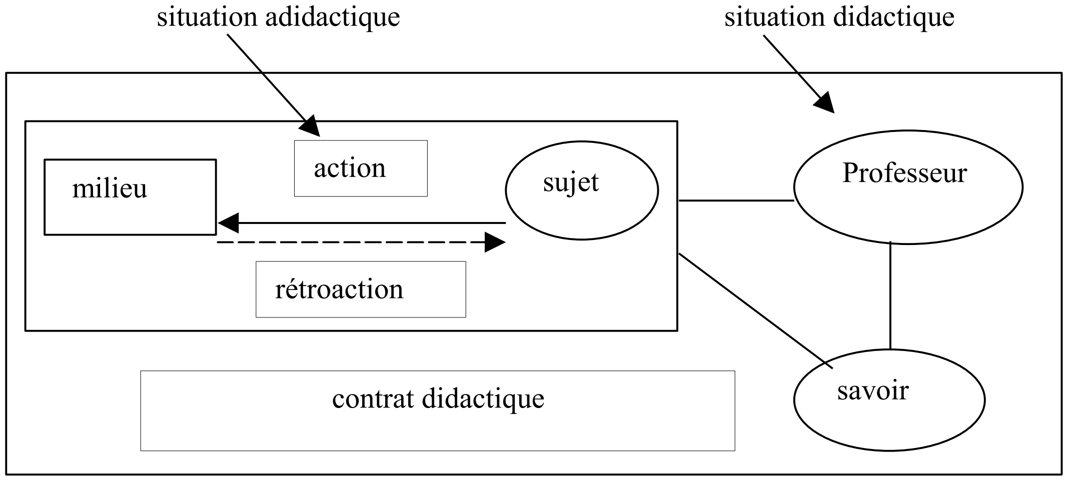


Figure 1

a) Rapports entre géométrie et maîtrise de l'espace

Une situation fondamentale est une situation (c'est-à-dire un jeu) qui modélise une connaissance ou un ensemble de connaissances en ce sens que ce sont les connaissances adaptées pour résoudre le problème posé dans la situation. La connaissance visée doit être le meilleur (voire le seul) moyen d'obtenir la stratégie optimale et la situation fondamentale doit permettre de représenter, par le choix des variables toutes les situations possibles permettant d'apprendre la connaissance visée. Brousseau a introduit la notion de situation fondamentale à propos de la géométrie dans un texte paru au séminaire de Grenoble en 1982 pour distinguer la géométrie comme modélisation de l'espace et la géométrie comme théorie axiomatique. Il propose comme situation fondamentale de la géométrie comme modélisation de l'espace celle du charpentier qui doit découper au sol des pièces de bois qu'il va assembler à 10 m (ou plus) de hauteur et comme situation fondamentale de la géométrie comme théorie axiomatique celle de l'intersection des trois médiatrices d'un triangle.

Trois problématiques

Berthelot et Salin (1992)[4] reprennent les travaux de Brousseau et distinguent trois problématiques dans l'enseignement de la géométrie :

- *la problématique pratique* : le problème est posé dans l'espace sensible, les rapports à l'espace sont effectifs, "ils sont contrôlés de manière empirique et contingente" par les sens, la validation se fait dans l'espace sensible.
- *la problématique de modélisation ou spatio-géométrique* : le problème est posé dans l'espace sensible mais on ne peut pas le traiter directement dans cet espace : on le traduit dans un modèle géométrique où se fait la résolution ; le résultat est retraduit à son tour dans l'espace sensible et la validation se fait aussi dans l'espace sensible. Pour distinguer les deux, ils donnent l'exemple d'un vitrier qui veut remplacer une vitre en forme de parallélogramme et doit prendre les informations nécessaires pour découper la vitre dans son atelier. Une réponse dans la problématique pratique consisterait à fabriquer sur place un patron de la vitre. Une réponse dans la problématique spatio-géométrique serait de mesurer deux côtés et une diagonale du parallélogramme.
- *la problématique géométrique* : le problème, le traitement et la validation se situent dans le cadre théorique de la géométrie, selon des règles établies. Les rapports à l'espace, par exemple à la figure peuvent être effectifs mais sont régis par les définitions et les règles de fonctionnement des objets théoriques qu'elle représente.

[4] Voir aussi Berthelot (1993), Berthelot et Salin, 1994, 1995, 1998.

L'identification de ces problématiques les amène à distinguer les connaissances spatiales des connaissances géométriques. Ils retiennent trois variables importantes pour l'analyse des situations de géométrie : le type de problématique, le type de rapport à l'espace : effectif ou intériorisé, le caractère adidactique ou non des situations.

Le rapport à l'espace

Une autre variable repérée et étudiée dans le cadre de la théorie des situations est celle de la taille de l'espace ou plutôt des conceptions de l'espace induites par un type de rapport à l'espace sensible qui est généralement lié à sa taille : ce ne sont pas les mêmes conceptions qui sont utiles suivant qu'on se place

- dans le micro-espace de la feuille de papier que l'on appréhende entièrement dans son champ de vision ou des objets que l'on peut manipuler,
- dans le méso-espace où le sujet dirige et contrôle ses propres déplacements par rapport à son environnement, sous le contrôle de sa vue (par exemple une salle de classe),
- dans le macro-espace où le sujet doit se diriger et contrôler ses déplacements hors du contrôle de la vue. Le sujet ne possède que des informations « visuelles » ou tactiles locales et doit effectuer le recollement de ces informations pour former une connaissance globale de son environnement spatial. Il s'agit bien de conceptions de l'espace ou de rapports à l'espace plutôt que de caractéristiques de l'espace lui-même parce qu'on peut reconstituer dans le micro-espace les conditions du macro-espace (voir la thèse de G. Galvez citée par Berthelot et Salin, 1992).

Ce sont des caractéristiques du milieu qui déterminent le type de rapport à l'espace.

Quelques résultats des travaux dans ce domaine

Berthelot & Salin soulignent dans leur thèse le déficit des connaissances spatiales y compris chez les adultes, en particulier dans le méso-espace, et l'absence de prise en charge de ces connaissances par l'enseignement. Ce déficit de connaissances spatiales se manifeste aussi bien dans la vie courante que dans l'enseignement de la géométrie ou d'autres disciplines.

D'autre part, ils identifient la problématique pratique comme faisant obstacle à la mise en place de la problématique géométrique, en particulier dans le micro-espace de la feuille de papier.

Ils proposent la problématique spatio-géométrique comme moyen d'entrer dans le géométrique à partir de problèmes posés dans l'espace mais avec blocage des procédures spatiales naturelles, et construisent quelques ingénieries didactiques dans ce domaine, notamment concernant les angles. Un moyen de bloquer les procédures spatiales naturelles est de travailler dans le méso-espace. Ils montrent en effet que 50% des élèves de CM2 sont incapables de prévoir la position qu'occuperont les pieds d'un banc après déplacement alors que la majorité d'entre eux sont capables de tracer un rectangle sur une feuille de papier où ils peuvent utiliser continûment le contrôle de la vue.

Sophie Gobert (2001) a prolongé les travaux de Berthelot & Salin. Elle a en particulier étudié différentes variables de la situation "terrain et tige" ainsi que les contraintes que ce type de situation apporte au rôle du maître. Pour les situations de modélisation, elle insiste sur l'importance de la crédibilité spatiale de la situation adidactique de référence dans laquelle les élèves sont dans un rapport effectif à un environnement spatial (ici dans le méso-espace) et de l'articulation de l'environnement spatial et de l'environnement graphique de la feuille de papier (micro-espace), lieu à la fois de représentation de la situation spatiale et des actions prévues pour la résolution du problème spatial. Elle observe aussi que les élèves restent dans un rapport pratique, tout en utilisant des arguments de nature géométrique mais de manière partielle. Les interventions du maître sont nécessaires pour ramener les élèves sur le terrain de l'argumentation et du géométrique. Toute la question est de savoir à quel moment introduire dans le milieu objectif les savoirs géométriques indispensables pour certaines rétroactions.

b) l'ostension

Une caractéristique fréquente des situations d'enseignement en géométrie est l'utilisation de l'ostension. Ce point a été étudié en géométrie notamment par Dilma Fregona (1995), René Berthelot et Marie-Hélène Salin (1992) et Sophie Gobert (2001). Dans une pratique ostensive, l'enseignant présente les éléments constitutifs de la notion visée en s'appuyant sur l'observation dirigée d'exemples, l'élève est supposé capable d'étendre l'usage à d'autres situations. Une caractéristique de l'ostension est de présenter les objets dans la forme aboutie, avec les propriétés que l'on veut institutionnaliser. En particulier, Berthelot et Salin (1992) montrent que l'ostension couramment utilisée en géométrie entretient des malentendus fondamentaux entre enseignants et élèves dans l'interprétation d'une situation géométrique de type adidactique, les uns se plaçant dans une problématique géométrique tandis que les autres se placent dans une problématique pratique. Ils distinguent l'ostension assumée et l'ostension déguisée qui tend à la supplanter dans l'enseignement actuel. Dans l'ostension déguisée, au lieu de montrer à l'élève ce qui est à voir, l'enseignant le lui fait découvrir à travers des objets spatiaux soumis à son observation ou à son action. Cependant, il est obligé de manipuler le milieu matériel pour faire voir ces propriétés, l'élève est incité à décoder les intentions didactiques du maître.

Dans sa thèse, Sophie Gobert a repris ces travaux et a cherché à définir des usages de ce qu'elle a appelé l'ostension maîtrisée et la possibilité d'articuler cet usage de l'ostension à des situations à caractère adidactique dans lesquelles les savoirs introduits par ostension sont transformés en connaissances par les élèves, pour agir sur ces nouvelles situations. L'ostension est contrôlée par le maître en particulier par le choix d'un milieu qui permettra la mise en place d'une situation adidactique ultérieure. Comme dans les travaux précédents, l'ostension se caractérise par le fait que le savoir qu'on veut enseigner se trouve présent dans le milieu et que l'élève a à le reconnaître mais la différence essentielle avec les caractéristiques de l'ostension assumée relevées par Berthelot et Salin c'est qu'ici on restitue un milieu matériel avec lequel les élèves ont une interaction effective. S. Gobert distingue ainsi trois types d'ostension avec les conditions d'un contrôle par le maître de certaines variables qu'elle applique au cas des patrons de solides et à celui de la symétrie axiale : dans les deux premiers, les savoirs sont introduits dans le milieu par le maître, par une démonstration visuelle dans le premier cas, comme contrainte pour une tâche à réaliser par les élèves dans le second cas ; dans le troisième cas, les savoirs sont suggérés par le milieu qui est un milieu allié et non antagoniste mais le maître organise le milieu de façon que les propriétés qu'il veut faire formuler aux élèves soient bien visibles, et celles-là seulement. (voir sa communication dans ce même colloque)

c) Le jeu sur les instruments

Denise Grenier dans sa thèse sur la symétrie orthogonale en sixième avait déjà joué sur les instruments disponibles pour bloquer certaines procédures et en favoriser d'autres et ainsi provoquer la mise en œuvre de certaines connaissances géométriques. Henri-Claude Argaud joue aussi dans le même but sur le choix des instruments pour des tracés papier crayon mais aussi surtout à l'aide du logiciel Cabri-géomètre. Les problèmes proposés aux élèves de CM2 sont dans le domaine spatio-graphique mais choisis de telle manière qu'une résolution efficace nécessite la mobilisation de connaissances géométriques. Ainsi, H.C. Argaud vise l'acquisition non seulement de connaissances spatio-géométriques mais aussi théoriques, notamment la prise en compte de relations de nécessité entre certaines conditions. Une de ses hypothèses est que l'environnement Cabri apporte des moyens supplémentaires par rapport à l'environnement papier-crayon pour vérifier que l'élève mobilise des connaissances géométriques et pour donner aux élèves les moyens de valider eux-mêmes leurs productions d'une part en raison de la nécessité d'utiliser un vocabulaire géométrique, d'autre part parce qu'il amplifie la perception et permet une meilleure efficacité des rétroactions du milieu, notamment grâce au déplacement et à la déformation des objets : pour être valide, une production Cabri doit résister au déplacement des objets de base. Argaud a conçu des situations adidactiques d'action autour des tâches de construction et de reproduction de figures, précisément passage d'un texte à un dessin ou à un Cabri-dessin et passage d'un dessin à un Cabri-dessin. Les résultats de l'expérimentation montrent que la validation sans intervention du maître est très difficile dans les situations papier crayon, même quand les situations ont été construites avec cette intention, alors qu'elle fonctionne le plus souvent dans les situations Cabri. Ils montrent aussi la prise en compte par les élèves de relations de nécessité dans l'environnement Cabri et peut-être même un transfert dans l'environnement papier-crayon. Les situations qu'il a construites me paraissent simples, centrées sur l'utilisation de quelques propriétés comme celle de la perpendiculaire commune, ce qui devrait contribuer à leur robustesse. Je ne sais pas si elles ont été reprises dans l'enseignement ordinaire au CM2 ou en sixième.

2) *D'autres cadres théoriques : points de vue épistémologiques et cognitifs.*

a) "figural concept".

Fischbein (1993) considère que les objets géométriques sont d'ordre conceptuel mais qu'ils ont intrinsèquement une nature figurale. Il introduit pour eux la notion de concept figural qui possède à la fois les propriétés d'un concept (idéalité, abstraction, généralité …) et des propriétés spatiales (forme, position, taille…). Ils ne sont réductibles ni aux images ni aux concepts. Il est important de remarquer que le concept figural constitue la limite idéale d'un processus de fusion et d'intégration entre les facettes logique et figurale : ce sont des figures dont les propriétés sont entièrement déterminées par les définitions dans le cadre d'un système axiomatique. Mais cette fusion n'est réalisée que chez l'expert et, souvent, surtout pour les apprentis, la figure désobéit au dictat du concept et a tendance à conserver des caractéristiques de la Gestalt (liées à la perception) et à les imposer au raisonnement géométrique. Beaucoup d'erreurs d'élèves peuvent s'expliquer par un divorce (ou manque de congruence) entre l'aspect figural et l'aspect conceptuel du concept figural.

Pendant le processus d'invention, on est en général guidé par l'intuition. C'est essentiellement en ayant recours à des figures intrinsèquement contrôlées par les contraintes conceptuelles (les définitions, axiomes, théorèmes…) que le processus d'invention peut progresser de manière créative en géométrie. Mais les concepts figuraux ne se développent pas naturellement et nécessitent un apprentissage. Il faut créer des situations didactiques qui demandent une forte interaction entre les deux aspects. Il propose dans cet article les problèmes de lieux géométriques, les situations menant à des conflits et les problèmes de patrons.

b) Différents paradigmes de la géométrie : géométrie 1 / géométrie 2.

Catherine Houdement et Alain Kuzniak s'appuient sur les travaux de Gonseth pour distinguer trois paradigmes de la géométrie qui sont chacun des synthèses dialectiques organisées autour de trois modes d'accès aux connaissances : l'intuition, l'expérience et la déduction. Ils reprennent la définition de l'intuition de Fischbein comme *"une sorte de théorie première basée sur un lot d'évidences, qui gomme les incertitudes et qui permet au sujet de structurer une situation en un tout complet, cohérent qu'il utilise comme socle pour son raisonnement"* (Houdement et Kuzniak, 2000, p.94). Elle peut être source d'erreurs comme de découvertes. Elle se différencie de la perception par cet aspect de structuration. *"L'expérience s'oppose à l'intuition dans la mesure où elle n'est pas immédiate. Une action physique ou mentale est nécessaire pour découvrir ou valider telle proposition." "L'expérience nourrit l'intuition et l'intuition structure l'expérience"* (Houdement et Kuzniak, 2000, p.95). La déduction permet de tirer de nouvelles connaissances, à partir d'autres déjà acquises. Pour Houdement et Kuzniak, ces trois aspects existent dans chaque niveau de géométrie.

La géométrie 1 est la géométrie naturelle qui se confond avec la réalité ; elle repose sur le sensible.

La géométrie 2 est la géométrie axiomatique naturelle : les axiomes sont tirés de l'observation du réel ou de l'action sur le réel. L'axiomatique est en général partielle, voire locale.

La géométrie 3 ou géométrie axiomatique formaliste, repose sur une axiomatique intrinsèque qui ne réfère plus au réel et qui est totale comme l'axiomatique de Hilbert ou l'axiomatique des espaces euclidiens.

Pour les questions qui nous occupent, ce dernier paradigme n'intervient pas ou très peu, les enjeux aussi bien pour les élèves que pour la formation des maîtres se situent entre la géométrie 1 et la géométrie 2. On peut à la rigueur trouver des traces d'une axiomatique d'espace euclidien en formation des maîtres dans l'utilisation des vecteurs et du produit scalaire. Parzysz (2001) reprend ces paradigmes et les situe par rapport aux niveaux de Van Hiele. Il distingue aussi la géométrie purement concrète G0 sur les objets matériels, de la géométrie spatio-graphique G1 qui s'appuie sur des situations concrètes idéalisées, des représentations.

De plus, Houdement et Kuzniak refusent de considérer que la géométrie limitée à la feuille de papier ou à l'écran d'ordinateur se situe dans le micro-espace en considérant que l'espace de la feuille de papier qui les intéresse est un espace de travail dans lequel on peut ramener tous les autres, modulo des transformations géométriques, ce qu'ils appellent l'espace normal de la géométrie élémentaire qui permet d'utiliser des réductions et agrandissements et apparaît comme une carte locale de l'espace affine total. Cette notion, explicitée dans une communication de Kuzniak (2000), est encore floue pour moi dans la mesure où il y inclut aussi les instruments. Elle serait sans doute à mettre en relation avec la notion de milieu mais ne peut s'y réduire parce qu'elle comprend, me semble-t-il, une dimension cognitive.

Houdement et Kuzniak différencient le rôle de la figure (du dessin) dans les trois paradigmes : en géométrie 1, le dessin est l'objet de l'étude et le moyen de validation ou c'est le représentant d'un objet matériel ; en géométrie 2, il est support du raisonnement, contrôlé par les définitions (voir ci-dessous le figural concept de Fischbein) ; en géométrie 3 c'est aussi un support du raisonnement mais c'est un représentant d'un objet théorique.

Si l'on essaie de situer ce cadre théorique par rapport à celui de Salin & Berthelot, il me semble qu'on peut dire deux choses :

- la problématique pratique de Salin et Berthelot se situe dans la géométrie 1 de Houdement & Kuzniak ; la problématique géométrique se situe dans la géométrie 2 ; mais la problématique spatio-géométrique est à l'articulation de ces deux paradigmes et c'est, me semble-t-il, ce qui fait son intérêt pour l'enseignement élémentaire : en jouant sur des variables didactiques, on bloque le traitement du problème dans la géométrie 1, ce qui oblige un recours à certains éléments de géométrie 2 ; en validant dans le sensible, on valide à la fois l'adéquation du modèle théorique choisi au problème posé dans le sensible et la réalisation de la solution dans le sensible. Dans l'enseignement, ces deux validations ont besoin d'être distinguées. Par exemple pour le problème du vitrier : a-t-il pris les bonnes mesures, les a-t-il bien prises ? A-t-il bien réalisé les découpes ? Certaines des questions sont des questions géométriques dans le modèle (quelles longueurs caractérisent un parallélogramme ?) ; certaines sont des questions technologiques ou d'adresse.
- Brousseau ainsi que Berthelot & Salin distinguent les trois tailles d'espace en disant que ce ne sont pas les mêmes compétences spatiales qui sont nécessaires dans chaque cas. Leur réflexion porte sur les connaissances spatiales, éventuellement dans leur relation avec les connaissances géométriques et non sur les connaissances géométriques elles-mêmes. Ce qu'ils disent surtout, c'est que, dans l'espace de la feuille de papier, on peut trouver la solution à des problèmes en ne mettant en jeu que des compétences spatiales et non des connaissances géométriques alors que les compétences spatiales font défaut dans le méso-espace et dans le macro-espace d'où l'utilisation qu'ils font de la taille de l'espace comme une variable didactique. Ils repèrent aussi que la construction de connaissances spatiales est très peu prise en compte dans l'enseignement et que l'enseignement usuel de la géométrie suppose acquises certaines compétences spatiales qui ne sont jamais enseignées mais laissées au développement naturel.

Houdement et Kuzniak ont développé leur cadre théorique dans la perspective de la formation des enseignants. Ils formulent l'hypothèse que les futurs enseignants en formation, les enseignants en exercice et les élèves de l'école primaire ne se situent pas dans le même paradigme de la géométrie, ce qui est source de malentendus. A l'appui de cette hypothèse, ils fournissent différentes analyses, notamment les réponses à un questionnaire, des analyses de manuels et de problèmes posés au concours de recrutement des professeurs des écoles. La résolution d'un même problème de géométrie peut se faire dans les différents paradigmes. La nature de la solution dépend du paradigme choisi. Celui qui est attendu n'est pas toujours indiqué et c'est la nature de la figure fournie qui induit un paradigme ou un autre suivant que les informations sont à lire sur la figure, fournies dans un texte ou codées, mais il peut y avoir ambiguïté sur les attentes comme le montre l'analyse des manuels scolaires et des textes des concours de recrutement des P.E..

La vision de la géométrie comme trois modes de connaissance identiques (intuition, expérience, déduction) mais évoluant dans le temps leur paraît importante pour la formation des enseignants, pour qu'ils soient à même de repérer les malentendus éventuels et d'y apporter une solution.

c) Distinction dessin / figure et conflit voir /savoir.

Je ne m'attarde pas sur la distinction entre dessin et figure géométrique utilisée par la plupart des chercheurs : la figure géométrique est un objet théorique défini par un texte et le dessin est un objet matériel sur une feuille de papier ou un écran d'ordinateur qui représente la figure géométrique. Laborde et Capponi (1994) précisent cette distinction à l'aide de la triade référent, signifié, signifiant : l'objet géométrique est le référent de la représentation, le dessin le signifiant. La figure géométrique est alors l'ensemble de tous les couples formés du référent et d'un dessin parmi tous les dessins possibles qui le représentent. Le signifié de la figure géométrique est quant à lui constitué des rapports construits par le sujet entre le référent et les dessins, il correspond à ce que Fischbein appelle *figural concept*.

Dans ses travaux, portant surtout sur la géométrie dans l'espace, Bernard Parszyz souligne le conflit entre voir et savoir concernant la représentation plane des figures de l'espace. Ce conflit est aussi souligné en géométrie plane par des nombreux auteurs à propos des difficultés d'usage de la figure que rencontrent les élèves dans les démonstrations.

d) Articulation de représentations sémiotiques.

Dans ses travaux portant sur l'étude des représentations sémiotiques, Raymond Duval s'est beaucoup intéressé à la géométrie, qui suppose l'articulation de deux registres : celui du langage naturel et celui du graphique. J'en retiendrai principalement trois aspects :

<u>Différentes appréhensions de la figure.</u>

La géométrie élémentaire nécessite un travail sur les figures. Duval (1994) distingue quatre modes d'appréhension des figures géométriques :

* l'appréhension perceptive correspond à ce qui apparaît au premier regard (par exemple on perçoit mieux des formes fermées que des formes ouvertes) ; elle se fait en fonction des lois de la Gestalt par des traitements automatiques et inconscients.

* l'appréhension discursive correspond à une description de la figure par un texte. Le raisonnement consiste alors à produire du discours en utilisant des définitions, théorèmes …

* l'appréhension séquentielle correspond à une construction avec des instruments, ce qui demande de mettre un ordre dans les unités figurales en fonction des propriétés mathématiques de la figure mais aussi des contraintes techniques des instruments.

* l'appréhension opératoire est l'appréhension d'une figure donnée en ses différentes modifications possibles en d'autres figures ; Duval distingue les modifications méréologiques fondées sur la relation entre un tout et ses parties (décomposition en sous figures et recomposition), les modifications optiques (agrandissement, réduction) et les modifications positionnelles (déplacement de la figure entière).

Duval constate les difficultés persistantes, souvent soulignées par les enseignants, des élèves de l'enseignement secondaire concernant l'usage de la figure : la difficulté à se détacher des formes perçues au premier coup d'œil et qui rend inutile toute démonstration (ça se voit sur la figure) et la difficulté à discerner dans une figure des éléments possibles d'une solution, c'est-à-dire à s'en servir de manière heuristique. Il relie la résistance de ces difficultés au fait que dans l'enseignement secondaire, on travaille surtout sur l'appréhension discursive et l'appréhension séquentielle de la figure et que ces deux appréhensions s'appuient sur une structure dyadique de la représentation qui associe directement le signe au référent, alors que les autres appréhensions s'appuient sur une structure triadique de la représentation : le référent est associé à un signe lui-même composé d'un signifiant et d'un signifié. Le travail séquentiel sur une figure qui est bien travaillé dans l'enseignement n'aurait ainsi que peu d'effet sur l'appréhension opératoire de la figure, nécessaire au traitement heuristique de la figure dans la résolution de problèmes de géométrie. Pour Duval, il existe des facteurs qui jouent sur la visibilité de la modification heuristiquement pertinente de la figure et on peut travailler directement sur ces facteurs pour améliorer l'appréhension opératoire des figures. C'est ce qui a été fait dans plusieurs thèses qu'il a dirigées (A. Mesquita, V. Padilla Sanchez, E. Lemonidis.)

Les changements de dimension

Une des difficultés d'articulation entre les différentes appréhensions d'une figure plane est qu'elle nécessite de jouer sur des changements de dimension des figures : passage d'une vision en dimension 2 (figure comme surface et assemblage de surfaces) à une vision en dimension 1 (lignes délimitant ces surfaces ou joignant des points) ou en dimension 0 (points comme intersections de lignes ou sommets de surfaces).

Articulation texte / figure

On ne peut accéder à une figure géométrique par le dessin seul puisqu'il faut spécifier les propriétés qui permettent de définir la figure ; cela se fait par un texte, éventuellement suppléé par un codage de la figure. Le traitement d'un problème de géométrie nécessite des allers et retours incessants entre texte et figure et l'articulation de ces deux types de représentations de la figure géométrique.

Les travaux de Duval portent surtout sur l'enseignement secondaire mais le travail de la perception opératoire de la figure et du changement de dimension concerne directement le primaire à tous les niveaux et la question de l'articulation du texte et de la figure se pose dès le cycle 3. Ce sont des aspects travaillés dans une recherche en cours à l'IUFM Nord-Pas-de-Calais dont je vous présenterai quelques éléments dans le paragraphe suivant.

Les travaux de Jean-Claude Rauscher et Danielle Vergnes portent aussi sur la géométrie mais je les ai plutôt situés dans la perspective générale de l'étude des pratiques enseignantes, c'est donc dans cette partie qu'ils seront abordés.

3- La problématique de reproduction de figures. Une recherche en cours

1) Remarques préliminaires

- Un des constats qui motive cette recherche est la difficulté connue des élèves de collège à se servir de manière pertinente de la figure pour traiter des problèmes de géométrie non seulement parce qu'ils se fient à ce qu'ils voient sur la figure mais surtout parce qu'ils ne voient pas des éléments qui seraient pertinents et pourraient les aider à résoudre le problème et à trouver une démonstration. Notre objectif est de travailler l'analyse de figures au niveau de l'école élémentaire parce que nous pensons que le rapport aux figures est un point clé dans le rapport des élèves à la géométrie.
- La géométrie de référence est la géométrie euclidienne même si selon le cas, c'est une sous-géométrie qui est pertinente (projective, affine).
- On veut ici distinguer géométrie et mesure souvent confondues à l'école primaire et on veut développer une géométrie sans mesure. On peut faire des reports de longueurs et des reports d'angles mais pas des mesures. Les élèves ne disposeront pas de règle graduée.
- On travaille dans le contexte de passage de figure à figure, sans intermédiaire d'un texte. Les propriétés pertinentes sont à repérer sur la figure.

2) Qu'entend-on par figure et reproduction de figures dans notre recherche ?

Il s'agit de figures planes en un sens large : aussi bien traces d'objets de l'espace que représentation d'assemblages de surfaces type puzzle ou figure comme ensemble de lignes. On s'intéresse à des figures qui sont composées par juxtaposition ou superposition de figures simples, en donnant à figure simple le sens de figure qu'on peut obtenir par le tour d'un gabarit ou d'un pochoir.Les figures auxquelles on s'intéresse relèvent de différents modes de production : par empreintes de solides, tour de gabarit, de pochoir, tracées à main levée ou avec des instruments usuels de géométrie.

On se place sur le plan du dessin mais il s'agit d'un type de dessin particulier porteur potentiel de connaissances géométriques, dessin qui peut être interprété comme une figure de géométrie avec des propriétés géométriques. Pour les élèves c'est un dessin, pour le professeur c'est une figure. L'élève est dans le cadre de la géométrie 1 au sens de Houdement et Kuzniak ou plutôt de la géométrie spatio-graphique dont parle Parzysz. Cependant, pour construire les figures, le maître doit se placer, lui, dans la géométrie 2 pour que les propriétés graphiques qu'utilisent les élèves correspondent à des propriétés géométriques de la figure et que la figure n'ait pas des propriétés graphiques qui ne correspondent pas à des propriétés géométriques.

3) *Quels objectifs, quels savoirs, quelles connaissances ?*

Entre la maternelle et la sixième les élèves doivent passer d'une vision des figures en termes de surfaces à manipuler découper, colorier sous forme de gabarits, à une vision en termes de points et lignes qui permettent de caractériser la figure pour une construction à l'aide d'instruments qui sont eux-mêmes porteurs de connaissances géométriques. L'enjeu est d'amener les élèves, tout au long de l'école et au début du collège, à un changement de regard progressif sur les figures-dessins et sur les formes géométriques, pour les amener, au bout du compte, à concevoir les objets géométriques, et ce, en choisissant des situations qui « forcent » ce changement de regard et amènent obligatoirement à la perception de propriétés géométriques. Ce changement de regard se fait conjointement avec un début de construction d'objets géométriques théoriques et du vocabulaire pertinent.

Nous visons donc des connaissances spatiales ou plutôt graphiques mais aussi des connaissances géométriques dans le sens que les connaissances spatiales ou graphiques que nous visons nous paraissent indispensables à la mise en place de la géométrie 2. Par exemple, si l'on veut découper une étoile sans déchirer le papier, il ne faut pas suivre le contour de l'étoile mais partir des sommets des angles saillants vers ceux des angles rentrants et donc voir le sommet de l'angle rentrant comme intersection de demi-droites.

Un autre objectif est le détachement des objets géométriques des instruments qui servent à les produire comme droite et règle, cercle et compas, équerre et angle droit.

Les connaissances géométriques en jeu sont celles de direction, droite comme support de segment, comme passant par deux points, points comme intersections de lignes (droites ou cercles), repérages par longueurs, angles, milieu, perpendiculaire, cercle, symétrie, carré, dans leur action dans le domaine spatio-graphique.

4) *Des hypothèses sur l'apprentissage*

Nous faisons l'hypothèse que les enfants perçoivent d'abord les surfaces, les lignes et les points sont à construire.

Différentes conceptions de lignes et en particulier de lignes droites coexistent : la ligne comme bord de surface ou séparation entre deux régions est plus facilement perçue que la ligne joignant deux points.

De même, on a différentes conceptions de points : l'extrémité d'un segment ou le "coin" d'une surface (saillant, rentrant, plus ou moins plat…) est reconnu plus facilement que le point comme intersection de lignes

Dans une figure composée, les élèves de cycle 2 peuvent facilement identifier des sous figures simples quand la figure représente quelque chose à quoi ils peuvent donner un nom ; si c'est une figure abstraite ce n'est pas évident quand les figures simples ne sont pas coloriées.

Les enfants peuvent être capables de réaliser des tracés à main levée qu'ils ne sont pas capables de réaliser aux instruments.

Le rôle du langage pendant l'analyse et pendant le tracé, est sûrement important et à étudier mais on ne l'a pas fait.

Nous avons choisi de nous placer dans la problématique de la reproduction de figures qui nous paraît adaptée pour atteindre nos objectifs en jouant sur le choix des figures et le choix des outils, instruments usuels mais aussi outils non standardisés. Nous avons construit plusieurs milieux suivant le choix de variables qui ont un effet sur les procédures possibles et les connaissances mises en jeu.

5) Milieux pour la reproduction de figures

Le problème considéré est toujours de reproduire une figure donnée. On peut envisager différents milieux (au sens de la théorie des situations didactiques) pour différents objectifs d'apprentissage. Après examen des variables possibles, je présente rapidement les trois types de milieux que nous avons mis au point et commencé à expérimenter.

a) Les éléments constitutifs des différents milieux qu'on va considérer :

<u>Les constantes :</u>

- feuille de papier : toutes les situations vont être des tracés de figures sur une feuille de papier donc dans l'environnement microspatial. Cependant la problématique n'est pas forcément microspatiale parce que justement il y aura à voir des éléments qui ne se voient pas au premier coup d'œil.
- une figure modèle à reproduire toujours présente
- la figure à obtenir, le but, est disponible sur transparents pour la validation avec différentes épaisseurs de trait qui fixent un niveau de rigueur pour la reproduction.
- existence d'une trame sous-jacente à découvrir au moins partiellement pour reproduire la figure.

<u>Les variables :</u>

- les éléments donnés : partie de figure ou de réseau déjà disponible sur le papier
- instruments disponibles pour la reproduction :
  + classiques : règle non graduée, équerre compas
  + liés à l'objet à reproduire : gabarit, morceau de gabarit
  + non standard : morceau de carton rigide (surface sans lien avec ce qui est à reproduire et sans bord droit) pour report de longueur et pour report d'angles) ; bande de papier qu'on peut plier pour chercher un milieu par exemple.
- règle du jeu pour la reproduction avec éventuellement système de points permettant de favoriser le recours à un instrument plutôt qu'à un autre.

b) Différents choix de milieux pour différentes classes de situations :

Dans chacun des trois cas étudiés, je ne reprends que les éléments variables.

<u>1. Restauration de figures</u>

Données : figure partiellement effacée (effacement de lignes).

Reproduction à l'identique. Exemple figure Picasso (figures 2 et 3)

Instruments : règle non graduée, éventuellement gabarits et/ou bande de papier (report de longueurs et/ou d'angles, milieux), éventuellement instrument de tracé de perpendiculaires (équerre ou papier qu'on peut plier), suivant le choix des éléments effacés

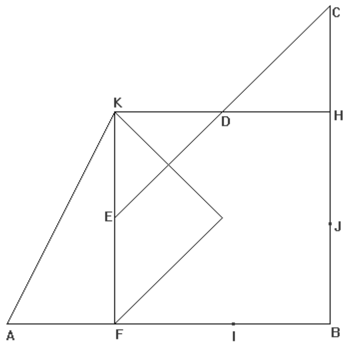


Figure 2 : Figure Picasso (modèle)

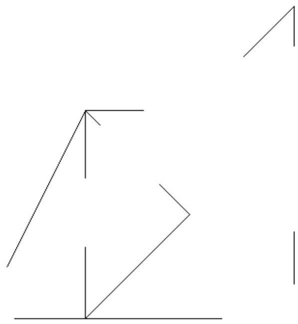


Figure 3 : Figure Picasso (donnée)

2. Reconstitution de figure à partir d'une partie

Données : une partie de la figure (certaines pièces de la figure vue comme juxtaposition de surfaces)

Reproduction à l'identique. Exemple Assemblage (figures 4 et 5).

Instruments : règle non graduée, éventuellement gabarits et/ou bande de papier (report de longueurs et/ou d'angles, milieux), éventuellement instrument de tracé de perpendiculaires (équerre ou papier qu'on peut plier), suivant le choix de la figure et des données.

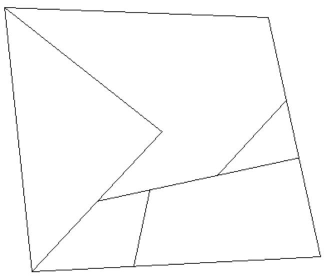


Figure 4 : Assemblage (modèle)

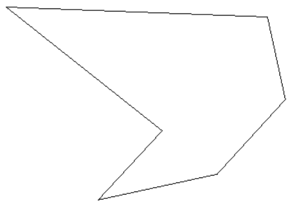


Figure 5 : Assemblage (donnée)

3. Reproduction de la forme

Reproduction à une taille différente.

Données : une partie de la figure à la taille voulue. Exemple quadrilatères emboîtés (voir figures 6, 7, 8).

Instruments : règle non graduée, éventuellement gabarits et/ou bande de papier (report d'angles, milieux), éventuellement instrument de tracé de perpendiculaires (équerre ou papier qu'on peut plier), suivant le choix de la figure et des données (inutiles dans l'exemple ci-dessous).

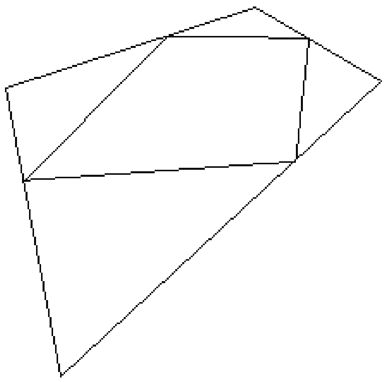


Figure 6 : Quadrilatères (modèle)

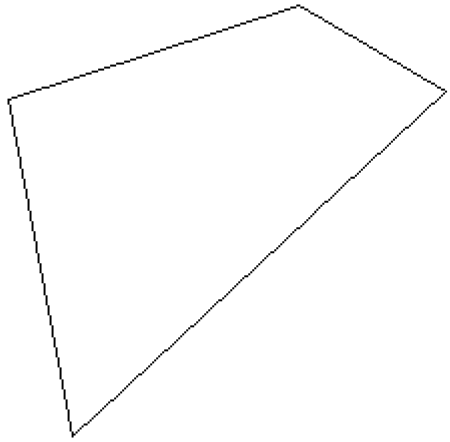


Figure 7 : Quadrilatères (donnée)

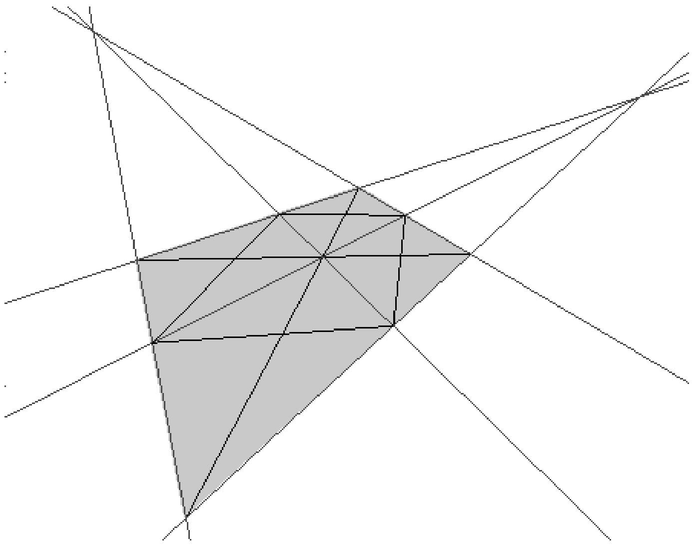


Figure 8 : constructions à réaliser pour reproduire la figure

Dans la restauration, on n'a pas à trouver des directions qui ne sont pas données dans la figure à restaurer : la droite qui porte un segment à restaurer n'a pas complètement disparu alors que c'est le cas dans la reconstitution et dans la reproduction de la forme.

Quelques résultats

Les résultats se situent à plusieurs niveaux :

- procédures observées des élèves et analyse des difficultés éventuelles. Ces résultats ont été intégrés au niveau des grilles d'analyse sur l'identification des variables didactiques. Par exemple, pour la restauration de figures, nous avons observé qu'un coin est plus difficile à restaurer qu'une intersection parce que les enfants résistent à prolonger leur tracé au-delà du point cherché pour effacer ensuite.

- identification de critères pour produire les milieux : quelles figures choisir ? Quelles données pour la reproduction, par exemple comment effacer pour la restauration, quelle partie donner pour la reconstitution ?

- possibilité d'utilisation dans l'enseignement ordinaire. Pour l'instant, dans les classes où la séance a été menée par une personne extérieure, les enseignants constatent l'intérêt qu'y prennent les élèves ; ils y prennent eux-mêmes beaucoup d'intérêt quand on leur propose ce genre d'activité dans un stage de formation continue mais peu semblent prêts à reprendre une activité de ce type dans leur propre classe. En parallèle nous avons fait passer un questionnaire pour mieux connaître les pratiques effectives en géométrie, il n'est pas encore dépouillé. La perspective de notre recherche est de voir comment des enseignants peuvent reprendre ce type de situations. A quelles conditions ? Avec quels effets sur les connaissances des élèves en géométrie ?

III. LES ÉTUDES CONCERNANT L'ENSEIGNANT

Pour cette partie, je m'appuierai sur une note de synthèse sur les stratégies de l'enseignant en situation d'interaction, réalisée sous la direction de Pascal Bressoux dans le cadre du programme cognitique, et dans laquelle j'ai rédigé le chapitre 8 consacré à la didactique des mathématiques. Je n'ai gardé, pour l'essentiel, que ce qui concernait l'enseignement du premier degré ou le tout début du collège, notamment dans les exemples cités.

1- L'évolution des recherches au niveau international

1) Une préoccupation récente

Les études concernant l'enseignant ne se sont vraiment développées que depuis une quinzaine, voire une dizaine d'années. Je retiendrai deux facteurs principaux d'explication :

- les didacticiens des mathématiques étant pour la plupart aussi enseignants de mathématiques, ils ont tendance dans leurs premiers travaux à se placer eux-mêmes du point de vue de l'enseignant et il leur est plus difficile de prendre celui-ci comme objet d'étude ;
- la didactique des mathématiques s'est développée dans la foulée des grands mouvements de réforme qui ont secoué l'enseignement des mathématiques dans le monde entier dans les années 60 et 70, c'est plutôt le savoir et le rapport des élèves au savoir qui est alors questionné.

Romberg et Carpenter (1986) notent qu'il existe d'une part des recherches sur l'apprentissage des mathématiques qui se placent d'un point de vue cognitiviste mais dont il est difficile de tirer des informations sur la manière d'enseigner les mathématiques, notamment parce qu'elles ne prennent pas en compte les contraintes de l'enseignement en classe et d'autre part des recherches sur l'enseignement qui cherchent à associer directement des pratiques d'enseignants à des performances d'élèves mais qui s'occupent assez peu du contenu, manquent de cadre théorique relatif à l'apprentissage et surmontent difficilement les problèmes méthodologiques soulevés par ce type d'études. Ils insistent sur la nécessité de dépasser cette dichotomie et de mettre en relation les deux approches pour poser de nouvelles questions ; ils dégagent sept pistes pour les recherches futures, parmi lesquelles la prise en compte du contenu à enseigner et le développement de modèles faisant le pont entre enseignement et apprentissage. Ces deux soucis sont effectivement présents dans les recherches qui relèvent du courant de "Mathematics Education" ou de celui de didactique des mathématiques.

Depuis 1986, en revanche, au niveau international, l'enseignant est de plus en plus pris en compte dans les recherches, voire objet d'étude. Dans leur recension de travaux conduits sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques entre 1986 et 1998, Ball, Lubienski et Mewborn (2001) trouvent que près de la moitié des travaux se focalisent sur les seuls enseignants. Comme le soulignent plusieurs auteurs (par exemple Hoyles 1992, Da Ponte, 1994, Lerman, 1997), divers facteurs ont contribué à ce que les chercheurs s'intéressent de plus près au rôle de l'enseignant dans le système didactique, notamment la volonté dans la plupart des pays de mettre en place des réformes pour étendre à tout le système d'enseignement des méthodes jugées plus efficaces d'après les résultats des recherches ; la volonté de promouvoir l'implantation des nouvelles technologies dans l'enseignement des mathématiques ; les besoins de la formation des enseignants. Hoyles (1992) repère dans les interventions à la conférence annuelle de PME deux tendances très nettes au cours des douze années précédentes : un accroissement des recherches considérant le professeur comme un facteur à part entière et crucial de l'apprentissage des élèves et une suite de changements qualitatifs sur la manière dont l'enseignant et le rôle de l'enseignant sont conceptualisés.

L'évolution des problématiques dans le monde

Dans la synthèse qu'ils font en 1992, Schatz-Koehler et Grouws distinguent différents niveaux de complexité dans les recherches sur l'enseignant. Au départ, il s'agissait plutôt de rechercher des pratiques efficaces dans une problématique de type processus produit qui cherche à évaluer directement les effets de certaines caractéristiques des professeurs sur les résultats des élèves. Plus récemment, se sont développées des recherches qui ont un fondement théorique plus solide et prennent en compte un grand nombre de facteurs (caractéristiques des professeurs et des élèves mais aussi connaissances, attitudes, croyances) pouvant agir sur les comportements en interaction des professeurs et des élèves et finalement sur les résultats mais aussi sur les attitudes des élèves à l'égard des mathématiques. Les études sont plus fines mais portent sur un nombre plus restreint de sujets ou de classes. Dans leur conclusion, Schatz-Koehler et Grouws (1992) soulignent que, malgré les points d'accord, il reste une grande latitude dans l'interprétation de ce qu'est un enseignement efficace, dans la manière de déterminer les acquisitions des élèves, même en se limitant, comme la majorité des recherches, à l'enseignement élémentaire et moyen.

Les résistances des enseignants à changer leurs méthodes ont amené les chercheurs à s'intéresser aux processus de prise de décision des enseignants et notamment à leurs conceptions des mathématiques et de l'enseignement des mathématiques, ce qu'on a communément appelé "beliefs" dans le monde anglo-saxon et "représentations" en France avec plutôt une référence aux représentations sociales. Les difficultés de transfert ont aussi amené à préciser des conditions de réussite de certains types d'enseignements innovants comme l'appui sur la résolution de problèmes ou sur l'histoire des mathématiques ou encore l'utilisation de logiciels. Les recherches sur la formation des enseignants, reposent aussi en général sur une idée implicite de ce doit être un enseignant idéal, mais les résistances rencontrées face à la volonté de faire évoluer les pratiques ont conduit à tenter de mieux connaître les pratiques effectives des enseignants. Elles ont ainsi amené les chercheurs à une prise en compte de l'existant, des contraintes du terrain et à être à l'écoute des enseignants pour comprendre les raisons des pratiques courantes. De grandes enquêtes comparatives ont cherché à décrire et à comparer les pratiques dans le système d'enseignement tel qu'il est, dans une grande variété de pays (par exemple les enquêtes SIMS et TIMSS[5]).

Les travaux sur croyances et connaissances ne prennent que rarement en compte l'effet de ces croyances sur les pratiques des enseignants en classe et encore moins sur l'apprentissage des élèves. Les travaux les plus récents dans ce domaine, contrairement

[5] SIMS : Second International Mathematics Study ; TIMSS : Third International Mathematics and Science Study

aux premiers travaux, considèrent que les croyances ne sont pas des systèmes statiques à découvrir et que la relation entre croyances et pratiques n'est pas une simple relation linéaire causale. Thompson (1992) met l'accent sur la complexité et la nature dialectique des relations entre croyances et pratiques : les croyances agissent comme des filtres à travers lesquels les professeurs interprètent leurs expériences quand ils interagissent avec les enfants et avec la discipline et, en même temps, beaucoup de croyances semblent prendre leur origine dans l'expérience en classe ou être modelées par cette expérience.

Dans leur synthèse, Fennema et Loef Franke (1992) remarquent de même que tous les chercheurs sont persuadés de l'influence des connaissances du professeur sur son enseignement mais qu'il n'y a pas d'accord sur ce que serait un savoir critique assurant un enseignement efficace. On identifie en général au moins trois types de connaissances nécessaires au professeur : des connaissances mathématiques, des connaissances sur les élèves et des connaissances sur la pédagogie des mathématiques. Des recherches ont été menées pour étudier une composante ou plusieurs composantes du savoir du professeur et ses effets éventuels sur son enseignement. Quand on a étudié le savoir mathématique des professeurs, c'est souvent pour constater (généralement dans le cadre de la formation des maîtres) son insuffisance au niveau du primaire (qui comprend dans certains pays les premières années de notre enseignement secondaire). On peut remarquer en passant qu'il y a très peu de choses sur le savoir mathématique des professeurs du secondaire, sauf quand ils sont encore en formation initiale et n'ont pas encore le statut de professeur. Cependant aucune étude n'a montré de relation directe entre les connaissances mathématiques du professeur et l'efficacité de son enseignement. S'il semble ressortir des travaux qu'un enseignement riche du point de vue mathématique est lié à un bon niveau du professeur en mathématiques, la relation avec l'apprentissage des élèves n'est pas faite. Pour ce type de question, il est nécessaire d'étudier le savoir mathématique du professeur en relation avec les autres savoirs du professeur, par exemple concernant les situations ou les matériels qui permettent de mettre en scène le savoir, des compensations d'un domaine dans un autre pouvant se faire. Cependant, la structuration du savoir mathématique du professeur, son insertion dans un domaine de connaissance plus large ont été mises en relation avec la mise en œuvre d'un enseignement plus conceptuel.

Ball, Lubienski et Mewborn (2001) font une synthèse des travaux (surtout américains) concernant les enseignants, et plus spécialement les connaissances des enseignants. Ils notent que depuis une quarantaine d'années, il y a eu beaucoup de réformes mais que les pratiques n'évoluent pas vraiment. Ils invoquent beaucoup de facteurs culturels et institutionnels et s'intéressent à la formation des enseignants. Ils constatent le faible impact de la formation initiale : ce qui a été appris à l'université tend à être lessivé dès que les nouveaux enseignants entrent dans les classes et la formation continue, épisodique et fragmentée, reste superficielle. Aux Etats Unis, il n'y a pas d'infrastructure cohérente pour la formation professionnelle des enseignants. Une question largement ouverte est celle du savoir mathématique qu'il faut pour enseigner les mathématiques. Les premières études il y a une vingtaine d'années ont étonné en montrant qu'il n'y avait que peu de lien entre le niveau de diplôme mathématique atteint par les professeurs et les résultats des élèves, ou plutôt il y a un effet de seuil : il y a un lien positif jusqu'à un certain point, au-delà duquel le lien baisse. Le fait d'avoir suivi des cours en méthode et pédagogie mathématique semble avoir plus d'effet.

Plus récemment des études ont été faites concernant les connaissances des professeurs sur des domaines mathématiques précis ; elles se limitent souvent au primaire et montrent des insuffisances dans les connaissances des professeurs qui, quand ils savent faire les exercices, ne peuvent pas donner d'explication se rattachant à un cadre mathématique cohérent. Quelques études sur les professeurs du secondaire (école moyenne) ont montré que les connaissances des professeurs du secondaire étaient moins robustes qu'on ne le pensait. Certains chercheurs ont attiré l'attention sur le savoir qu'on pourrait qualifier de didactique, qui lie pédagogie et contenu. Cependant les auteurs remarquent que les études sur les pratiques enseignantes laissent ouverte la question des savoirs nécessaires pour l'efficacité de l'enseignement dont le savoir mathématique des enseignants et que les études centrées sur les savoirs mathématiques des enseignants ne font pas le lien avec l'enseignement dispensé. Ces études ne suffisent pas pour définir le savoir nécessaire pour enseigner. Des travaux récents (Swafford, Jones, Thornton, 1997 et Sowder, Philipp, Armstrong et Schappelle, 1998) donnent des résultats encourageants sur l'effet positif sur les pratiques et les performances des élèves de formations assez lourdes (école d'été dans le premier cas, participation de deux ans à un projet de recherche dans l'autre) sur des thèmes mathématiques précis (géométrie dans le premier cas, rationnels et proportionnalité dans l'autre).

Ces derniers temps, se sont développés des travaux visant à étudier le travail de l'enseignant dans des classes ordinaires, dans toute sa complexité. Ces travaux, accompagnés de réflexions méthodologiques et théoriques importantes, qui cherchent par exemple à modéliser la fonction enseignante, se sont particulièrement développés en France et dans des équipes en forte relation avec les recherches françaises, mais sont présents aussi dans le monde anglo-saxon. Je vais maintenant tenter de dégager quelques lignes de force des travaux français.

2- Les recherches françaises sur l'enseignement dans les classes ordinaires

1) *Les premières prises en compte de l'enseignant*

Comme le remarquent Margolinas et Perrin-Glorian (1997) ainsi que Bodin et Capponi (1996), on trouve peu de recherches concernant explicitement l'enseignant avant 1990, mais elles se développent progressivement à partir de 1989 et beaucoup plus nettement depuis 1993. On peut en trouver une des raisons dans la difficulté de transmission des situations construites lors d'ingénieries didactiques, déjà en situation expérimentale et plus encore dans les classes ordinaires. Dès 1981, Brousseau avait pointé le phénomène d'obsolescence des situations. Peu après, il différencie les situations adidactiques, principalement étudiées jusque là, des situations didactiques et il précise le rôle du maître (déjà bien balisé dans Brousseau, 1981, p.99-102) dans les processus de dévolution et d'institutionnalisation. Margolinas (1992) étudie le rôle du maître dans les phases de conclusion. L'étude de la reproductibilité des situations didactiques (Artigue, 1986, 1990) et les tentatives de transmission des produits de l'ingénierie didactique dans des classes ordinaires, voire dans des classes faibles (Perrin-Glorian, 1993) mettent plus encore en évidence la nécessité de préciser les différentes dimensions du travail de l'enseignant en montrant l'imbrication des difficultés d'apprentissage des élèves, des contraintes diverses qui pèsent sur les professeurs et de leurs conduites non conformes au projet d'ingénierie. En réponse à ces difficultés, l'enseignement dans des classes ordinaires commence à être pris comme objet d'étude pour comprendre les résistances et les contraintes du système didactique, cela amène à retravailler les cadres théoriques. Certains chercheurs tentent alors de rechercher des explications du côté de l'enseignant lui-même, en important éventuellement des concepts issus d'autres disciplines, comme les représentations des enseignants sur les mathématiques et leur enseignement (Robert et Robinet, 1992 ; Bailleul, 1995), adaptation des représentations sociales (Jodelet, 1989). D'autres prennent en compte la dimension psychanalytique dans la position d'enseignant de mathématiques. (Blanchard-Laville, 1989, 1996).

L'étude des pratiques des enseignants dans des classes ordinaires pose de sérieux problèmes sur les plans théorique et méthodologique. Les premières recherches s'intéressant aux pratiques ordinaires des enseignants travaillent sur des déclarations des enseignants ou des choix provoqués. Par exemple, Rauscher (1993) cherche à déterminer les objets d'enseignement que se donnent des professeurs de sixième en géométrie à travers leurs pratiques d'évaluation. Il leur demande de proposer un test de fin d'année pour évaluer les acquisitions de leurs élèves et mesurer leurs progrès par rapport à l'évaluation nationale de début d'année. Il constate une relation entre l'évolution des élèves et la nature des tests proposés par les professeurs. Les professeurs qui permettent une meilleure évolution des élèves sont ceux qui proposent une évaluation multidimensionnelle des compétences des élèves, prenant en compte une variation de registres et une gradation dans la complexité. Des entretiens ont montré de plus que les enseignants qui proposent un champ d'évaluation très étroit sont capables comme les autres de repérer les difficultés mais les premiers les identifient comme des objets d'apprentissage et les seconds comme des obstacles à éviter. Cependant, dans tous les cas, l'évolution favorable est rare quand les élèves les plus avancés en début d'année sont trop peu nombreux dans la classe. Bolon (1996) a aussi mené une étude indirecte des pratiques des enseignants de l'école et de sixième en regardant les raisons qui leur faisaient adopter ou rejeter un scénario d'enseignement sur les décimaux ou la manière dont il était transformé. Les recherches ultérieures vont davantage s'intéresser à des pratiques observées.

Les questions abordées

Contrairement à ce qui se passe au niveau international, les recherches sur les croyances des enseignants de mathématiques, présentes dans les recherches françaises au début des années 90 dans la recherche des représentations sur les mathématiques, la manière de les enseigner ou de les apprendre, sont pratiquement inexistantes actuellement. Depuis 1993, les différentes recherches abordent les questions par des entrées diverses liées aux cadres théoriques et aux méthodes choisis, mais on peut retrouver des préoccupations communes ou largement partagées dans les recherches, même si la formulation de la question peut faire référence à un cadre théorique plutôt qu'à un autre. Remarquons qu'il n'y a en général pas dans ces travaux de recherche des effets sur les élèves.

Déterminer des contraintes et des marges de manœuvre de l'enseignant

L'enseignant est soumis à un certain nombre de contraintes qui viennent de l'institution scolaire, de l'établissement, des nécessités de l'enseignement (évaluation…), des élèves, et de lui-même. Il lui reste cependant certaines marges de manœuvre pour s'adapter à ces contraintes. Rechercher les contraintes revient aussi à identifier des institutions auxquelles l'enseignant est assujetti et qui risquent d'avoir un effet sur la viabilité de certaines stratégies qu'il pourrait mettre en place.

Rechercher des régularités et des variabilités

Ce type de recherche suppose qu'on a identifié un certain nombre de variables qui permettraient de caractériser l'action de l'enseignant en classe et un certain nombre de contraintes qui pourraient avoir un effet sur ces variables. Les régularités peuvent être recherchées chez un même enseignant d'une séance à l'autre, sur un même contenu, sur des contenus différents, ce qui permet d'identifier certains niveaux de routines. Les régularités entre enseignants différents correspondraient à des caractéristiques de la fonction enseignante. Elles peuvent se chercher à différents niveaux et être liées à un contexte donné (niveau, environnement scolaire, contenu …). On peut par exemple trouver des régularités dans une école de ZEP qui ne se retrouvent pas dans une école de centre ville. Les variabilités correspondraient à la part personnelle de l'enseignant, l'investissement de ses marges de manœuvre.

Rechercher des caractéristiques de la position d'enseignant dans une institution didactique

Il s'agit ici de déterminer des caractéristiques générales de la fonction de l'enseignant dans la transmission des savoirs, en tenant compte éventuellement du type d'établissement et du niveau scolaire donné et du contenu précis enseigné. On cherche par exemple comment peuvent se constituer des routines et quelles sont leurs raisons d'être. L'enseignant est alors vu comme un sujet générique, on cherche à caractériser la fonction enseignante en termes de contraintes externes liées aux institutions en jeu ou internes à la situation d'enseignement. Les réponses à ces questions sont en général d'ordre théorique.

Identifier les moyens utilisés par l'enseignant pour gérer son projet d'enseignement et la place laissée à l'élève dans la réalisation de ce projet

Il s'agit de déterminer des procédés concrets qu'utilise l'enseignant pour gérer sa classe. Pour aborder cette question, il faut d'abord déterminer le projet de l'enseignant qui ne se ramène ni aux programmes, ni aux textes qu'il utilise ou fournit aux élèves, ni même à ce qu'il déclare de ce projet. Ce projet peut aussi être défini à différents grains : sur l'année, sur un contenu d'enseignement, sur une séance, sur un exercice, sur une intervention. De même l'activité mathématique de l'élève n'est pas accessible directement : on peut seulement identifier des problèmes, des tâches, c'est-à-dire des activités potentielles de l'élève ou repérer des actions d'un élève, des prises de parole, c'est-à-dire des indices de l'activité[6] des élèves qui restent à interpréter en termes de connaissances mises en jeu. Enfin les moyens didactiques eux-mêmes peuvent être d'ordres très divers : choix de problème, mise en place de dispositifs, discours, organisation du travail des élèves, de leurs prises de parole... De plus, ces moyens de gestion peuvent relever de prévisions, de routines professionnelles ou de régulations de ces prévisions et routines. Aborder la question de la gestion par l'enseignant de son projet d'enseignement et de l'apprentissage des élèves suppose la mise en place de cadres théoriques et de méthodes adaptées qui ont un effet sur le type de réponse obtenu.

Comprendre comment se construisent les connaissances de l'enseignant

L'enseignant dispose de savoirs théoriques concernant les mathématiques elles-mêmes et leur enseignement et aussi de connaissances issues de l'expérience. Différents facteurs peuvent contribuer à modifier ces connaissances y compris la pratique professionnelle elle-même. La question de la construction des connaissances professionnelles des enseignants est intéressante à la fois pour comprendre les pratiques des enseignants et pour envisager leur formation. En effet, d'une part ces connaissances sont supposées avoir une influence sur les pratiques, d'autre part, des recherches et la

[6] Le terme "activité" peut être pris à plusieurs niveaux : activité "matérielle" de l'élève, action sur le milieu, productions, écritures… ou activité conceptuelle. En général, seule la première est visible et la deuxième sujette à interprétation, à travers le jeu entre ostensifs et non ostensifs qui les gouvernent.

pratique des formateurs montrent qu'il est difficile de faire évoluer les pratiques par la formation. L'explication donnée par certains chercheurs est que les connaissances de l'expérience contribuent à automatiser la pratique de l'enseignant, par la mise en place de routines et d'un système d'inter-régulations de ces routines. Ainsi, ces connaissances seraient un des déterminants de la stabilité de la pratique.

Les méthodes d'étude et cadres théoriques de référence

J'ai esquissé dans la première partie le développement des cadres théoriques de la didactique des mathématiques en France. Les méthodes sont bien sûr liées à la question et aux outils théoriques utilisés. Cependant presque toutes les recherches utilisent des méthodes qualitatives, souvent des études de cas. Elles s'appuient sur des pratiques observées. Je distinguerai trois grandes catégories de recherches.

Etude approfondie de l'enseignement d'un contenu particulier

De telles études partent généralement d'une analyse épistémologique du contenu, complétée souvent d'une étude de l'évolution de son enseignement et s'intéressent principalement aux pratiques mathématiques concernant ce contenu, de l'organisation de l'enseignement jusqu'à la gestion concrète des situations en classe par l'enseignant. L'étude peut porter sur une seule classe ou comparer quelques études de cas. Des contraintes institutionnelles sont dégagées en même temps qu'un espace de liberté pour l'enseignant. L'étude de la manière dont est investi cet espace de liberté s'appuie sur des observations de classes qui sont généralement combinées avec des entretiens avec les enseignants, mais les lignes d'analyse sont déterminées par les cadres théoriques utilisés et amènent à un découpage du corpus analysé à différentes échelles de durée. L'étude se fait parfois avec une finesse telle qu'une seule séance est étudiée (Sensevy, Mercier, Schubauer-Leoni, 2000). Les enjeux très précis de la situation peuvent alors être dégagés et une analyse presque ligne à ligne de la transcription du déroulement permet d'identifier très précisément des gestes de l'enseignant pour gérer son projet ou des phénomènes didactiques imprévus.

Etudes comparatives et dispositifs spécifiques

D'autres études ne se centrent pas sur un contenu particulier et abordent la question des pratiques par une question plus transversale, portant directement sur les pratiques ou sur la formation ou encore par une méthode d'étude particulière. Par exemple, un moyen d'étudier les pratiques des enseignants en classe est de voir comment ils s'emparent des contenus d'une formation visant à mettre en place certains types de pratiques. Il existe encore peu d'études de ce type ; elles portent sur la formation initiale (Masselot, 2000) ou la formation continue (Vergnes, 2001) des professeurs des écoles, mettant en jeu un contenu précis ou comparant deux contenus différents. Beaucoup de ces études font appel à l'ergonomie cognitive (Robert, 2001, Rogalski, 1999)

Les recherches de variabilités et de régularités amènent des études comparatives, où on fixe certains paramètres en en faisant varier d'autres, par exemple on observe un même enseignant sur des contenus différents, un même enseignant dans des classes ayant des caractéristiques différentes (forte, faible…), des enseignants différents sur un même contenu…. On peut bien sûr combiner plusieurs des paramètres et utiliser une comparaison en liaison avec l'étude d'un contenu particulier (par exemple Roditi, 2001).

Il arrive aussi qu'un dispositif particulier soit mis en place, permettant une observation plus précise des interactions. Ainsi, Soury-Lavergne (2003) observe-t-elle les interactions d'un enseignant en situation de préceptorat à distance, communiquant avec un élève par l'intermédiaire d'un dispositif informatique qui oblige à des formulations plus explicites.

Articulation de plusieurs approches : pluridisciplinarité et codisciplinarité.

Les études de didactique comparée (Mercier, Schubauer-Leoni, Sensevy, 2002) qui se développent actuellement, se rattachent principalement à la théorie anthropologique mais en y intégrant des éléments d'autres sciences humaines et de didactiques de plusieurs disciplines ; ils cherchent notamment à modéliser l'action du professeur en distinguant ce qui est générique de ce qui est spécifique d'un contenu donné.

Par ailleurs, des équipes pluridisciplinaires ont tenté d'articuler différentes approches cliniques en menant des analyses conjointes sur un même corpus : une ou plusieurs approches de didactique des mathématiques et diverses approches de sciences de l'éducation y compris des approches sociologiques et des approches d'inspiration psychanalytique (Blanchard Laville et al., 1997, CREF, 2001). Il ne s'agit pas de juxtaposer des analyses de différents points de vue mais de les articuler, chacune venant éclairer des éléments étudiés dans l'une ou l'autre des analyses conjointes.

Les résultats

En plus des avancées théoriques dont nous avons déjà parlé, les résultats peuvent être non seulement une réponse à une question posée mais aussi la formulation de nouvelles questions ou une nouvelle manière de poser une question, tout ce qui fait avancer la didactique des mathématiques. Je retiendrai ici plus particulièrement les résultats qui concernent le premier degré ou la sixième.

Régularités et diversités. Systèmes de contraintes.

Les recherches permettent à la fois de relever des régularités en même temps qu'une grande diversité dans les pratiques analysées. Des régularités modulo de petites adaptations au niveau global en ce qui concerne par exemple le respect de certaines contraintes comme les programmes ou le temps consacré à l'enseignement d'une question ou certains types d'exercices abordés dans l'enseignement d'un contenu donné. Mais une grande variabilité au niveau local sur l'ordre de présentation, la répartition dans le temps et le développement des différents points. Les premières études dans ce sens ont porté sur le discours de l'enseignant mais les travaux plus récents prennent en compte plus de variables. Ainsi, sur l'enseignement des décimaux dans quatre classes de $6^{\text{ème}}$, Roditi (2001) dégage, pour des enseignants placés dans des conditions analogues, une grande convergence des projets expliquée par les contraintes et des variations dans les pratiques pour lesquelles il peut reconstruire les lignes personnelles de cohérence de chaque professeur. Des études en REP et en ZEP (Butlen, D., Peltier, M.L. & Pezard, M., 2002) semblent montrer des régularités chez des groupes d'enseignants qui semblent apporter une réponse collective à un ensemble de contraintes.

Ces travaux se situent dans l'approche définie par Robert (2001). L'analyse amène à distinguer différentes composantes qui interagissent dans les pratiques. Les unes concernent l'organisation du travail mathématique des élèves et l'accompagnement qu'en fait le professeur ; elles sont déterminées essentiellement à partir de l'analyse du déroulement de la classe à l'aide d'outils de didactique ; d'autres composantes concernent les dimensions institutionnelles et sociales et combinent une analyse de type ergonomique et des outils usuels en didactique comme les analyses de programmes ou manuels ; une composante personnelle (atteinte par des entretiens complétant les observations) permet de mieux comprendre la cohérence d'ensemble.

Une régularité qui interroge : les pratiques ostensives

Le recours des enseignants à l'ostension a été relevé par de nombreux chercheurs, y compris dans des situations expérimentales où est organisé un apprentissage par adaptation à une situation voulue adidactique. Nous en avons parlé à propos de la géométrie. La résistance des pratiques ostensives malgré les inconvénients relevés par les chercheurs au niveau de l'apprentissage a conduit à étudier quelles fonctions elles remplissent pour les enseignants et pour les élèves. Salin (1999) note en particulier, à la suite de Margolinas (1992), l'apparition constante de l'ostension dans les phases de conclusion. Pour expliquer cette prégnance de l'ostension, souvent sous forme d'ostension déguisée, elle évoque la complexité de la situation de l'enseignant dans les phases d'interactions collectives avec ses élèves et l'efficacité de la pratique d'ostension dans la vie courante et elle remarque aussi que les théories didactiques ne distinguent pas le cas où l'enseignant s'adresse à un seul élève et celui où il s'adresse à la classe.

Importance de la mémoire didactique de l'enseignant

Le rôle de la mémoire didactique gérée par l'enseignant avait été identifié par Brousseau et Centeno (1991) à partir d'un dispositif amenant des enseignants se succédant dans une même classe à se transmettre explicitement des informations sur le déroulement des situations. Ils ont montré que, pour gérer correctement la classe dans le cas d'un enseignement de type constructiviste, la mémoire du savoir enseigné ne suffit pas, les enseignants ont besoin de connaître non seulement les situations proposées aux élèves mais aussi ce que chacun d'eux a produit pour pouvoir gérer ce qu'il y a lieu de rappeler ou au contraire d'oublier en fonction de la progression des connaissances des élèves. Dans le cas d'une transmission directe des savoirs, la mémoire des savoirs pourrait suffire. Sensevy (1998) pose la question de l'articulation de la mémoire didactique et de la mémoire de l'élève. C'est à ce genre d'articulation qu'il travaille dans sa thèse autour du journal des fractions. Matheron (2000) reprend dans l'enseignement secondaire la question de la mémoire d'un point de vue anthropologique tenant compte du rôle des ostensifs dans l'activité mathématique (Bosch et Chevallard, 1999). Il distingue une mémoire pratique qui est celle des gestes de la pratique mathématique et a une certaine parenté avec les notions de schème et d'instrumentation (Rabardel, 1995), et une mémoire ostensive "qui est délibérément donnée à voir, de manière revendiquée, et par des moyens appropriés, à ses propres sujets ou à d'autres personnes par une institution ou un individu" (Matheron, 2000, p.102). Une des fonctions de l'institutionnalisation est d'homogénéiser les pratiques par une reconstruction du passé et donc un double travail de mémoire sur les pratiques: "public, en ce qui concerne la mémoire didactique ostensive de l'institution, et privé en touchant à la mémoire pratique personnelle (…) afin d'atteindre à nouveau à une compatibilité de ces deux types de mémoire" (Matheron, 2000, p. 304). Matheron et Salin (2002) soulignent la fonction de l'ostension pour rendre publiques des pratiques et constituer la mémoire officielle de la classe, en appui sur les ostensifs de l'activité mathématique.

La gestion du temps : le temps d'horloge et le temps didactique

L'identification du *temps didactique*, la chronogenèse, distinct du temps d'horloge et des contraintes temporelles de l'enseignement ainsi que la distinction entre le temps de l'enseignement et le temps de l'apprentissage remontent au début des années 80 (Chevallard, 1985). Mercier (1995, 1998) fait de la chronogenèse un des éléments essentiels de l'étude de la relation professeur - élèves. En étudiant l'avancée du temps didactique pour un élève particulier, c'est-à-dire l'articulation du temps de l'enseigné au temps didactique, il montre qu'un élève donné peut être amené à réaliser de lui-même un apprentissage utile pour sa réussite, mais invisible de l'enseignant parce que relatif à des savoirs qui ne sont pas les objets actuels de l'enseignement. Un tel apprentissage peut se produire quand un élève rencontre personnellement une ignorance correspondant à un rapport institutionnel nouveau à un objet ancien donc en liaison avec le fonctionnement temporel de l'enseignement. Mercier appelle *épisode didactique* un tel moment qui correspond aussi à la rencontre d'un élève avec une dimension adidactique. Il pose la question de la gestion didactique de ces moments, ce qui permet d'identifier des manques didactiques pour certains élèves et amène de nouvelles questions sur le rôle du professeur, en particulier celle de la gestion publique de certains épisodes didactiques concernant un élève particulier et le rôle qu'y fait jouer le professeur à d'autres élèves. Sensevy (1998) montre comment le maître peut, à travers la gestion dans le temps d'un dispositif spécifique, laisser les élèves prendre une part à l'institutionnalisation, en laissant vivre des énoncés intermédiaires qui sont proposés aux élèves pour un nouveau travail. On voit ici une interpénétration entre les processus de dévolution et d'institutionnalisation, repérée aussi par Perrin-Glorian (1993) dans les situations de rappel.

Les régulations du contrat didactique

Le contrat didactique reflète les attentes réciproques de l'enseignant et de l'élève par rapport au savoir. Il permet que puisse s'installer une interaction entre les élèves et un milieu construit par l'enseignant pour que l'action des élèves sur le milieu et les rétroactions de celui-ci permettent la production de connaissances nouvelles pour les élèves. Brousseau (1996, 1997) s'intéresse aux équilibres à maintenir dans la relation didactique[7] et aux régulations que l'enseignant doit effectuer pour maintenir ces équilibres. S'appuyant sur un principe d'économie, il fait l'hypothèse que, autant que possible, l'enseignant va rester dans l'orthodoxie, c'est-à-dire effectuer des régulations qui ne mettent pas en cause son projet, mais il peut être amené à sortir de cette logique et par là même à changer de situation en agissant sur le milieu ou en changeant le contrat didactique. De nombreux travaux ont utilisé ce cadre théorique pour analyser des séquences de classe. Ainsi, Comiti et Grenier (1995) et Comiti, Grenier et Margolinas (1995) identifient et analysent en termes de milieu des phénomènes liés au décalage entre la situation prévue par l'enseignant et la situation qu'il a réellement à gérer : la "résonance" explique l'importance particulière accordée au traitement de certaines erreurs et le "dédoublement de situation" correspond au cas où enseignant et élèves évoluent dans des situations différentes. Par la suite (Comiti et Grenier, 1997), elles étudient plus finement les régulations de l'enseignant pour faire face à ces décalages et précisent quelques contrats locaux, notamment le contrat d'adhésion et le contrat de production collective. Perrin-Glorian et Hersant (2003) poursuivent dans cette voie et distinguent différentes composantes du contrat : la partie liée au domaine de contenu, la partie liée au statut du savoir et la partie liée au partage de responsabilité du professeur et des élèves pour mieux caractériser les modes d'intervention du professeur au cours des interactions didactiques.

L'action de l'enseignant pour gérer la classe

Un travail précurseur est celui de Margolinas (1992) qui pose des jalons dans l'étude de l'institutionnalisation en identifiant deux modalités pour mener une phase de conclusion d'une situation : l'évaluation (à la charge du maître) ou la validation (sous la responsabilité des élèves). Elle étudie le deuxième cas à travers l'analyse de situations expérimentales publiées, identifie des conditions pour qu'une telle situation puisse fonctionner et la nécessité où peut se trouver l'enseignant de se replier sur une modalité d'évaluation, notamment dans le cas d'une situation de formulation ou de validation. Elle soulève aussi des manques théoriques et méthodologiques pour l'analyse a

[7] En fait Brousseau examine ces équilibres et ces régulations non seulement au niveau d'un enseignant gérant une classe mais aussi au niveau du système didactique, ce qui dépasse notre propos.

posteriori qui amèneront certains des développements théoriques dont nous avons parlé. Depuis, beaucoup des travaux mentionnés dans les paragraphes précédents, notamment ceux qui recherchent des diversités et des régularités dans les pratiques des enseignants, et ceux qui ont cherché à spécifier la négociation du contrat didactique, ont contribué à identifier des gestes de l'enseignant pour gérer sa classe et produit des grilles d'observation et d'analyse de séquences de classes ordinaires. Il serait trop long d'en faire l'inventaire. Nous ne reprendrons ici que le travail de Sensevy, Mercier, Schubauer-Leoni (2000) parce qu'ils se placent dans une perspective de modélisation de l'action du professeur, qu'ils structurent en quatre grands axes qui peuvent chacun se décliner de multiples façons : définir, réguler, dévoluer, instituer. Ils font l'hypothèse que ces processus d'action concourent à déterminer la place de l'enseignant et celle de l'élève, le temps de l'enseignement et celui de l'apprentissage ainsi que les milieux des situations et les rapports aux objets de ces milieux. Leur modèle s'appuie à la fois sur la théorie des situations et la théorie anthropologique mais en proposant des prolongements et des adaptations de ces cadres théoriques pour prendre en compte la complexité de l'action du professeur. Ils analysent les actions d'un enseignant qui gère une séquence d'une situation expérimentale largement étudiée par ailleurs ("la course à vingt") mais qu'il ne connaissait pas. Ils observent que si l'on peut repérer des manières de faire qu'on pourrait identifier à des techniques, les types de tâches correspondants restent le plus souvent implicites. Ils procèdent à une double analyse à un grain très fin de l'action : l'une dans les termes où un praticien pourrait la faire, l'autre dans leur modèle, et ils augmentent le grain, ce qui permet de dégager ce qu'on pourrait appeler des types de tâches et des techniques mais sans que les types de tâches soient définis a priori, et sans qu'il y ait correspondance entre les deux : plusieurs techniques peuvent concourir à réaliser un même type de tâches.

L'effet des formations. Questions pour la formation

L'analyse de pratiques d'enseignants débutants (Masselot, 2000) montre qu'une certaine cohérence s'établit assez vite mais de façon inégale selon les enseignants et que, dans certains cas au moins, ces pratiques peuvent être déstabilisées et modifiées par un changement de niveau et d'environnement scolaire. De plus, on peut repérer différentes composantes dans les pratiques (choix de la situation et de l'activité prévue des élèves, travail autour de la consigne, travail lors des phases de recherche des élèves, travail lors des phases de mise en commun) qui sont inégalement influencées par la formation et avec des variations entre les enseignants. Se pose ainsi la question des connaissances initiales des futurs enseignants et de leurs attentes vis à vis de la formation. En formation continue (Vergnes, 2001), les effets des stages sur les pratiques semblent encore plus difficiles à cerner. Dans ce cas des études permettant de connaître le rapport au savoir des enseignants et la cohérence installée de leurs pratiques semblent encore plus nécessaires pour définir des conditions d'efficacité d'une formation qui doit prendre en compte non seulement ce qui est déterminant pour l'apprentissage des élèves mais aussi ce qui est transposable dans la classe du formé. Ces recherches portaient sur le premier degré, c'est-à-dire des enseignants polyvalents.

IV. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Au cours des dix dernières années, il me semble qu'on peut observer des avancées significatives :

- On a progressé dans la définition des cadres théoriques et dans leur articulation.

- On est sorti de l'enfermement dans l'étude des moments héroïques pour s'intéresser à celle des moments ordinaires.
- On commence à prendre en compte ce qui se passe hors de la classe
- On s'intéresse de plus en plus à l'enseignement dans les classes ordinaires mais le défi de la scolarité obligatoire et de l'enseignement pour tous reste un défi
- L'étude de l'enseignant s'est beaucoup développée mais dans des directions diverses qu'il reste à coordonner.

Cependant, comme le soulignait le rapport Prost, les résultats restent parcellaires et isolés. En essayant de réfléchir à ce qui me paraissait aujourd'hui des questions fondamentales posées par la didactique des mathématiques dans le premier degré, j'ai identifié cinq grands types de questions :

1) Quels objectifs et quelles situations pour l'enseignement dans des classes ordinaires ? Que sait-on sur l'apprentissage des différents contenus ? La problématique de l'étude des objectifs d'enseignement et de l'ingénierie didactique, c'est-à-dire la production de situations pertinentes et résistantes pour cet enseignement, me paraît toujours d'actualité. Il me semble qu'on a pas mal de choses sur le numérique mais beaucoup moins sur la géométrie. Cette problématique comprend l'ingénierie didactique expérimentale mais aussi l'étude de la viabilité des situations dans des classes ordinaires. Dès qu'on inclut ce dernier point, on rencontre les autres questions fondamentales.

2) Plus généralement, comment obtenir l'apprentissage de tous ? Qu'est-ce qu'un enseignement efficace des mathématiques ?

3) Quelles sont les pratiques effectives sur les contenus ? Que sait-on des pratiques effectives des enseignants en primaire ? Quelles régularités, quelles variabilités, suivant le contenu, l'environnement, la formation… ?

4) Comment décrire l'action de l'enseignant ? Y a-t-il des spécificités du primaire ?

Que sait-on du travail effectif de l'enseignant de mathématiques ? Peut-on trouver un modèle qui permette de décrire et prévoir l'action de l'enseignant ? Y a-t-il des spécificités du primaire ? Quel est l'effet de la polyvalence du maître, par exemple ? Peut-on avancer sur ces questions dans chacune des didactiques par la didactique comparée ?

5) Questions sur la formation des maîtres :

- en amont : quels sont les savoirs utiles pour enseigner efficacement les mathématiques ?
- quelle formation à la discipline elle-même, rapport aux mathématiques suivant l'origine des futurs maîtres ? De toute façon il y a un changement de rapport aux mathématiques pour passer d'un rapport d'usager des mathématiques à un rapport d'enseignant de mathématiques.
- acquisition d'outils d'analyse de situations d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques : quels outils, comment les acquérir ?
- en formation initiale : mise en place de pratiques d'enseignement des mathématiques, ce qui pose la question de la formation des pratiques.
- en formation continue : évolution des pratiques d'enseignement, par quels dispositifs peut-on les faire évoluer, dans quel sens peut-on les faire évoluer ?

RÉFÉRENCES

Argaud H.C. (1998) *Intérêts et limites de l'environnement Cabri-géomètre en géométrie plane pour l'enrichissement de l'espace des problèmes et dans la constitution des milieux pour la validation dans des situations d'apprentissage à l'école élémentaire autour des relations de parallélisme, de perpendicularité et d'égalité.* Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Artigue, M. (1986) Etude de la dynamique d'une situation de classe : une approche de la reproductibilité. *Recherches en didactique des mathématiques,* 7/1, 5-62.

Artigue, M. (1990) Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques,* 9/3, 281-307.

Bailleul, M. (1995) Une approche statistique des représentations de l'enseignement des mathématiques chez des enseignants de mathématiques de collège et de lycée. *Recherches en didactique des mathématiques,* 15/2, 9-30.

Ball, D. L., Lubienski, S. T. et Mewborn, D.S. (2001) Research on teaching mathematics : the unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In Richardson, V. (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th edition) pp. 433-456, Washington, D.C., American Educational Research Association.

Berthelot, R. (1993) Apport des recherches didactiques récentes sur l'enseignement de la géométrie *Actes du colloque COPIRELEM d'Aussois*.

Berthelot, R. & Salin, M.H (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire.* Thèse de doctorat, Université Bordeaux I.

Berthelot, R. & Salin, M.H (1994) L'enseignement de la géométrie à l'école primaire, *Grand N*, 53, 39-56.

Berthelot, R. & Salin, M.H (1995) Savoirs et connaissances dans l'enseignement de la géométrie, in Arsac, G., Gréa, J., Grenier, D. & Tiberghien, A. (éditeurs) *Différents types de savoirs et leur articulation*, 187-204, La Pensée Sauvage Editions, Grenoble.

Berthelot, R. & Salin, M.H (1998) the role of pupils' spatial knowledge in the elementary teaching of geometry in Mammana, C. & Villani, V. (eds) (1998) *Perspective on the teaching of geometry for the 21st century,* pp. 71-78. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Blanchard-Laville, C. (1989) Questions à la didactique des mathématiques. *Revue française de psychologie*, 89,

Blanchard-Laville, C. (1996) L'enseignant en classe : point de vue de l'approche clinique d'inspiration psychanalytique *Actes du colloque COPIRELEM de Montpellier*

Blanchard-Laville, C. (Ed.) (1997) *Variations autour une leçon de mathématiques à l'école élémentaire, l'écriture des grands nombres.* Paris : L'harmattan.

Bloch, I. (1999) L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. *Recherches en didactique des mathématiques,* 19/2, 135-193.

Bodin, A. & Capponi, B. (1996) Junior Secondary School Practices. In Bishop A.J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. & Laborde, C. (Eds) *International Handbook of Mathematics Education,* (pp. 565-614), Kluwer Academic Publishers.

Boero, P. (1994) Situations didactiques et problèmes d'apprentissage : convergences et divergences dans les perspectives de recherche. In Artigue, M. Gras, R., Laborde, C. & Tavignot, P. *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à G. Brousseau et G. Vergnaud,* La pensée sauvage, Grenoble.

Boero, P., Dapueto, C. & Parenti, L. (1996) Didactics of mathematics and the professional knowledge of teachers. In Bishop A.J., Clements, K., Keitel C., Kilpatrick J. & Laborde C. (Eds) *International Handbook of Mathematics Education,* 1097-1121, Kluwer Academic Publishers.

Bolon, J. (1996) *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière école-collège,* Thèse Université René Descartes- Paris V.

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques,* 19/1, 77 - 123.

Brousseau, G. (1981) Problèmes de didactique des décimaux, *Recherches en didactique des mathématiques,* 2/1, 37 - 127.

Brousseau G., (1982), Les objets de la didactique des mathématiques. Ingénierie didactique, *Deuxième école d'été de didactique des mathématiques, Olivet (texte non publié).*

Brousseau G., (1990), Le contrat didactique : le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 9 /3*, 309-336.

Brousseau, G. (1994) Perspectives pour la didactique des mathématiques. In Artigue, M. Gras, R., Laborde, C. & Tavignot, P. *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à G. Brousseau et G. Vergnaud,* La pensée sauvage, Grenoble.

Brousseau, G. (1996) L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. In Noirfalise, R. & Perrin-Glorian, M.J. (Eds) *Actes de la VIIIème Ecole d'été de didactique des mathématiques à Saint-Sauves d'Auvergne,* (pp. 3-46) IREM de Clermont-Ferrand.

Brousseau (1997) Intégration des savoirs de formation : la régulation didactique, *Actes du colloque COPIRELEM de Lyon.*

Brousseau, G. et Centeno, J. (1991) La mémoire du système didactique *Recherches en didactique des mathématiques vol 11 n° 2.3*, 167-210.

Brun (1994) Evolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques. In Artigue, M. Gras, R., Laborde, C. & Tavignot, P. *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à G. Brousseau et G. Vergnaud,* La pensée sauvage, Grenoble.

Butlen, D., Peltier, M.L.& Pezard, M. (2002) Nommés(ées) en REP, comment font-ils ? Pratiques de professeurs d'école enseignant les mathématiques en REP : cohérence et contradictions, *Revue Française de pédagogie* n° 140, 41-52.

Chevallard, Y. (1985) (rééd.1991) *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble : La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques,* 12/1, 73-111.

Chevallard (1994) Nouveaux objets, nouveaux problèmes en didactique des mathématiques. In Artigue, M. Gras, R., Laborde, C. & Tavignot, P. *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à G. Brousseau et G. Vergnaud,* La pensée sauvage, Grenoble.

Chevallard, Y. (1997) Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques,* 17/3, 17- 54.

Chevallard, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques,* 19/2, 221-265.

Comiti, C. & Grenier, D. (1995) Two examples of "split situation" in the mathematics classroom. *For the learning of Mathematics,* 15/2.

Comiti, C. & Grenier, D. (1997) Régulations didactiques et changements de contrat. *Recherches en didactique des mathématiques,* 17/3, 81-102.

Comiti, C., Grenier, D. & Margolinas, C. (1995) Niveaux de connaissance et phénomènes didactiques. In Arsac, G., Gréa, J., Grenier, D. & Tiberghien, A. (Eds) *Différents types de savoirs et leur articulation* (pp. 93-127). Grenoble : La pensée sauvage.

Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques dite commission Kahane (2000) Rapport d'étape sur la géométrie et son enseignement, *bulletin APMEP* n° 430, 571-599.

Conne, F. (1994) Quelques enjeux épistémologiques rencontrés lors de l'étude de l'enseignement des mathématiques, *Actes du colloque COPIRELEM de Chantilly.*

CREF (équipe du), (2001) Mélanie, tiens, passe au tableau Actes du colloque COPIRELEM de Tours.

Douady, R. (1987) Jeux de cadres et dialectique outil objet. *Recherches en didactique des mathématiques,* 7/2, 5-31.

Duval, R. (1994) Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères-IREM*, 17, 121-138.

Duval, R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels,* chapitre IV Figures géométriques et discours mathématiques, pp. 173-207, Bern, Peter Lang.

Fennema, E. & Loef Franke, M. (1992) Teachers' knowledge and its impact. *Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning,* 8, 148-164, Mac Millan.

Fischbein, E. (1993) The theory of figural concepts, *Educational Studies in Mathematics*, 24.2, 139-162.

Fregona, D. (1995) *Les figures planes comme "milieu" dans l'enseignement de la géométrie: interactions, contrats et transpositions didactiques.* Thèse de doctorat, Université de Bordeaux 1.

Gobert, S. (2001) *Questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible, dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire.* Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Grenier, D. (1990) Construction et étude d'un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale : éléments d'analyse du fonctionnement de la théorie des situations, *Recherches en didactique des mathématiques,* 10/1, 5-60.

Grenier, D. (1998), Milieu et contrat dans l'étude de l'enseignant et des interactions didactiques, *Actes des deuxièmes journées de La Fouly, Interactions didactiques,* Genève.

Hersant, M. (2001), *Interactions didactiques et pratiques d'enseignement, le cas de la proportionnalité au collège.* Thèse de doctorat, Université Paris 7 Denis Diderot.

Houdement, C. et Kuzniak A. (1999) Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics,* vol. 40, 283-312.

Houdement C., Kuzniak A. (2000) Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 20/1, 89 - 116.

Hoyles C., (1992) *Proceedings of International Conference on Psychology of Mathematics Education,* Durham, 1992, (vol. 3, pp.263-286).

Jodelet, D. (Ed.) (1989) *Les représentations sociales,* Paris : PUF.

Johsua, S. (1995) Où en est la didactique des sciences et des mathématiques ? *Actes du colloque COPIRELEM de Douai*.

Kuzniak A. (2000) Un essai de lecture didactique du texte de Riemann sur les fondements de la géométrie : de la géométrie euclidienne aux géométrie intrinsèques, *Actes du XXVIIème colloque interIREM sur la formation des maîtres,* Chamonix, IREM de Grenoble.

Laborde, C. & Capponi, B. (1994) Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en didactique des mathématiques,* 14(1.2), 165-210.

Lerman, S. (1997) Mathematics teachers' learning. In *Proceedings of International Conference on Psychology of Mathematics Education,* Lahti, 1997 (vol 3, pp.200-207).

Mammana, C. & Villani, V. (eds) (1998) *Perspective on the teaching of geometry for the 21st century. An ICMI Study*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Margolinas, C (1992) Eléments pour l'analyse du rôle du maître : les phases de conclusion. *Recherches en didactique des mathématiques,*12/1, 113-158.

Margolinas, C. (1993) La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. In Margolinas (Ed.) *Les débats de didactique des mathématiques* (pp.89-102). Grenoble : La pensée sauvage.

Margolinas & Perrin-Glorian (Editeurs invités) (1997) *Recherches en didactique des mathématiques,* 17/3, La pensée sauvage, Grenoble, (numéro entièrement consacré au thème de l'enseignant) et Editorial de ce numéro, 7-15.

Masselot, P. (2000) *De la formation initiale en didactique des mathématiques (en centre I.U.F.M.) aux pratiques quotidiennes en mathématiques, en classe, des professeurs d'école (une étude de cas).* Thèse, Université Paris 7.

Matheron, Y. (2000) *Une étude didactique de la mémoire dans l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée. Quelques exemples.* Thèse, Université d'Aix Marseille I.

Matheron, Y. et Salin, M.H. (2002) Les pratiques ostensives comme travail de construction d'une mémoire officielle de la classe dans l'action enseignante, *Revue Française de Pédagogie,* INRP, n°141, 57-66.

Mercier, A. (1995) La biographie didactique d'un élève et les contraintes temporelles de l'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques,* 15/1, 97-142.

Mercier (1998) Ce que nous pouvons apprendre de l'observation biographique des élèves. Actes *du colloque COPIRELEM de Brest.*

Mercier, Schubauer-Leoni, Sensevy, (Eds) 2002 Vers une didactique comparée, *Revue Française de pédagogie* n° 141, INRP, Paris.

Parzysz, B. (1988) Knowing vs Seeing. Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics,* 19 (1), 79-92.

Parzysz, B. (1991) Espace, géométrie et dessin. Une ingénierie didactique pour l'apprentissage, l'enseignement et l'utilisation de la perspective parallèle au lycée. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11(2.3), 211-240.

Parzysz, B. (2001) Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1. *Actes du colloque COPIRELEM de Tours.*

Perrenoud P. (1993) Ce que la recherche en éducation peut apporter à la conception de la formation des maîtres, *Actes du colloque COPIRELEM d'Aussois*.

Perrin-Glorian, M.J. (1993) Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathéma-tiques dans des classes faibles, *Recherches en didactique des mathématiques,* 13/1.2, 5-118.

Perrin Glorian, M.J. (1999) A study of teachers' practices : organisation of contents and of students' work. In Krainer K. & Goffree F. *On research in Mathematics Teacher Education. From a study of teaching practices to issues in teacher education.* Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik, Osnabrück.

Perrin-Glorian, M.J. (1999), Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de milieu, *Recherches en didactique des mathématiques vol 19 n°3*, 279 - 321.

Perrin-Glorian, M.J. (2002) Chapitre 8 : Didactique des mathématiques, in Bressoux P. (éditeur) *Les stratégies de l'enseignant en situation d'interaction. Note de synthèse pour Cognitique. Programme Ecole et Sciences cognitive,* Université Pierre Mendès France Grenoble 2, remis au Ministère de la Recherche en février 2002, p. 203-239.

Perrin-Glorian, M.J. et Hersant, M. (2003) Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en didactique des mathématiques,* 23/2, 217-276.

Ponte (da), J.P. (1994) Mathematics teachers' professional knowledge (1994) *Proceedings of International Conference on Psychology of Mathematics Education,* Lisbon, (vol. 1, pp. 195-210).

Portugais, J. (1995) *Didactique des mathématiques et formation des enseignants,* Peter Lang, Bern,

Rabardel, P. (1995) *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains.* Paris : Armand Colin.

Rauscher, J.C. (1993) *L'hétérogénéité des professeurs face à des élèves hétérogènes : le cas de l'enseignement de la géométrie au début du collège,* Thèse, IREM de Strasbourg.

Robert, A. (2001) Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques,* 21/1-2, 7-56.

Robert, A. & Robinet, J. (1992) Représentations des enseignants et des élèves. *Repères-IREM*, 7, 93-99.

Roditi, E. (2001) *L'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième. Etude de pratiques ordinaires.* Thèse, Université Paris 7.

Rogalski, J. (1999) Approche de psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant, *Actes du colloque COPIRELEM de*

Rolet, C. (1996) *Dessin et figure en géométrie : analyse des conceptions des futurs enseignants dans le contexte Cabri-géomètre.* Thèse de l'université Claude Bernard, Lyon 1.

Romberg, T.A. & Carpenter, T.P.(1986) Research on teaching and learning mathematics : two disciplines of scientific inquiry, in M.C. Wittrock (ed.) *Third Handbook of Research on Teaching,* New York, Mac Millan.

Rouchier, A. (1994) Naissance et développement de la didactique des mathématiques. In Artigue, M. Gras, R., Laborde, C. & Tavignot, P. *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à G. Brousseau et G. Vergnaud,* La pensée sauvage, Grenoble.

Salin, M.H. (1999) Pratiques ostensives des enseignants. In Lemoyne, G. & Conne, F. (Eds) *Le cognitif en didactique des mathématiques* (pp. 327-352) Les Presses de l'Université de Montréal.

Schatz Koehler, M. & Grouws, D. A. (1992) Mathematics teaching practices and their effects. In *Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning,* 6, 115-126, Mac Millan.

Sensevy, G. (1996) Le temps didactique et la durée de l'élève. Etude d'un cas au cours moyen : le journal des fractions. *Recherches en didactique des mathématiques,* vol.16/1, 7-46.

Sensevy, G. (1998) *Institutions didactiques. Etude et économie à l'école élémentaire.* Paris : PUF.

Sensevy, G., Mercier, A. & Schubauer-Leoni, M.L. (2000) Vers un modèle de l'action didactique du professeur. A propos de la course à 20. *Recherches en didactique des mathématiques,* 20/3, 263 - 304.

Soury-Lavergne (2003) De l'étayage à l'effet Topaze, regard sur la négociation didactique dans la relation didactique, *Recherches en didactique des mathématiques,* 23/1, 9- 40.

Sowder, J.T., Philipp, R.A., ArmstrongB.E. & Schappelle, B.P. (1998) *Middle-grade teachers' mathematical knowledge and its relationship to instruction: A research monograph.* New York. State University of New York Press.

Swafford, J.O., Jones, G.A., Thornton, C.A. (1997) Increased knowledge in geometry and instructional practice. *Journal for Research in Mathematics Education,* 28 (4), 467-483.

Thompson, A. G. (1992) Teachers' beliefs and conceptions : a synthesis of the research in *Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning,* 7, 127-146, Mac Millan.

Vergnaud, G. (1994) Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel. In Artigue, M., Gras, R., Laborde, C. & Tavignot, P. (Eds) *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à G. Brousseau et G. Vergnaud.* (pp. 177- 191). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Vergnes, D. (2001) Effets d'un stage de formation en géométrie. *Recherches en didactique des mathématiques,* 21/1.2, 99-121.

ANNEXES

1. Actes des colloques de la COPIRELEM. Plénières

Année	Auteur	Titre	Contenu, remarques
1993	P. Perrenoud	Ce que la recherche en éducation peut apporter à la conception de la formation des maîtres	- transposition didactique à partir d'une pratique professionnelle - conception de dispositifs de formation - pratique de formation
1993	R. Berthelot	Apport des recherches didactiques récentes sur l'enseignement de la géométrie	-connaissances spatiales/géométriques - différents rapports à l'espace - différentes problématiques
1993	M. Legrand	Les mathématiques, mythe ou réalité ?	problèmes épistémologiques liés à l'enseignement des mathématiques
1994	François Conne	Quelques enjeux épistémologiques rencontrés lors de l'étude de l'enseignement des mathématiques	mise en perspective de la théorie piagétienne, des champs conceptuels, de la théorie des situations et de la théorie anthropologique à propos de connaissances et savoirs
1995	M.G. Séré	Les systèmes de mémoire : l'orientation des recherches actuelles	Apports de la psychologie cognitive, de la neurophysiologie et de l'informatique
1995	S. Johsua	Où en est la didactique des sciences et des mathématiques ?	Examine la productivité d'un point de vue didactique et pointe quelques domaines nouveaux à explorer.
1996	C. Blanchard-Laville	L'enseignant en classe : point de vue de l'approche clinique d'inspiration psychanalytique	Exemple d'une leçon sur les grands nombres au CM2
1996	J.P. Bourguignon	Enjeux des mathématiques dans la société d'aujourd'hui	
1996	J. Brun	Enseignement des mathématiques et psychologie du développement cognitif : quels rapports ?	
1997	G. Brousseau	Intégration des savoirs de formation : la régulation didactique	Différents contrats ; régulations
1997	G. Guillot	Intégration des savoirs de formation : le devoir d'inquiétude	Philosophie et mathématiques
1998	B. Sarrazy	Questions de sens. Quelques réflexions à partir de l'usage des théories psychologiques dans l'enseignement des mathématiques	
1998	A. Mercier	Ce que nous pouvons apprendre de l'observation biographique des élèves	Exemple des grands nombres
1999	J.Y. Rochex	L'œuvre de Vygotski : fondements pour une psychologie historico-culturelle	
1999	J. Rogalski	Approche de psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant	Présentation d'un cadre théorique
2000	J. Julo	Aider à résoudre des problèmes. Pourquoi ? Comment ? Quand ?	Caractériser les aides à la résolution d'un point de vue cognitif
2000	M. Legrand	Sciences, enseignement, démographie et humanisme	Réflexion épistémologique sur l'enseignement des maths et la didactique
2001	F. Saujat	Des difficultés des élèves aux difficultés du métier d'enseignant	
2001	Equipe CREF	Mélanie, tiens, passe au tableau	

2. Articles publiés dans RDM et s'intéressant au primaire1993-2002

Année	Auteurs	Titre	Cadres théoriques	Contenus, niveau
1993	Perrin	Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes faibles.	Théorie des situations Représentations métacognitives	Décimaux, aires, classes faibles, professeur, théorique, CM
1995	Mopondi	Les explications en classe de mathématiques	Théorie des situations	Théorique ; professeur ; Proportionnalité, CM2,
1996	Sensevy	Le temps didactique et la durée de l'élève. Etude d'un cas au cours moyen : le journal des fractions.	Théorie anthropologique	Théorique. Fractions, professeur, , CM
1996	Deblois	Une analyse conceptuelle de la numération de position au primaire.	Piaget, schèmes, modèle de la compréhension	Numération de position, difficultés des élèves, Primaire (cycle 3)
1996	Houdement & Kuzniak	Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré	Travail empirique, approche classificatoire	Formation des maîtres du premier degré : stratégies des formateurs
1996	J.J. Maurice	Problèmes multiplicatifs : l'expérience de l'enseignant, l'action effective de l'élève	Ergonomie cognitive	Connaissances en action des enseignants ; division, CM
1997	B. Sarrazy	Sens et situations : une mise en question de l'enseignement de stratégies métacognitives en mathématiques	Épistémologie, philosophie; théorie des situations,	Résolution de problèmes Contrat didactique, CM
1998	A.M. Jovenet	Perception et conceptualisation de la symétrie. Une situation adaptée aux élèves myopathes	Vygotski, théorie des champs conceptuels	Symétrie orthogonale, enseignement spécialisé
1998	A. Mercier	La participation des élèves à l'enseignement	Théorie des situations, théorie anthropologique	Théorique, enseignant, CM2, numération
1999	J. Briand	Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques. Etude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine pré-numérique.	Théorie des situations	Énumération, transposition didactique, ingénierie didactique, maternelle
2000	C. Houdement et A. Kuzniak	Formation des maîtres et paradigmes géométriques	Epistémologie	Théorique. Formation des maîtres du primaire, géométrie,
2000	F. Leutenegger	Construction d'une "clinique" pour le didactique. Une étude des phénomènes temporels de l'enseignement	Théorie anthropologique, méthode clinique	Théorique. Observation de systèmes didactiques ; mise en place d'une méthode ; enseignements de soutien ;
2000	G. Sensevy, A. Mercier, M.L. Schubauer-Leoni	Vers un modèle de l'action du professeur. A propos de la course à 20.	Théorie anthropologique; théorie des situations	Étude du professeur ; théorique ; CM2
2001	D. Vergnes	Effets d'un stage de formation en géométrie	Ergonomie; didactique professionnelle ;	Géométrie ; formation continue des enseignants du primaire
2002	P. Clanché, B. Sarrazy	Approche anthropodidactique de l'enseignement d'une structure additive dans un CP kanak	Ethnologie ; anthropologie anthropodidactique	Théorie Problème additif
2002	E. Comin	L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège	Théorie des situations	Proportionnalité ; conditions macrodidactiques
2002	L. Garcion-Vautour	L'entrée dans le contrat didactique à l'école maternelle. Le rôle des rituels dans la construction d'un milieu pour apprendre	Théorie anthropologique (théorie des situations didactiques)	Maternelle ; rituels du matin ; milieu en théorie anthropologique

3. Actes des colloques COPIRELEM. Classement des communications

Thème	Années	Auteurs	Contenus	Cadres théoriques
Ingénierie didactique et études concernant les élèves dans le numérique	1994	J. Briand	Enumération	théorie des situations
	1994	R. Brissiaud	Soustraction	Vygotsky
	1995	Butlen – Pézard	Calcul mental, pbs numér.	Mémoire, psycho cognitive
	1996	R. Charnay	INRP – ERMEL	
	1996	F. Boule	Calcul mental	Psychologie cognitive
	1998	J. Briand	Prénumérique	Théorie des situations
	1999	Butlen-Pézard	calcul mental, écrits, problèm	
	2000	Butlen-Pézard	idem	
	2001	R. Brissiaud	Comptine numérique CP	
Ingénierie didactique et études concernant les élèves en géométrie	1995	J.F. Favrat	Cylindres	
	1995	T. Bautier	Symétrie orthogonale	Théorie des situations
	1996	Bettinelli	Formes en maternelle	
	1997	E. Greff	Tortue de sol maternelle	
	1998	F. Boule	Géométrie dans l'espace	
	2000	N. Bouleau	Reproduction figures	
	2001	E. Greff	Robot de plancher	
Etudes de pratiques et Formation des maîtres PE	1994	A. Kuzniak	Stratégies de formation	Description, classification
	1995	C. Houdement	Stratégies de formation	Description, classification
	1996	M.L. Peltier	Sujets de concours, effets FI	Description, classification
	1996	R. Neyret	Nombres – FI	Th. Anthropologique
	1996	A. Lerouge	Visites PE2	
	1996	D. Butlen	Analyse de pratiques PE2	Didactique professionnelle
	1997	J. Bolon	Décimaux; CM-6ème	
	1997	C. Rolet	Géométrie – PE 1	géométrie
	1997	Larere, Aurand	Analyse pratiques, FC géom	Psycho cognitive, th situat.
	1998	D. Vergnes	Effet stage FC géométrie	Didactique professionnelle
	1999	M.H. Salin	chercheurs/enseignants	TSD méthodologie
	1999	P. Masselot	Analyse pratiques	didactique professionnelle
	2000	S. Coppé	Savoirs professionnels	théorie anthropologique
	2000	M.P. Galisson	arithmétique au CRPE	théorie anthropologique
	2000	M.L. Peltier	Pratiques prof. en ZEP	didactique professionnelle
	2000	C. Rolet	Savoirs professionnels	théorie anthropologique
	2000	B. Nicolas-Lorrain	géométrie PE1	géométrie
	2001	B. Parzysz	PE1 géométrie	géométrie
	2001	Briand - Salin	Recherche et formation	
Formation des maîtres PLC ou général	1996	Noguès – Trouche	Outils de calcul	
	1998	J.C. Rauscher	Recherche et formation cont.	
Théorique	1995	A. Mopondi	Explications	Théorie des situations
	1996	A. L. Mesquita	Figures géométriques	Appréhension cognitive
	1997	M. Prouchet	Médiation cognitive	
	1998	Houdement Kuzniak	Géométrie	Épistémologie
	2001	Descaves	Qu'est-ce que le sens ?	
	2001	T. Bautier	Modèle neurobiologique	
	2001	S. Zaragosa	Compétences interlocutoires	Linguistique
Autres	1998	A. Bronner	Perspectives sur calcul	
	1998	T. Assude	Évolution ens. Arithmétique	Théorie anthropologique
	1998	D. Grenier	Problèmes discrets	
	1999	F. Boule	Enseignement en SEGPA	
	1999	P. Eysseric	Ateliers de recherche math	
	2001	P. Debu	Enseignement au Togo	

4. Liste[8] des thèses soutenues entre 1999 et 2002 concernant le primaire ou la sixième.

Briand Joël L'énumération dans le mesurage des collections, un dysfonctionnement de la transposition didactique. Didactique des mathématiques, Université Bordeaux 1, 1993

Banwittuya Yéléko L'ingénierie du sens en mathématiques : la division dans N, Q et D à l'école primaire. Didactique des mathématiques Université Bordeaux 1, 1993

Bautier Thierry *Étude des médiations dans l'enseignement des transformations géométriques.* Didactique des mathématiques, Université Bordeaux 1, 1993

Moreira Mariano *Le traitement de la vérité mathématique à l'école.* Didactique des mathématiques, Université Bordeaux 1, 1993

Guiet Jeanne *La division : une longue souffrance.* Sciences de l'éducation, Université Paris V, 1994

Kuzniak Alain *Étude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres au premier degré.* Didactique des mathématiques, Université Paris 7, 1994

Larere Christiane *Construction et appropriation de connaissances mathématiques par trois enfants infirmes moteurs cérébraux handicapés de la parole.* Sciences de l'éducation, Université Paris V, 1994

Bahra Mohamed *Problèmes de didactique de la numération. Echecs et succès de la remathématisation.* Didactique des mathématiques, Université Bordeaux 1, 1995

Peltier Marie-Lise *La formation initiale, en mathématiques, des professeurs d'école : "entre conjoncture et éternité ".* Didactique des mathématiques, Université Paris 7, 1995

Houdement Catherine *Projet de formation des maîtres du premier degré en mathématiques : programmation et stratégies.* Didactique des mathématiques, Université Paris 7, 1995

Christiaens Evelyne Sophie *Une approche conceptuelle des fractions à l'école élémentaire*. Sciences de l'éducation, Université Paris V, 1995

Neyret Robert *Contraintes et détermination des processus de formation des enseignants: nombres décimaux,rationnels et réels dans les I.U.F.M.* Didactique des mathématiques, Université Grenoble, 1995

Chamorro Plaza Maria del Carmen *Estudio de las situaciones de enseanza de la medida en la escuela elemental.* Universidad Nacional de educacion a distancia,1997

Bacquias Michel *Nombre et grandeur. Essai de définition du mesurage comme un complexe d'apprentissage,* Université Paris 7, 1998

Argaud Henri-Claude *Problèmes et milieux a-didactiques, pour un processus d'apprentissage en géométrie plane à l'école élémentaire, dans les environnements papier-crayon et Cabri-géomètre,* Laboratoire Leibniz, Université Joseph Fourier, Grenoble, 1998

Adjiage Robert *L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial*, IRMA Université Louis-Pasteur, Strasbourg, 1999

Molina Ortin Carmen *Integracion del invidente en la clase de matematicas Estudio comparado del aprendizaje de la geometria entre ninos videntes y invidentes*, Universidad de Zaragoza, 1999

Comin Eugène *Proportionnalité et fonction linéaire Caractères causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire.* Université Bordeaux 1, 2000

Esminjaud - Genestoux Florence *Fonctionnement didactique du milieu culturel et familial dans la régulation des apprentissages scolaires en mathématiques* Université Bordeaux 1, 2000

Masselot Pascale *De la formation initiale en didactique des mathématiques (en centre IUFM) aux pratiques quotidiennes en mathématiques, en classe, des professeurs d'école (une étude de cas).* Université Paris 7, 2000

Mul André *Enseignement de la géométrie du cycle 3 à la sixième : des éléments du quotidien scolaire*, Université Paris 7, 2000

Vergnes Danielle *Analyse des effets d'un stage de formation continue en géométrie sur les pratiques d'enseignants de l'école primaire*, Université Paris V, 2000

[8] Source : site de l'ARDM : www.ardm.asso.fr

Block David *La nocion de razon en la matematicas de la escuela primaria. Un estudio didactico*. Universidad de Mexico. CINESTAV, 2001

Gobert Sophie *Questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible, dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire,* Université Denis Diderot Paris 7, 2001

L'ARE POUR L'ART

Joël PAUBEL
IUFM de Versailles

Résumé :
Cet article vous propose de retrouver quelques images* des travaux présentés par Joël Paubel au cours de sa conférence. Chaque série de photographies est accompagnée d'un texte les explicitant.

INTODUCTION

Joël Paubel est artiste et enseignant. Artiste multimédia, il crée des installations rurales et rurbaines, monumentales et éphémères. Il travaille à l'échelle de l'espace en général et du paysage en particulier en associant les arts et les sciences. Ancien élève de l'École normale supérieure de Cachan, certifié en arts appliqués, agrégé en arts plastiques, il enseigne les arts visuels au centre de Saint-Germain-en-Laye de l'IUFM de Versailles. Il est responsable de l'éducation artistique et de l'action culturelle de l'IUFM de l'académie de Versailles. Il réalise actuellement le 1% commande publique pour l'Institut National de Recherche Pédagogique à Lyon.

I. BÂTONS / BATIR

L'invitation :

Des professeurs des écoles stagiaires du centre de Saint Germain-en-Laye de l'IUFM de Versailles sont invités à l'exposition « Sculptures en l'Île » sur l'île Nancy, au confluent de la Seine et de l'Oise, à Andrésy, dans les Yvelines, du 17 mai au 30 juin 2003.

La démarche :

Chaque professeur stagiaire prépare un bâton coupé à sa hauteur.

BÂTON n.m.-1080 ; bas latin bastum de bastare « porter » branche ou tige de bois, grossière ou travaillée, généralement assez longue et cylindrique, que l'on peut tenir à la main et faire servir à divers usages.

---

* Il ne nous est pas possible de reproduire dans cette édition des actes les photos en couleur des installations de Joël Paubel, mais vous pourrez retrouver celles-ci sur le site de l'ARPEME.

30ème colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres.
pages 79 *à* 92


Chacun cherche son morceau de bois, sa branche, son tasseau, tuteur, manche, sa baguette, barre, son pieu, barreau, mât, totem, sa lance, son sceptre, gnomon, sa perche, houlette, sa crosse.

Les bâtons de tout le monde assemblés créent une sculpture, structure, architecture ou installation.

BÂTIR v.tr.-XII° ; frq. bastjan « assembler » ou construire avec de l'écorce (bast)- élever sur le sol, à l'aide de matériaux assemblés (construire, édifier, ériger)

La préparation :

Des maquettes sont nécessaires pour approcher la construction.

Chacun apporte autant de bâtonnets que lui et ses camarades. Ces bâtonnets dix fois plus petits que le bâton d'origine doivent être plastiquement voisins de celui-ci.

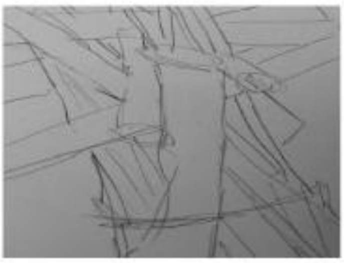
Une pince, une perceuse, de la ficelle et du fil de fer, un pistolet à colle, sont indispensables à la réalisation des maquettes à l'échelle 1/10°.

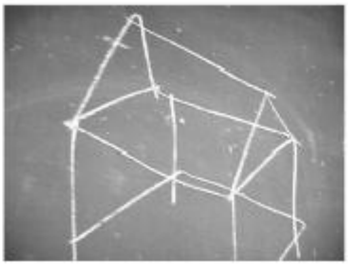
Chaque stagiaire dessine et permet de garder en mémoire les multiples projets.











La décision :

Le Directeur de la Vie Culturelle d'Andrésy, un conseiller Artistique et le professeur d'arts plastiques assistent à la présentation commentée des maquettes à l'échelle 1/10° pour choisir un projet de construction en accord avec le groupe.

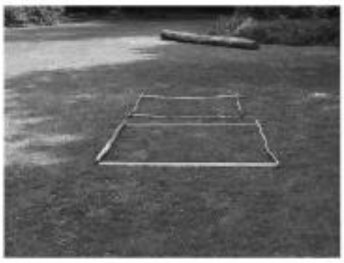
La réalisation :

Les professeurs des écoles se donnent rendez-vous sur l'Île Nancy avec leur bâton coupé à leur hauteur, pour installer, suivant la maquette choisie, la sculpture, architecture ou structure à l'échelle 1.

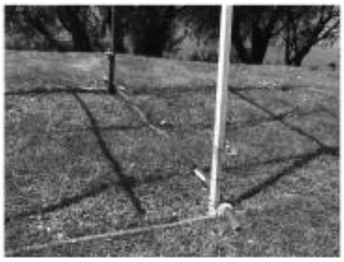

Les grands bâtons sont percés à leurs extrémités de façon à ce que nous puissions les cheviller et les ficeler ensemble.











Les maquettes sont exposées à proximité de la réalisation grandeur nature.



Variante égyptienne :

Les professeurs des écoles et des lycées et collèges du Caire retrouvent la hauteur des pyramides de Gizeh avec leur bâton.



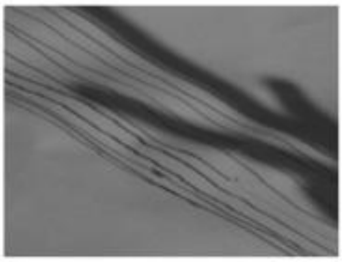
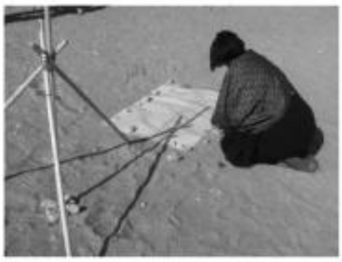
« Hyéronyme dit que Thalès mesura les pyramides grâce à leur ombre, ayant observé que notre propre ombre égale à notre hauteur » Diogène Laërce, Vie, doctrine et sentence des philosophes illustres ; Thalès, I, 27.

« Il a aimé ta façon de mesurer la pyramide en plaçant seulement ton bâton à la limite de l’ombre portée par la pyramide, le rayon de soleil engendrant deux triangles, tu as montré que le rapport de la première ombre à la seconde était aussi celui de la pyramide au bâton. mais on t’a aussi accusé de ne pas aimer les rois... » Plutarque, Sept. Sap. Conv. II, 147 A.

« D’où la figure du gnomon, axe ou piquet debout. Nous ne savons pas vraiment pourquoi l’axe ou l’essieu s’appellait gnomon, mais nous n’ignorons pas que ce mot signifie : ce qui comprend, décide, juge, interprète ou distingue, telle une règle qui permet de connaître. La mise en scène des ombres et de la lumière a lieu par interceptions de cette règle nommée ; appareil de connaissance. » Michel Serres, les Origines de la Géométrie.



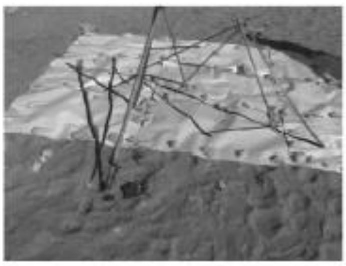


Chacun plante verticalement son bâton dans le sable aux abords d’une des trois pyramides.








Le rapport est fait entre la hauteur du bâton qui émerge du sable et la longueur de son ombre portée. Ce rapport est multiplié à la longueur de l'ombre portée de la pyramide voisine, du centre de sa base au point d'ombre du sommet, pour connaître sa hauteur.



II. L'ART POUR L'ARE

L'art pour l'art, formule employée pour la première fois par Victor Cousin (cours de philosophie de 1818), et reprise plus tard par Théophile Gautier, dans le sens où l'art n'a pas d'autre but que lui-même, qu'il porte en lui sa propre justification, qu'il ne vise pas l'utile mais le beau.

ARE

n. m. (lat. area, aire). Mesure agraire de superficie (cent mètre carrés). « Are, mesure agraire, est proche du latin area, dont on a fait aire, surface ; il offre l'avantage d'avoir une mesure plus commode pour les terrains précieux et les petites propriétés » Brunot, Histoire de la langue française, t.IX, p.1153, citant l'Instruction sur les poids et mesures de Prieur (1793). Quel plaisir il y aura désormais pour un père de famille à pouvoir se dire : le champ qui fait subsister mes enfants est une certaine proportion du globe. Je suis dans cette proportion là, copropriétaire du monde !

Hom. Arrhes, ars, art, hart.

ART est dessiné de façon à ce que l'aire du corps des trois lettres A, R et T fasse exactement un are.

L'art devient ainsi unité de mesure agraire de superficie.

La culture du mot ART change en fonction du lieu et du temps de l'installation.

L'ART a été planté, à Jouy-en-Josas, par des horticulteurs, en 1998, de 10 000 tulipes rose Toile de Jouy.

L'ART a été labouré, à Angers, par des ingénieurs agronomes, en 1999, pour l'almanach des mois en r. (l'art rare de l'araire aère l'aire d'un are d'art).

L'art étalon sera déposé en pierre calcaire, en Bresse, à l'image du mètre international en platine iridié, déposé au Pavillon de Breteuil.

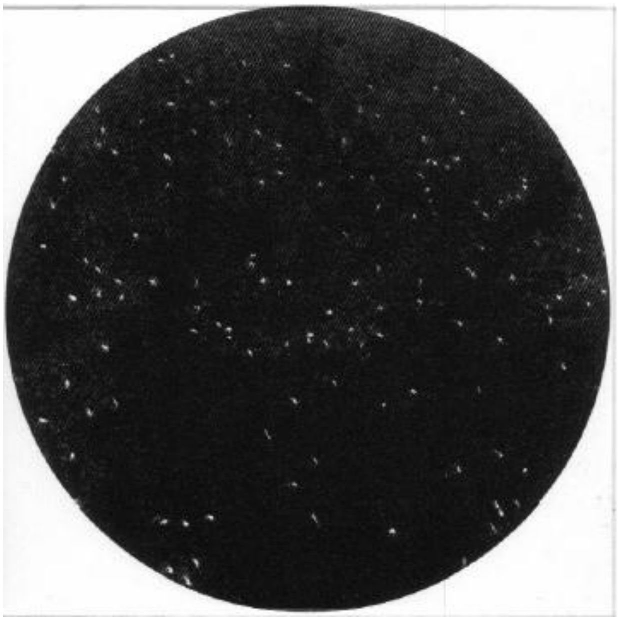
L'ART CULTIVÉ

L'art est affaire de culture. L'art pousse dans le champ de l'art. Il réclame des soins constants et doit être bien entretenu. On en écarte mauvaises herbes, pousses folles et sauvages, feuilles mortes séchées, saletés et déchets divers. L'art cultivé gagne à être bien exposé, cependant les séjours en serre ne doivent pas être trop prolongés sinon l'art s'habitue à des conditions climatiques artificielles. Il devient alors un art d'intérieur qui ne supporte pas les rigueurs du plein air. Un art quelque peu empoté. Résistant, robuste, vivace, l'art cultivé installé en pleine terre est un plaisir pour les sens. Conçu pour être admiré de tous les côtés, il offre un spectacle haut en couleurs. Il se bêche, se pioche, se bine, se taille, se sarcle, se socle, s'encadre. Ne vous contenter pas d'en ratisser la surface. L'art cultivé demande une certaine profondeur, de l'épaisseur, de la matière, des réseaux, des galeries. Il doit être fréquemment creusé et remué, il aime les courants, les mouvements. Il a besoin de soleil, d'eau, d'engrais. Mais attention aux parasites ! les gestes concrets valent mieux que les longs discours. Donc pas trop de théorie. Pas la peine de tourner autour du pot, de remuer ciel et terre, traitez à bon escient, sans produit toxique, et vous verrez la récompense.

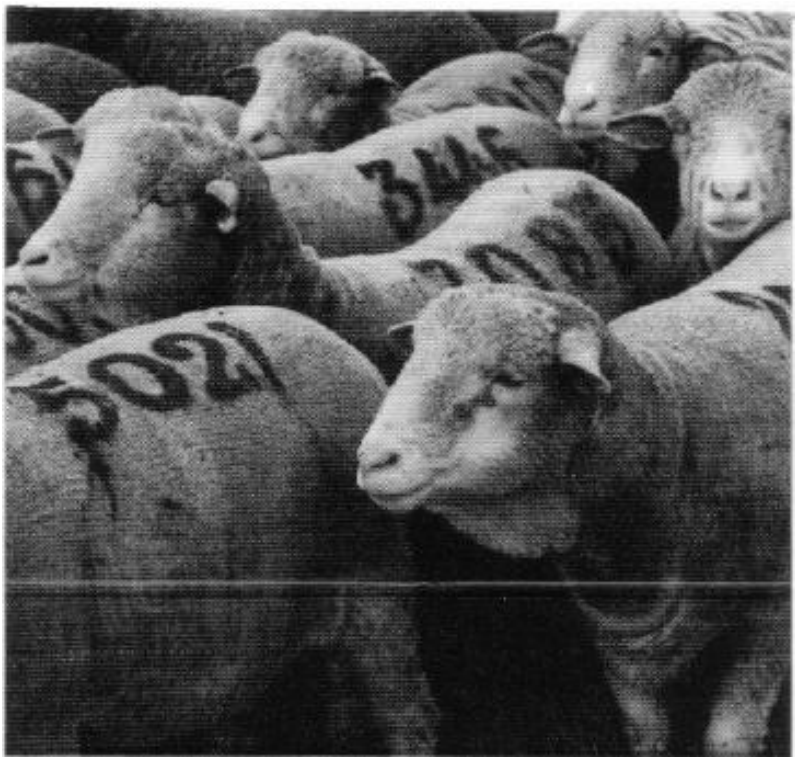
Pierre Tilman

III. LA CONSTELLATION DU BÉLIER

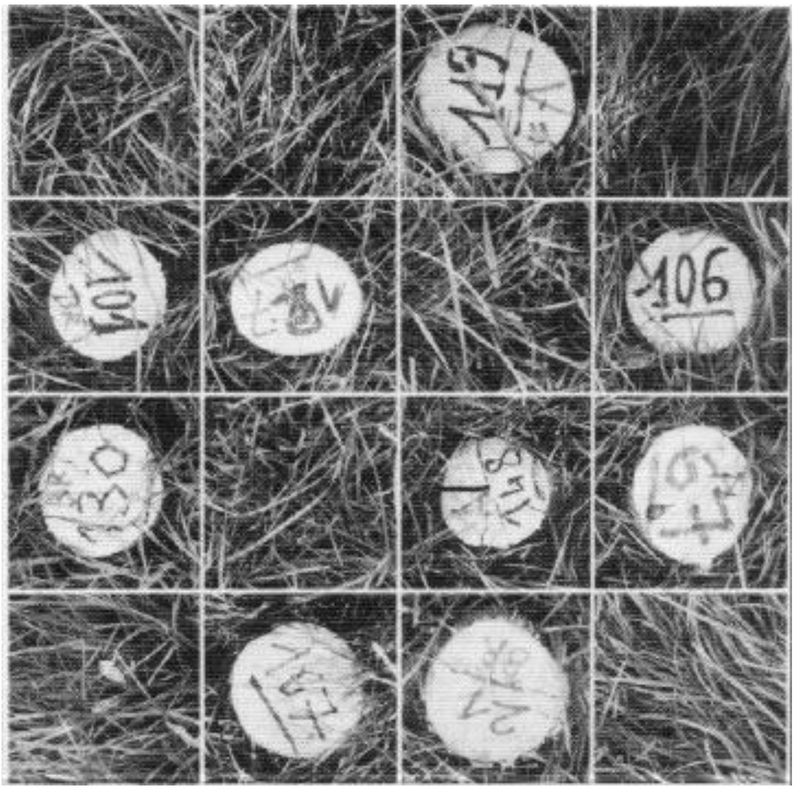
C'est une constellation qui s'impose naturellement dans une bergerie.

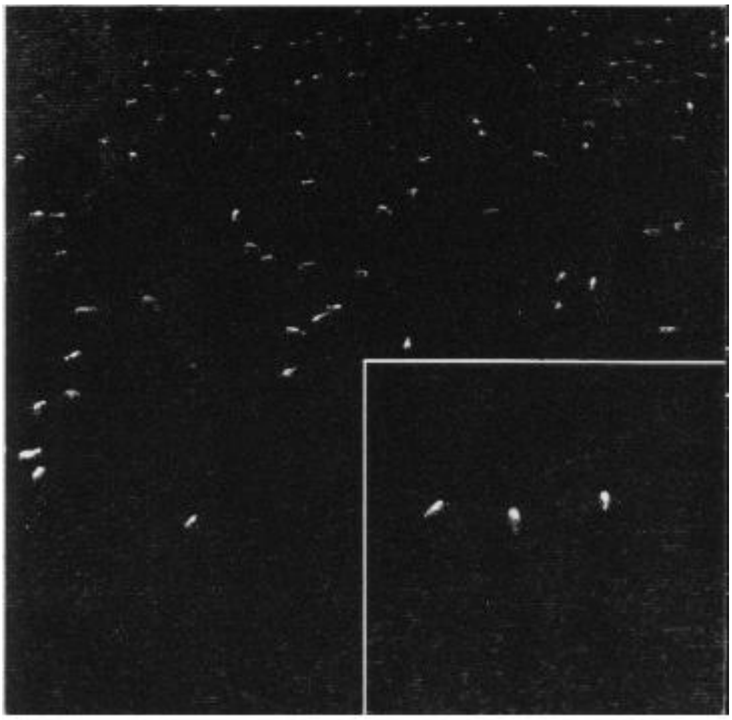


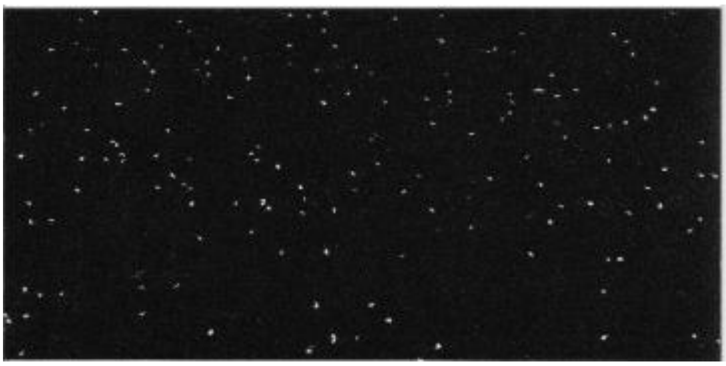
En projetant au sol, sur une prairie, un fragment de la voûte céleste, on obtient un champ stellaire.



Après avoir piqueté les étoiles sur l'herbe, on les remplace par des moutons, soit, en fonction des magnitudes, 110 agneaux, 58 brebis et 4 béliers. Ainsi, les béliers Hamel, Sheratan et Mesarthim, peuvent être, au moment où ils sont vus du ciel, à 78, 50, 148 et 172 années-lumière de la Terre.

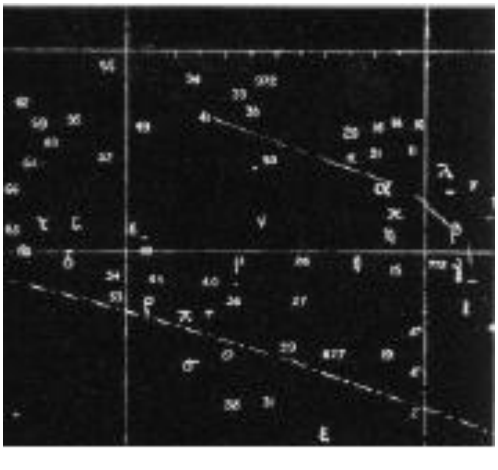

106
130

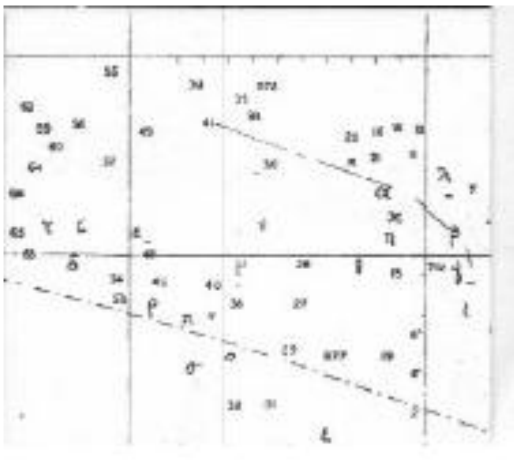




« Le 11 mai 1990, dans une prairie appartenant à la Bergerie nationale de Rambouillet l'artiste Joël Paubel réalisait le plus troublant et sans doute aussi le plus vaste trompe-l'œil de l'histoire de l'art. Il s'agissait de dessiner au sol, sur un hectare, et à l'aide de cent soixante-douze moutons, les cent-soixante douze principales étoiles de la constellation du Bélier telles qu'elles apparaissent à l'œil nu dans un ciel d'été parfaitement clair. Pour tenir compte de la magnitude de chaque astre, les moutons devaient être de tailles différentes. C'est donc avec le plus grand soin que furent sélectionnés dans le troupeau de la bergerie quatre béliers, cinquante huit brebis et cent dix agneaux mérinos. Le plus difficile restait à faire : définir dans la prairie, et pour chaque animal, la position exacte qu'il devrait occuper. Comme l'explique Joël Paubel, « les coordonnées des étoiles, données en heures-minutes-secondes et degrés-minutes-secondes sur la voûte céleste furent converties en mètres ». Des pieux numérotés, correspondant à la position de chaque astre, furent alors plantés dans le sol. Quand aux animaux, ils se virent imprimer sur le dos le numéro du pieu correspondant à la position de l'étoile et à sa magnitude. Il ne restait plus qu'à attacher chaque mouton à son pieu et à réaliser, de nuit, une photo aérienne de la prairie. Et c'est ainsi que sauf étude attentive à la loupe, rien ne permet de distinguer réellement une photo de la constellation du Bélier de celle de sa représentation dans la prairie de Rambouillet. Lorsqu'on regarde, sur cette dernière, les trois plus gros animaux, au milieu d'agneaux infiniment plus petits, mais dont le dos blanc se détache parfaitement sur l'herbe sombre de la prairie enténébrée, c'est exactement comme si l'on regardait dans le ciel les étoiles Hamel, Sheratan et Mesarthim situées respectivement à soixante-dix-huit, cinquante et cent-quarante-huit années-lumière. »

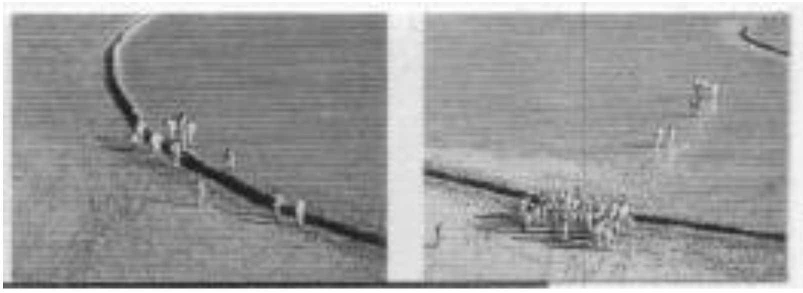
Marcel Cohen, in « FAITS, lecture courante à l'usage des grands débutants », NRFf Gallimard.



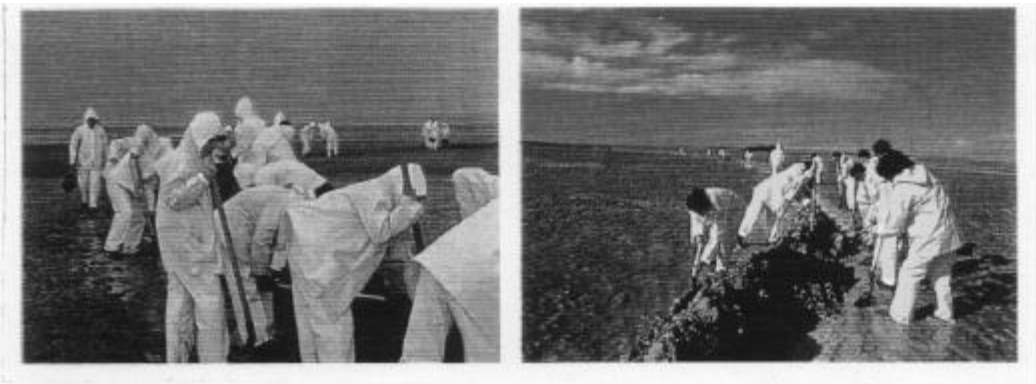


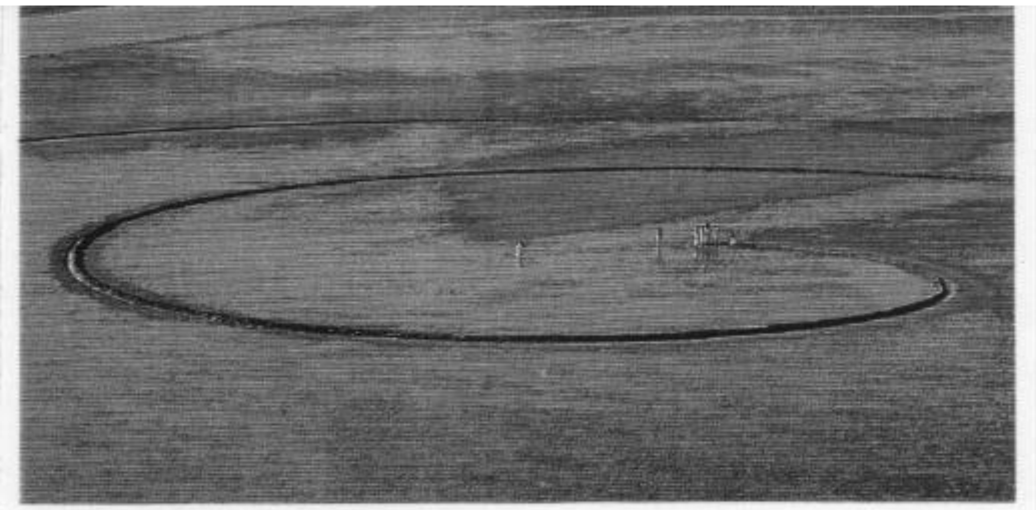
IV. LE MONT SAINT-MICHEL

Dessiner une spirale d'Archimède au Mont Saint-Michel requiert de grandes marées et de bonnes conditions géographiques et météorologiques. Cinquante personnes armées de pelles, habillées de bottes et de cirés, sont nécessaires à l'entreprise. Il nous faut quatre à cinq heures, à marée basse, pour creuser un trait d'un mètre de profondeur et d'une longueur d'un kilomètre sept cent cinquante mètres. Le sable retiré est tassé au bord extérieur du trait. Un triangle de sable visible avant le recouvrement total de la baie par la mer, les trois rivières, la See, la Selune et le Couesnon, les monts Saint-Michel, Doll et Tombelaine, incitent à travailler avec trois centres. Quelques personnes tracent la spirale au cordeau, à partir des pieux plantés sur les trois sommets du triangle maintenant repéré. Six spires sont nécessaires au dessin complet de la spirale. Le cordeau tiré pour tracer la dernière spire à une longueur de deux-cent-cinquante mètres. Le chemin intérieur au Mont, emprunté par les pèlerins pour accéder à l'Archange, a la forme d'une vis. La spirale de la baie est la projection plane du chemin. À marée haute, la mer, canalisée par le talus extérieur, contourne la figure, va jusqu'au centre de la spirale et la remplit. Pendant quelques minutes, nous ne voyons plus que le relief du talus qui dessine parfaitement la spirale au dessus de l'eau avant que le dessin ne disparaisse définitivement. Il faut, suivant la force de la marée, cinq à vingt minutes à la mer pour effacer la spirale. C'est au moment des marées des solstices et des équinoxes que des équipes de creuseurs se manifestent pour faire ou refaire la spirale du Mont Saint-Michel.



Les habitants et les touristes du Mont ne savent jamais par avance si une spirale se dessine ou non pour telle ou telle marée. Prêt à partir, j’ai toujours, dans mon sac à dos, les horaires des marées du Mont Saint-Michel, la coque d’un nautile, les photographies de « A sculpture left by the tide » de Richard Long et de « Spiral Jetty » de Robert Smithson.





RÉFÉRENCES DE QUELQUES TRAVAUX

Installations personnelles récentes :

Décembre 2001 :

« la Carte du tendre », collages&vidéo,
« Passage d'encre n°16 », Salle Cassini de l'Observatoire de Paris.

Avril 2001 :

« Autour des Paysages d'Eugène Viollet-Le-Duc », Musée Lambinet à Versailles.

Mars 2001 :

« L'Art comme unité de mesure agraire de superficie », École d'agronomie d'Angers.

Mai 1998 :

« Installation rurale, sauvage et domestique », Musée de la Toile de Jouy.

Avril 1998 :

« L'Are pour l'Art », parc de Técomah à Jouy-en-Josas.

Manifestations collectives récentes :

Septembre 2003 :

« Minimaousse », galerie virtuelle de l'Institut français d'architecture,

Septembre 2002 :

« Qu'est-ce que l'art domestique? », Cité internationale universitaire de Paris,

Juillet 2001 :

« Paysage interrogé / manipulé », centre d'art du Tremblay, Yonne,

Août 2000 :

« Oeuvres monumentales », Cavalaire-sur-Mer,

Juin 2000 :

« Jardins vivants », Musée-promenade de Marly le Roi,

Juin 2000 :

« Les Environnementales », Técomah, Jouy-en-Josas,

Mai 2000 :

« Bluetit », Spode Museum, Stoke-on-Trent, England,

Avril 2000 :

« Pattern Transfer », Waygood Gallery, Newcastle-upon-Tyne, England, *L'are pour l'art*

Décembre 1998 :
« Silence-Voix », Passage d'encres n°9, Maison des Écrivains, Paris.

Commentaires

Mars 2004 :
« la Terre », Isabelle Rossignol, France-Culture

Janvier 2003 :
« la carte du tendre » le Monde / Aden

Janvier 2003 :
« la constellation du bélier » in « Faits », Marcel Cohen éditions Gallimard

Mai 2001 :
« Viollet-Le-Duc & Paubel », Aude Revillon, Musée Lambinet de Versailles.

Juin 2000 :
« Les Environnementales », Didier Semin, Técomah.

Avril 1999 :
« Bravo l'artiste », Marc Dupuis, le Monde de l'éducation.

Mai 1998 :
« L'Art cultivé », Pierre Tilman, Técomah.

Mai 1998 :
« Installations », Didier Cahen, Musée de la Toile de Jouy.

Partenaires

Ministères de l'Éducation, de la Culture et de l'Agriculture, directions régionales des affaires culturelles de Haute-Normandie, de Bourgogne, d'Île-de-France, musée de la Toile de Jouy, musée-promenade de Marly-le-Roi-Louveciennes, musée Lambinet de Versailles, villes de Versailles, de Saint-Germain-en-Laye, de Cavalaire-sur-Mer, Chambre de commerce et d'industrie de la ville de Paris, Cité Culture, Château de Branda et autres collections privées.

FORUM

PRÉAMBULE

Tout au long des années passées, la Copirelem s'est attachée à faire fructifier, en l'actualisant, le capital de connaissances constitué au sein des écoles normales, et à y intégrer, en les faisant vivre, les travaux les plus récents issus de la recherche en didactique des mathématiques concernant l'enseignement des mathématiques à l'école.

Pour transmettre ces connaissances, la Copirelem s'est appuyé sur les colloques annuels et sur les séminaires de formation à l'intention des nouveaux formateurs.

Les divers documents produits, actes des colloques, des stages et des séminaires de formation, constituent une mémoire vive de toutes les connaissances accumulées, et leur diffusion contribue à développer une culture commune, permettant ainsi de faire exister une véritable communauté de formateurs des professeurs des écoles en mathématiques.

Nous avons souhaité faire de ce trentième colloque un moment privilégié pour porter notre intérêt sur la manière dont ce capital d'outils pour la formation des maîtres en mathématiques se transmet aux nouveaux formateurs.

Cela peut constituer pour nous une occasion de porter un regard sur le travail de la Copirelem tout au long de ces trente années, et par là-même, une opportunité pour tracer des perspectives d'avenir.

C'est pourquoi il nous a semblé intéressant de donner la parole à des formateurs en IUFM, récemment arrivés dans leur fonction, qui, dès leur intégration dans le réseau des formateurs, ont participé à des actions proposées par la Copirelem, colloques et séminaires de formation de nouveaux formateurs.

Chacun des intervenants raconte, à sa manière, à partir de sa propre expérience et de son histoire personnelle, son arrivée dans la fonction de formateur et sa rencontre avec la Copirelem.

Chacun décrit ses premiers pas en formation et raconte comment sa pratique de formateur s'est nourrie à la fois de l'échange avec les formateurs plus expérimentés lors des colloques et séminaires, mais aussi des productions écrites, actes de colloques, documents de formation rassemblant les savoirs et expériences de formation.

Nous pensons que l'évocation, par ces formateurs, de la manière dont ils se sont appropriés les connaissances proposées par la Copirelem peut, en rendant visible le processus de transmission des savoirs de formation, contribuer à conforter certains modes d'action, à légitimer certains modes de communication des connaissances, ainsi qu'à stimuler la vitalité du réseau de formateurs des professeurs des écoles en mathématiques.

Cela peut en premier lieu, inciter de nouveaux formateurs à prendre à leur tour une part active dans la recherche et la production de nouveaux savoirs de formation, et, en second lieu, fournir des pistes pour des actions futures.

Yves Girmens
Coresponsable de la Copirelem avec Catherine Taveau.

INTRODUCTION

Philippe Chaussecourte,
IUFM de Paris

Résumé :
Dans cette introduction au forum, l'auteur rend hommage à la COPIRELEM, particulièrement dans ce qu'elle a pu représenter pour lui au moment de sa prise de fonction comme formateur à l'IUFM de Créteil.

Après cette présentation d'Yves Girmens et sous les regards impressionnants de Guy Brousseau et François Huguet, il m'appartient, selon l'organisation prévue pour ce forum, de témoigner en premier du rayonnement et de l'impact de la Copirelem. C'est une tâche un peu paralysante vu le cadre de ce forum, mais, en même temps, une tâche qui va me permettre de rendre publique cette dette que j'estime avoir toujours eue à l'égard de la Copirelem.

Mon témoignage est singulier ; il est le fait d'une seule personne et je ne saurais dire s'il est représentatif ; mais c'est justement le rôle de ce forum de proposer des témoignages de formateurs qui, par leur pluralité, leur diversité, mais aussi leurs concordances, vont peut-être offrir à chacun des possibilités d'identification.

Mon témoignage est également singulier au sens de particulier, voire d'un peu marginal. Je vais dans un premier temps expliciter cela. Ensuite j'évoquerai ce que représente pour moi la Copirelem. Puis, je laisserai la parole à Guy Brousseau.

Quelques mots d'un itinéraire

Je pourrais dire que j'appartiens à cette catégorie de formateur qui a été sensibilisée aux travaux de la Copirelem par son interface avec la didactique des mathématiques. Les rapports entre la didactique des mathématiques et la Copirelem ont déjà été évoqués hier, notamment sur un plan historique, lors de la table ronde : les tableaux chronologiques proposés par Marie-Lise Peltier nous ont permis de prendre conscience de l'intrication de ces histoires.

Ici, en quelque sorte, il s'agit pour moi de détailler une trajectoire singulière de rencontre entre le formateur que je suis et la Copirelem. Et donc je dois préciser d'où je parle, c'est-à-dire un peu qui je suis professionnellement.

Je suis d'abord devenu apprenti-chercheur dans le cadre d'un DEA de didactique des mathématiques à Paris VII, tout en enseignant en collège concomitamment. À l'issue de ce DEA, après donc 9 années d'exercice en tant qu'enseignant dont 6 en Seine-Saint-Denis, j'ai été recruté comme PRAG, d'abord à l'IUFM de Créteil, puis à celui de Paris. Une partie des formateurs a également emprunté cet itinéraire pour ensuite parfois le poursuivre dans la réalisation d'une thèse. Tel est mon cas d'ailleurs, mais cette thèse a pour cadre, et c'est là par rapport à certains collègues mon particularisme, cette thèse a pour cadre donc, les sciences de l'éducation. Mon travail s'effectue sous la direction de Claudine Blanchard-Laville ; certains d'entre vous se souviennent peut-être de la conférence de notre équipe intitulée *Mélanie, tiens, passe au tableau* lors du XXVIIIème colloque Copirelem de Tours. En mentionnant cela, je ne m'éloigne pas de mon propos : je veux en effet souligner un aspect de la Copirelem, à savoir son souci de faire entendre diverses approches et de permettre, lors des colloques, des expressions plurielles sur l'enseignement des mathématiques.

De la copirelem …

Des femmes et des hommes de bonne volonté

Devant évoquer ici la Copirelem, comment la définirais-je dans un premier temps ? Je dirai d'abord, en paraphrasant Jules Romains : « La Copirelem, pour moi, c'est un réseau de femmes et d'hommes de bonne volonté ». Et il n'y a pas là du tout de nuance péjorative, bien au contraire. Quand j'ai pris mon poste à l'IUFM de Créteil, j'étais donc professeur de mathématiques en collège. Il m'a fallu, comme chacun des formateurs nommés en IUFM enseignant initialement dans le second degré, me débrouiller pour m'acculturer au premier degré. C'est surtout auprès de membres de la Copirelem que j'ai trouvé de l'aide. Et ceci très concrètement : je dirais qu'ils m'ont ouvert leurs cuisines, comme des experts concernés par la transmission peuvent le faire : Catherine Taveau et Marie-Lise Peltier m'ont consacré du temps, m'ont donné des notes de cours, m'ont permis de verbaliser mes craintes et d'élaborer mes questionnements de formateur. Elles m'ont fourni des points de repères pour la construction de ma première année, en sachant me parler un langage que l'enseignant que j'avais été, comme elles l'avaient été, pouvait comprendre. Ces points de repère reposaient sur leur expérience mais sur une expérience distanciée que leur participation à la Copirelem avait contribué à élaborer. Sur place, à Livry-Gargan, Muriel Fénichel et Marcelle Pauvert m'ont éclairé de leurs conseils… Lorsque, formateur moins novice, j'ai posé des questions notamment par courriel à Marie-Hélène Salin au sujet de la maternelle ou de l'AIS par exemple, j'ai toujours reçu des réponses.

Donc ce premier élément fondamental pour moi : la Copirelem, ce sont des interlocuteurs disponibles autant que leurs emplois du temps accaparants le leur permettent, et une culture suffisamment commune, digérée, réfléchie et distanciée pour être partagée.

Des ressources documentaires

Outre cet aspect humain primordial, la Copirelem c'est aussi pour moi une source de documents. Lors des premiers contacts avant ma prise de fonction, m'ont été données les références de quelques incontournables. Parmi eux, ce que j'imagine que chacun de nous connaît, les fameux tomes des *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques* dont un best-off vient de sortir. Ils ont été la base des séances que j'ai proposées aux PE ; et une base efficace, concrète, avec par exemple des indications de durée dont on sait que c'est une appréciation difficile à effectuer. C'est aussi par ces documents que j'ai eu l'occasion de prendre connaissance d'une partie de mon histoire professionnelle dans ce créneau très précis qui me concernait : l'enseignement des mathématiques en formation, par des gens sachant de quoi ils parlaient. Ces documents m'ont aussi donné l'impression d'appartenir à une communauté qui existait et qui était forte. Rédigés notamment par des professeurs d'école normale, ils ont permis la transmission de cette culture et donc assuré une certaine forme de continuité malgré les changements institutionnels. Lorsque j'évoquais cela avec mes collègues nouvellement nommés à l'IUFM dans d'autres disciplines, j'appréciais encore davantage la chance de bénéficier de ces ressources et de cet héritage.

Il me faut également mentionner parmi ces documents, les annales des concours PE1, les documents formateurs les accompagnant parfois, ainsi que les *actes des récents colloques* et les *cahiers du formateur*. Je n'ai pas le temps de tout détailler et les collègues ici présents évoqueront certainement leur rapport à cela.

Des colloques et des séminaires

Et j'en arrive à ce qui est pour moi le troisième point fort de la Copirelem : l'existence des colloques d'une part et des séminaires pour les nouveaux formateurs d'autre part. Là encore, chance formidable et j'en profite pour remercier Denis Butlen, j'ai pu participer à un colloque juste avant d'être en fonction à l'IUFM : ce fut à Loctudy en 1998. Les colloques ont évidemment été l'occasion de transmission d'informations lors des ateliers, des conférences et des communications dont j'ai souligné la diversité. Mais également, et de façon non négligeable, ils m'ont permis de rencontrer les collègues des autres IUFM, d'échanger d'une part sur les pratiques de formation, mais aussi sur les structures de nos plans de formations. Et le formateur de base que je suis n'a jamais eu d'autres occasions que celles-là de savoir précisément ce qui pouvait se faire ailleurs, et dans quel cadre. Face à des interlocuteurs de mon administration d'IUFM, pouvoir évoquer d'autres pratiques dans un cadre réglementaire analogue, celui de l'IUFM, a pu être à certains moment un argument de poids. Ces colloques ont été aussi, paradoxalement peut-être, l'occasion de créer des liens privilégiés avec les collègues de mon propre IUFM qui y participaient, ce que la folie des emplois du temps ordinaires, vous le savez bien, ne permet pas toujours.

Quant aux séminaires pour les nouveaux formateurs, ils m'ont permis de revivre dans un cadre plus collectif ce dont j'avais bénéficié individuellement, sans avoir trop, ces fois-là, le sentiment d'abuser puisqu'ils étaient organisés pour cela : ils m'ont à chaque fois donné des idées, ouvert des voies, montré des chemins…

En guise de conclusion…

Je ne peux conclure ma brève intervention sans évoquer la Copirelem comme l'élément d'une constellation plus large autour de l'enseignement des mathématiques et de la recherche en didactique ; et c'est certainement à ceux qui ont été à l'origine de tout cela que nous le devons : dans cette constellation, il y a des instituts comme les IREM mais aussi des universités avec leurs DEA et leurs équipes d'accueil, des revues comme Grand N ou Petit x mais aussi comme la RDM, des documents comme les actes des colloques mais aussi des thèses comme celles d'animateurs de la Copirelem justement…

Et puis, je le redis avec gratitude, comme éléments moteurs de tout cela, intervenant à la fois à plusieurs endroits de la constellation, en étant eux-mêmes partout, dans leur riche complexité, et donc assurant une cohérence à cet assemblage, des femmes et des hommes de bonne volonté, à qui je ne peux que dire : MERCI.

CE QUE M'A APPORTÉ LA COPIRELEM

Sylvie Grau
IUFM des Pays de la Loire

Que m'a apporté la COPIRELEM ?

Pour moi l'apport est évident puisque, lorsque j'ai pris mes fonctions à l'IUFM des Pays de La Loire, il n'y avait plus aucun enseignant en mathématiques premier degré et aucun accompagnement n'avait été prévu pour la prise de fonction dans la discipline.
Cela ne m'a pas étonnée car j'ai l'habitude :
Je suis devenue institutrice en passant le concours FIS DEUG 83. Et déjà la formation initialement prévue sur deux ans, a été réduite à quelques mois. La première année j'ai été nommée sur mon premier poste sans aucune formation, et la seconde on m'a envoyée à l'École Normale des vacances de la Toussaint aux vacances de Pâques seulement, car il n'y avait pas suffisamment de remplaçants. Lorsque, dix ans plus tard, je passai le CAPES de mathématiques, j'avais trop d'ancienneté pour pouvoir bénéficier d'une formation. On m'a donc nommée le jour de la pré-rentrée sur un mi-temps lycée et un mi-temps collège sans plus de préparation !

Revenons à ce que m'a apporté la COPIRELEM :

1. La COPIRELEM a été pour moi l'occasion de ***cadrer mon travail***, de réajuster des choix, de me conforter dans ma pédagogie (basée essentiellement sur l'homologie), de mettre en mots, de conscientiser mes actions, de comparer les divers fonctionnements des IUFM et donc de pouvoir intervenir auprès de mon propre IUFM pour faire évoluer certaines choses (rythme annuel, rôle de l'analyse de pratique, des visites, de la vidéo...).
2. J'ai pu me procurer ***une documentation*** efficace qui me sert quotidiennement de référence: actes, cahiers du formateur, annales, et, petit à petit, les brochures en fonction de mes centres d'intérêt et de recherche. Merci pour l'initiative d'un regroupement thématique de ces documents.
3. La rencontre avec les collègues et chercheurs permet de continuer ***la réflexion***, de changer d'angle de vue (linguistique, histoire des mathématiques, institution...), de s'ouvrir à des problématiques nouvelles (mixité et mathématiques).
4. Le lieu est propice à ***des échanges*** et travaux, surtout aux séminaires, car nul n'est considéré comme supérieur à l'autre. On a simplement l'impression de tous chercher ensemble et la notion d'accompagnement prend tout son sens. L'écoute est réelle. Tous les documents ou aides sont toujours transmis (ce qui n'est pas le cas dans mon IUFM). L'alternance formateur/formé contribue à intégrer les nouveaux arrivants et à créer une culture commune. La rencontre de personnes motivées et investies donne envie de continuer malgré tous les problèmes rencontrés lorsqu'on est isolé dans son centre.
5. ***L'esprit*** dans lequel les mathématiques sont étudiées renforce l'idée que je me fais des mathématiques comme moyen de comprendre et anticiper le monde, et

donc comme élément indispensable à l'épanouissement de tout citoyen. C'est un point de vue qui est aussi politique, la défense d'un enseignement des mathématiques de qualité est un combat pour la démocratie et la liberté.

Pour toutes ces raisons, merci. Mais merci aussi pour la gentillesse et le professionnalisme, l'expérience et la convivialité, la joie de vivre et l'attention. Merci et bonne route !

UTILISATION DES TRAVAUX DES SÉMINAIRES ET COLLOQUES DE LA COPIRELEM

Joëlle Tremeje
Claire Winder
IUFM de Nice, site de Draguignan

Introduction

Nous avons participé à plusieurs séminaires et colloques et nous avons choisi de parler plus précisément des travaux auxquels nous avons participé à Tours, Maxéville et La Roche sur Yon en 2001 et 2002 .
Nous travaillons dans le même centre IUFM (centre de Draguignan - IUFM de Nice) et nous avions décidé de participer à des ateliers différents de façon à mutualiser les différentes pistes de travail qui nous étaient offertes.
Nous avons utilisé depuis plusieurs de ces travaux, sous deux formes différentes : en tant qu'outils pour nos interventions, ou pour impulser et soutenir de nouvelles pratiques (tant les nôtres que celles des stagiaires).

1. Des matériaux pour nos interventions

Utilisation d'un triangle gabarit pour tracer des droites remarquables dans un triangle (intervention de Claude Maurin au cours du séminaire de Maxéville, en novembre 2001)

> * Activité manipulatoire utilisée en Formation Continue 2nd degré, en suivant le scénario proposé pour des PE1.

Grille d'évaluation des logiciels de mathématiques (élaborée dans l'atelier animé par Bruno Canivenc, Joêl Denisot et Pierre Eysseric, lors du colloque de Tours en mai 2001)

> * Aide pour la mise en place de critères d'analyse de logiciels en formation continue

Exploitation didactique de l'évaluation 6ème (présentée en atelier par Patrick Wieruszewski au colloque de Tours en mai 2001)

> * Illustration d'une intervention sur l'évaluation en PE2 et en formation continue.

Utilisation de la vidéo (travail en atelier avec Yves Girmens lors du colloque de La Roche sur Yon en mai 2002)

> * Réflexion autour de l'utilisation de la vidéo visant à un meilleur cadrage des objectifs et à la mise en place de modalités d'analyse de séquences vidéo.

2. Des points d'appui pour la modification d'une pratique (la nôtre et celle des stagiaires)

Le verre d'eau (vidéo) (atelier animé par Joël Briand et Marie-Lise Peltier lors du séminaire de Maxéville en novembre 2001)

* Utilisation avec des PE2, en début d'année, avant le stage en tutelle, d'une vidéo réalisée selon le scénario proposé, dans la classe d'un collègue IMF de Draguignan.
Objectif : Préparation à l'observation d'une séance (phases de la séance, comportement des élèves, du maître…) et support pour la création d'une fiche de préparation (voir travaux de Catherine Houdement et Marie-Lise Peltier[1])*, mise en avant des difficultés à gérer les situations - problèmes.*

Aires de formation (atelier animé par Catherine Houdement et Marie-Lise Peltier lors du séminaire de Maxéville en novembre 2001)
* Stratégie d'homologie en PE1 pour aborder le module « Grandeurs et mesures ». Il s'agit d'une stratégie de formation, conçue pour être homologue à une stratégie préconisée pour les élèves (mise en activité des élèves, mise en commun, et synthèse suivie d'une institutionnalisation)
Conséquence : Utilisation d'une telle stratégie dans d'autres modules, par exemple en géométrie plane à partir de supports issus de publications de l'IREM (la fleur, le losange…), mise en évidence des compétences relatives à la reproduction, la construction et la description de figures.

Conclusion :

Il s'agit ici, pour nous, d'une première forme d'utilisation de ces documents.
Nous pensons, bien sûr, que ces mêmes documents pourraient être exploités différemment. Nous y réfléchissons….

Références des situations utilisées :

Actes du XXVIIIème colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres, Tours, mai 2001.

Les cahiers du formateur - Tome 5, Documents pour la formation du professeur en didactique des mathématique, Séminaire de Maxéville, nov. 2001 :

Actes du XXIXème colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres, La Roche sur Yon, mai 2002.

[1] Grand N n° 59, 1996-1997, pp. 77-84

COMMUNICATIONS

ESPACES DE TRAVAIL GÉOMÉTRIQUES

Alain Kuzniak
IREM de Strasbourg
Didirem Paris 7
kuzniak@math.u-strasbg.fr

Résumé :
L'étude de la géométrie enseignée conduit à introduire la notion d'espace de travail de la géométrie. Comment aller au-delà de la simple, et peut-être naïve, constatation de la nécessaire existence d'un lieu où s'exerce l'activité du géomètre qu'il soit expert ou élève ? Dans cette communication, j'essaie de répondre à cette question en développant les deux types d'enjeux constitutifs des espaces de travail : l'enjeu épistémologique et l'enjeu didactique.

INTRODUCTION

Un élève qui résout un problème de géométrie se place de fait dans un espace particulièrement complexe constitué d'objets visibles comme les figures, il peut aussi utiliser des outils physiques comme les instruments de dessin pour expérimenter, des outils conceptuels comme les définitions et les propriétés pour raisonner. Ce lieu de l'activité géométrique paraît si naturel et si évident qu'il en devient transparent et quasiment invisible. Le propos de cette présentation est de tenter de le préciser et de le mettre en relief. L'étude de cet espace que nous désignerons désormais sous le terme d'espace de travail géométrique (ETG) est double et renvoie à deux sortes d'enjeu. Le premier enjeu de type épistémologique consiste à décrire un lieu optimisé et idéalisé où il est possible de résoudre sans turbulences les problèmes de géométrie. Mais de fait les utilisateurs de cet ETG idoine sont souvent des individus néophytes ou non-spécialistes, il importe alors d'étudier et de comprendre leur ETG personnel, ceci constitue l'enjeu didactique.

Le thème présenté dans cette communication est encore en mouvement, non stabilisé et bien imparfait[1], notre souhait est que le lecteur puisse s'y intéresser et ainsi le faire évoluer.

UN EXEMPLE : DE LA COUTURE À LA COUPE GÉOMÉTRIQUE

Nous commençons par donner un exemple extrait d'un manuel de cours complémentaire pour jeunes filles publié en 1911[2] et qui porte le titre rare de « géométrie expérimentale » avec le sous-titre « appliquée aux travaux de la femme ». Dans cet ouvrage, l'auteur tente d'établir un pont entre la géométrie et la coupe en couture en parlant d'une « géométrie de coupe géométrique, c'est-à-dire scientifique ».

---

[1] Certains oseraient dire « en travail »
[2] Lacabe-Plasteig paru chez Félix Juven.

Cet appui mutuel consiste à introduire les termes et les définitions géométriques à partir de supports liés au monde de la coupe, notamment les étoffes : c'est ainsi que les plis et les fils de l'étoffe jouent un rôle prédominant.

> *Dans la pratique, on considère les fils de chaîne, appelés simplement* fils*, et les fils de trame, appelés* duites*, comme étant perpendiculaires les uns aux autres. Quand la droite à tracer est perpendiculaire à la chaîne ou à la trame, il suffit d'épingler un fil, une duite et leur point de croisement, pour déterminer un angle droit (p. 20).*

Des expériences sont proposées pour dégager certaines propriétés comme dans le cas des droites parallèles. Enfin, le va-et-vient entre les remarques sur les objets et les applications apparaît nettement dans les activités de construction des figures objets de la coupe comme ici le losange :

> *Il est facile de couper rapidement un losange de diagonale donnée, ou de coté connu. Remarquons, à cet effet, que si l'on fait tourner une portion de losange autour de l'une ou l'autre diagonale, la partie mobile recouvre exactement la partie fixe. Après deux plis à angle droit, on obtient quatre triangles rectangles superposés. Par suite, si l'on veut découper un losange dans une étoffe, on la plie sur elle-même pour former quatre angles droits autour d'un point ; puis, d'un seul coup de ciseaux, dirigé suivant l'hypoténuse d'un triangle rectangle, on coupe les quatre épaisseurs ; on déplie (p. 63)*

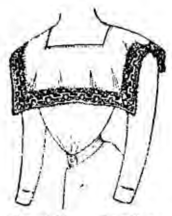


Fig. 161. — Berthe.

47. Une berthe (*fig. 161*) est formée d'un empiècement carré de 62^{cm} de côté ; son échancrure est un carré parallèle aux côtés de l'empiècement, qui mesure 23^{cm} de côté. La dessiner au quart de sa grandeur ; lui composer un entre-deux comme bordure. En tailler le patron.

Les exercices mettent en œuvre les constructions découvertes pour aboutir à des objets plus complexes.

Cet exemple, volontairement choisi hors du contexte actuel, vise à dégager un certain nombre de problèmes.

1. La constitution d'un espace de travail géométrique en interaction forte avec le monde réel avec la confusion possible entre l'objet géométrique et son origine concrète[3].
2. La nature effective de cet espace pour les différents usagers. Le novice risque de ne voir ici qu'un travail de couture inutilement compliqué par des considérations annexes, le maître pense faire de la géométrie de type théorique, l'expert perçoit l'oscillation entre ces deux univers.
3. La question de l'élaboration d'un modèle théorique à partir de la réalité et en retour l'application possible de ce modèle à la réalité.

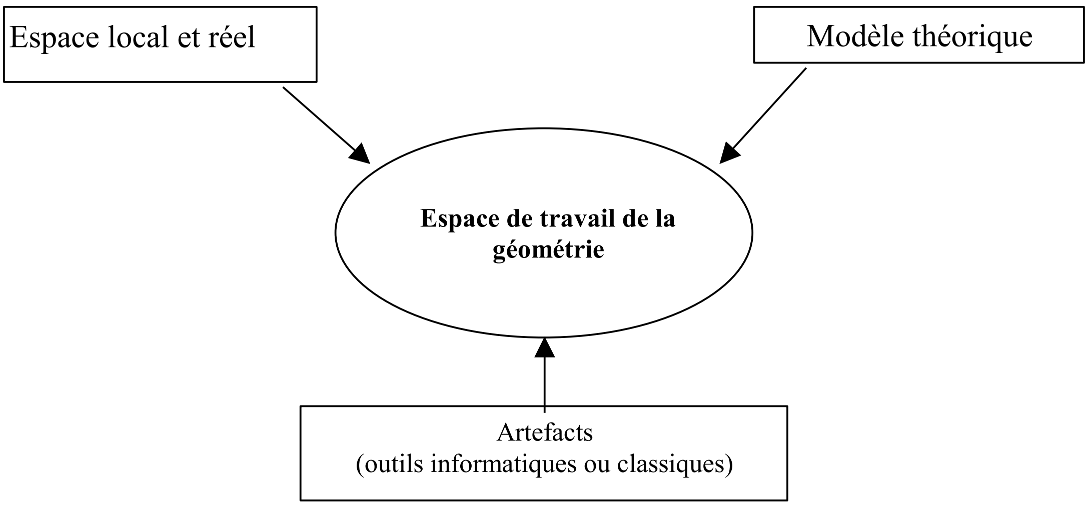
[3] Dans notre terminologie, il s'agit là d'un cas de Géométrie I dont l'horizon on le sait est technologique.

VERS UNE DÉFINITION DE L'ESPACE DE TRAVAIL IDOINE.

Pour éclairer notre conception de l'espace de travail, nous allons faire référence à la reconstitution dans un musée, par un ethnologue, d'un atelier de forgeron. L'ethnologue disposait de l'atelier originel non utilisé depuis la mort du forgeron. Au cours du travail de prise d'indices et de mesure, il commença à entrer dans les pas du forgeron, à comprendre l'agencement et l'économie des objets autour de la forge. Il put alors reconstituer non plus seulement un lieu inerte mais l'espace de travail de ce forgeron et ainsi expliquer l'usage de certains instruments liés à l'histoire de l'utilisateur ou à la fonction particulière de cette forge dédiée au ferrage des chevaux.

L'espace de travail de la géométrie sera un lieu habité que l'on peut approcher à partir de certaines de ses composantes mais dont le sens complet dépend de la fonction et de l'utilisateur. Pour définir l'ETG idoine, il faudra décrire la fonction et la composition de l'espace de travail de manière idéale. Lorsqu'on s'intéressera à l'utilisateur spécifique, c'est l'ETG personnel qui interviendra.

L'espace de travail idoine doit permettre des articulations entre plusieurs éléments dont les plus caractéristiques nous semblent être le modèle théorique, l'objet géométrique et un milieu matériel. Ainsi, nous appellerons *espace de travail de la géométrie,* ce lieu organisé par et pour le géomètre où se mettent en réseau les trois pôles [voir figure] que sont l'espace réel et local en tant que support matériel, l'ensemble des artefacts qui seront les outils et instruments mis au service du géomètre et enfin un modèle théorique qui définira le type de géométrie utilisée.



La précision des diverses composantes va se faire en relation avec la nature de la Géométrie mise en jeu. Il y a en effet un lien dialectique qui s'opère entre les composantes et le paradigme de référence. Ce dernier permet d'interpréter les contenus des composantes qui en retour par leurs fonctions différentes participent à la spécificité des différents paradigmes. Nous serons souvent confrontés à cet apparent paradoxe qui fait définir comme géométrique la fonction d'un objet lorsqu'il intervient dans une géométrie que nous essayons justement de mieux définir.

Espace local et réel

Il est bien sûr difficile de préciser l'espace qui fait l'objet de la géométrie puisqu'en quelque sorte pouvoir décrire l'espace support est l'objet premier du travail du géomètre au moins dans la conception abstraite et formelle de la géométrie[4]. Dans les autres cas, cet espace est souvent considéré comme transparent et l'utilisation même du mot espace n'a pas beaucoup de sens. Dans la vision abstraite, l'espace est constitué de points, de droites et de plans dont les relations sont explicitées par le modèle. Ce regard permet d'introduire les sous-parties de l'espace comme des ensembles de points. En géométrie axiomatique classique de type Euclidien[5], certaines sous-parties de l'espace sont en fait les objets d'étude et l'on parlera de figure ou de configuration. En Géométrie I, il s'agit d'objets physiques, de dessins.

De fait, il est nécessaire de considérer l'espace réel comme support de la géométrie. Nos faisons notre la pensée formulée par Lechalas[6] au moment de la crise des géométries non euclidiennes.

> *Il semble que le raisonnement géométrique ait essentiellement besoin de s'appuyer sur une image car si cette image s'évanouit le concept abstrait de grandeur subsiste seul et la géométrie fait place à l'algèbre.*

Les objets géométriques sont un constituant essentiel de l'espace de travail géométrique et les différents points de vue sur leur nature exacte dépendent à la fois du modèle théorique qui les définit et de l'espace réel dans lequel ils se trouvent.

Les artefacts

Comme il semble que ce soit l'usage en didactique des mathématiques, nous utiliserons le mot artefact dans le sens que lui donne RABARDEL[7] de chose ayant subie une transformation d'origine humaine. Il ajoute que cette chose doit être susceptible d'un usage pouvant s'inscrire dans des activités finalisées. Dans l'usage géométrique, ces choses seront les outils et les instruments utiles en géométrie. RABARDEL précise qu'un instrument est un artefact pris en main par un individu grâce à des schèmes d'action.

Les artefacts sont une composante déterminante de l'espace de travail puisqu'ils constituent la face la plus visible et la plus prégnante pour l'élève. Dans le cadre euclidien classique, on sait l'importance des constructions à la règle et au compas. La règle n'est pas graduée et ainsi la Géométrie II se différencie radicalement de la Géométrie I où la mesure peut intervenir. Ainsi le problème de la détermination de la trousse à outils est fondamental pour toute réflexion sur les problèmes géométriques et notamment, bien sûr, ceux dits de construction. L'introduction de nouveaux outils de type informatique a bouleversé les artefacts utilisés et créé, de fait, des nouveaux espaces de travail dont l'étude à la fois théorique et didactique a nourri les recherches en didactique des mathématiques. Cette dernière remarque nous permet de préciser que, dans une géométrie donnée, les espaces de travail géométriques sont multiples ; c'est une source de difficultés supplémentaires.

Le modèle théorique

Le sens du mot modèle oscille entre concret et abstrait, réalisation matérielle et norme abstraite. Cette oscillation qui reflète la distinction entre les différents paradigmes que nous étudions, nécessite de préciser notre emploi du mot « modèle ». Dans ce qui suit, nous appellerons modèle théorique le modèle abstrait qui résulte soit d'une modélisation, soit d'une définition a priori.

[4] Ce que recouvre la Géométrie III.
[5] Le paradigme que nous désignons sous le terme Géométrie II.
[6] G. Lechalas [1889] La géométrie générale in *La critique philosophique*.
[7] P. Rabardel [1995] *Les hommes et les technologies* Armand Colin p. 59

Dans le premier cas, le modèle théorique résulte d'un processus de modélisation par schématisation et idéalisation du monde réel dont il cherche à rendre le plus fidèlement compte. La géométrie axiomatique classique entre dans cette description et qu'il est possible de donner l'origine *naturelle* de certaines propriétés de la Géométrie II.

Dans le deuxième cas, le modèle théorique préexiste et ce qu'on appelle modèle est cette fois une représentation matérielle ou virtuelle destinée à donner du sens à un système d'axiomes et d'énoncés qui est donné a priori. Il s'agit alors d'une interprétation (et souvent d'une création) qui doit rendre compte des objets et des propriétés définis par les axiomes. Le modèle matériel vient éclairer le système d'axiomes et favoriser éventuellement le développement de la théorie par le géomètre en fournissant à son intuition un cadre plus familier. La géométrie de type formaliste (Géométrie III) entretient ce rapport au modèle théorique. Ceci apparaît nettement dans les nombreux modèles matériels créés pour rendre compte des axiomes décrits par HILBERT, quand on ne retient pas l'axiome d'ARCHIMÈDE ou quand on nie l'axiome du parallélisme (rappelons, sans le développer, l'exemple du modèle de KLEIN pour la géométrie hyperbolique).

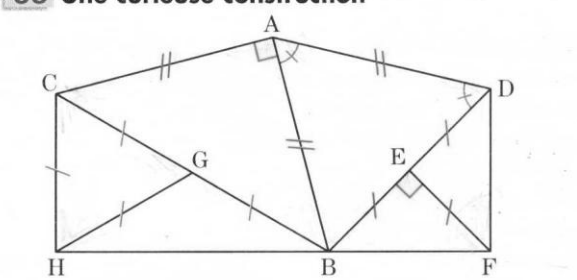
ORGANISATION MATHÉMATIQUE ET DIDACTIQUE DE L'ETG IDOINE

Le développement d'un espace de travail géométrique idoine est une étape essentielle lorsqu'on désire mettre en place une nouvelle organisation mathématique du modèle géométrique comme le montre l'exemple de la difficile introduction des transformations dans l'enseignement de la géométrie au Collège et au Lycée en France.

En effet, la modification de la structuration mathématique du modèle abstrait entraîne de fait un changement de l'espace de travail de la Géométrie et si l'on ne modifie pas les artefacts et l'espace support, cet espace de travail peut se révéler inadapté. Or, les transformations géométriques ont été introduites dans l'espace de travail classique de la Géométrie, qu'on pourra qualifier de statique, sans le modifier de façon à faciliter la réalisation de ces transformations afin qu'elles ne soient pas seulement mentales. La création de logiciels de géométrie dynamique a tenté partiellement de combler cette lacune.

Dessin à main levée et place de l'oral

55 Une curieuse construction



a. Reproduire la figure en construisant successivement les triangles ABC, ABD, BEF et FED (E est le milieu du segment [BD]), CGH (G est le milieu du segment [BC]) et GHB. On prendra AB = 5 cm.

b. Démontrer que les droites (HC) et (FD) sont parallèles et que HF est la distance entre ces deux droites.

L'exemple du relatif échec de l'introduction des transformations avec un espace de travail inadéquat a déjà montré l'importance pédagogique du choix de l'espace de travail de la géométrie. Nous allons préciser ce point en étudiant dans ce sens un exercice extrait du manuel Décimales 4ème page 139 (Belin 1998).

La première question invite l'élève à construire la figure et insiste sur l'importance de la mesure. L'espace de travail de cette question renvoie à la Géométrie I avec l'importance accordée aux instruments et aussi à la mesure. Or le but du problème, dans la question 2, se situe en Géométrie II, il y a là un conflit classique fréquent[8]. Mais cet exercice introduit une autre résistance qui porte sur la nature de l'espace de travail idoine.

En effet, la tâche demandée est particulièrement lourde puisqu'il faut repérer de nombreuses égalités d'angles pour arriver à montrer à la fois l'alignement de H, B et F et l'orthogonalité des droites (HC) et (HB) d'une part et (FD) et (BF) d'autre part. Dans l'espace de travail classique, papier crayon avec une demande de production écrite de l'enchaînement déductif, la rédaction complète prend une copie double d'élève consciencieux.

Cette fois, le maître, s'il décide de donner cet exercice, doit se poser la question de l'existence d'un espace de travail qui allège le travail de l'élève. Il pourra s'agir d'un espace qui intègre le dessin à main levée et l'expression orale des élèves supprimant par là même deux obstacles : la construction effective et la lourde rédaction linéaire. Il se crée ainsi un nouvel espace de travail qui donne un statut précis à des notions comme le dessin à main levée ou l'oral en mathématique dont la place est souvent floue dans l'enseignement.

Les cadres mis en jeu

Nous nous référons ici à la notion de cadre introduite par DOUADY. Pour elle :

> *Un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et à ces relations. Nous concevons la notion de cadre comme une notion dynamique.*[9]

L'espace de travail géométrique pour être efficace doit permettre des jeux de cadre. Notre approche a permis ainsi de distinguer deux types de jeux de cadre. Le premier joue sur les différents types de géométrie. Quant au second, que l'on peut qualifier d'externe, il fait interagir le cadre géométrique avec un cadre non géométrique. Nous ne nous préoccuperons ici que de ce dernier, le plus classique. Dans ce cas, les cadres associés ont souvent comme principale fonction de mettre en place un calcul (numérique, algébrique ou vectoriel) qui se substitue à la difficile démarche déductive que privilégie la géométrie. Cette dernière se décline alors en de multiples formes spécifiées par des qualificatifs différents : algébrique, analytique, vectorielle...

Un cadre particulièrement important est certainement le cadre numérique. Ce cadre dépend notamment de l'ensemble de nombres utilisés (décimaux, rationnels ou réels) sur lesquels le calcul est possible : ce calcul pouvant être exact ou approché. La différence d'approche de l'approximation, et par conséquent de la notion d'exactitude, distingue profondément les conceptions de la géométrie. La mise en place des cadres numériques est essentielle à la bonne organisation de l'espace de travail géométrique : on peut par exemple constater les difficultés posées par certains problèmes de géométrie qui nécessitent la connaissance des nombres réels alors que ceux-ci sont absents du collège[10].

[8] Voir par exemple notre étude voir notre étude Quelques éléments de réflexion sur l'enseignement de la géométrie : de l'école primaire à la formation des maîtres *Revue Petit X n°51.* Grenoble pp 5-21

[9] DOUADY R. (1986) Jeux de cadre et dialectique outil-objet *Recherches en Didactique des Mathématiques* vol 7/2. Ed La pensée sauvage. Grenoble.

[10] Pour un exemple HOUDEMENT C, KUZNIAK A, (2003) Quand deux droites sont « à peu près » parallèles ou le versant géométrique du « presque » égal, *Revue « petit X » n°61.* CRDP Grenoble pp. 61-74

LE DÉVELOPPEMENT DE L'ETG PERSONNEL

Dans les faits, l'ETG personnel de l'élève ne fonctionne pas nécessairement comme l'ETG de référence. En effet, ce dernier ne surgit pas tout fait dans le cerveau de l'utilisateur, il est le fruit d'un long apprentissage qui met en place les différents schèmes d'action assurant la cohérence de l'ETG. D'autre part, l'élève peut rencontrer des difficultés dans son usage ou faire des erreurs comme dans tout apprentissage.

L'enseignant va devoir travailler pour que les artefacts deviennent des instruments au sens de RABARDEL, pour que les divers objets de l'espace étudié deviennent familiers à l'élève et pour qu'enfin les éléments du modèle théorique puissent se structurer autour de ces objets. La structuration de l'ETG passera par un choix de situations didactiques et par l'organisation d'un milieu (au sens de BROUSSEAU).

Mais en plus de cette entrée classique en didactique des mathématiques, le développement personnel de l'ETG suppose aussi que l'on envisage le problème dans sa dimension psychologique et cognitive. Les voies proposées sont évidemment très diverses et nous ne retiendrons que deux pistes qui ont déjà fait l'objet de nombreux travaux en didactique des mathématiques. Il s'agit d'une part de l'aspect sémiotique avec la notion de registre de représentation sémiotique particulièrement féconde pour traiter d'une Géométrie articulée autour des figures. L'autre aspect que nous avons pris en compte est celui des niveaux de pensée de Van Hiele.

Registres sémiotiques et ETG

Les études didactiques portant sur l'enseignement de la géométrie au Collège ont conduit à la nécessité de complexifier la notion de figure. Pour les élèves de Collège, la figure peut soit être un support du raisonnement, soit par son existence même la preuve cherchée. Ce double regard sur un même objet a conduit les didacticiens à tenter de distinguer par des mots ce que l'usage confond et à la suite de PARZYSZ, la distinction dessin-figure est devenue classique[11].

Le changement de statut de la figure est un des points les plus visibles dans l'évolution de l'ETG. Sa prise en charge est possible par la gestion des artefacts, notamment les logiciels géométriques dynamiques. Le jeu sur la figure s'articule aussi sur la liaison espace-modèle dans l'ETG et donc sur la relation entre le spatial et le théorique : préciser la gestion de cette interaction est l'objet de l'approche cognitive de DUVAL. Pour cela, il introduit un travail spécifique, encore un jeu, sur les registres de représentation sémiotique que sont le registre figural et le registre discursif. La connaissance du jeu entre ces deux registres est certainement un des enjeux de l'apprentissage de la géométrie axiomatique naturelle (Géométrie II).

Nous allons montrer sur cet exemple, comment une approche cognitive peut venir se superposer à l'espace de travail géométrique. Ce dernier résulte d'une réorganisation des processus cognitifs associés aux diverses composantes de l'ETG. Dans son article « Why to teach geometry ? », DUVAL[12] introduit trois processus cognitifs :

Le processus de visualisation lié aux figures mentales ou sur un support matériel.

[11] Dans notre approche, la définition de la figure dépend du paradigme géométrique de référence.

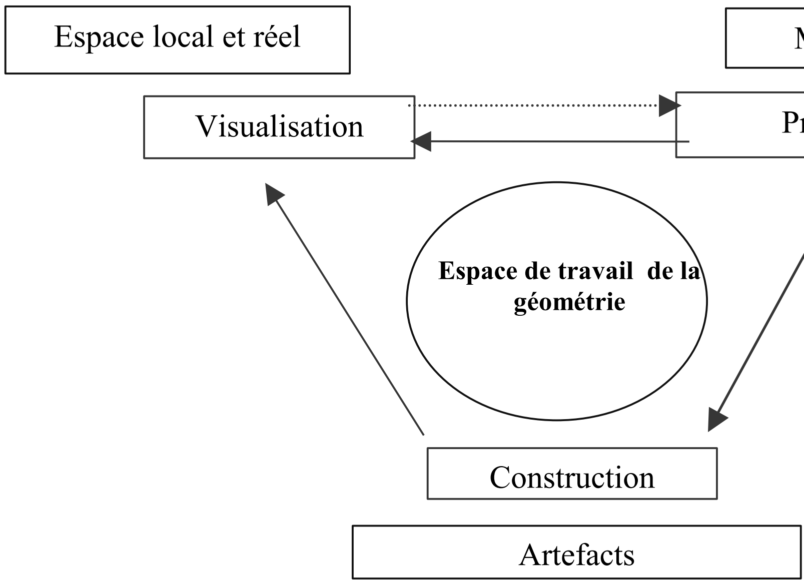
[12] R. DUVAL (1995) *Why to teach geometry* Icmi Studies on Geometry Catania

Le processus de construction dépendant des outils utilisés (règles, compas…).

Le processus de preuve articulé sur un discours théorique.

Il réorganise ensuite ces trois processus dans un schéma que nous superposons sur celui de notre espace de travail (les flèches sont de DUVAL).

Ce modèle doit être vu de façon dynamique pour saisir l'évolution du processus cognitif lié au travail géométrique.



Chacun de ces points pose des problèmes particuliers d'apprentissage, DUVAL lui-même a particulièrement étudié le rôle de la visualisation et de l'argumentation dans le processus de preuve.

Le développement des niveaux de pensée géométriques

En s'appuyant, d'une part sur la théorie de PIAGET et d'autre part sur la GestaltTheorie, VAN HIELE a construit une théorie du développement de la pensée géométrique chez l'enfant basée sur les différents niveaux d'appréhension perceptifs et logiques des figures. L'élève passe idéalement par cinq niveaux (numérotés de 0 à 4) qui le conduisent de la perception simple à une conception abstraite et discursive de la géométrie. Les deux premiers niveaux (visualisation et analyse) se distinguent ainsi des deux derniers (déduction formelle et abstraction). Le niveau 2 (déduction informelle) correspond à une phase de transition où s'élabore le raisonnement géométrique.

Nous avons développé avec J.C RAUSCHER une utilisation possible en formation des enseignants de cette approche basée sur un développement des niveaux de conceptualisation. Nous renvoyons à notre présentation dans ces actes[13].

[13] Voir aussi KUZNIAK A, RAUSCHER JC Autour de quelques situations de formation en géométrie pour les professeurs d'école. *Actes du colloque sur la formation des maîtres. La Roche sur Yon. Université de Nantes* (2002) pp 271-290.

CONCLUSION

La spécificité de la géométrie élémentaire fait rencontrer un monde idéal avec un monde matériel par l'intermédiaire des objets géométriques.

L'espace de travail de la géométrie précise cette rencontre et l'explicitation de cet espace facilite, selon nous, le travail d'analyse didactique de l'enseignement de la Géométrie.

La détermination a priori d'un espace de travail idoine ne dépend pas que de la simple donnée du modèle géométrique. Elle suppose une réflexion sur une réorganisation didactique des composantes de cet espace de travail qui devra résulter d'un équilibre réussi entre de multiples contraintes. Faute de cela, un espace de travail mal conçu peut ne pas fournir à l'élève les outils efficaces pour agir et travailler géométriquement.

D'autre part, quand l'élève découvre son espace de travail il aura tendance à écraser le pôle modèle pour se replier sur le dipôle espace-artefact plus évident et matériel. Le rôle de l'enseignant consistera à développer ce pôle modèle en précisant l'espace de travail le mieux adapté à la tâche qu'il propose aux élèves. Cela suppose qu'il ait lui-même une conscience claire de la nature de l'espace de travail géométrique et cela nous renvoie à des problèmes de formation d'enseignants.

Enfin, nous avons aussi montré la nécessité d'envisager les difficultés spécifiques dues au développement cognitif indispensable à la maîtrise de l'ETG personnel. Ainsi grâce à cette notion d'espace de travail géométrique l'approche épistémologique rencontre l'approche psycho-cognitive.

Note. Pour un développement de la notion d'espace de travail géométrique inséré dans le cadre général des paradigmes géométriques, nous signalons notre brochure publiée à l'IREM de Paris VII : A. KUZNIAK *Paradigmes et espaces de travail géométriques.*
La notion de « paradigme géométrique » est présentée dans l'excellent ouvrage suivant : COPIRELEM *Concertum 10 ans de formation des professeurs des écoles en mathématique*. HOUDEMENT C, KUZNIAK A, Epistémologie et didactique : un exemple de cadre conceptuel pour analyser l'enseignement de la géométrie ».Tome 2 pp 95-106.

Communication C2

DES ÉTUDIANTS APPRÉCIENT LEUR PASSÉ SCOLAIRE EN MATHÉMATIQUE.

LES ACTIVITÉS EN CLASSE EN QUESTION.

Jean-Claude Rauscher,
IUFM d'Alsace CeRF-EA 218, IREM de Strasbourg
e-mail : Jc.Rauscher@wanadoo.fr

Résumé :
Nous présentons ici les principales indications que nous donne une enquête[1] faite auprès d'étudiants de licence entre 1995 et 2001 dans le cadre de cours destinés à les sensibiliser à la didactique ou à l'enseignement des mathématiques. Deux oppositions ressortent de l'analyse du corpus des déclarations des d'étudiants amenés à apprécier leur passé scolaire en mathématique. La première concerne les activités mathématiques en classe, pour lesquelles est souligné soit leur aspect heuristique, soit leur aspect algorithmique ou routinier. La deuxième porte sur le caractère des mathématiques : aux yeux de nombreux étudiants, il s'est transformé au fil de leur scolarité de "concret" en "abstrait". Le détail des contenus donnés à cette deuxième opposition et ses confrontations avec la première font entrevoir l'expression d'un besoin : il faut disposer de certains outils pour comprendre et profiter d'activités heuristiques. La question de l'articulation entre l'appréhension ou la production de représentations sémiotiques et l'appréhension conceptuelle des objets mathématiques, au centre des travaux menés par Raymond Duval et François Pluvinage, apparaît donc comme une question que les étudiants posent aussi lorsqu'ils réfléchissent leur passé scolaire en mathématiques. Elle interroge les aspects à prendre en compte par les enseignants de mathématiques pour définir les activités dans les classes.

Mots clés : enquête, perceptions subjectives, enseignement des mathématiques, évaluation de l'enseignement, heuristique, registres

1. LE CADRE, L'OBJET ET LA MÉTHODOLOGIE DE L'ENQUÊTE :

Les écrits qui sont analysés ici ont été produit par des étudiants de licence de sciences de l'éducation (LSE), de mathématiques (LM), ou encore de licences pluridisciplinaires à orientation scientifique (LPD), entre 1995 et 2001, dans le cadre de cours destinés à les sensibiliser à la didactique ou à l'enseignement des mathématiques. Ils étaient sollicités au début de l'année à développer par un écrit ce qu'ils aimaient et ce

[1] Cette enquête a été initialement présentée lors du colloque Argentoratum 4 et 5 juillet 2002 en l'honneur de Raymond Duval et François Pluvinage à Strasbourg (Actes dans le volume 9 des "Annales de didactiques et sciences cognitives" IREM de Strasbourg à paraître fin 2003).

qu'ils n'aimaient pas en mathématiques et dans l'enseignement qu'ils avaient reçu dans cette discipline (de la maternelle à l'université). Ils étaient aussi invités explicitement à relater des épisodes de leur scolarité où il y avait eu un changement dans l'appréciation de la discipline ou de son enseignement. L'hypothèse[2] qui préside ici[3] à l'analyse de ce corpus est que la prise en compte de déclarations "subjectives" d'étudiants se retournant sur leur parcours scolaire et appréciant la discipline mathématique et son enseignement peut tout autant que des évaluations dites "objectives" nous donner des éléments d'évaluation de notre enseignement.

Que nous disent ces étudiants à travers l'expression de leurs souvenirs et de leurs opinions exprimant approbations ou inconforts ?

Pour justifier leurs appréciations les étudiants évoquent :

- les qualités qu'ils attribuent aux mathématiques (ou à l'un de ses domaines) : elles sont qualifiées par exemple de *logiques*, *certaines*, *utiles, lointaines*, *abstraites, concrètes, d'œuvre de l'humanité, etc…*

- les activités qu'ils ont rencontrées : *résoudre des problèmes, démontrer, comprendre, appliquer des formules, etc…*

- les conditions d'apprentissage : *professeur qui juge, qui aide, qui ignore, temps qui manque, etc…*

Leurs déclarations donnent donc des éléments de réponse aux deux questions suivantes :

1- à leurs yeux, qu'est-ce qu'apprendre et faire des mathématiques pendant la scolarité ?

2- à leurs yeux, qu'est ce qui favorise ou au contraire handicape les apprentissages ?

Pour dégager les éléments de réponse, nous avons procédé à une analyse des contenus en terme de catégories, d'oppositions et de ruptures.

2. DEUX OPPOSITIONS À EXAMINER PRINCIPALEMENT.

Deux oppositions apparaissent massivement lorsqu'on parcourt les déclarations des étudiants se retournant vers leur passé scolaire. Elles sont à examiner plus précisément pour donner des éléments de réponse aux deux questions que nous venons de poser.

La première opposition met en jeu la question « qu'est ce qu'apprendre des mathématiques » : il se dégage un pôle d'activités heuristiques *(chercher, résoudre des énigmes, trouver l'astuce, etc…)* opposé à un pôle d'activités routinières ou algorithmiques *(calculer, appliquer une méthode, appliquer des formules, etc..)*. On aime ou on n'aime pas l'aspect heuristique des mathématiques, on aime ou on n'aime pas l'aspect algorithmique des activités mathématiques. Cette opposition n'apparaît jamais référée à un changement dans le temps. Elle nous donne des éléments de réponse à la première question *(A leurs yeux, qu'est-ce qu'apprendre et faire des mathématiques pendant la scolarité ?)* mais peu à la deuxième *(A leur yeux, qu'est ce qui favorise ou au contraire handicape les apprentissages ?)*.

[2] Pour une justification plus ample de ce point de vue on pourra se référer aux actes du colloque Argentoratum.

[3] Initialement, dans le cadre du cours lui-même, ces écrits étaient alors destinés à renvoyer aux étudiants la multiplicité de leurs représentations et de leurs vécus dans l'enseignement, et de l'analyser

La deuxième opposition est évoquée par la description d'un changement dans le temps. Elle oppose en général deux qualificatifs attribués aux contenus ou activités mathématiques : *concret* et *abstrait*. Qualifiées d'abord de *"concrètes"*, les mathématiques deviennent à un moment *"abstraites"*. Le niveau de scolarité où se situe ce changement est variable entre l'entrée à l'école primaire et la licence. Ce changement signalé est vécu parfois comme une rupture définitive, souvent comme une difficulté importante ou au moins un inconfort dans la progression des apprentissages. Mais lorsque les termes de cette opposition sont précisés par les étudiants, ils apparaissent en fait recouvrir des définitions très différentes. L'analyse plus précise de ces définitions nous permettra de sortir de l'opposition précédente pour préciser un autre aspect de ce qui constitue aux yeux des étudiants l'activité mathématique. Elle permettra surtout de dégager ce qui constitue pour eux un facteur essentiel de réussite en mathématiques.

3. QU'EST CE QU'APPRENDRE DES MATHÉMATIQUES POUR LES ÉTUDIANTS ? OPPOSITION ENTRE UNE PÔLE D'ACTIVITÉS HEURISTIQUES ET UN PÔLE D'ACTIVITÉS ROUTINIÈRES OU ALGORITHMIQUES.

Les déclarations de nos étudiants nous permettent de poser une question semblable à celle que se sont posée les auteurs de l'enquête sur l'initiative de la Société de Mathématiques de France "Mathématiques A Venir : opération “50 lycées" (G.Barbançon, R.Duval, C.Dupuis, F.Pluvinage, 1988.). Cette enquête a été menée en 1988 dans 50 lycées par voie de questionnaire dont l'idée clé était de *"déterminer quelle image les lycéens ont des mathématiques, tant de celles qui leur sont présentées, et qu'ils ont à pratiquer, que de celles qui résultent des travaux des spécialistes passés et présents"*. Elle fait en particulier le constat qu'une majorité de lycéens (toutes sections confondues) ne pensent pas qu'un travail mathématique est contrôlable de bout en bout, et que, pour une majorité, l'activité mathématique semble exclure tout délai de réflexion ou de recherche, supérieur à 1h, dans la compréhension ou dans la découverte d'une solution. Ce constat amène les auteurs à se poser la question de la déformation de l'activité mathématique que l'enseignement entraîne chez les élèves (p 46 du rapport d'enquête).

Qu'en est-il pour nos étudiants, qui ont effectué leur année niveau licence entre 1995 et 2001, et qui ont donc pour la plupart reçu un enseignement dans la perspective définie dans le milieu des années 80 ?

Dans leurs déclarations apparaissent principalement des types d'activités ou d'opérations que l'on peut, pour objectiver notre analyse, renvoyer à une taxonomie des objectifs cognitifs telle qu'elle était proposée par Bloom et précisée dans la classification N.L.S.M.A[4], adaptée pour s'appliquer spécifiquement aux tâches en mathématiques.

La connaissance, -par laquelle il s'agit de pouvoir rappeler les contenus étudiés-, n'est que rarement évoquée. Lorsqu'elle l'est, c'est tantôt pour signaler qu'à leurs yeux, la discipline "mathématiques" requiert peu de connaissances à apprendre, et tantôt parce qu'on n'aime pas devoir retenir des "choses" :

[4] National Longitudinal Study of Mathematicale Abilities (Wilson in Bloom, Hasting, Madaus, 1971)

"J'aime les maths parce que je n'ai jamais appris à faire des maths, pour moi c'est naturel, je ne l'ai jamais travaillé" (LSE)

"J'aime les maths parce qu'il y a peu de choses à retenir, à apprendre, c'est plus un savoir faire ; ce que je n'ai pas aimé c'est apprendre les tables de multiplication." (LPD)

"Je n'aime pas les maths à cause du problème de mémorisation de formules et surtout problème pour les appliquer" (LSE)

Deuxième élément dans la taxonomie des objectifs cognitifs, la compréhension, -où il s'agit de prouver en traduisant, en interprétant ou en extrapolant que les contenus sont compris-, n'est pas évoquée dans ce sens par les étudiants. Mais, parfois utilisé dans son sens plus commun plus vague, le mot est évoqué pour déclarer qu'on aime les mathématiques quand on les comprend, ou, inversement, qu'on ne les aime pas quand on ne les comprend pas. D'autres fois il s'agit du plaisir de comprendre :

"J'aime comprendre l'origine de certaines notions apparemment très abstraites tels que l'apparition de N, Q, R mais aussi des dérivées qui s'appliquent au calcul d'une vitesse, etc.. et qui ont été inventées dans ce but" (LM)

En revanche les deux derniers éléments de la classification apparaissent très souvent évoqués et opposés par les étudiants : une dimension d'application, -où il s'agit d'utiliser des méthodes ou des règles connues pour répondre à des questions posées-, s'oppose à une dimension heuristique, -où c'est la méthode de résolution qui est à trouver-. Dans ce dernier cas, indépendamment de la présence en mémoire des connaissances nécessaires, on peut "trouver" la réponse plus ou moins vite ou même "sécher".

Les réponses faisant référence à une dimension heuristique sont très nombreuses, tous publics confondus (étudiants de mathématiques ou autres), et appellent souvent des appréciations positives :

"Je prenais cela comme un jeu : un problème posé, comment trouver la solution."(LSE)

"Le plaisir de trouver l'astuce qui va résoudre le problème"(LSE)

"En 4ème, un jour (ou plutôt une nuit) j'ai cherché jusqu'au matin la solution d'un problème et j'ai trouvé et j'ai éprouvé une grande joie" (LSE)

"Ce que j'aime dans les maths, c'est le côté défi ; on sait qu'il y a une solution et que notre but est de l'atteindre grâce aux outils (théorèmes, définitions) qui sont à notre disposition ; ce que je préfère c'est dans la recherche d'une solution, la mise en place de la démonstration qui conduira au résultat. Le plus drôle c'est que je préfère les exercices qui posent problème, on sent la solution toute proche, mais il nous manque un élément qui nous permettra de conclure. Et lorsque la solution est trouvée, on se sent rassuré et content de soi." (LM)

Quelques évocations d'activités heuristiques font référence à des vécus plus douloureux :

"Je n'aime pas les maths quand je "sèche" devant un problème, un énoncé"(LSE)

Ces évocations nous amènent alors vers les déclarations qui évoquent surtout l'utilisation de méthodes ou de règles connues, fréquentes mais moins nombreuses que les précédentes :

"J'aime le côté "belle mécanique" lorsque je parviens à la faire tourner" (LSE)

"Je n'aime pas les probabilités car chaque exercice montre trop de différences, il n'y a pas de règles bien définies que l'on peut appliquer à chaque fois de la même façon."(LPD)

"J'aime les mathématiques car elles sont une sorte de mécanisme, on applique une formule plusieurs fois dans plusieurs situations. Un théorème nous permet de résoudre plusieurs problèmes, de démontrer plusieurs propriétés. Par contre lorsqu'on arrive au niveau de la licence, les mathématiques deviennent souvent abstraites, et on ne sait jamais par où commencer pour démonter une propriété. J'aime les mathématiques lorsque je les comprends."(LM)

"Je n'aime pas l'aspect calculatoire (c'est long, pénible et finalement pas très instructif)"(LM)

" Je n'aime pas le côté scolaire de l'enseignement des maths au collège et au lycée. Les profs et les élèves ne semblent voir en général que les résultats à connaître, à assimiler" (LM)

4. LES ÉTUDIANTS ATTRIBUENT-ILS UN RÔLE À LA DIMENSION HEURISTIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES POUR DÉVELOPPER LES CONNAISSANCES ?

À partir de cette première analyse, on peut voir qu'aux yeux des étudiants se retournant sur leur vécu scolaire en mathématique, une dimension heuristique importante apparaît. Si certains étudiants évoquent et apprécient davantage les méthodes et algorithmes connus à appliquer, ils sont nombreux à évoquer positivement cette dimension heuristique des activités rencontrées. On peut imaginer que les déclarations de nos étudiants entrent en résonance avec les programmes de la fin des années 80. Rappelons que, dans ces programmes, un parti pris explicite sur la nature des connaissances mathématiques que les élèves doivent acquérir apparaissait : *"Une approbation mathématique pour un élève, ne saurait se limiter à la connaissance formelle de définitions, de résultats, de techniques et de démonstrations : il est indispensable que les connaissances aient pris du sens pour lui à partir de questions qu'il s'est posé, et qu'il sache les mobiliser pour résoudre des problèmes" (Programme collège 1986).* Mais il n'est pas étonnant que les étudiants opposent ces deux aspects de l'activité mathématique en classe : les deux dimensions heuristiques et applicatrices coexistent nécessairement dans les pratiques, indépendamment des méthodes utilisées. L'étude récente sur les "Pratiques d'enseignement des mathématiques observées en classe de 6ème", faite à la demande de l'Inspection générale et de la D.E.P.[5], nous conforte dans cette idée (J.Borreani, P.Tavignot, R.Verdon, 2000). Elle montre que les phases de capitalisation du savoir et d'activités en classe coexistent toujours. Seul l'ordre de ces phases permet de différencier les pratiques.

Mais pouvons nous avancer alors des éléments de conclusion en ce qui concerne les conditions favorisant l'efficacité, perçues par les étudiants dans leurs apprentissages en mathématiques ? Rappelons là aussi l'hypothèse mise en œuvre dans les programmes des années 80 soulignant un geste professionnel important du professeur : *"Dès lors, les enseignants vont avoir à choisir des situations créant un problème, dont la solution fera intervenir des "outils", c'est-à-dire des techniques ou des notions déjà acquises, afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles. Lorsque celles-ci*

[5] Division de l'Évaluation et de la Prospective

auront été bien maîtrisées, elles fourniront à leur tour des "outils" qui permettront un cheminement vers une connaissance meilleure ou différente." Alors, les activités de type heuristiques favoriseraient-elles aux yeux des étudiants les apprentissages et l'appropriation des savoirs en mathématiques ? En fait, aucun étudiant n'évoque cette hypothèse. Les étudiants opposent les deux aspects mais n'esquissent aucune articulation entre eux. On peut imaginer que les étudiants évoquent le pôle heuristique ou le pôle plus routinier en exprimant des appréciations en fonction de leur personnalité, qui aime par exemple la sécurité, ou au contraire aime relever des défis. Nous retrouvons là des phénomènes relevés par Jacques Nimier (J. Nimier, 1983). Pour analyser les conditions d'apprentissage perçues par les étudiants, il nous reste à catégoriser les indications qu'ils donnent sur les défauts ou manques qui ont pu entraver leur progression. Cela nous amènera à évoquer et analyser plus précisément l'opposition concret/abstrait qui sert souvent aux étudiants pour signaler une rupture dans leur cheminement scolaire en mathématiques.

5. QUELS TYPES D'INDICATIONS LES ÉTUDIANTS DONNENT-ILS SUR LES CONDITIONS QUI ONT PU INFLUENCER LEUR PROGRESSION ?

Les conditions, changements ou ruptures qui font que les apprentissages en mathématiques sont ressentis comme inconfortables, difficiles, voire impossibles, se regroupent principalement en deux catégories de causes.

L'une regroupe des causes externes à la discipline elle-même et évoque des conditions d'apprentissage ou d'enseignement qui peuvent être favorables et plus souvent défavorables. Les enseignants sont alors évoqués en première ligne.

L'autre regroupe les évocations de changement de nature de la discipline elle-même telle qu'elle apparaît aux yeux des étudiants

5.1. Évocation de causes externes à la discipline :

Parfois ce sont des raisons affectives, sans autre précision, qui sont évoquées :

"J'étais motivé pour progresser mais bien des enseignants m'ont démotivé" (LSE).

"Je suis arrivée en licence de math parce que je n'ai jamais eu de professeur de maths qui m'a dégoûtée" (LM)

"En 4ème et 3ème, j'ai commencé à être mauvaise car les rapports avec mon prof de maths n'étaient pas ce que j'attendais" (LSE)

"Je n'aime pas les professeurs qui bâclent, qui sautent des questions. Ceux qui disent c'est trivial, on ne rentre pas dans les détails…"(LM)

"Pour aimer les mathématiques, il faut savoir nous les faire aimer" (LSE)

"Voyant mes notes diminuer, mon père me forçait à bosser les maths, ce qui souvent se passait dans une mauvaise ambiance, ne renforçant absolument pas mon goût pour les maths" (LSE)

Parfois les enseignants sont mis en cause parce qu'ils ne donnent pas le temps nécessaire pour que les apprentissages puissent être menés par l'élève ou l'étudiant :

"On demande d'être rapide dans les raisonnements alors qu'il me faut un grand temps d'assimilation" (LM)

"Je n'aime pas lorsqu'on ne me laisse pas le temps de réfléchir" (LSE)

"Je n'aime pas lorsque je n'arrive pas à suivre un cours assez vite, lorsque les réponses sont données avant que j'ai eu le temps de mener ma réflexion" (LM)

Enfin, les enseignants peuvent aussi être appréciés en fonction de leurs apports :
"La rigueur du professeur de mathématique est variable et influence la bonne compréhension des concepts chez l'apprenant. Je n'aime pas cet aspect éducatif des maths qui dépend beaucoup du prof" (LM)
"Je veux être prof de maths depuis la 6ème car cette année là notre prof de maths nous a expliqué la démarche qui devait se faire dans notre esprit pour résoudre un problème" (LM)
Cette dernière déclaration nous apporte déjà en l'occurrence une précision sur ce qui fait réellement défaut aux yeux des étudiants pour progresser dans les apprentissages.

5.2. Évocation de mathématiques qui deviennent abstraites

Très souvent ce sont les mots *"abstrait"* ou *"concret"* qui sont utilisés pour signaler un changement ou une rupture dans la progression, l'abstraction sauf exception correspondant en général à une appréciation négative. Dans de rares cas l'étudiant se contentera de ces termes pour qualifier les mathématiques et justifier son appréciation sans autres précisions. Les cas où des précisions sur ce qui est signifié par abstrait ou concret sont données sont heureusement plus fréquents.
Deux types d'indications se dégagent alors : celles qui réfèrent à un extérieur à la discipline et les autres qui concernent, à l'intérieur de la discipline elle-même, la nature des tâches ou des difficultés en jeu.

Le premier type d'indications renvoie à une utilité des mathématiques ou une gratuité qui sont, selon le cas, appréciées ou rejetées :
"J'ai commencé à aimer les maths en 1ère, lorsque j'ai fait de la comptabilité, des maths financières, commerciales. Ces maths sont pour moi concrètes (études de cas tirés de faits réels) et elles me servent dans la vie de tous les jours et future (calculs de longueur de rayons dans les grandes surfaces pour des implantations diverses, nombre de rouleaux pour tapisser une pièce). Bref j'aime les maths quand je vois qu'elles peuvent me servir." (LSE)
"L'esprit acquis en math me permet de mieux appréhender les disciplines plus littéraires" (LSE)
"Ce que j'aime en mathématiques, c'est le côté art avec son aspect inutile et beau avec l'avantage d'être certain (inutile dans une application quotidienne ou scientifique)." (LM)

Le deuxième type d'indications renvoie à la nature des tâches en jeu en mathématiques :
Dans la rubrique "n'aime pas" : "Pour moi, faire des mathématiques c'est manipuler des chiffres, être dans l'abstraction, entrer dans la logique de quelqu'un d'autre." (LSE)
J'ai beaucoup aimé les maths faites au collège et au lycée. Ce n'était pas abstrait. Il suffisait de réfléchir et d'appliquer une méthode. Ce que j'aime aussi beaucoup ce sont les démarches pour résoudre les exercices. C'est clair : on a des hypothèses, on utilise un théorème, une règle et on trouve généralement la solution. J'aime beaucoup le côté rationnel des maths. Par contre, ce que j'aime beaucoup moins et où j'ai beaucoup plus de mal, c'est avec le côté abstrait des maths que l'on apprend aujourd'hui en licence. J'aime bien me représenter les choses, les visualiser. (LM)

"J'aime les mathématiques car elles sont une sorte de mécanisme, on applique une formule plusieurs fois dans plusieurs situations. Un théorème nous permet de résoudre plusieurs problèmes, de démontrer plusieurs propriétés. Par contre lorsqu'on arrive au niveau de la licence, les mathématiques deviennent souvent abstraites, et on ne sait jamais par où commencer pour démontrer une propriété. J'aime les mathématiques lorsque je les comprends."(LM)

Dans ces cas, comme dans ceux où les étudiants signalaient ce que leurs enseignants leur apportaient ou n'apportaient pas, nous trouvons des indications sur ce qui, au plus près des contenus et des tâches en jeu en mathématiques, fait défaut ou est indispensable aux yeux des étudiants pour progresser ou se sentir à l'aise. Arrivé à ce stade de notre analyse, il nous a semblé utile d'interroger plus systématiquement la polysémie concernant l'opposition "abstrait/concret" aux yeux des étudiants. C'est à cette fin que nous avons réalisé une enquête complémentaire dont nous allons rendre compte.

6. ABSTRAIT/CONCRET : QUE RECOUVRE CETTE OPPOSITION POUR LES ÉTUDIANTS ?

Nous avons récemment (mars 2002) proposé le questionnaire suivant à un groupe d'étudiants. Pour précision, il s'agit d'un groupe de licence pluridisciplinaire de Sciences et Technologie, option biologie-chimie-géologie à l'U.L.P. Strasbourg, donc d'étudiants qui se caractérisent par une formation scientifique non mathématique.

Lorsqu'on interroge des gens sur leur scolarité en mathématiques, certains évoquent l'aspect "abstrait" ou l'aspect "concret" de cette discipline.

Chacun de ces aspects est suivant le cas apprécié ou au contraire rejeté.

1) Et vous, abstraites ou concrètes, comment voyez-vous et appréciez-vous les mathématiques dans votre scolarité ? Précisez.

2) Nombreux sont ceux qui évoquent un moment de leur scolarité où les mathématiques de concrètes sont devenues abstraites à leurs yeux. Avez vous connu de tels passages ? Si oui, pouvez vous les préciser ?

3) D'autres encore différencient leur appréciation selon les domaines. Est-ce votre cas ? Précisez.

Pour analyser leurs réponses nous avons au départ retenu la catégorisation à laquelle nous étions arrivés précédemment, à savoir :

Évocation des conditions d'apprentissage	Évocation de l'encadrement professoral
	Évocation du temps d'apprentissage
Évocation d'un extérieur à la discipline	Évocation d'une utilité externe
	Évocation de la référence au réel
Évocation d'une tâche dans la discipline	

En première lecture, cette grille s'est révélée adéquate pour classer les réponses des étudiants. Il faut y ajouter éventuellement une rubrique concernant les évocations d'un domaine de la discipline sans autre précision.

Sur 25 réponses, 4 évoquent des domaines des mathématiques sans décrire une tâche, 18 décrivent des tâches, 7 font référence aux conditions d'apprentissage, et 6 évoquent un réel du monde physique. Les classes ne sont pas disjointes.

Majoritairement les étudiants évoquent donc des tâches liées à la discipline pour situer l'opposition *concret/abstrait*. Quelle est la nature de ces tâches ? Quels renseignements nous donnent-elles quant à la perception des étudiants de leur intégration des connaissances en mathématique ? Comprendre ou ne pas comprendre, qu'est-ce que cela veut dire pour les étudiants ?

Une lecture plus attentive des réponses nous a fait affiner la rubrique concernant l'évocation des tâches dans la discipline et nous permet de suggérer quelques éléments de réponse. Par leurs descriptions, les étudiants évoquent en fait la nécessité de maîtriser des registres, des traitements dans ces registres, et des changements de registres.

7. ÉVOCATION PAR LES ÉTUDIANTS DE LA NÉCESSITÉ DE MAÎTRISER DES REGISTRES POUR PROGRESSER EN MATHÉMATIQUE

7.1. Évocation d'un mode de traitement, d'un registre.

Nous avons rangé dans cette classe toute évocation de "méthodes", de "logiques", de "langages".

"En algèbre, du moment où j'ai compris la méthode à utiliser, il n'y a plus de problème."

"A partir de la 1ère S et de la TS j'avais l'impression que c'était du chinois (à part les fonctions)"

"Cette année, l'analyse est devenue à mes yeux assez abstraite, le fait de travailler avec les chiffres avec une toute autre approche me rend plus répulsive à l'utilisation des chiffres. Mais toutefois la démarche est tout à fait intéressante !" (référence à un cours d'arithmétique)

"*C'est au niveau de la première que les mathématiques sont devenues plus dures pour moi, avec la probabilité par exemple (logique que je ne comprenais pas forcément)"*

7.2. Évocation d'un changement de mode de traitement ou de représentation.

"Au passage des chiffres aux inconnues vers la 4ème, les mathématiques sont devenues un peu abstraites."

"J'ai différencié mes appréciations des mathématiques selon les domaines, notamment entre l'algèbre et la géométrie. Il s'est notamment passé que la géométrie est devenue plus claire au cours des années car j'ai pris du temps à visualiser et à comprendre la géométrie. Et parallèlement, l'algèbre est devenue moins claire par le passage du travail des mathématiques des chiffres aux lettres."

7.3. Évocation de l'application d'un mode de représentation au réel

"La géométrie n'a jamais été un domaine adoré. Je pense que c'est lié aux quelques difficultés que j'ai rencontrées (représentation dans l'espace)"

"J'ai toujours eu plus de mal en géométrie car je n'arrive pas "à voir" dans l'espace. En algèbre, du moment où j'ai compris la méthode à utiliser, il n'y a plus de problème"

Cette lecture plus détaillée nous fait considérer les déclarations des étudiants comme une réponse de leur part à la question qui est traitée par Raymond Duval (1995) sur les apprentissages mathématiques, et, de façon plus large, sur la nature même du fonctionnement cognitif de la pensée humaine. Il s'agit de la question de l'articulation entre la "sémiosis", appréhension ou production de représentations sémiotiques, et la "noésis", l'appréhension conceptuelle des objets mathématiques.

Pour les étudiants, la compréhension en mathématique semble conditionnée par la possession et la conquête de langages avec des modalités de traitements et de conversions.

A l'appui de cette thèse, des déclarations évoquent la référence au réel, pour y situer, non pas le concret, mais la difficulté d'accès :

"Oui, j'ai toujours eu plus de mal en géométrie car je n'arrive pas "à voir" dans l'espace. En algèbre, du moment où j'ai compris la méthode à utiliser, il n'y a plus de problème".

Cette étudiante nous dit que ce n'est pas l'existence d'une référence au réel qui est gage d'intégration des connaissances en mathématique, mais le fait de disposer d'un mode de traitement de ce réel.

Une dernière déclaration nous montre que notre nouvelle lecture permet aussi de reprendre la question de l'opposition entre l'aspect heuristique et l'aspect algorithmique en mathématiques. C'est la possession d'outils (langages, traitements, conversions) qui permet d'entrer dans le monde de l'heuristique :

"En math, il y a toujours des directives bien précises, une logique incontournable, des règles à respecter, c'est une forme de langage, un déchiffrage passionnant où une logique s'installe et reste toujours, pour pouvoir résoudre des énigmes, trouver une solution" (LSE).

8. EN CONCLUSION : QUELLES CONSÉQUENCES TIRER DE NOS OBSERVATIONS POUR NOS PRATIQUES EN CLASSE ?

Que nous permet de conclure notre prise en compte des déclarations "subjectives " des étudiants se retournant sur leur passé scolaire ?

Et quelles conséquences pouvons-nous en tirer pour nos pratiques dans les classes ?

Les étudiants sont sensibles, et souvent tout à fait favorablement, à l'aspect heuristique développé en mathématiques dans leur passé scolaire.

La condition essentielle pour l'intégration des connaissances en mathématiques qu'ils évoquent est la conquête et la possession de langages et de modes de traitements, en particulier pour appréhender le réel.

La possession de tels outils semble aussi parfois aux yeux des étudiants, conditionner l'entrée dans le monde heuristique.

Ces indications nous semblent se joindre aux conclusions des travaux qui ont été menés à l'IREM de Strasbourg sous l'égide de Raymond Duval et François Pluvinage. Ces derniers nous rendent attentifs à la nécessité pour les professeurs d'analyser les registres et leurs articulations dans les activités mathématiques qu'ils proposent en classe afin de prendre en compte les apprentissages que leurs élèves ont à faire dans ce domaine. Il s'agit là d'un aspect important des compétences professionnelles des enseignants. Dans notre thèse (JC Rauscher, 1993) nous avions mis en évidence les conséquences sur la progression des élèves de la prise en compte ou non de ces enjeux d'apprentissage par leurs professeurs. Pour enlever toute ambiguïté à notre propos, ajoutons qu'il ne s'agit évidemment pas de dire qu'il s'agit d'une condition suffisante pour exercer notre métier d'enseignant de mathématiques. Ainsi en parallèle ou en liaison avec cette dimension professionnelle qui prend en compte principalement les questions du développement cognitif des élèves, il est tout aussi essentiel que les professeurs, pour enseigner, prennent en compte la question importante des fondements épistémologiques de l'enseignement des mathématiques.

Une deuxième perspective se confirme à partir de notre étude : c'est la potentialité de régulation de l'enseignement et des apprentissages qui résulte de la prise en compte des "opinions" exprimées par les apprenants. Pour notre part, c'est une piste que nous explorons avec l'accompagnement des apprentissages par des écrits à vocation réflexive produits par les apprenants, JC Rauscher (2002) et A Kuzniak, JC Rauscher (2002). Côté enseignant, il s'agit d'un moyen d'évaluation et donc de régulation de l'enseignement. Côté apprenant, il s'agit alors de permettre à l'élève ou à l'étudiant de prendre en main sa progression en prenant conscience de certains enjeux d'apprentissage.

BIBLIOGRAPHIE :

BARBANÇON Gérard., DUVAL Raymond, DUPUIS Claire, PLUVINAGE François*, Mathématiques A Venir : opération 50 lycées ; Les maths et vous,* IREM de Strasbourg, 1988

BLOOM B.S., HASTING J.T., MADAUS G.F., *Handbook of formative and summative evalauation of student learning,* New York, Mc Graw Hill, 1971

BORREANI Jacqueline, TAVIGNOT Patricia, VERDON Roseline, *Pratiques d'enseignement des mathématiques observées en classe de 6ème*, Centre Régional de Documentation Pédagogique de Haute Normandie, 2000

DUVAL Raymond, Sémiosis et pensée humaine, registres sémitiques et apprentissages intellectuels, Peter Lang, Berne, 1995

KUZNIAK Alain, RAUSCHER JC, Autour de quelques situations de formation en géométrie pour les professeurs d'école, Colloque COPIRELEM 2002, actes à paraître.

M.E.N., *Mathématiques classes des collèges 6^{e}, 5^{e}, 4^{e}, 3^{e}, Horaires/ Objectifs/ Programmes/ Instructions,* CNDP, 1990

NIMIER Jacques, *Recherche sur divers modes de relation à l'objet mathématiques*, Thèse de doctorat d'État, Paris X, 1983

PLUVINAGE François, *Difficultés des exercices scolaires en mathématique,* Thèse de Doctorat d'État, U.L.P. Strasbourg, 1977

RAUSCHER Jean-Claude, *L'hétérogénéité des professeurs face à des élèves hétérogènes, le cas de l'enseignement de la géométrie en début de collège,* Thèse, USHS Strasbourg, (publiée par IREM de Strasbourg), 1993.

RAUSCHER J-C, Une production écrite des élèves au service des apprentissages dans le domaine numérique, in *Annales de Didactique et de Sciences cognitives, Volume 7*, IREM Strasbourg, 2002.

L'EVALUATION-ACCOMPAGNEMENT DES EQUIPES D'ECOLES DANS LE DÉPARTEMENT DES HAUTES-ALPES UTOPIE OU REALISME ?

Françoise VALA-VIAUX
I.E.N. Circonscription Buëch et St Bonnet

Résumé :
Depuis octobre 2000, le département des Hautes-Alpes s'est doté d'un dispositif expérimental nommé "Evaluation-Accompagnement des équipes d'écoles" qui propose une alternative aux inspections individuelles ou même collectives existantes et s'inscrit résolument dans une démarche innovante au sein du système éducatif.

Le modèle traditionnel de l'enseignement où le maître reste seul et face à l'ensemble de sa classe commence à évoluer. Mais le mode actuel d'évaluation des enseignants, en décalage par rapport aux formes de pratiques pédagogiques recherchées et visées et sans véritable prise en compte des écarts constatés au sein d'un processus de réflexion professionnelle devrait être réfléchi différemment, sur le fond et la forme. Le dispositif départemental qui engage les équipes de circonscription (IEN et conseillers pédagogiques) s'appuie notamment sur la dimension collective du travail de l'enseignant au sein d'une équipe éducative à travers implication et responsabilités individuelles et se situe dans une perspective de **contrat de progrès** au sein d'étapes successives négociées avec chaque équipe d'école.

I. BREF HISTORIQUE

Durant **l'année scolaire 1999-2000**, **l'Inspecteur d'Académie des Hautes-Alpes**, accompagné dans sa réflexion par les inspecteurs des circonscriptions, et en concertation avec les représentants des personnels, décide de proposer aux enseignants du premier degré de son département d'abandonner les modalités existantes de l'inspection individuelle pratiquement inchangées depuis la circulaire du 8 janvier 1921, pour les remplacer par un dispositif d'« **évaluation-accompagnement des équipes d'écoles** » et de rattacher dans le même temps et par automatisation, la notation des personnels à l'ancienneté générale de service.

Le nouveau dispositif est mis en œuvre dès la rentrée 2000, sur l'ensemble du département à partir d'un texte cadre diffusé en mars 2001. Un accord de principe de l'administration centrale est donné pour mener cette expérimentation innovante.

Le dispositif a donné lieu, au moment de sa définition, à un large débat impliquant l'ensemble des parties concernées : inspecteur d'académie, inspecteurs de l'éducation nationale, conseillers pédagogiques de circonscription ou départementaux, représentants élus des personnels et les enseignants eux-mêmes rencontrés au cours d'une première réunion départementale d'information (septembre 2000) suivie de plusieurs réunions organisées au sein de chacune des circonscriptions.

A la rentrée suivante, le nouvel Inspecteur d'Académie poursuit la démarche engagée, amplifie la réflexion et propose la mutualisation des différents outils de travail mis à l'épreuve sur le terrain dans les différentes circonscriptions.

Le « **collège de formateurs** », instance regroupant l'ensemble des équipes de circonscriptions et des formateurs du département et réuni une fois par période, a tenu sa place de force de proposition pour améliorer le cadre de fonctionnement départemental, pour synthétiser et mutualiser les expériences de chacun.

Cette expérimentation témoigne d'une recherche d'évolution nécessaire de l'évaluation des pratiques professionnelles des enseignants du premier degré menée par l'administration, en prenant réellement en compte à la fois <u>la dimension individuelle de l'acte d'enseignement</u> (un enseignant devant les élèves) mais aussi <u>sa place et son articulation dans un travail d'équipe</u> (cohérence des contenus d'apprentissage d'un cycle, suivi du cursus scolaire des élèves dans l'école) <u>au sein d'un contrat négocié</u>.

Ce dispositif innovant s'inscrit résolument dans une démarche d'acteurs responsables au sein du système éducatif français.

II. CONSTATS DE DEPART

- **Le système traditionnel d'inspection individuelle ne donne satisfaction ni aux enseignants, ni à l'administration**. Les premiers déplorent notamment des inégalités de notation qui se traduisent par des écarts non négligeables dans les déroulements de carrière. L'institution cherche, quant à elle, à faire évoluer ce mode d'évaluation individuelle (lettre du Ministère en 1984 invitant à développer une procédure d'inspection d'école et rapport Pair en 1998 qui recommande de mettre en relation l'évaluation des enseignants avec l'évaluation de l'établissement au sein duquel ils exercent.).

- **Dans le cadre de la loi d'orientation sur l'éducation du 10 juillet 1989, les enseignants ont le devoir de travailler en équipe** afin de mettre en œuvre la différenciation pédagogique au sein d'un travail de cycle pour accompagner la réussite scolaire de tous les élèves. L'instauration de la « 27^{e} heure » inscrit d'ailleurs cette nécessité dans leur temps de service.
  Si les enseignants adhèrent à l'esprit et aux visées de la loi cadre, ils restent encore, plus de dix ans après sa promulgation en réelle difficulté pour la mise en œuvre au quotidien de cette adaptation de l'école aux besoins réels des élèves. Le sentiment de ne pas répondre avec toute l'efficacité voulue aux attentes institutionnelles, reste pour beaucoup d'entre eux, source croissante de culpabilité, d'inquiétude et de déstabilisation professionnelle.

- **Dans chaque circonscription, l'inspecteur peut constater**, à quelques exceptions facilement repérables, **une réelle volonté des enseignants d'œuvrer pour la réussite des élèves dont ils ont la charge.**

- **L'analyse fine des moyennes départementales des notes professionnelles dans chaque échelon d'ancienneté a montré des écarts importants** sur lesquels les

inspecteurs ont travaillé notamment en prenant en compte la rythmicité des inspections des personnels.
Un dispositif d'automatisation des notes a été proposé pour l'ensemble des enseignants du département à l'exception des personnels dont l'écart inférieur à la moyenne ne trouvait pas d'explication. Ces enseignants ont donc été, dès le début de l'expérimentation, contrôlés par deux inspecteurs extérieurs à leur circonscription ; soit la double inspection leur permettait un « rattrapage » et une automatisation de note professionnelle, soit leur note leur était conservée avec une double inspection annoncée pour l'année scolaire suivante.

III. CHOIX EXPLICITES D'EQUIPE DE CIRCONSCRIPTION

Dans le cadre départemental négocié, mais aussi avec une nécessaire liberté et autonomie d'action, chaque équipe de circonscription a inclus le dispositif dans une démarche singulière nourrie de ses réflexions et stratégies.

L'équipe de circonscription Buëch et St-Bonnet composée d'une inspectrice, d'une conseillère pédagogique "généraliste", d'un conseiller pédagogique "E.P.S." et d'un animateur informatique s'est donné des pistes de travail prioritaires à explorer.

Nous nous sommes tout d'abord demandé comment il était envisageable de rompre réellement avec un modèle d'inspection prégnant et d'accompagner l'évolution des représentations tenaces sur les rôles institutionnels de l'inspecteur et du contrôle.

- Nous souhaitions penser en terme d'**évaluation formative, en prenant appui sur un processus, une dynamique et non seulement sur un résultat du moment**.
- La mise en place d'une nouvelle démarche ne fut pas sans soulever aussi de multiples interrogations au sein des circonscriptions en ce qui concerne **les nouvelles missions et rôles dévolus à chacun** (inspecteur, conseillers pédagogiques, enseignant et équipe d'école). Cette réflexion amenait en effet de nouveaux défis pour les équipes de circonscription qui devaient redéfinir leurs stratégies de formateurs et innover dans leurs mises en œuvre mais aussi pour les enseignants incités à s'engager par école.
- De plus, nous savions, dans les premiers mois de mise en œuvre, que les maladresses inhérentes à la démarche exploratrice parce qu'innovante de notre équipe de circonscription pouvaient être interprétées comme de l'incompétence dans un système traditionnel basé sur la performance et la demande de « modèles experts prêts à l'emploi » excluant le doute.

  L'activité nécessairement cahotante, tâtonnante et nourrie par les essais et erreurs de la recherche engagée pouvait surprendre tous ceux qui sont emplis de certitudes et même d'incertitudes mais figés dans des fonctionnements rigidifiés et des représentations des fonctions sédimentées.
- Nous souhaitions dès nos premiers « accompagnements » **proposer un contrat de travail entre deux équipes,** mais aussi **fédérer autour d'une même problématique de travail des enseignants** issus de formations différentes et nommés par le hasard du mouvement dans la même école.

  L'observation des pratiques de classe nous a permis de constater que **le travail en équipe est embryonnaire, la mise en place des cycles balbutiante mais que les énergies individuelles existent et restent de qualité**. L'immense majorité des enseignants du premier degré déploie au quotidien son énergie et sa générosité au service des enfants-élèves et de l'enseignement avec un réel souci de favoriser l'égalité des chances mais reste souvent démunie "techniquement" pour gérer les différences entre les niveaux de compréhension et d'effectuation des élèves.

Nous avions la certitude que de nombreux enseignants motivés sont parfaitement disposés à faire évoluer leurs pratiques, à innover, à expérimenter, à condition de ne pas être seuls devant l'ampleur de la tâche, d'être encouragés, alimentés dans leurs réflexions et soutenus dans leurs préparations et leurs mises en oeuvre.

Il s'agissait alors de s'appuyer sur les savoirs, savoir-faire et savoir-être des enseignants pour les amplifier au service des élèves. La valorisation et la reconnaissance individuelles restent un facteur essentiel de mobilisation au quotidien.

Mais comment alimenter la réflexion individuelle, comment accompagner la pratique personnelle tout en cherchant à valoriser les points forts d'une équipe ?

Si nous étions convaincus que l'hétérogénéité des élèves d'une même classe devait absolument être prise en compte par l'enseignant, **l'hétérogénéité des enseignants d'une même école ou d'un même secteur devait alors être gérée par l'équipe de circonscription dans la nouvelle perspective du dispositif départemental.** Comment peut-on en effet envisager les progrès individuels et collectifs des élèves si l'on ne travaille pas aussi à la réussite individuelle et collective des enseignants ? **Le pari sur la capacité humaine et l'ancrage de nos pratiques sur la notion d'éducabilité** qui nourrissent nos actes de formation s'appliquent aux uns comme aux autres. Il n'est alors pas plus question de standardisation d'élève que de maître, il n'existe pas plus d'a priori sur l'élève que sur le maître. Il nous semblait indispensable de prendre chacun tel qu'il est et non tel que l'on souhaiterait qu'il fût et d'en avoir pleine conscience.

La négociation engagée devait alors, conformément à notre logique, lier par un vrai contrat de confiance, de travail et de progrès une équipe à une autre équipe en prenant en compte les responsabilités individuelles au sein du groupe. Le travail d'équipe devait aussi engager chacun à accepter les interactions, les confrontations, les tensions, les divergences et permettre de concevoir une tâche commune autour des intérêts des élèves, d'un projet d'école ou de cycle conformément aux attendus institutionnels.

Il s'agissait aussi pour l'équipe de circonscription d'aider à **faire conscientiser les pratiques et les contradictions en s'appuyant sur toutes les réussites valorisées et en surmontant les obstacles.**

Mais le travail d'équipe ne peut s'épanouir si le personnel d'encadrement reste figé dans des fonctionnements hiérarchiques; hiérarchie de la parole qui descend, hiérarchie de la maîtrise « réelle » du savoir, hiérarchie fondée sur le pouvoir d'évaluation. Dans le dispositif des Hautes-Alpes, au sein du fonctionnement de notre équipe de circonscription, l'inspecteur, toujours garant du cadre institutionnel, garde en mémoire les données nécessaires à la cohérence du pilotage de sa circonscription, intervient seul en cas de dysfonctionnement ou de problème mais s'appuie fondamentalement sur les objectifs à atteindre fixés par les deux équipes au moment de la négociation des modalités d'accompagnement.

Les différences entre les enseignants et les configurations très différentes des écoles (des plus petites classes uniques avec une dizaine d'élèves, aux regroupements pédagogiques intercommunaux situés à des distances importantes avec aussi quelques groupes scolaires de « ville ») nous ont imposé de moduler notre négociation, nos exigences et le choix des supports observés sur les sites scolaires.

Il était donc nécessaire d'accompagner un individu ou une équipe dans la formulation de sa ou de ses problématiques et de **rechercher à leurs côtés des**

réponses adaptées à chaque situation singulière en prenant appui sur un faisceau d'observables.

IV. LES ETAPES DE L'« EVALUATION-ACCOMPAGNEMENT DES EQUIPES D'ECOLES » (ÉTAPES 1, 2 ET 3)

Dans l'ensemble du département des Hautes-Alpes, l'évaluation-accompagnement d'une équipe d'école se déroule selon **quatre étapes** qui seront suivies dans un temps différé de temps de formation selon les besoins identifiés et les demandes exprimées.

Au sein de la circonscription Buëch et St Bonnet, **l'étape 3** (qui sera développée en particulier) a été amplifiée au fur et à mesure des expériences accumulées, afin de constituer en elle-même une étape déterminante ; c'est-à-dire une démarche « active » dans son entité.

ETAPE 1 : auto-évaluation de l'équipe pédagogique d'école(s).

- L'I.E.N. propose un calendrier prévisionnel et annuel des « accompagnements » de sa circonscription.
  Les équipes enseignantes concernées peuvent négocier les périodes de suivi selon les contraintes inhérentes aux projets de l'école déjà établis.

- **Sous la coordination du directeur, l'équipe pédagogique de l'école se réunit, remplit la fiche de renseignements *« navette-école »* (état des lieux) et formule ses attentes.**

- **Une fiche de circonscription *« information »* jointe explicite pour chacun les référentiels, supports à l'observation des pratiques de classe.**

- **La fiche *« navette-école »* sera retournée à l'équipe de circonscription qui étudiera la demande et préparera la visite d'école à partir de l'analyse critériée de l'état des lieux :**
  - lecture commentée du projet d'école ;
  - profils sociologiques des élèves ;
  - forces et faiblesses des résultats aux évaluations nationales CE2 et 6^e et aux évaluations départementales intermédiaires ;
  - prise en charge de l'hétérogénéité et dispositif d'aide aux élèves en grande difficulté ;
  - utilisation des compétences particulières des enseignants ;
  - cohérence des actions spécifiques de classe, de cycle, d'école ;
  - explicitation des souhaits formulés sur la fiche « navette » reçue ;

ETAPE 2 : *préparation concertée.*

- **Réunion préparatoire entre l'équipe enseignante de l'école et l'équipe de circonscription** (incluse dans le temps imparti aux concertations ou aux animations pédagogiques) :
  - **pour affiner la demande à partir d'un faisceau d'observables partagé ;**
  - **pour formuler la ou les problématiques communes**
    (un même champ disciplinaire présenté dans toutes les classes mais des particularités possibles);
  - **pour négocier les modalités de la visite dans l'école et les classes**
    (succession des observations de séances, organisation des « regards croisés » et des analyses communes...)

ETAPE 3 : observation croisée et évaluation des pratiques de classe.

- **Cette étape se déroule dans l'école ou les écoles associées en présence des élèves selon les modalités fixées précédemment :**
  - Chaque séance de classe est observée par au moins deux membres de l'équipe de circonscription dont l'inspecteur, en présence ou non d'un ou de plusieurs autres enseignants de l'école ;
  - Les observateurs s'appuient sur le ***« référentiel d'observation »*** **(spécifique à notre circonscription)** pour recueillir des indices ciblés sur la problématique de l'école et les attentes spécifiques de chacun des enseignants.

- **A l'issue de chaque observation, un court entretien permet d'effectuer un premier bilan avec l'enseignant de la classe.**

- **Dans notre circonscription, deux observations de classe sont toujours associées, au cours de la journée, à un temps commun d'analyse « croisée » afin de permettre déjà une distanciation nécessaire.**

- **Un document écrit individuel *« compte-rendu d'observation »*, basé sur la ou les séances de classe observée(s) est remis à chaque enseignant :**
  - Il est rédigé par l'inspecteur et conserve la mémoire du déroulement de la séance de classe et de l'analyse objectivée des aspects pédagogiques et didactiques de la pratique personnelle ;
  - **Il ne comporte aucun jugement mais des constats, des remarques ou des pistes de travail possibles dans le domaine de « l'immédiatement accessible » ;**
  - Son contenu a déjà fait l'objet d'échanges préalables entre l'enseignant et l'équipe de circonscription ;
  - Cet écrit reste propriété de la personne et ne sera donc pas versé dans son dossier professionnel.

- **Un document écrit individuel *« relevé de conclusion »*, basé sur le contrôle de l'exercice de la profession, est rédigé sous la responsabilité exclusive de**

l'inspecteur et destiné au dossier administratif de l'enseignant après visa de l'Inspecteur d'académie.

- Cet écrit est co-rédigé au cours de l'entretien final entre l'enseignant et l'inspecteur ;
- Il prend en compte tous les aspects institutionnels de la fonction, l'implication, la prise de conscience de l'enseignant en rapport avec sa mise en œuvre pédagogique et ses besoins en formation.

V. LES PHASES SPECIFIQUES DE L'ETAPE 3 DANS NOTRE CIRCONSCRIPTION.

Une option claire et argumentée en faveur des méthodes qui font agir et vivre l'esprit de l'enfant, celles qui, "répudiant les procédés mécaniques, cherchent non à remplir la mémoire, mais à exercer les sens, à éveiller la conscience et à affermir la raison". (dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire) de Ferdinand BUISSON, a été réaffirmée par l'équipe de la circonscription Buëch et St Bonnet.

1) Phase d'observation croisée des pratiques de classe.

- Les membres de l'équipe de circonscription ne sont jamais seuls observateurs ; il y a **toujours** au moins un enseignant de l'école à leur côté.
- Le ou les enseignants présents sont eux-mêmes « accompagnés » dans l'observation de la mise en œuvre pédagogique de leur collègue.
- Ils bénéficient alors d'un temps privilégié d'analyse et de mise à distance.
- Ces enseignants « observateurs accompagnés » seront observés à leur tour par leur collègue « acteur observé ».
- Les temps d'analyse proposés seront communs à tous ceux qui auront « croisé leurs regard ».

L'observation croisée des pratiques de classe permet l'indispensable prise en compte des savoir-faire professionnels du moment, des similitudes mais aussi des différences entre les enseignants de l'école.

Dès le début de la mise en œuvre du dispositif en octobre 2000, il nous est apparu absolument indispensable de **proposer aux enseignants d'observer les pratiques de leurs collègues portant sur les mêmes aspects pédagogiques et de disposer de temps d'analyse des mises en oeuvre avec plusieurs enseignants et au moins un formateur**. A cette fin, la circonscription, dans la mesure de ses capacités du moment, met à disposition un enseignant titulaire remplaçant pour compléter le dispositif. Si les besoins prioritaires en remplacement ne peuvent le permettre, les conseillers pédagogiques interviennent alors pour prendre en charge la classe de l'enseignant témoin. Plusieurs rotations sont alors organisées dans la journée avec la possibilité pour plusieurs membres de l'équipe d'école de devenir "observateurs accompagnés", d'objectiver les observations effectuées, de croiser les regards sur les pratiques afin de privilégier une vision interactive et de vivre un temps de synthèse enrichi de ces moments de mutualisation des expériences. Ces temps d'analyse ne se situent plus dans un contexte finalisé par une note professionnelle (puisque avancée automatique de ces notes) mais dans **une perspective de contrat de progrès.**

L'équipe de circonscription accompagne l'analyse et aide à faire passer de l'implicite à l'explicite des enseignants peu habitués à faire émerger ce qui résonne en chacun et ce qui relie un être singulier à ses pairs dans le domaine professionnel.

Pour amener les acteurs de terrain à changer eux-mêmes, nous avons appris à nous taire le plus souvent possible, à renoncer à exposer nos propres idées sans débat, à nous appuyer sur les enthousiasmes mais aussi sur les désarrois et les prises de conscience, à aider à la mise en mots des niveaux de formulations et des essais de formalisation, à partager les savoirs dans une construction plurielle contradictoire. Mais il n'est pas question pour autant de faire preuve de démagogie et de passer sous silence les comportements, les mises en œuvre pédagogiques ou les erreurs préjudiciables au respect des élèves et de leurs différences, à leur droit d'accéder aux savoirs, au respect de la demande institutionnelle ; il y va de la crédibilité de notre rôle dans ce dispositif et de l'idée que nous nous faisons de notre mission.

Ces remarques et analyses sont alors prises en compte voire portées par toute l'équipe enseignante qui peut envisager d'amplifier son action pédagogique et de gérer les contradictions existantes. La confrontation devient alors synonyme d'enrichissement, de valeur ajoutée et non de menace ou de remise en cause personnelle ou collective car incluse dans une dynamique de travail et dans le cadre du contrat négocié et défini au préalable.

Le débat incontournable sur les savoirs et leurs modes de transmission, sur la place et le rôle de l'élève dans la construction de ses compétences, nous ont amené à réfléchir sur l'importance fondamentale du temps d'observation et d'analyse « croisées » des démarches pédagogiques, de ces temps privilégiés de « tempêtes sur les crânes » !. Car les réticences restent fortes pour faire évoluer l'enseignement magistral et frontal de « transmission du savoir » qui reste la forme la plus économique en temps, facilité par les modélisations et apprentissages antérieurs. Beaucoup d'enseignants se sentent encore culpabilisés de manière récurrente face à « l'échec scolaire », par l'absence ou l'oubli d'une partie du programme de leur année au-delà de la responsabilité partagée du cycle. Le poids des habitudes acquises, la solitude du métier, et la complexité des relations dans le triangle didactique rend difficile l'évolution de pratiques de classe sédimentées par la hantise du temps "perdu".

2) Phase d'ouverture/enrichissement des pratiques de classe.

- L'équipe de circonscription propose, à partir des constats effectués pendant la première phase d'observation croisée, d'autres approches, d'autres choix de stratégies, d'autres supports amenés par les conseillers pédagogiques ou l'inspectrice.
- Les enseignants concernés, observateurs de leurs propres élèves, sont accompagnés dans l'analyse de cette nouvelle mise en œuvre pédagogique par un membre de l'équipe de circonscription.

Progressivement, lors de chaque accompagnement, à partir de cas particuliers, d'exemples et de contre-exemples, d'erreurs rectifiées, de problèmes reformulés, d'acquis ponctuels confortés et confrontés à d'autres acquis ponctuels et peu à peu coordonnés entre eux, s'élaborent des réponses et s'ébranlent les certitudes. Nous avons tenté chaque fois de mettre en délibération les convictions des uns aux autres. Au cœur des contradictions d'idées, nous renvoyons toujours à l'objet d'étude au-delà des ressentis, pour favoriser la décentration des points de vue subjectifs car c'est le réel qui interpelle les consciences. La dialectique entre « moi », « l'objet d'étude » et « les autres » s'opère en va et vient autour des faire opératoires des enseignants. **Il est indispensable pour cela d'organiser la confrontation des perceptions et des observations individuelles.** La complémentarité, la cohérence, la clarté du positionnement au sein de l'équipe de circonscription permet de relayer le questionnement en direction des enseignants. Le rôle alors spécifique de l'équipe de circonscription est de susciter ces nouvelles approches en utilisant son savoir « individuel et collectif ». De même que l'enseignant suscite, stimule, questionne, incite à approfondir, aide à aboutir chacun de ses élèves, l'équipe de circonscription contribue à la réflexion sur la mise en œuvre pédagogique comme activité de recherche.

Mais nous nous demandons si nous aurons la capacité à renouveler nos approches, à créer, à former, à nous auto former ? Nous ne pourrons répondre aux multiples besoins identifiés si notre département ne mutualise pas les compétences de ses formateurs, si ses stratégies d'accompagnement ne sont pas relayées par des acteurs extérieurs (chercheurs par exemple) et si les IUFM des Alpes de Haute Provence et des Bouches du Rhône ne complètent pas le dispositif pour répondre aux réels besoins de formation du terrain.

Dans un même temps, comment aider chaque enseignant à continuer à croire, malgré les frustrations et les échecs, de manière indestructible dans le potentiel de chaque enfant ?

Cette problématique reste pour nous indissociable de la confiance a priori que l'on doit accorder à chaque enseignant. Nous avons choisi de consacrer plus d'heures aux enseignants qui travaillent dans les conditions les plus difficiles ou qui éprouvent le plus de difficultés, sans que leurs collègues ne se sentent eux-mêmes lésés pour les aider, afin de tenter de réduire les paramètres incontrôlés. Nous avons ainsi décidé de décliner en direction des enseignants de la circonscription les plus démunis une stratégie basée sur la "discrimination positive"(professeurs des écoles débutants souvent nommés dans des structures scolaires très isolées, classes à multiples niveaux, situations particulières).

3) Phase de réinvestissement.

- Chaque enseignant reprend un apprentissage, sujet d'étude choisi lors de la négociation et propose une nouvelle mise en œuvre pédagogique en prenant en compte les constats effectués lors des analyses et les réajustements proposés.
- Ces nouvelles séances de classe seront aussi observées et analysées par leurs collègues et l'équipe de circonscription.
- Chaque enseignant sera amené à prendre conscience de son cheminement et des écarts constatés entre la première prestation et la deuxième mise en oeuvre.

C'est l'occasion de donner aux enseignants la possibilité de tenter des changements de postures dans leurs classes avec aide et appui. Les enseignants sont alors incités à se placer dans **une attitude de chercheur**, c'est-à-dire de ne pas se cantonner à une consommation de « recette » ou « technique » ni à une transmission modélisée, servile et mécanique. Ces interactions « imitatives » ne sont en effet pas conçues comme imitations-copies mais comme imitations-organisatrices car chaque enseignant transforme alors sa propre mise en oeuvre en fonction des actions antérieures analysées. Nous nous sommes aperçus que cette nouvelle phase dans l'accompagnement d'équipe d'école pouvait s'apparenter pour les enseignants à une situation-problème qui les engageait sur une nécessaire déconstruction-reconstruction de leur propre processus d'apprentissage. Toute construction d'un savoir implique un cheminement non linéaire, avec des tâtonnements, des impasses, des régressions momentanées, des seuils à franchir, des automatismes à acquérir et du temps pour s'essayer. Mais toute construction d'un savoir implique aussi l'acceptation de ne pas savoir. Et pour la première fois dans ce contexte expérimental basé sur la confiance et l'échange, les enseignants nous parlent aussi et surtout de ce qu'ils ne savent pas ou ne réussissent pas à faire avec leurs élèves et proposent de s'essayer dans les domaines qui leur posent le plus de problème. Quel bouleversement des mentalités et des comportements devant un inspecteur !

C'est l'occasion aussi pour l'équipe de circonscription de prendre conscience du cheminement parcouru par chaque enseignant en se basant sur le même référentiel d'observables utilisé lors de la première phase de mise en œuvre pédagogique considérée comme « évaluation diagnostique ».

L'objectif essentiel reste la formation de maîtres réfléchis, acteurs et responsables de leurs actes pédagogiques parce que conscients de leurs effets à court, moyen et long terme.

VI. LES ETAPES DE L'« EVALUATION-ACCOMPAGNEMENT DES EQUIPES D'ECOLES » (ÉTAPES 4 ET 5)

ETAPE 4 : synthèse-bilan de l'accompagnement et élaboration du plan d'action.

- **Entretiens individuels avec l'inspecteur de circonscription ;**
- **Nouvelle réunion entre les enseignants de l'école et l'équipe de circonscription pour écrire à « plusieurs mains » le document de synthèse collective « *compte-rendu de l'évaluation-accompagnement d'équipe d'école* », mémoire du contrat établi et du déroulement de l'accompagnement ;**
- **Les enseignants sont invités à produire individuellement un écrit anonyme « brainstorming » à partir des questions suivantes :**
  - *Sur quel aspect pensez-vous avoir avancé durant l'accompagnement ?*
  - *Que vous a apporté votre posture « d'observateur accompagné » des mises en œuvre pédagogiques de vos collègues ou des formateurs ?*
  - *Que vous a apporté le fait d'avoir été observé (et analysé) par vos collègues et les formateurs ?*

L'ensemble des réponses sera organisé et reproduit dans la rubrique « paroles d'enseignants ».

- **Formalisation des nouvelles attentes des enseignants pour leur formation continue**

ETAPE 5 : accompagnement par la formation continue.

- **Mise en œuvre d'actions de formation continue sous diverses formes :**
  - ***Interventions immédiates*** *menées par les conseillers pédagogiques dans les classes des enseignants demandeurs ;*
  - ***Journées de « stages de besoins »*** *inscrites au plan départemental de formation et organisées par circonscription. Elles permettent ainsi de libérer les enseignants d'une même école sur une courte durée pour travailler autour d'un même thème, d'un même projet spécifique, d'un même besoin dégagé lors de l'accompagnement ;*
  - ***Animations pédagogiques*** *regroupant des enseignants de plusieurs écoles sur des thèmes communs repérés et contractualisés ;*
  - ***Groupes « d'échanges de pratique »*** *ou de* ***« recherche-action ».***

Nous avons fait le pari possible sur la mise en œuvre d'un contrat de réussite avec les enseignants dans des conditions institutionnelles adéquates.

Nous souhaitons simplement contribuer à la réflexion concernant le fonctionnement de l'école et la réussite de tous les élèves.

DES PERFORMANCES PERCEPTIVO-TACTILES AUX PERFORMANCES ARITHMÉTIQUES : APPROCHE DÉVELOPPEMENTALE

Catherine DEVIDAL
Médecin de l'Education Nationale,
Docteur en Psychologie.
Inspection Académique de la Côte d'Or

Résumé :
Les études sur les troubles du développement des activités numériques, les dyscalculies développementales, ont fait l'objet de beaucoup moins de travaux que leurs correspondants relatifs au langage écrit, les dyslexies. Néanmoins, environ 6% de la population scolaire souffriraient de ce trouble et ce, malgré une intelligence normale. Un étude de la littérature sur les sujets porteurs de troubles arithmétiques chez l'adulte ou chez l'enfant atteste d'une liaison entre certaines performances numériques et des performances gestuelles, notamment digitales. Néanmoins aucune étude développementale n'a été entreprise pour confirmer cette liaison. **L'objectif de la recherche était, non seulement, de comprendre la liaison qui existe entre représentations numérique et digitale, chez des enfants tout venant, mais aussi de voir si cette liaison pouvait être prédictive de certains apprentissages numériques**.

I THEORIE

Du point de vue neuropsychologique, le syndrome de Gerstmann a servi de point de départ à ce travail. Dès 1924, Gerstmann a observé chez une femme de 52 ans, d'intelligence normale, un syndrome comprenant quatre symptômes : une agnosie digitale, une indistinction droite-gauche, une agraphie et une acalculie.

L'agnosie digitale

L'agnosie digitale représente un trouble primitif de reconnaissance et d'orientation des doigts des deux mains et non pas un trouble moteur ou sensitif tactile. D'origine spatiale, elle se caractérise par l'incapacité à distinguer, désigner, nommer et choisir les différents doigts, soit de leurs propres mains soit de celles de l'observateur. Quand l'examinateur demande au sujet de déplier un des cinq doigts de sa main, il se trompe, le confond avec un autre, étend un doigt non désigné. Les erreurs sont généralement plus accusées pour les trois doigts centraux que pour le pouce et l'auriculaire.

L'indistinction droite-gauche

Pour distinguer la droite de la gauche, le sujet doit faire appel à des repères visuels ou kinesthésiques. Ce trouble de l'orientation peut ne pas être limité au corps propre mais se manifester également dans la distinction de la droite de la gauche de l'examinateur. Le sujet a du mal à croiser la ligne médiane.

L'agraphie

L'agraphie est liée à une apraxie (praxie : mouvement volontaire dans le but d'exécuter une action) constructive, c'est-à-dire une maladresse majeure pour coordonner les différents gestes nécessaires à la formation des lettres. L'écriture spontanée et sous dictée est plus atteinte que la copie.

L'acalculie

L'acalculie est de type spatial. Les troubles du calcul correspondent surtout en l'incapacité de pouvoir écrire correctement des chiffres dictés, d'arranger des chiffres en colonne directement sur une feuille et de différencier les centaines, les milliers**.** Toutefois, le patient a aussi perdu certaines notions arithmétiques ; ainsi la soustraction et la division sont habituellement plus déficitaires que l'utilisation des tables de multiplication. Ces symptômes témoignent d'un trouble de l'orientation spatiale.

Du point de vue neuro-anatomique

Du point de vue neuro-anatomique, la lésion associée au syndrome de Gerstmann intéresse la région pariétale inférieure de l'hémisphère dominant, au niveau de l'aire 39 de Brodmann.

Plus récemment, Dehaene et Cohen (1997) présentent le cas d'un malade atteint d'une lésion du cortex pariétal inférieur. Ce patient se trompe une fois sur six dans des épreuves de comparaison où il doit entourer le plus grand de deux nombres (par exemple, il juge que 5 est plus grand que 6). Il échoue également une fois sur cinq dans des tâches de jugement de proximité où la consigne est de déterminer lequel de deux nombres est le plus proche d'un troisième (il énonce, par exemple, que 4 est plus proche de 9 que 5). Les difficultés les plus importantes se trouvent dans les tâches de bissection d'intervalle où ce patient donne souvent des réponses absurdes, telle que le nombre se trouvant entre 10 et 20 est 30. Il échoue trois fois sur quatre dans les soustractions (9 - 8 = 7 par exemple).

A l'opposé, ce patient sait parfaitement dire quelle lettre se situe entre A et C ou quel jour vient entre lundi et mercredi. Les connaissances encyclopédiques relatives aux nombres (1789 ou 1515) ne lui posent pas non plus de problème. Il connaît toujours par cœur la plus grande partie des tables de multiplication et arrive toujours à calculer des additions à un chiffre car sa mémoire verbale est intacte.

Dehaene (1997) a étudié le cas d'une autre patiente dont les noyaux gris centraux de l'hémisphère gauche avaient été partiellement détruits. Elle présentait des signes opposés à ceux de M. M.. Elle pouvait comparer deux nombres ou trouver lequel se situait au milieu d'un intervalle. Par contraste, sa mémoire des tables arithmétiques était gravement perturbée et, par conséquent, les multiplications étaient plus échouées que les soustractions dont les résultats ne sont pas appris par cœur à l'école. De même, la récitation de l'alphabet ou des comptines lui était devenue impossible.

Les deux études de cas ci-dessus constituent une double dissociation. Celle-ci suggère l'existence d'une indépendance entre les activités numériques faisant appel à la mémoire verbale et les activités numériques nécessitant la représentation et la manipulation des quantités.

Du point de vue développemental

Du point de vue développemental**,** hormis le fait que le syndrome de Gerstmann a également été retrouvé chez l'enfant, nous avons retenu une étude plus récente, celle de Rourke (1993). Cet auteur s'est intéressé à des groupes d'enfants âgés de 9 à 14 ans. Il a étudié leurs performances en arithmétique et en lecture. Le premier groupe (G1) présentait des résultats faibles en mathématiques comme en lecture ; le deuxième avait de meilleurs résultats en arithmétique qu'en lecture (G2 : meilleur en maths), avec néanmoins des performances en arithmétique inférieures à la normale. Le troisième groupe s'opposait au deuxième du fait de résultats meilleurs en lecture qu'en arithmétique (G3 : très faible en maths + déficits psychomoteur et perceptivo-tactile). Les enfants du groupe 3 présentaient, par rapport à ceux des groupes 1 et 2, des déficiences significatives dans les domaines psychomoteur et perceptivo-tactile. L'analyse qualitative des troubles arithmétiques des enfants du groupe 3 a mis en évidence des déficiences dans plusieurs domaines :

1) Dans l'organisation spatiale : les enfants ne savaient pas ranger les chiffres dans la colonne adéquate lorsqu'ils écrivaient une opération en colonne ;
2) ils présentaient des difficultés à placer la virgule dans un nombre décimal. Par ailleurs, ils présentaient une bonne mémoire verbale.

Les études de ces différents auteurs mettent en évidence :

1) l'existence de relations entre performances arithmétiques et perceptivo-tactiles, notamment digitales ;
2) que les difficultés en mathématiques présentées par les adultes ou les enfants ne sont pas globales mais touchent sélectivement un type d'activités.

De fait, nous nous sommes demandé si cette association ne pouvait pas trouver une explication dans la relation qu'entretiennent les doigts et la structuration spatiale dans l'apprentissage du calcul.

Deux hypothèses sont en effet susceptibles de rendre compte de cette relation. La première renvoie à l'idée de <u>proximité de localisation</u> des aires neurologiques d'intégration alors que la seconde suggère une <u>relation fonctionnelle</u> entre capacités perceptives et performances arithmétiques.

L'hypothèse de proximité de localisation.

Selon cette hypothèse, la liaison entre ces types de performances, perceptivo-tactile et numérique, tiendrait à la proximité spatiale des projections cérébrales des afférences perceptivo-tactiles et d'un au moins des centres de représentation de la numérosité. En effet, l'aire 39 de Brodmann est impliquée d'une part comme aire intégratrice dans la perception tactile. Au niveau sensoriel, les mains sont des parties du corps privilégiées pour la sensibilité tactile car, d'une part, ce sont les organes les plus mobiles chez l'homme, ce qui leur confère une capacité exploratrice importante et, d'autre part, elles disposent d'un équipement sensoriel hautement perfectionné. La main est donc l'organe privilégié du toucher actif.

D'autre part, l'aire 39 de Brodmann est également dévolue à l'analyse de la relation visuo-spatiale entre objets.

Pour finir, en ce qui concerne les nombres, cette aire est cruciale dans la représentation quantitative et la manipulation mentale des nombres. Elle permet d'accéder au sens des nombres en tant que quantité abstraite. Elle contribue à la représentation de la grandeur relative des nombres (bissection d'intervalle et comparaison). Dehaene et Cohen (1995) ont élaboré un modèle architectural fonctionnel et anatomique qui suggère que les nombres peuvent être représentés dans le cerveau humain selon trois codes distincts :

1) un code visuel arabe, situé dans les aires occipito-temporales droite et gauche. Il correspond à une représentation dans laquelle les nombres sont représentés comme des suites de chiffres : 52 = <5> <2> ;
2) un code verbal, les nombres étant encodés sous forme de séquences syntaxiquement organisées de mots, sous la dépendance des aires périsylviennes gauches et du ganglion basal gauche ;
3) un code analogique, les quantités se trouvent représentées sous forme analogique dans les aires pariétales inférieures (aire 39 de Brodmann). Cette représentation donne une information sémantique : la quantité associée à un nombre donné est récupérée et mise en relation avec d'autres quantités (52 est plus petit que 60).

Ces trois représentations sont reliées par des voies permettant la traduction rapide d'un format à l'autre. Deux voies principales sont ainsi disponibles :

1) la première est la « voie directe non sémantique », dans laquelle les entrées numériques sont transformées en format verbal accessible à la mémoire verbale des faits arithmétiques. La récupération de ces séquences verbales est assurée par une boucle cortico-sous-corticale à travers le ganglion basal. Cette région serait impliquée dans l'addition et la multiplication, et, notamment, la récupération en mémoire des faits arithmétiques.
2) la deuxième voie est une voie « sémantique directe », par laquelle les manipulations mentales des quantités numériques sont utilisées pour effectuer des opérations. Cette voie se situerait dans le cortex pariétal inférieur.

Donc, l'aire 39 de Brodmann est impliquée comme aire intégratrice dans la perception haptique, l'analyse des relations visuo-spatiales entre objets et la manipulation mentale des quantités., En revanche, cette aire ne semble pas intervenir dans l'intégration des dimensions verbales du traitement numérique.

L'hypothèse de relation fonctionnelle.

La seconde hypothèse conçoit les relations entre représentations perceptivo-tactiles et représentations numériques comme fonctionnelles. Elle s'appuie sur le rôle primordial que jouent les doigts dans l'apprentissage de la numération et dans la pratique du dénombrement. En effet, on peut penser que les doigts sont utilisés pour plusieurs raisons : ils sont toujours dénudés et dons facilement visibles. De plus, ils sont mobiles, manipulables et faciles à mettre en correspondance terme à terme avec une collection d'objets dans le but d'un comptage. D'ailleurs, quelle que soit la culture, les enfants utilisent leurs doigts pour apprendre à compter. Ils pointent, touchent ou déplacent les objets lorsqu'ils dénombrent. On sait aussi que l'exactitude du dénombrement diminue lorsqu'ils ne peuvent ni mouvoir, ni toucher ni pointer les objets. Cette activité requiert un contrôle précis des mouvements et de la position des doigts et des mains dans l'espace.

Du point de vue développemental, Brissiaud (1994) a relaté le cheminement d'un enfant français qui, de 3 ans à 4 ans 6 mois, a utilisé ses doigts pour compter. Il avait appris à représenter les quantités sous forme analogique à l'aide de collections de doigts, c'est-à-dire qu'il savait montrer le nombre exact de doigts à l'énonciation du mot-nombre sans avoir à compter ses doigts. Ce procédé a précédé l'apprentissage du comptage. L'enfant était ainsi arrivé à conceptualiser une quantité grâce à l'utilisation d'un système gestuel (les doigts) et non grâce à l'utilisation d'un système verbal (les mots-nombres). L'intérêt de cette stratégie était que les doigts étaient toujours utilisés dans le même ordre, chaque nouveau doigt levé correspondait à un mot-nombre précis, ce qui lui permettait de construire simultanément la valeur ordinale des nombres et, comme le dernier mot-nombre prononcé représentait la quantité, la valeur cardinale. De plus, comme chaque mot-nombre correspondait à un doigt particulier, l'enfant contrôlait plus facilement l'usage de ces mots-nombres lors d'un comptage et établissait d'emblée une suite verbale stable et conventionnelle.

Les activités gestuelles permettraient donc le passage d'une conception procédurale à une conception déclarative du nombre. En fait, on peut penser que les doigts fourniraient à l'enfant une première représentation non verbale mais concrète de la numérosité sur laquelle se construirait, dans un deuxième temps, la représentation verbale de la numération. Ainsi, l'établissement de représentations cardinales pourrait dépendre de l'expérience gestuelle qui a contribué à leur élaboration. Dans cette optique, on peut émettre l'idée que c'est la qualité de la représentation non verbale qui serait à l'origine des différences observées chez les enfants lors de l'acquisition de la représentation verbale de la suite arithmétique. Il s'ensuit que plus cette représentation digitale est confuse plus les représentations numériques sont fragiles (i. e. erronées) ou difficiles à mobiliser (i.e. nécessitant du temps pour les mettre en œuvre). Pour conclure, on peut penser que l'association entre des capacités perceptivo-tactiles digitales, des capacités visuo-spatiales et des performances en arithmétique d'un individu non seulement ne seraient pas fortuites mais pourraient être prédictives de la réussite de certains aspects des apprentissages en arithmétique.
C'était l'objectif de la recherche.

II EXPERIMENTATION

Expériences 1 et 2

La première partie rapporte une étude longitudinale qui concernait des enfants allant de la grande section de maternelle à la troisième année d'école primaire (expériences 1 et 2). Notre objectif était de montrer que les performances perceptivo-tactiles permettaient de prédire, mieux que les scores de niveau de développement intellectuel, les performances ultérieures d'enfants de 5 - 8 ans en arithmétique.

Les enfants ont été soumis à trois types d'épreuves : perceptivo-tactile – niveau de développement – numériques.

1. Les épreuves perceptivo-tactiles :

Gnosies digitales :

L'examinateur demande à l'enfant de mettre ses mains en pronation sur la table et, dans un premier temps affecte, sous contrôle visuel, un nombre de 1 à 5 à chacun des doigts en commençant par le pouce et terminant par l'auriculaire. Le sujet ferme alors les yeux et l'expérimentateur touche un à un les doigts du sujet selon la série 3 - 1 - 5 - 4 - 2. Le sujet doit à chaque fois identifier le doigt stimulé en donnant le nombre associé, sans jamais ouvrir les yeux.

Discrimination digitale :

Cette épreuve analyse de manière précise la reconnaissance par l'enfant d'une double stimulation tactile. L'examinateur demande à l'enfant de poser ses deux mains en pronation sur la table, l'enfant ayant les yeux fermés, l'expérimentateur touche simultanément deux doigts d'une même main ou successivement deux fois le même doigt. Après ouverture des yeux, l'enfant doit désigner avec l'index controlatéral le ou les doigts stimulés. L'ordre était le suivant : 1-3 / 2-3 / 2-4 / 5-5 / 1-5

Graphiesthésie :

L'expérimentateur effectue lentement à l'aide d'une pointe mousse un tracé sur le dos de la main droite de l'enfant (main en pronation) qui, après réouverture des yeux, doit reproduire au même endroit ce tracé avec son index (formes à reproduire : O / + / 1 / 6 / 3).

2. Les épreuves de développement :

Bonhomme et figures géométriques.

3. Les épreuves numériques en GS :

Ecriture de nombres, compléter une suite de nombres ; dénombrement de collections et résolution de problèmes.

4. Les épreuves numériques en CP :

Dictée de nombres ; compléter une suite de nombres ; opérations et résolution de problèmes.

Les résultats montrent qu'en GS de maternelle, les scores aux épreuves numériques sont mieux prédits par le Neuro[1] sauf l'écriture de nombres, mieux prédite par le QD[2]. La nature verbale de cette activité, très liée aux apprentissages, peut expliquer sa dépendance par rapport au QD. Pour les autres épreuves, où il n'y a pas d'apprentissage systématique en GS, nous pensons que la plupart des réponses dépendent du calcul et les résultats montrent qu'elles sont mieux prédites par le score en Neuro que par le QD.

En revanche, au CP la plupart des résultats sont mieux prédits par le QD, en particulier les épreuves d'écriture de nombres et d'opérations. Ces deux épreuves mettent en jeu l'utilisation de connaissances déclaratives. Nous pensons là encore que, pour les réussir, il est nécessaire que les enfants aient acquis une certaine automatisation de la chaîne verbale, automatisation qui dépend de la pratique, de l'âge et du niveau

[1] Neuro : variable mesurant les capacités percepto-tactiles de l'enfant
[2] QD :variable mesurant le niveau de développement intellectuel de l'enfant

scolaire. Cette interprétation peut expliquer le fait que ces résultats soient mieux prédits par le QD que par le Neuro. Par contraste, la résolution de problèmes qui requiert l'élaboration et le traitement des représentations des quantités reste mieux prédite par les performances en Neuro.

Suite de l'étude longitudinale

Nous avons continué l'étude longitudinale avec ces mêmes enfants scolarisés en troisième année d'école élémentaire pour deux raisons.
1) Nous voulions nous assurer que les performances perceptivo-tactiles expliquaient davantage les scores en mathématiques qu'en français, le contraire aurait enlevé tout caractère original à nos résultats ;
2) Nous voulions vérifier si les résultats des épreuves perceptives recueillies à 5 ans restaient toujours prédictives trois ans plus tard.

Donc nous avons gardé les scores aux épreuves perceptivo-tactiles de GS. Par ailleurs, nous avons soumis les enfants à un nouveau test de développement intellectuel (PM47).
Pour finir, nous avons utilisé les évaluations nationales en français et en mathématiques. Dans un premier temps, nous avons calculé les corrélations entre les quatre épreuves numériques et le résultat en français. Cette procédure nous permettait de classer *a posteriori* les épreuves numériques en épreuves à dominance verbale (suite de nombres et opérations) ou non verbal (calcul mental et résolution de problèmes) suivant qu'elles étaient plus ou moins corrélées avec les résultats en français. Les résultats confirment la liaison existant entre des habiletés perceptivo-tactiles, explorées à travers des épreuves digitales et les capacités de représentation et de manipulation mentale des quantités évaluées à travers les épreuves de calcul mental et résolution de problèmes et ce indépendamment du niveau de développement**.** Donc ces résultats mettent en évidence le caractère prédictif à long terme des performances aux épreuves perceptivo-tactiles sur certaines performances numériques.

En résumé, à l'issue de ces trois expériences, notre objectif était atteint : avoir montré que les capacités perceptivo-tactiles d'enfants de 5 ans, évaluées à travers des représentations digitales, prédisaient mieux que le niveau de développement intellectuel les scores à certaines épreuves numériques, en particulier celles nécessitant la représentation et la manipulation des quantités et ce chez des enfants apparemment indemnes de troubles d'apprentissage.

Notre interprétation est que la qualité et la précision des représentations digitales pourraient conditionner l'élaboration des représentations numériques ultérieures. En effet, nous pensons que les représentations digitales pourraient jouer un rôle d'intermédiaire entre, d'une part, une représentation primitive continue et approximative des quantités et, d'autre part, une représentation discrète, précise d'une quantité symbolisée soit par les noms de nombres, soit par les chiffres arabes. En d'autres termes, il nous semblait que l'utilisation des doigts apparaissait comme facilitatrice pour l'acquisition de la discrétisation de la chaîne numérique. Nous avancions deux interprétations différentes. La première pouvait se concevoir en terme de représentation. En effet, on pouvait émettre l'idée que les enfants dont la perception kinesthésique des doigts était imprécise, pouvaient construire des représentations digitales erronées et ainsi élaborer et conserver en mémoire à long terme des représentations numériques fausses. La seconde interprétation s'énonçait plus en terme de procédure c'est-à-dire que les représentations numériques élaborées à partir des représentations digitales seraient exactes mais plus difficiles à mobiliser. Les résultats des trois expériences précédentes ne permettaient pas de trancher en faveur de l'une ou l'autre des interprétations. Nous avons alors réalisé une nouvelle série de deux expériences. De plus, nous devions prendre en compte un facteur comportemental, dont l'association avec la dyscalculie n'est pas rare : l'attention.

Expériences 4et 5

L'objectif des quatrième et cinquième expériences était donc de déterminer comment les doigts pouvaient constituer des médiateurs des habiletés numériques entre les numérosités « externes » et les représentations « internes » de ces mêmes quantités ou numérosités.
Nous avons donc décidé de travailler non plus sur la population en globalité mais sur des groupes différenciés. Dans l'expérience 4, 52 enfants de GS de maternelle ont été répartis en quatre groupes significativement différenciés selon leurs capacités perceptivo-tactiles d'une part (Neuro + vs. Neuro-)[3] et développement intellectuel d'autre part (QD+ vs. QD-)[4].

Nous avons proposé aux sujets trois types d'épreuves numériques mettant en jeu les doigts :

1. Une épreuve de dénombrement

qui nécessitait un pointage précis et organisé dans l'espace de collections homogènes (9 ; 14 ; 18 ; 21 ; 28 gommettes) ou avec interférents (8 ; 13 ; 19 ; 23 ; 27). Cette deuxième condition devait permettre d'évaluer le coût attentionnel du à la présence d'interférents.

2. Une épreuve de production digitale :

le but de cette épreuve était de déterminer si, lors de présentations de cardinalités, l'enfant était capable de se représenter rapidement et exactement une quantité et de l'extérioriser avec ses doigts.
Dans la première tâche, l'expérimentateur énonçait à haute voix une cardinalité et les participants devaient la reproduire avec les doigts de leurs propres mains (verbale). Dans la deuxième, l'expérimentateur montrait avec ses doigts, pendant une seconde, une cardinalité présentée en configuration canonique (définie par quatre juges) que l'enfant devait reproduire avec ses propres doigts (digitale). Dans la dernière tâche, l'enfant devait reproduire avec ses doigts une configuration spatiale de gommettes disposées en respectant la distribution conventionnelle du dé (spatiale).
Cette épreuve nécessitait d'une part, qu'une représentation stable des quantités élémentaires soit associée à une dénomination et, d'autre part, que l'enfant puisse récupérer en mémoire verbale les faits numériques ainsi stockés. Ces processus seraient

[3] Neuro + : variable représentant les enfants ayant eu le meilleur score aux épreuves percepto-tactiles. Neuro - : variable représentant les enfants ayant eu le score le plus faible aux épreuves percepto-tactiles

[4] QD+ : variable représentant les enfants ayant eu le meilleur score aux épreuves de développement intellectuel. QD- : variable représentant les enfants ayant eu le moins bon score aux épreuves de développement intellectuel.

très liés aux apprentissages, de là leur dépendance par rapport au niveau de développement

3. Une épreuve de jugement. :

L'objectif était d'estimer les capacités de jugement de l'enfant face à une production digitale dont il n'était pas l'auteur. Il ne s'agissait plus pour l'enfant d'agir avec ses doigts mais de juger la numérosité d'une collection de doigts présentée par un tiers en la comparant à d'autres quantités.

Cette dernière épreuve permettait de différencier deux situations, canonique (i. e. conforme aux normes habituelles de collections de doigts utilisées par les enfants pour apprendre à compter : exemple : 2 = pouce et index de la même main) versus non conventionnelle (i. e. collections de doigts non utilisées habituellement par les enfants pour apprendre à compter : exemple : 2 = pouces des deux mains). Les planches proposées aux enfants comportaient chacune quatre photographies de configurations de doigts représentant des cardinalités. Celles-ci pouvaient être canoniques sur une main, canoniques sur deux mains ou non conventionnelles. L'expérimentateur énonçait un nombre (2, 4 ou 7) et l'enfant devait choisir le plus rapidement possible la photographie représentant ce nombre parmi trois distracteurs.

Nous attendions un effet du Neuro pour les épreuves de dénombrement et de jugement de quantités et un effet du QD pour l'épreuve de production.

Les résultats recueillis ont été en partie conformes à nos prédictions, à l'exception des résultats de la tâche de jugement qui pouvaient être dus au hasard. En ce qui concerne l'épreuve de dénombrement, nous avons mis en évidence que les enfants Neuro + ont dénombré plus vite et avec moins d'erreurs que les enfants Neuro - tous les types de collection, homogènes ou avec interférents. Ces faits peuvent être expliqués par une meilleure analyse visuo-spatiale et un meilleur pointage de la part des enfants Neuro +. Par contre, nous n'avons pas pu mettre en évidence une interaction entre les capacités perceptivo-tactiles et les résultats à l'épreuve de dénombrement. Etant donné la difficulté de l'épreuve (grand nombre d'éléments, disposition aléatoire), il est possible que nous ayons eu affaire à un effet plancher qui a pu masquer la possible interaction. En ce qui concerne les résultats observés dans la tâche de dénombrement, en situation « interférents », ceux-ci n'ont pas été conformes à nos prédictions. En effet, nous pensions que les enfants Neuro – seraient plus gênés par la présence d'interférents que les enfants Neuro +, ce qui n'a pas été le cas. Il se peut donc que la difficulté de la tâche de dénombrement réside dans l'activité de pointage en elle-même et non dans la prise d'information visuelle. Là encore, ce résultat est à considérer avec prudence vu le matériel que nous avons utilisé. Néanmoins, dans ces conditions expérimentales, nous ne pouvons pas retenir la composante attentionnelle comme facteur explicatif de l'infériorité des performances des enfants Neuro – par rapport à celles des enfants Neuro +. C'est sans doute la tâche de dénombrement en elle-même qui est difficile pour les enfants Neuro –.

En ce qui concerne l'épreuve de production digitale, ainsi que nous l'attendions, les scores étaient mieux prédits par le niveau de développement que par le Neuro. Une condition se détachait cependant des autres, la très bonne réussite de tous les enfants dans la condition « digitale ». Ce résultat suggérait que les représentations digitales étaient correctement mises en place chez tous les enfants. Il devenait alors légitime de penser que les enfants Neuro – avaient simplement plus de mal à les mobiliser. Donc ce résultat a permis d'éliminer une des deux raisons évoquées en fin de deuxième partie : les représentations digitales des enfants Neuro - ne semblent pas plus déficientes que celles des Neuro+.

Néanmoins, vu l'échec important des deux groupes d'enfants dans les collections de grande taille, nous ne pouvions nous contenter de ces résultats.

Dans l'Expérience 5 :
1) Nous nous proposions de confirmer le rôle de la médiation assurée par les doigts dans une activité de dénombrement mais portant sur des collections de plus petite taille, afin de lever l'inconvénient du au grand nombre.
2) Il convenait également de rechercher, à nouveau, un possible effet de l'attention.
3) Par ailleurs, afin de confirmer l'hypothèse que les représentations internes des quantités étaient aussi bien mises en place chez les Neuro – que chez les Neuro + nous avons proposé aux enfants une épreuve de comparaison de quantités portant uniquement sur des chiffres inférieurs à 10. En effet, nous pouvions penser qu'en dernière année de maternelle la plupart des enfants avaient non seulement acquis la chaîne numérique verbale jusqu'à 10 mais également la représentation interne analogique des quantités. Par conséquent, il ne devait plus exister de différences de performances entre ces enfants, quel que soit leur niveau en Neuro. En fait, cette épreuve a été crée comme une épreuve « contrôle ». Elle comportait trois conditions expérimentales : verbale – visuelle arabe – spatiale. Les enfants devaient à chaque fois choisir le plus grand des deux nombres ou collections.

La nouvelle population, 52 enfants de grande section de maternelle, était appariée en fonction du niveau de développement mais différenciée selon le niveau en Neuro, Neuro – et Neuro+. Nous avons à nouveau proposé une épreuve de dénombrement de collections homogènes et de collections avec interférents en diminuant de façon sensible le nombre d'items à dénombrer afin de permettre à tous les enfants d'effectuer un balayage visuel exhaustif de la collection. Nous faisions les mêmes hypothèses que dans l'Expérience 4. Les résultats sont les suivants. Ainsi que nous l'attendions, la plus petite numérosité des collections a permis à tous les enfants d'effectuer la tâche de dénombrement sans donner lieu à un effet plancher chez les Neuro -. Nous avons à nouveau mis en évidence un effet du Neuro dans la tâche de dénombrement. Par ailleurs, comme dans l'expérience 4, nous avons remarqué que les enfants des deux groupes commettaient plus d'erreurs de pointage que d'erreurs d'énonciation de la chaîne numérique verbale ou d'erreurs de coordination pointage / énonciation et ce, dans toutes les épreuves de dénombrement. Comme dans l'Expérience 4, nous avons également noté une baisse des performances chez les Neuro – comme chez les Neuro + en présence d'interférents. Nous pouvons donc à nouveau émettre l'idée que, si les enfants du groupe Neuro - ont de moins bonnes performances en dénombrement que ceux du groupe Neuro +, ce n'est pas parce qu'ils ont plus de mal à prendre des indices visuels, et, donc, à encoder l'information. Ces résultats ont donc précisé ceux de l'expérience précédente et confirmé nos prédictions.

En conclusion, les enfants Neuro – n'ont pas de moins bonnes capacités pour appréhender des informations visuelles. Ils n'ont pas plus de mal à énoncer la chaîne numérique verbale ainsi qu'à mettre en œuvre une correspondance terme à terme. On peut donc penser que c'est <u>l'activité de pointage</u> qui paraît la plus déficiente chez les enfants Neuro -.

Le rôle des doigts, comme médiateurs entre représentation non verbale et représentation verbale, peut ainsi être évoqué essentiellement au niveau procédural. En effet, les doigts interviennent dans la réalisation des mouvements volontaires, dans la perception kinesthésique et dans la représentation concrète et explicite de la numérosité. Il est donc possible que ces habiletés praxiques et perceptivo-tactiles permettent aux enfants Neuro + d'effectuer des activités de quantification plus vite et avec moins d'erreurs que les enfants Neuro -, permettant ainsi une transition plus sûre entre conception procédurale et conception déclarative du nombre. Par la suite, la supériorité de ces performances arithmétiques aiderait les enfants Neuro + tant au niveau de la maîtrise et de l'utilisation à bon escient de procédures de calcul que de la résolution de problèmes. Il est nécessaire, pour interpréter ce fait, de postuler l'existence d'une intrication neuro-fonctionnelle des représentations de la numérosité, de l'espace et des doigts au niveau cortical, vraisemblablement dans le lobe pariétal.

Ainsi, l'ensemble des travaux présentés conduit à valider, chez de jeunes enfants tout venant, un modèle à visée développementale postulant le caractère prédictif des gnosies digitales sur des activités numériques touchant la représentation interne de la quantité.

POURSUITE DES TRAVAUX.

De futures recherches devront tenter de préciser davantage le rôle facilitateur des collections de doigts dans la mise en place des premières représentations numériques chez les jeunes enfants. Deux directions de travail nous semblent s'imposer. La première consisterait à rechercher qui de l'analyse visuo-spatiale ou du pointage est plus prédictif de certaines performances. En second lieu, il est nécessaire d'étudier l'impact que pourrait avoir un entraînement perceptivo-tactile sur des enfants tout-venant, dans la mise en place des premières représentations numériques. Notre hypothèse est que si les enfants présentent uniquement un retard (i. e. fonctionnel) au niveau de la maturation du lobe pariétal se traduisant par un retard de leurs capacités perceptivo-tactiles, praxiques et d'analyse visuo-spatiale, alors l'entraînement perceptif leur permettra de récupérer ce retard. Si, par contraste, ils sont porteurs d'un trouble (i. e. structurel), l'entraînement perceptif n'aura pas d'effet sur les différentes compétences évoquées et les enfants devront alors bénéficier d'une véritable rééducation.

DIMENSIONS SENSIBLES DES SITUATIONS DE TUTELLE ET TRAVAIL DE L'ENSEIGNANT DE MATHÉMATIQUES

Marie-Paule VANNIER
Directrice d'école d'application – Maître-Formateur
associée à l'IUFM de Créteil – Centre de Melun

Résumé :

Cette communication a pour objet la présentation de notre thèse, élaborée en étroite collaboration avec Maryvonne Merri[1], sous la direction de Gérard Vergnaud. Nous avons cherché à décrire et à comprendre les compétences professionnelles mises en œuvre par les enseignants pour aider des élèves reconnus en grande difficulté. Enseignants et élèves appartiennent à trois institutions scolaires différentes : la CLIPA (ou Classe d'Initiation Préprofessionnelle en Alternance[2]), la 4ème technologique agricole[3] et le CM2.

La problématique de la thèse est issue d'un triple ancrage théorique : en psychologie des apprentissages, en didactique des mathématiques et en ergonomie cognitive. Notre souci a été de faire correspondre deux logiques : celle d'une théorie de l'apprentissage, qui définit les conditions nécessaires au développement des connaissances de tous les élèves, et celle de l'activité de l'enseignant dans des contextes institutionnels particuliers. La notion de *dimension sensible,* en lien avec celle de *compétence critique* rend compte de l'adaptation nécessaire des pratiques aux conditions d'exercice du métier. La méthodologie adoptée met en évidence une grande variété de situations créées à partir d'une même ressource fournie par le chercheur. Les études de cas font apparaître les principales dimensions sensibles des situations de tutelle auprès des publics concernés.

[1] Maryvonne Merri est Maître de Conférences en Psychologie des processus d'apprentissage à Ecole Nationale de Formation Agronomique (ENFA). Cette recherche est le fruit d'un travail effectué grâce à un contrat entre le Ministère de l'Agriculture et de la Pêche (MAP) et l'E.N.F.A au titre d'un appel d'offres « Professionnalité des enseignants du MAP » (période 1997-2000).

[2] *« Ces classes accueillent à partir de l'âge de quatorze ans, (et de préférence avant l'âge de dix-huit ans), des élèves sous statut scolaire qui choisissent d'acquérir un enseignement préprofessionnel par la voie de l'alternance. Il en existe douze en France dans l'enseignement agricole. »* (Brochure du Ministère de l'Agriculture et de la Pêche, 2001). Il existe également des CLIPA dans l'Education Nationale.

[3] Les classes de 4ème technologique créées officiellement en 1990, (mais existant à titre expérimental depuis 1984), ont été supprimées en 1996 dans l'Education Nationale alors qu'elles demeurent, à ce jour, maintenues dans les lycées professionnels de l'enseignement agricole.

L'aspect pragmatique des propositions brunériennes nous invite à privilégier l'étude du concept de *tutelle* pour rendre compte du travail de l'enseignant dans l'aide à la résolution de problèmes mathématiques. Le projet de Bruner est en effet d'opérationnaliser la thèse Vygotskienne en observant précisément la façon dont un adulte aide un enfant à maîtriser une tâche nouvelle.

Partant du constat que ces théories rendent peu compte des contraintes institutionnelles et ne mettent pas en avant la référence à des savoirs précis, nous avons opté pour un réexamen du concept à la lumière des théories didactiques. A quelles conditions la référence au concept de *tutelle* devient-elle pertinente pour décrire et comprendre l'activité enseignante dans des situations d'aide à la résolution de problèmes mathématiques ?

I - LE MODÈLE TRI-FONCTIONNEL DE LA TUTELLE : *« ENRÔLEMENT – PRISE EN CHARGE – ASSURANCE »*

L'étude des conditions d'émergence du concept de tutelle nous conduit à définir un modèle tri-fonctionnel *enrôlement – prise en charge – assurance* à partir de la catégorisation initialement proposée par Bruner (1983)[4]. Chacune de ces trois fonctions prend place dans un continuum qui signifie le transfert de responsabilité opéré dans le cadre d'un apprentissage socialement médiatisé (cf. Schéma n°1).

Un besoin à satisfaire L'enfant **ne sait pas résoudre** le problème **seul**	Interactions avec un tuteur →	*Un produit à obtenir* L'enfant sait faire **un peu plus tout seul.**

Les conditions à remplir pour aider efficacement :

que l'élève accepte de résoudre le problème
FONCTION D'ENROLEMENT

que l'élève puisse bénéficier d'une aide nécessaire, suffisante et adaptée
FONCTION DE PRISE EN CHARGE

que l'élève puisse être assuré dans sa compétence
FONCTION D'ASSURANCE

Schéma n°1 : Le modèle tri-fonctionnel de la tutelle *:*
enrôlement - prise en charge - assurance

[4] La catégorisation brunérienne offre une lecture intéressante de l'action de l'enseignant sur différents aspects de l'activité de l'élève : aide à la définition du but (*enrôlement* et *maintien de l'orientation*), aide à la prise d'information (*signalisation des caractéristiques déterminantes*), aide à l'élaboration de règles d'action (*modélisation*), aide au contrôle de l'activité (*réduction des degrés de liberté* et *contrôle de la frustration*). Nous distinguons pour notre part les fonctions nécessaires au maintien de l'activité de l'élève et les actions spécifiques du tuteur sur l'activité elle-même.

La *prise en charge* est, de loin, la fonction de tutelle la plus étudiée par les psychologues, à tel point qu'existe un risque de confusion entre cet aspect du concept et le concept lui-même. S'il est vrai que cette fonction reste le vecteur du progrès cognitif, l'observation de l'activité de tutelle auprès d'élèves en grande difficulté révèle le caractère *critique* des fonctions d'enrôlement et d'assurance. L'expérience de l'échec répété (ou le manque d'expérience de la réussite) handicape la prise de risque nécessaire à l'apprentissage (entreprendre sans savoir faire a priori). Le sentiment de compétence nécessaire à toute activité autonome fait souvent défaut et les élèves ont alors tendance à s'installer dans une relation de dépendance qui leur assure un minimum de réussite.

L'idée de continuum permet de penser les risques de confusion entre fonctions (ou faux-semblants) : croyant s'ajuster aux besoins avérés des élèves, l'enseignant ne fait que sur-étayer un semblant d'activité.

II – LES QUATRE NIVEAUX D'INTERVENTION DIDACTIQUE

La problématique brunérienne traite de l'aide à la réalisation d'une tâche particulière sans enjeu de construction de savoirs. L'école, en tant qu'institution, a une responsabilité que n'a pas le laboratoire : l'apprentissage de savoirs définis par des programmes officiels. L'exécution de la tâche n'est qu'un levier : encore faut-il tirer bénéfice de cette réussite. Autrement dit, l'interaction et la performance fondent une situation qui doit également permettre la construction du savoir. Le contexte scolaire implique la prise en compte de niveaux d'intervention situés en amont et en aval de la seule collaboration in situ. Aussi avons-nous opté pour un élargissement de la définition de la tutelle à toute intervention sur l'activité de l'élève allant du choix de la situation à la mise en exergue d'un savoir. La définition de quatre niveaux d'intervention hiérarchisés situe ainsi l'activité de tutelle de l'enseignant (au sens strict du terme) dans une perspective plus large de médiation culturelle (cf. Schéma 2).

Ce travail d'élaboration théorique précise la proposition de Vergnaud qui distingue deux grandes catégories d'actes dans l'activité de l'enseignant : le choix de la situation et l'action sur les composantes du schème de l'élève (Vergnaud, 1994).

Le premier niveau d'intervention correspond à la définition d'un projet didactique en amont de l'interaction avec la classe : l'enseignant organise les conditions de l'activité de ses élèves. S'ajoutent à cette tâche initiale et fondamentale, trois autres tâches déterminantes pour l'apprentissage. Ces tâches sont comprises comme une extension du modèle tri-fonctionnel *enrôlement – prise en charge – assurance* à la problématique de construction de savoirs mathématiques, en référence à la théorie des situations didactiques (Brousseau,1986). Ainsi, notre définition de l'enrôlement comprend des gestes de *dévolution* du problème à l'élève (niveau 2 d'intervention) tandis qu'à l'autre extrémité du processus didactique, la fonction d'assurance englobe les gestes *d'institutionnalisation* (niveau 4 d'intervention). Le point de vue psychologique sur la tutelle s'est donc enrichi d'une dimension épistémologique.

Le troisième niveau d'intervention didactique correspond à toutes les aides apportées au cours de la réalisation effective de la tâche par les élèves. L'enseignant prend alors en charge une partie de l'activité de l'élève de manière à permettre à celle-ci de se poursuivre et d'être menée à bien.

1 - Choisir la situation

L'enseignant définit un projet didactique adapté aux élèves de sa classe : il organise une mise en scène de l'apprentissage visé.

2 – Faire émerger le problème

L'enseignant favorise l'émergence du problème : il fait en sorte que les élèves se rendent compte de l'insuffisance de leurs propres compétences pour résoudre le problème posé. Il s'agit d'organiser, in situ, la rencontre des élèves avec leur propre ignorance, source de l'apprentissage par adaptation.

3 – Aider à la résolution du problème

L'enseignant peut être amené à répondre à des besoins locaux pour permettre à l'activité de se poursuivre.

Il dispose, pour cela, de toute une panoplie de ressources. Le cadre de la classe lui permet, par exemple, de déléguer à d'autres élèves l'apport d'une aide locale.

4 – Favoriser l'entrée dans la culture

L'enseignant décontextualise la compétence acquise en évaluant sa pertinence par rapport au passé et à l'avenir du développement des connaissances de l'élève. Il établit les liens nécessaires entre concepts de manière à favoriser la structuration du savoir. Il peut également introduire des objets qui resteront pendant longtemps au-delà des possibilités des élèves. Il construit ainsi, en quelque sorte, la zone de proche développement de l'élève en lui permettant d'inscrire son activité autonome dans le long terme de l'apprentissage.

Schéma n°2 : Les quatre niveaux d'intervention de l'enseignant.

Chacun de ces quatre niveaux rend compte des tâches (prescrites et ou attendues) de l'enseignant de mathématiques. Ces tâches sont imbriquées et hiérarchisées. Autrement dit, le choix de la situation devient le pivot de l'analyse de l'activité de tutelle. Afin de prendre en compte cet aspect important du travail de l'enseignant – à savoir la création d'une situation didactique à partir de ressources existantes - nous avons opté pour une méthodologie particulière.

III – LES CHOIX METHODOLOGIQUES

Nous avons fourni une même ressource aux enseignants de notre échantillon en leur demandant de l'intégrer dans la progression des apprentissages mathématiques de leurs élèves. Les séances dans les classes ont été filmées puis retranscrites intégralement et ce pour huit enseignants dont deux ont été observés sur deux années consécutives.

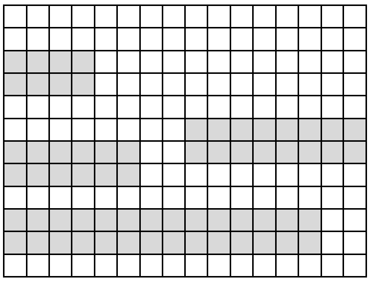
III – 1 – Le contrat de recherche avec les enseignants

La ressource fournie aux enseignants comporte trente-six items permettant de travailler plus spécifiquement un aspect du concept de fraction : la désignation de la partie hachurée d'une figure sous la forme conventionnelle n'/n où n' représente le nombre de parts hachurées et n le nombre total de parts avec $n'< n$. Ce choix répond à deux exigences :

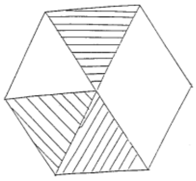
1)- trouver un même contenu pour les trois niveaux de classes observées ;

2)- bénéficier de la richesse de la littérature psychologique et didactique sur l'apprentissage des fractions pour l'analyse a priori des tâches prescrites aux élèves.

Voici quelques exemples d'items:

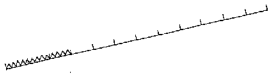


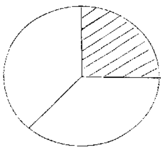
Item 1 : 1/3



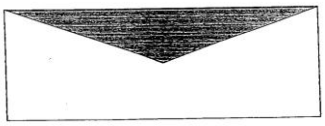
Item 3 : 1/2

Item 8 : 1/4

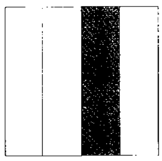




Item 15 : 1/4



Item 22 : 1/4



Item 25 : 1/4

La tâche de base suggérée par le chercheur consiste à exprimer la partie hachurée de chaque figure par une fraction irréductible. Les figures sont variées. L'unité de partage de la figure peut être donnée, seulement suggérée ou doit être trouvée par l'élève. La fraction obtenue peut nécessiter une simplification. Par le jeu des variables introduites, cette tâche offre la possibilité d'exercer un grand nombre de procédures de reconnaissance de fractions. Notre idée était alors d'assurer, au moins en partie, la confrontation des élèves à un problème mathématique.

La référence aux trois niveaux de scolarité nous a permis de questionner l'importance du statut du savoir dans la tutelle exercée. En effet, les élèves des classes retenues pour notre recherche sont également différentiables par la nouveauté ou l'usure de l'objet de savoir. Alors que le travail sur les fractions est nouveau en CM2, les professeurs de mathématiques de 4ème technologique et de CLIPA ont à gérer du « déjà vu ».

III – 2 – Une analyse des pratiques de type ergonomique

Les projets didactiques élaborés par les enseignants ainsi que les situations proposées aux élèves sont très variés. Cette diversité laisse néanmoins apparaître des invariants institutionnels même si le nombre d'observations ne permet pas de conclure sur ce

point. Nous avons analysé et comparé les programmes et instructions officielles relatifs aux trois institutions. Cette analyse met en évidence l'ancrage institutionnel des pratiques observées.
Le cadre de l'ergonomie cognitive (Rogalski, 2000) intègre cette dimension institutionnelle en termes de prescriptions plus ou moins explicites (tâche attendue / prescripteurs latents et tâche prescrite (textes officiels). La situation didactique est définie comme la résultante de différentes influences : la demande institutionnelle, les connaissances particulières des élèves, les pratiques caractéristiques d'un groupe professionnel, la formation suivie et l'expérience personnelle. Ces situations sont porteuses d'un projet didactique qui a fait l'objet d'une analyse a priori.

IV – LA NOTION DE DIMENSION SENSIBLE

Pour accéder à une analyse en termes de compétences professionnelles, il nous a fallu isoler dans le flot des compétences mises en œuvre par l'enseignant au cours d'une séance, celles qui étaient critiques du point de vue de notre modélisation de la tutelle. Autrement dit, nous avons cherché à prédire les situations problématiques que risquait de rencontrer l'enseignant étant donné son projet didactique. La notion de *dimension sensible o*ffre, selon nous, une lecture originale des pratiques observées en appréhendant l'activité de tutelle dans sa dimension critique et la compétence professionnelle dans un rapport de nécessité : qu'est-ce que la situation exige comme compétences chez l'enseignant pour permettre l'apprentissage de tous les élèves ?

Les exigences et la fragilité de l'enrôlement, le déficit de compétences langagières, la représentation de la compétence en termes de performance, le travail en groupes hétérogènes fondent les principales dimensions sensibles de l'activité de tutelle auprès des élèves reconnus en difficulté.

IV – 1 – Exigences et fragilité de l'enrôlement

Les observations réalisées en CLIPA et en 4ème technologique laissent apparaître deux adaptations possibles au problème de l'enrôlement des élèves dans une activité mathématique.

DAN, formateur en CLIPA, fournit explicitement l'algorithme à appliquer pour résoudre les trente-six items. Il assure ainsi les conditions de l'entrée de tous les élèves dans une activité mais pas l'activité elle-même. Seule la rencontre avec les limites de validité de l'algorithme aurait permis d'assurer un progrès cognitif. Or DAN ne dispose ni des gestes de rupture appropriés ni d'une analyse de la tâche suffisante pour faire évoluer la situation au-delà de l'exécution de la tâche prescrite.

JEM réussit l'enrôlement de ses élèves de 4ème Technologique sur la base d'une dynamique de classe. Il installe une routine qui engage les élèves dans une activité maîtrisée avant de créer la rupture. L'activité de tutelle s'appuie ici sur une analyse a priori de la ressource fournie : JEM assure l'émergence du problème. Mais la fragilité de l'enrôlement obtenu, sur la base d'une activité « évidente », handicape le maintien d'un niveau d'exigence à la hauteur de ses ambitions.

III – 2 – Un déficit de compétences langagières

JEM organise un débat collectif avec des élèves qui ont du mal à formuler et à argumenter. C'est un objectif ambitieux qui vise la conceptualisation au-delà de l'action. Mais il se heurte aux déficits langagiers des élèves. Ce constat révèle un des paradoxes de la tutelle auprès d'élèves en difficulté : les élèves qui ont le plus besoin des interactions langagières pour développer leurs compétences (le langage est une aide à la pensée) sont ceux qui en bénéficient le moins quand elles existent faute de compétences suffisantes pour y participer.

III – 3 – La représentation de la compétence en termes de performance

Les enseignants observés ne montrent pas de gestes d'étayage de l'activité de formulation et d'argumentation. L'activité des élèves n'est orientée que vers la réussite, la conceptualisation sous-jacente restant le plus souvent à leur charge. Le rôle du langage dans le développement des connaissances et l'accès à la Culture mathématique ne sont pas appréhendés.

IV – LES PERSPECTIVES DE RECHERCHE

En quoi la description de l'existant peut-il devenir un moyen de formation des enseignants ? Notre travail a permis de réaffirmer les liens étroits entre situation et activité. Les dimensions sensibles étudiées sont autant de catégories de lecture du réel au service de la description, de la compréhension et de l'amélioration des compétences professionnelles des enseignants.

Nous retenons pour notre part deux questions fondamentales, objets de nos recherches actuelles :

> Quels gestes de dévolution mettre en œuvre auprès des publics reconnus en grande difficulté par le système scolaire ?
>
> Comment développer les compétences langagières des élèves pour permettre au langage de jouer son rôle d'aide à la conceptualisation ?

V – REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherche en Didactique des Mathématiques,* 7 (2), p. 45-143.

Bruner, J. (1983), Le développement de l'enfant. Savoir faire, Savoir dire, Paris, Presses Universitaires de France.

Merri M. et Vannier-Benmostapha M.-.P. (2000). Définition et compréhension des interactions de tutelle dans la classe, *Actes du Colloque " Recherche et Formation des Enseignants ",* IUFM de Marseille.

Rogalski, J., 2000, Y a-t-il un pilote dans la classe ? Approche de psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant. Communication au *Séminaire National de Didactique des mathématiques*, Paris, Mars 2000.

Vannier-Benmostapha, M.-P. (2002). *Dimensions sensibles des situations de tutelle et travail de l'enseignant de mathématiques : étude de cas dans trois institutions scolaires en CLIPA, 4ème technologique et CM2*. Thèse de doctorat, Université Paris 5, Paris.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10 (2/3), p. 133-170.

Vergnaud, G. (1994). Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde & P. Tavignot (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp. 177-194). Grenoble : La pensée sauvage.

Vergnaud G., 1996. Au fond de l'action, la conceptualisation, *in* J-M. Barbier (dr), Savoirs théoriques et savoirs d'action, Paris, Presses Universitaires de France.

ACTE DE SOUVENIR ET APPRENTISSAGES MATHÉMATIQUES

Teresa Assude
UMR ADEF - IUFM d'Aix-Marseille
Yves Paquelier
Lycée français de Madrid & GECO (Nice)

Résumé :
Pourquoi s'intéresser aux souvenirs mathématiques des élèves ?
Quels liens peut-on faire entre souvenir et apprentissage ?
Dans cet article, les auteurs présentent les fondements théoriques de leur travail et leur analyse de quelques souvenirs mathématiques d'élèves de 6ème.

Notre intérêt pour les souvenirs est lié à une problématique temporelle des apprentissages mathématiques : prendre conscience du temps des apprentissages n'est pas, pour nous, se souvenir seulement du passé mais c'est aussi porter une attention au présent sur ce qui demeure de ce passé et qui permet de créer une attente pour le futur. Dans notre travail, la demande de souvenirs est un élément d'un dispositif plus large qui essaie de produire chez les élèves une « posture de vigilance », une posture d' « état de veille » par rapport à leurs apprentissages. Cette posture se résume par une phrase comme : « là, je me serais trompé si… », c'est-à-dire que l'élève peut se positionner par rapport à une action en essayant de voir quelles sont ses conséquences futures.

1 - CADRE THÉORIQUE : TEMPS, MÉMOIRE ET RÉCIT

Tout apprentissage, en tant que processus, comporte une dimension temporelle et tout savoir qui en résulte est, d'une certaine manière, le fruit d'une histoire, aussi "pauvre" et courte soit elle (en apparence).

Cette dimension temporelle est d'abord celle d'un *temps objectif* (chronologique, calendaire) que l'institution organise, structure et "publie" sous la forme du *temps didactique*, temps du système d'enseignement, temps anthropologique d'une institution comme celui des fêtes religieuses ou de l'organisation sociale du travail. La nature, les effets et la gestion de ce temps didactique ont été étudiés (cf les travaux de J Centeno, A Mercier, G Sensevy et Y Matheron par exemple) et nous reprenons à notre compte une part importante de leurs analyses. Mais le sujet, maître ou apprenant, assujetti au temps didactique est aussi l'agent d'une temporalité personnelle, un *temps subjectif*, le plus souvent "muet" ou implicite du fait des contraintes de l'institution.

L'hypothèse théorique que nous faisons est la suivante : quelle que soit la force de l'assujettissement du temps didactique (que les études précédemment citées ont révélée), l'expérience de la temporalité personnelle de son apprentissage, qui advient au sujet, est un objet d'étude didactiquement possible et pertinent ; c'est aussi un outil efficient de la structuration des connaissances mathématiques, particulièrement dans le rapport paradoxal avec le statut nécessaire et « intemporel » des vérités mathématiques.

Cette approche phénoménologique de la situation didactique, en ce qu'elle s'appuie sur ce qui advient au sujet et sur la conscience qu'il peut en avoir, se fonde en grande partie sur les travaux de Paul Ricoeur autour du temps et de la mémoire.

Dans une lecture personnelle des écrits d'Aristote et de Saint Augustin, Ricoeur met en évidence :

- d'une part la tension de la conscience du sujet, à chaque instant de son action entre les trois composantes d'un *triple présent* : le présent du passé, le présent du présent, le présent du futur ou, pour le dire plus simplement la coexistence de trois intentions : *la mémoire, l'attention et l'attente*,

- d'autre part la prise en charge de cette tension et la résolution partielle de son caractère aporétique dans l'acte de narration (la "mise en intrigue" aristotélicienne"), *le récit*.

Reprenant ces analyses dans le contexte didactique, nous avons travaillé sur l'acte de souvenir de l'élève, la posture de "souvenance", vigilance au présent sur ce qui va advenir au moyen de ce qui s'est passé, par la production de récits mathématiques, de la simple demande initiale de souvenir jusqu'à l'élaboration de récits structurés suivant diverses règles du jeu, y compris le récit de fiction (voir dispositif).

Nous avons alors dégagé trois fonctions essentielles de l'acte de narration :

- *expression et prise de conscience d'un temps personnel* de l'acte d'apprendre et du pouvoir qui en résulte sur la construction des connaissances,

- *reconfiguration de l'expérience vécue* en histoires mobilisables, références pour l'avenir,

- *constitution d'un temps partagé*, prenant en compte la dimension intersubjective de tout savoir et la nécessaire élaboration d'un temps collectif, d'une histoire de la classe, insérant dans le temps didactique les différentes temporalités personnelles.

2 – PRÉSENTATION DU DISPOSITIF

La demande de souvenirs fait partie d'un dispositif plus large : un dispositif multiple qui vise à légitimer dans la classe l'expression des temporalités personnelles des élèves. Ce dispositif comporte, outre les souvenirs, la discussion sur les vrais-faux en mathématiques, les récits des discussions mathématiques, les chroniques de la semaine, le carnet de bord, les questionnaires. En ce qui concerne les souvenirs, nous nous intéresserons, non à ce qu'il advient spontanément à la mémoire des élèves, mais au souvenir en tant qu'objet d'une quête. En quelque sorte, cet élément du dispositif est une situation de rappel qui n'est pas conduite par le professeur qui fait des rappels sur les connaissances antérieures mais qui se présente sous la forme d'un récit fait par l'élève.

La classe avec laquelle nous avons travaillé est une classe de 6ème du lycée français de Madrid qui comporte 24 élèves. Au mois de novembre, les élèves devaient écrire deux récits de souvenirs mais certains élèves n'en ont écrit qu'un. Nos analyses porteront sur les 41 récits produits par les élèves.

La structure de ces récits est proposée par le dispositif car l'objectif ici est que les élèves puissent exprimer le moment où un événement a eu lieu en mettant en évidence le triple présent dont nous avons parlé dans la partie théorique. Cette structure est donc ternaire pour faciliter l'expression de ce triple présent : avant – un jour – maintenant.

Nos outils d'analyse sont : les objets de souvenir, la présence d'autrui, l'expression du triple présent, la reconfiguration de l'expérience passée, temps raconté comme temps partagé.

3 – DE QUOI Y A-T-IL SOUVENIR ?

Trente huit récits ont parlé explicitement de mathématiques, et ils sont répartis de la manière suivante : 24 concernent les nombres décimaux, 2 concernent la géométrie, 12 concernent les nombres. L'importance des nombres, et plus spécifiquement des nombres décimaux est à souligner. Est-ce un effet de contrat didactique ? Est-ce que les élèves parlent des contenus qu'ils ont étudiés dans les cours avant la demande des récits ? Ou cet événement est-il tellement marquant en tant rupture par rapport à ce qu'ils savaient auparavant que beaucoup d'élèves le relèvent ?

Précisons d'abord de quoi parlent les récits.

Sur les nombres décimaux

- définition d'un nombre décimal (13 récits),
- densité des nombres décimaux (7 récits),
- un nombre entier est un nombre décimal (3 récits),
- convertir une écriture décimale en écriture fractionnaire (1 récit),
- le produit d'un nombre par 0,5 (1 récit),
- arrondir un nombre décimal (1 récit).

Sur les nombres

- différence entre nombre et écriture (3 récits),
- calculer la somme des 100 nombres entiers consécutifs (4 récits),
- calculer la somme de n nombres impairs (1 récit),
- calculer la moyenne de deux nombres (1 récit),
- le rôle du zéro (1 récit),
- compléter un carré magique de 9 nombres (1 récit),
- double de 20 (1 récit) : erreur.

Sur la géométrie

- droite numérique et droite géométrique (1 récit),
- rôle des instruments (compas et équerre) (1 récit).

Sur l'histoire des mathématiques

- histoire des nombres (1 récit).

Ces événements concernent des définitions (nombre décimal), des propriétés (densité des nombres décimaux), des problèmes à résoudre (calculer la somme des 100 premiers entiers), le rapport à un domaine de savoir (géométrie) ou encore le rapport à l'histoire des mathématiques.

Cet inventaire va nous permettre d'analyser des souvenirs qui concernent le même type d'événement mais qui vont mettre l'accent sur des éléments différents.

4 - PRÉSENCE D'AUTRUI

Plusieurs « autrui » apparaissent dans les récits même si le professeur a une position dominante. Ces différents « autrui » sont: le professeur, un des parents, un autre élève, le groupe classe. « Autrui » apparaît essentiellement dans la partie « un jour » qui correspond à l'élément déclencheur de l'événement. Voyons quels sont les différents rôles attribués à « autrui ».

- « L'explicateur » explique ou fait comprendre. Par exemple, Amman dit que « Le professeur nous a fait comprendre c'est quoi un nombre décimal », et Susana « M.Paquelier nous a expliqué la différence [entre l'écriture et l'idée de nombre] et j'ai compris ». Ce rôle est d'abord occupé par le professeur, mais il peut l'être aussi par un autre autrui comme le père ou la mère. Par exemple Etienne écrit : « Mon père a pris mon cahier et pendant une heure il a essayé de m'expliquer pourquoi et j'ai compris !! » ou encore Justine : « un jour on avait un exercice à faire sur l'arrondi et ma mère m'a expliqué. ».

- « Le contradicteur » avance un contre-argument par rapport aux arguments avancés. Par exemple, Ignacio dit : « Le professeur de Maths nous a dit que ça ne pouvait pas être un nombre à virgule parce qu'aux Etats-Unis ils utilisent un point. »
- « Le déclencheur » déclenche l'événement en proposant un problème à résoudre, en posant une question. Par exemple, Raphaëlle écrit : « Le professeur de Mathématiques nous a demandé ce que c'était un nombre décimal. » ou encore Claude dit : « le professeur nous avait donné pour le cours prochain la somme des cent premiers entiers à calculer. »
- « L'informateur » donne une information. Par exemple, Amman écrit : « Je savais pas pourquoi le zéro a été inventé. [Un jour], le professeur nous a dit pourquoi il a été inventé. [Maintenant] je sais qu'il a été inventé pour marquer des places vides. »
- « Le coopérant» est partenaire dans une discussion. Par exemple, Nathan écrit par rapport à la classe : « On en a parlé [de la définition de nombre décimal], j'ai vu les idées de toute la classe. » Ce même élève écrit aussi l'importance des propositions d'un autre élève : « Flavia a proposé une méthode en additionnant les nombres 1+100, 2+99,… La méthode a été continuée, améliorée par plusieurs élèves. » Ou encore Lorena qui affirme : « dans la classe on a fait des propositions et on a vu que c'était pas ça ».

Autrui, comme nous l'avons dit, est présent essentiellement dans la partie du récit qui correspond à « un jour ». Cet autrui est signalé soit par la fonction (le professeur, le père) soit par le pronom « on », et plus rarement par le prénom de l'élève. La structure des récits, la plus répandue, en ce qui concerne le sujet grammatical est la suivante : « Je » - « On » - « Je » qui correspond aux parties : « Avant » - « Un jour » - « Maintenant ». Cette structure est pour nous un indice d'une part de l'implication du sujet en tant qu'acteur du récit, d'autre part que l'élément déclencheur ou ce qui aide à dénouer la situation est le plus souvent attribué à un autrui.

5 – RECONFIGURATION DE L'EXPÉRIENCE VÉCUE

Comme nous l'avons dit, la plupart des récits concernent les nombres et plus particulièrement les nombres décimaux. Il y a peut-être là un effet de contrat didactique car les élèves parlent de ce qu'ils sont en train de faire ou ce qu'ils ont fait dans une période proche de la demande de récits. L'importance donnée aux nombres décimaux et le nombre d'élèves qui ont fait un récit concernant la définition des nombres décimaux nous incitent à comparer les récits des élèves face à cet événement : la définition d'un nombre décimal. Qu'en disent-ils ? Mettent-ils l'accent sur les mêmes éléments déclencheurs de l'événement ? Quelles sont les connaissances reconnues comme acquises par les élèves ? Peut-on trouver des indices de reconfiguration de l'expérience vécue ?

Avant d'essayer de répondre à ces questions, nous transcrivons ici 15 récits d'élèves qui constitueront les données à analyser.

Tableau de récits d'élèves

Elèves	Avant	Un jour	Maintenant
Lorena	Je croyais qu'un nombre décimal est un nombre avec une virgule.	Dans la classe on a fait des propositions et on a vu que c'était pas ça	Je sais qu'un nombre décimal est un nombre qui a une partie décimale, c'est-à-dire un nombre décimale par une puissance de 10.
Céline	Je croyais que un nombre décimal était un nombre à virgule.	Un jour on a appris que un nombre décimal ça peut être un nombre entier. Qu'est-ce que c'est un nombre décimal ?	Et maintenant je sais que un nombre décimal c'est un nombre décimal est le quotient d'un entier par une puissance de dix.
Amman	Je croyais qu'un nombre décimal était un nombre à virgule.	Le professeur nous a fait comprendre c'est quoi un nombre décimal.	Je sais c'est le quotient d'un entier par une puissance de 10.
Omar	Je croyais qu'un nombre décimal était un nombre à virgule MAIS	J'ai compris que un nombre entier était un nombre décimal ET	Je sais la définition de décimal pour tous les jours de ma vie que c'est : un nombre décimal est le quotient d'un entier par une puissance de 10 FIN
Ignacio	Je croyais que les nombres décimaux étaient des nombres à virgule.	Le professeur de Maths nous a dit que ça ne pouvait pas être un nombre à virgule parce qu'en Etats-Unis ils utilisent un point.	Je sais qu'un nombre décimal n'est pas un nombre à virgule mais c'est le quotient d'un entier par une puissance de dix. Premièrement c'était difficile à retenir mais maintenant je me souviens.
Adriano	Je croyais que un décimal était un chiffre avec une virgule.	Le professeur de Math nous a expliqué qu'un décimal n'était pas un chiffre avec une virgule mais c'était un nombre entier.	A partir de ce jour je ne dis plus qu'un décimal est un chiffre avec une virgule, je dis que c'est un nombre entier.
Susana	Je ne faisais pas la différence entre l'écriture et l'idée d'un nombre. Donc, je ne savais pas non plus la définition d'un nombre décimal.	M.Paquelier nous a expliqué la différence et j'ai compris.	Je sais bien la différence et si j'oublie, avec des exemples je me rappellerai.
Chloé	Avant, je pensais que un décimal était un chiffre à virgule.	Un jour, on a expliqué que la virgule dans un décimal n'est que son écriture et non « l'idée » que l'on a dans la tête.	Maintenant, je sais que lorsqu'on me le demande qu'est ce qu'un nombre décimal, je ne dois pas répondre : « c'est un chiffre à virgule » mais un décimal est le quotient d'un entier par une puissance de 10.
Auriane	Je croyais qu'un décimal était un chiffre à virgule.	On a dit que tous les nombres étaient des décimaux.	Je ne me trompe plus quand on me demande ce que c'est.
Raphaëlle	Je pensais qu'un nombre décimal c'était un nombre avec une virgule.	Le professeur de Mathématiques nous a demandé ce que c'était un nombre décimal. La moitié de la classe a répondu : c'est un nombre avec une virgule	Je sais que c'est l'écriture qui a une virgule mais non pas un nombre.

		il nous a répondu que c'était l'écriture.	
Nathan	Je pensais qu'un décimal était toujours avec une virgule.	On en a parlé, j'ai vu les idées de toute la classe. Puis on a vu qu'il y avait différentes écritures, c'était les entiers qui étaient des nombres décimaux.	Je sais parfaitement ce qu'est qu'un nombre décimal.
Carlota	Je pensais qu'un nombre décimal était un nombre avec une virgule.	Un jour en classe chaque élève a dit ce qu'il croyait de ce que c'était un nombre décimal. Et après on a écrit sur le cahier, on a après essayé d'expliquer ce que c'était un nombre décimal comme si on explique à un petit.	Je sais qu'un nombre décimal est le quotient d'un entier par une puissance de dix.
Paul	Je croyais qu'un nombre décimal était un nombre à virgule.	J'ai compris que ce que je pensais était faux.	Je sais que les nombres décimaux sont tous les nombres en deux nombres entiers.
Marie	Je ne savais pas qu'un entier est un décimal.	On a écrit un résumé, on a démontré pourquoi.	Je sais que les entiers sont des décimaux et pourquoi.
Etienne	Je ne savais pas pourquoi un entier est un décimal	Mon père a pris mon cahier et pendant une heure il a essayé de m'expliquer pourquoi et j'ai compris !!	Il est très clair pour moi qu'un entier est un décimal car un décimal est le quotient d'un entier divisé par une puissance de 10 : 1, 10, 100… etc donc par exemple 4 : 10^0 (1) = 4. Donc 4 est le quotient d'un entier (4) divisé par une puissance de 10 (1).

La question de départ du problème, posée par l'enseignant, est celle qui est explicitée par Céline : qu'est-ce qu'un nombre décimal ? Dans la classe, « on a fait des propositions mais ce n'était pas ça » comme le dit Lorena, et Raphaëlle le dit aussi « *Le professeur de Mathématiques nous a demandé ce que c'était un nombre décimal. La moitié de la classe a répondu : c'est un nombre avec une virgule il nous a répondu que c'était l'écriture* ».

Si pour Lorena, l'important est le fait qu'il y ait des propositions faites en classe mais qu'elles ne soient pas correctes, pour Raphaëlle c'est la réponse apportée par le professeur en termes d'écriture du nombre. Le même type de réaction est celle d'Ignacio qui affirme que le professeur a dit que la virgule pourrait être remplacée par un point dans d'autres pays comme les Etats-Unis. Par contre, pour d'autres élèves comme Céline ou Omar, le déclencheur est le fait d'avoir appris qu'un nombre entier est un nombre décimal. Ces deux élèves ont dû reconfigurer leur savoir à partir de cet autre élément : si un nombre entier est un nombre décimal, alors un nombre décimal ne peut pas être défini comme nombre à virgule, donc une nouvelle reconfiguration des nombres se dessine avec la définition de nombre décimal qui tient compte à la fois des nombres entiers et des nombres décimaux non entiers. Pour Omar, on a même l'impression qu'il accentue cet aspect en écrivant : « je sais la définition de décimal pour tous les jours de ma vie ». Etienne peut être aussi inclus dans ce groupe, mais il affirme tout de suite au départ, dans l'avant, qu'il ne savait pas pourquoi un entier était un décimal. On peut penser que ce déclencheur a été aussi fondamental pour cet élève mais qu'il a eu besoin d'une aide. C'est son père qui va lui fournir l'aide à comprendre et il va ensuite pouvoir même donner un exemple de ce qu'il a compris. Pour lui maintenant le pourquoi « est très clair », mais aussi comment on peut le montrer.

L'événement mathématique est ici le suivant : un nombre décimal n'est pas un nombre à virgule mais le quotient d'un nombre entier par une puissance de 10. Cet événement est déclenché par une question qui provoque une discussion dans la classe ce qui est signalé par Lorena, Raphaëlle, Nathan et Carlota. Cette discussion est ensuite mise par écrit comme le dit Carlota : « Et après on a écrit sur le cahier, on a après essayer de expliquer ce que c'était un nombre décimal comme si on explique à un petit. » Marie donne aussi une importance certaine à cette phase car elle écrit qu'un jour « on a écrit un résumé, on a démontré pourquoi ». Cette question conduit à une réponse massive des élèves : « un nombre décimal est un nombre à virgule », ce qu'on peut observer dans la partie « Avant ». Douze élèves le disent explicitement : « je croyais qu'un nombre décimal était un nombre à virgule ».

Quels sont les éléments qui permettent de dépasser cette réponse ? Deux éléments permettent de mettre à défaut cette définition : d'une part la différence entre écriture et nombre, comme le disent Ignacio, Chloé, ou Raphaëlle ; d'autre part l'assertion qu'un nombre entier est aussi un nombre décimal, comme se souviennent Céline, Amman, Omar, Etienne, Nathan ou Adriano. Ces deux éléments peuvent permettre ensuite de revenir à la définition de nombre décimal : un nombre décimal est le quotient d'un entier par une puissance de 10.

Des indices peuvent être trouvés en ce qui concerne l'effectivité de cette reconfiguration : par exemple Omar ou Etienne mettent l'accent sur le élément déclencheur « un nombre entier est un nombre décimal » et ensuite ils donnent une définition correcte de nombre décimal, et même avec des exemples comme dans le cas d'Etienne. Chloé ou Ignacio, eux, mettent plutôt l'accent sur la différence entre écriture et nombre et ensuite ils donnent aussi une définition correcte de nombre décimal.

Des indices peuvent être trouvés sur la non-effectivité de cette reconfiguration : par exemple pour Adriano, l'élément déclencheur « un nombre entier est un nombre décimal » a plutôt un effet négatif car lui, maintenant, il écrit : « je ne dis plus qu'un décimal est un chiffre avec une virgule, je dis que c'est un nombre entier ». Il n'a pas compris l'explication du professeur car il affirme : « Le professeur de Math nous a expliqué qu'un décimal n'était pas un chiffre avec une virgule mais c'était un nombre entier. Pour lui, l'assertion « un nombre entier est un nombre décimal » se transforme dans une autre assertion : « un nombre décimal est un nombre entier » qui est fausse.

Certains indices ne peuvent pas trancher sur l'effectivité ou la non-effectivité de la reconfiguration de l'expérience vécue. Par exemple, Paul affirme qu'il a compris qu'il était incorrect de penser qu'un nombre décimal était un nombre à virgule, mais ensuite il écrit : « je sais que les nombres décimaux sont tous les nombres en deux nombres entiers ». Est-ce que pour cet élève, un nombre décimal devient un couple de nombre entiers ? Probablement, ce qui est aussi une conception fausse des nombres décimaux.

Il existe aussi des élèves qui se placent à un niveau très général pour lesquels nous aurons du mal à décider s'ils ont ou non pu reconfigurer leur expérience. Par exemple Auriane qui écrit : un jour « on a dit que tous les nombres étaient des décimaux » et maintenant « je ne me trompe plus quand on me demande ce que c'est ».

6 – POSTURE DE VIGILANCE

Dans l'introduction, nous avons dit que nous voulons, avec ce travail sur les récits de souvenirs, favoriser chez les élèves une posture de vigilance par rapport à leurs apprentissages : porter une attention au présent en tenant compte de la mémoire pour créer une attente dans le futur. Dans certains récits d'élèves, nous observons cette posture de vigilance. Par exemple, Claude écrit : « le professeur nous avait donné pour le cours prochain la somme des cents premiers entiers à calculer. Chez moi, je me suis dit : si je fais 10 x 10 ça fait 100. Donc si je fais 10 x (1 + 2 + 3 + 4… + 10), ça fera la somme des cents premiers entiers. J'avais fait ce travail le samedi pour le lundi. Le dimanche pour bien terminer mon travail, j'ai fait une sorte de schéma pour expliquer mon travail à la classe. Alors j'ai réalisé que j'avais oublié plein de chiffres. J'ai dû refaire le devoir. Après ça, je n'ai plus jamais refait l'erreur et j'espère ne pas l'oublier pour ne plus la refaire. »

Cette posture de vigilance comporte deux aspects : d'une part comprendre quelque chose de nouveau en reconfigurant son expérience passée comme dans les exemples du paragraphe précédent, d'autre part prendre conscience d'une erreur produite pour ne plus la reproduire comme dans le cas de Claude. Par contre, nous n'avons pas trouvé dans les productions des élèves l'expression d'un troisième aspect qui est celui de l'anticipation de l'erreur, comme le cas de quelqu'un qui aurait dit : « je me serais trompé si… »

7 – TEMPS RACONTÉ COMME TEMPS PARTAGÉ

Les récits produits par les élèves sont des récits de savoir des élèves, mais ils montrent que les histoires racontées, tout en étant vécues par chacun, sont aussi des histoires collectives. L'exemple de Claude cité précédemment montre l'importance de raconter un événement aux autres et ce que cela peut permettre concernant le travail sur les erreurs. Il y a aussi des récits qui n'ont été racontés que par un seul élève. C'est le cas de Jean-François qui écrit deux récits auxquels aucun autre élève ne fait référence. Il s'agit d'un récit sur la différence entre droite géométrique et droite numérique, et un autre récit sur les carrés magiques. Par exemple, il écrit : « Avant je pensais que les droites qu'on faisait en classe étaient des droites mais un jour on a vu en classe que les droites qu'on avait appris à faire en primaire sont des « demi-droites ». Maintenant je sais que les droites que j'ai l'habitude de dessiner sont des demi-droites et que les droites entières sont les droites où on place des nombres à la partie gauche et droite de la droite » Là on voit bien que c'est le travail dans la classe qui est le déclencheur de cet événement pour les élèves et nous observons encore là des problèmes de formulation car le problème est peut-être encore trop nouveau pour l'élève.

Dans son autre récit, cet élève écrit : « Avant je ne savais pas que le nombre situé au milieu d'un carré magique était le tiers de la somme. Un jour M.Paquelier nous donna des exercices sur les carrés magiques dans le devoir 3. Maintenant grâce à ce devoir je sais plus sur les carrés magiques : le nombre du milieu est le tiers de la somme ; qu'il existe des carrés magiques à 16 nombres, etc. » Ici, c'est encore le travail de la classe qui est à l'origine de la nouvelle connaissance identifiée par l'élève. Nous observons que la phase d'avant présente l'absence de connaissance qui est précisément la connaissance identifiée : dire que « je ne savais pas ceci » et maintenant « je sais ceci » marque une différence par rapport aux récits analysés précédemment qui affirmaient plutôt : « je savais que », ou « je croyais que ». Cette différence nous paraît importante à signaler car les récits de souvenirs ne visent pas forcément des reconfigurations de savoirs appris antérieurement mais ils peuvent viser des connaissances nouvelles qui sont alors identifiées par un état d'ignorance précédent : « je ne savais pas que ».

Les récits racontent des souvenirs individuels mais qui se rapportent la plupart des cas à des événements qui ont été vécus en classe ou, au moins, qui ont été déclenchés en classe. Ce temps raconté est un temps partagé. Par exemple, Marie écrit : « Je ne savais pas comment faire la somme des nombres impairs. [Un jour] on a fait des hypothèses et on a trouvé une solution. Puis j'ai travaillé chez moi. [Maintenant] je sais comment on fait pour y arriver. On fait N x N = la somme des nombres impair. »

EN GUISE DE CONCLUSION

Ce travail sur le récit permet de faire de l'élève un acteur conscient des transitions institutionnelles que le système didactique organise. L'année de sixième en mathématiques est, en grande partie, l'occasion de reprendre des connaissances anciennes (les nombres, les objets de la géométrie) et de modifier le "point de vue", le rapport du sujet face à ces différents objets de savoir et la manière de se les approprier.

BIBLIOGRAPHIE

Assude T , Paquelier Y, (2003) : Acte de souvenir et approche temporelle des apprentissages en mathématiques, *Revue Canadienne de l'Enseignement des Sciences, des Mathématiques et des Technologies*, à paraître

Assude T., Drouhard J-Ph., Maurel M., Paquelier Y. & Sackur C. (1999a) : Expérience de la nécessité et fonctions didactiques du récit, *Actes de la Xème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, Houlgate, 72-79.

Assude T, Sackur C & Maurel M (1999b): "Cesame: the Personal History of Learning Mathematics in the Classroom. An Analysis of Some Students' Narratives", *The Philosophy of Mathematics Education Journal*, 11, Paul Ernest (Ed).

Brousseau G & Centeno J. (1991) : Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques*, 11.2-3, pp.167-210.

Chevallard Y. & Mercier A. (1987) : *Sur la formation historique du temps didactique*. Publication de l'IREM d'Aix-Marseille : Marseille.

Matheron Y. (2000) : *Une étude didactique de la mémoire dans l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée. quelques exemples.* Thèse de l'Université Aix-Marseille I : Marseille.

Mercier A. (1995) : La biographie didactique d'un élève et les contraintes de l'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques*, 15.1, pp.97-142.

Perrin M-J. (1994) : *Théorie des situations didactiques : naissance, développement, perspectives*. In Artigue M. et alii (Eds) : Vingt ans de didactique des mathématiques en France. La Pensée Sauvage : Grenoble, 97-147.

Ricoeur P (1983) : *Temps et récit*, Seuil Points, Paris, 3 tomes.

Ricoeur P (1990) : *Soi-même comme un autre,* Seuil Points, Paris.

Ricoeur P (2000) : *La mémoire, l'histoire, l'oubli*. Editions du Seuil : Paris.

Schubauer-Leoni M.L. & Leutenegger F. (2002) : *Expliquer et comprendre dans une approche clinique/expérimentale du didactique ordinaire*. In Leutenegger F &

Saada-Robert M. (Eds), Expliquer et comprendre en sciences d'éducation, De Boeck, pp.227-251.

Sensevy G. (1996) : Le temps didactique et la durée de l'élève. Etude d'un cas au cours moyen : le journal des fractions. *Recherches en didactique des mathématiques*, 16.1, pp.7-46.

L'ACCOMPAGNEMENT DES ENSEIGNANTS - UNE MODALITÉ POUR ETUDIER LEURS PRATIQUES

Bernadette Ngono
IUFM de Rouen

Résumé :

Cette communication a pour but de présenter une partie de mon travail de thèse relatif à l'étude des pratiques des professeurs des écoles enseignant les mathématiques en ZEP. Pour cette recherche, j'ai utilisé une méthodologie de recueil de données en deux temps.

Elle s'est traduite en deux formes d'accompagnement des enseignantes observées . Dans cet article, je décris plus particulièrement la deuxième forme dans la mesure où elle m'a permis de mieux préciser en quoi les pratiques observées sont stables et cohérentes. J'illustre cet aspect en prenant appui sur des exemples en géométrie plane.

I. PROBLÉMATIQUE, CADRE THÉORIQUE ET MÉTHODOLOGIE

Cette étude s'intègre dans le cadre d'une recherche sur les pratiques professionnelles de professeurs d'écoles enseignant les mathématiques dans les classes difficiles et regroupant une équipe de l'IUFM de Rouen[1] et une équipe de l'IUFM de Créteil.. A Rouen, il s'agit du cas particulier d'une école de ZEP et de l'enseignement des mathématiques au cycle 3 (CE2, CM1, CM2.) de cette école.

Les enseignantes observées avaient en moyenne cinq années d'ancienneté, dont trois dans leur école. Nous pensions repérer ce qui dans leurs pratiques s'était stabilisé qu'il s'agisse des contenus mathématiques envisagés pour leurs élèves ou de l'organisation pédagogique en général, tout en tentant de comprendre comment ces pratiques se structurent.

Problématique, cadre de la recherche et éléments de méthodologie générale

Précisons d'abord ce que nous entendons par pratiques. Il s'agit de tout ce que l'enseignant met en œuvre avant, pendant ou après la classe. Ce sont les préparations, les projets, les scénarios a priori. C'est aussi la mise en œuvre de ces projets, analysés par rapport aux activités potentielles des élèves à travers les actions dans la classe qui sont observables (le dit, le fait) et les mathématiques qui sont données à vivre aux élèves. Certains de ces éléments relèvent de l'implicite et sont difficiles d'accès.

[1] L'équipe de Rouen est composée de A. Dubut, M-L Peltier et B. Ngono. L'équipe de Créteil comprend D. Butlen ; M. Pezard.

30ème colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres. pages 167 *à* 188

Hypothèses de départ

Nous admettons que les choix fondamentaux de tout enseignant ne sont pas déconnectés de l'environnement social dans lequel ils prennent place. Les enseignants qui intègrent une ZEP doivent s'adapter à des conditions particulières d'exercice de leur métier, celles de l'éducation prioritaire, avec des contraintes spécifiques. Ils investissent de manières diverses les marges de manœuvre dont ils disposent pour atteindre de multiples objectifs (intégration, socialisation, …) dont celui d'apprentissage par ailleurs essentiel. C'est donc à travers les stratégies mises en œuvre pour gérer ces marges de manœuvre que l'on peut rechercher en partie les explications aux performances de leurs élèves, quand ces performances sont convenables, mais aussi quand elles sont faibles. Dans ce dernier cas, nous cherchons à tester l'hypothèse selon laquelle un déséquilibre entre plusieurs logiques peut finalement s'effectuer au détriment des apprentissages dont la baisse des exigences pourrait être l'un des aspects le plus visible. Nous indiquons maintenant les questions auxquelles notre recherche souhaite répondre.

Nos questions

Les élèves de « notre » école parviennent au cycle 3 avec un certain nombre de difficultés en mathématiques notamment, et semblent en repartir avec des difficultés peut-être nouvelles. D'autres phénomènes interviennent (comportement, langage…) qui peuvent accentuer ces difficultés. Les professeurs doivent prendre appui sur ces connaissances initiales pour amener les élèves à construire de nouveaux apprentissages, en respectant autant que faire se peut un certain nombre d'injonctions institutionnelles (socialisation, pédagogie du projet…). Peut-on alors envisager l'existence de certaines régularités communes aux pratiques des enseignantes en mathématiques du cycle 3 de « notre » école et mettre en évidence dans ces régularités des éléments connus pour contribuer à limiter les apprentissages potentiels de leurs élèves ? Comment ces pratiques se cimentent-elles dans l'environnement étudié, qu'est-ce qui fait leur cohérence ? Cette question double s'accompagne d'une autre, relative à la stabilité et à la cohérence de ces pratiques. Une fois repérés les facteurs qui semblent avoir un effet peu favorable sur les apprentissages, dans quelle mesure peut-on agir sur eux pour tenter de modifier ces pratiques tout en respectant leur cohérence ?

Nos axes d'étude

Nous reprenons pour notre travail la double approche proposée par A. Robert [2001,2002] et étudions les pratiques enseignantes non seulement sous l'angle particulier des apprentissages qu'elles pourraient induire,(premier axe) mais aussi en considérant l'enseignant comme un professionnel exerçant un métier dans un contexte précis (deuxième axe).

Selon le premier axe, nous tentons de reconstituer l'itinéraire cognitif que les enseignantes observées mettent en œuvre en classe pour leurs élèves. Une partie visible des stratégies mises en œuvre par les enseignants, et ayant une incidence sur ces apprentissages, concerne les tâches proposées, les contenus mathématiques visés à travers ces tâches, les formes de travail qui leur sont associées, ainsi que les échanges entre les élèves et les enseignantes, ou ceux que les enseignantes favorisent entre les élèves.. Ces tâches, contenus, formes de travail et échanges induisent des activités chez les élèves, activités qui sont vecteurs d'apprentissages potentiels. Elles constituent ainsi le point d'accès aux apprentissages visés même si par ailleurs l'apprentissage est un acte volontaire qui exige le consentement de l'élève. Nous les envisageons d'abord dans leur partie visible sous l'angle des apprentissages potentiels d'élèves qui accepteraient d'y adhérer. Nous reprenons pour notre compte les travaux issus de l'ergonomie du travail [ROGALSKI, 1999], et qui distinguent différents types de tâches pour le prescripteur et pour le réalisateur de la tâche. (tâche prescrite, tâche redéfinie, tâche attendue, tâche effective).

Nous cherchons à déterminer le décalage éventuel entre les tâches effectives des élèves et celles que les enseignantes en attendent en apparence. Nous nous demandons comment les enseignantes arrivent à concilier la nécessité de permettre à leurs élèves, et sur un contenu mathématique donné, d'acquérir des connaissances nouvelles à partir de connaissances anciennes éventuellement peu solides et celle de les voir réussir. Quel type de logique semblent-elles privilégier, est-ce une logique de la réussite immédiate ou une logique des apprentissages ?

L'effet de ces pratiques n'est pas simple à déterminer compte tenu de la complexité des facteurs intervenant dans les apprentissages. Cependant, les connaissances actuelles de la didactique sur les conditions de construction et d'appropriation des connaissances nous permettent d'anticiper sur certains effets éventuels de ces pratiques.

Ce premier axe nous permet d'esquisser l'environnement mathématique dans lequel sont mis les élèves du cycle 3 de « notre » école en général, et ceux d'une classe de CE2-CM1 en particulier et de mettre en évidence ce qui semble prédominer dans les pratiques des enseignantes observées, mais il ne nous suffit pas pour comprendre ce qui détermine ces pratiques, d'où l'intérêt de notre deuxième axe d'étude.

Selon ce deuxième axe, nous analysons les pratiques observées en les considérant comme des systèmes cohérents de réponses à des contraintes diverses à déterminer, cohérence qu'il nous faut tenter de cerner à l'aide de critères précis. Nous cherchons ainsi à établir un lien entre ces pratiques et l'environnement social dans lequel elles prennent place, et à dégager leur complexité. Pour cela, nous nous intéressons à la manière dont les enseignantes s'approprient des contraintes institutionnelles comme celles relatives à la pédagogie du projet, à la différenciation et à l'individualisation des apprentissages dans ce même contexte, sans oublier la socialisation et l'intégration des élèves, mais aussi aux représentations que ces enseignantes ont de leurs élèves, des mathématiques et de leur enseignement dans le contexte étudié.

Nous nous demandons dans quelle mesure les représentations des enseignantes sur les capacités de leurs élèves ont une incidence sur certains de leurs choix et dans quelle mesure ces représentations contribuent à la stabilité de leurs pratiques. Une question nous interpelle sur ce point. Peut-on penser que les enseignantes de notre école anticipent, à tort ou à raison, sur les difficultés de leurs élèves en leur proposant des situations qu'elles estimeraient plus adaptées à leurs capacités ?

Pour repérer ces éléments, nous nous proposons d'analyser leurs discours recueillis lors des réunions et des séances de travail, de relever les écarts entre ces discours et les pratiques effectives, et d'envisager ainsi la question délicate du lien entre les représentations des enseignantes et leurs pratiques.

C'est en respectant cette cohérence que nous nous proposons de tenter d'amener les enseignantes à modifier certains aspects de leurs pratiques. Ainsi, nous étudions comment les enseignantes s'approprient certaines informations relatives à des situations que nous leur proposons en géométrie par exemple, et cherchons à repérer certains effets de cette tentative de modification sur leurs pratiques, les résistances éventuelles, afin de mieux préciser en quoi ces pratiques semblent stables et cohérentes.

Description des publics observés

L'école est située dans une ZEP de la ville de Rouen. A la rentrée 1998, l'école élémentaire accueillait 167 élèves répartis dans 10 classes, 73 au cycle 2 (2CP et 2 CE1) et 94 au cycle 3 (2 CE2, 2 CM1, 2 CM2), avec une moyenne de 16,7 élèves par classe, contre une moyenne académique de 22,6 élèves par classe à l'école primaire. La majorité (98,7 %) des responsables familiaux sont dans la catégorie dite défavorisée (inactifs, ouvriers) et l'école comporte une forte proportion d'élèves d'origine étrangère essentiellement d'Afrique noire et du Maghreb, 70% selon la directrice, contre une moyenne académique de 6,1% dans les écoles primaires.

A la rentrée 1998, l'équipe des maîtresses du cycle 3 comportait 6 enseignantes, puis à la suite d'une fermeture de classe, l'équipe est passée à 5, puis à 4 les deux années suivantes.

Nous étudions plus finement le quotidien d'une classe de CE2-CM1 de l'enseignante Stéphanie.

Il s'agit d'une classe à double niveau constituée de 8 élèves de CE2 et de 8 élèves de CM1. Les élèves ont tous suivi une scolarité normale. Stéphanie a cinq années d'ancienneté dont trois dans cette école, après une formation en deux ans à l'IUFM, et deux années passées dans une autre ZEP de la banlieue rouennaise. Elle a toujours enseigné au cycle 3, et sur les 5 années d'ancienneté, elle a pris 4 fois en charge un double niveau CE2-CM1 ou CM1-CM2, et un CM1 une autre année. On peut donc considérer qu'elle a 5 années d'ancienneté en ZEP et en CM1.

Méthodologie succincte de recueil des données

Nous avons mis au point une méthodologie de recueil et de traitement des données en deux temps en raison de la difficulté d'entrer dans les classes et du public que nous souhaitions observer

- Première phase : une observation directe et participante.

Nous avons mené avec ces enseignantes pendant une année de nombreuses séances de travail sous la forme d'animations pédagogiques, tout en observant la mise en place des ateliers de jeux dans les classes, et la manière dont les enseignantes s'appropriaient le dispositif de formation.

Les enregistrements effectués lors de ces phases de travail ont été analysés et nous ont permis d'avoir accès aux discours des enseignantes, à la manière dont elles perçoivent leur rôle, leurs élèves, mais aussi à certaines de leurs conceptions sur les mathématiques et leur enseignement. Au cours de ces séances, les enseignantes ont parfois eu à répondre à des questionnaires que nous avions élaborés.

Nous avons observé de nombreuses séances d'ateliers de jeux. Ces séances n'ont pas été enregistrées. Nos analyses reposent donc sur des notes prises au cours de ces observations de groupes d'élèves au cours des jeux, sur l'étude de certains jeux, ainsi que sur des traces écrites des enseignantes relatives à ces ateliers (progressions, compétences visées,…), sans oublier les enregistrements de leurs discours lors des séances de travail que nous avons menées avec elles. Par ailleurs, nous disposons des résultats d'une évaluation proposée à l'issue de la première année à tous les élèves du cycle et reprenant des items intervenant dans les jeux afin de tenter d'en repérer des effets éventuels. L'analyse de ces évaluations nous permet d'affiner notre bilan sur ces ateliers de jeux mathématiques.

- Deuxième phase : une observation faiblement participante

Notre participation à la mise en place des ateliers de jeux mathématiques nous a permis d'entrer dans les classes pour observer les séances ordinaires afin de suivre l'articulation entre le travail quotidien et le travail proposé dans les ateliers de jeux mathématiques. Nous avons ainsi pu analyser la manière dont les enseignantes s'appropriaient le dispositif d'accompagnement, mais aussi l'impact éventuel des jeux sur le développement des compétences des élèves.

Dans un deuxième temps, nous avons observé plus finement le quotidien de la classe de CE2-CM1. Ici, nous avons recueilli des enregistrements audio de nombreuses séances et quelques traces écrites des élèves. Ces éléments étaient complétés par des prises de notes pendant les séances ou lors d'échanges avec l'enseignante de la classe sur les séances observées. Nous n'avons pas pu disposer de ses préparations écrites relatives à ces séances.

Enfin, les enregistrements audio des réunions de travail relatives à l'accompagnement sur les séances ordinaires contribuent à compléter certaines de nos analyses. Pour accéder aux conceptions des enseignantes sur les mathématiques et leur enseignement dans le contexte de notre école, nous leur avons proposé des tâches, et dont certaines consistaient à concevoir des situations exploitables en classe. C'est ainsi que pour repérer les éventuels effets de l'accompagnement mis en place, nous avons pu croiser le dire des enseignantes des autres classes avec ce qui a effectivement été fait dans la classe de CE2-CM1 de Stéphanie, notamment en géométrie plane. L'analyse plus fine de corpus nous a ainsi permis de compléter notre bilan sur cet accompagnement et d'inférer sur les conditions d'une modification éventuelle des pratiques observées.

Méthodologie pour analyser les pratiques

C'est sur la méthodologie proposée par A. Robert (2001) que nous nous appuyons essentiellement pour accéder à la complexité et à la cohérence des pratiques. Cette méthodologie consiste à lire les pratiques de l'enseignant à partir d'observations de classe, de transcriptions complétées éventuellement d'autres éléments, selon cinq composantes : une composante cognitive, une composante médiative, une composante personnelle, une composante sociale et une composante institutionnelle.

- La composante cognitive : elle concerne l'organisation des savoirs, à court, moyen ou long terme, prévue par l'enseignant, les scénarios associés, les itinéraires cognitifs prévus pour les élèves. C'est elle qui nous permet d'accéder aux mathématiques potentiellement ou effectivement pratiquées pendant la classe.
- La composante médiative : nous envisageons deux sous-composantes , l'une relative au discours du professeur et aux modes d'interactions en classe des différents acteurs à propos à la fois des contenus mathématiques et des comportements, la deuxième est relative aux actes du professeur, notamment les gestes professionnels, les routines et régulations qui accompagnent les interventions du maître.
- La composante personnelle comporte les éléments concernant les conceptions des professeurs sur les mathématiques, l'enseignement et l'apprentissage. Nous y incluons l'histoire personnelle du professeur en tant qu'élève, stagiaire, professeur titulaire, du moins celle que nous pouvons reconstituer sans faire appel à la psychanalyse. Elle regroupe également des

éléments relatifs aux conceptions du professeur sur le public auquel il s'adresse.

- La composante sociale contient des éléments de réponses à des questions posées par l'environnement social de l'école. L'origine socio-économique et culturelle des élèves de quartiers défavorisés semble avoir une incidence directe ou indirecte sur leur rapport à l'école et leur rapport au savoir, ce qui intervient dans les processus d'apprentissage. L'influence de ces facteurs culturels et sociaux est relativement difficile à cerner, mais nous ne pouvons pas négliger les nombreuses contraintes liées au milieu social des élèves que les enseignantes subissent.
- La composante institutionnelle : on considère les diverses contraintes institutionnelles et leurs effets sur les pratiques. De nombreuses institutions du système éducatif à différents niveaux interviennent ici : le ministère, l'académie , la circonscription, le REP, l'école et son équipe pédagogique, la classe….

II. L'ACCOMPAGNEMENT DES ENSEIGNANTES

Nous donnons d'abord les caractéristiques générales de l'accompagnement avant de décrire la deuxième forme relative aux séances ordinaires.

II.1 Caractéristiques de l'accompagnement

L'origine de l'accompagnement

L'accompagnement a pris ses racines dans notre quête de terrain de recherche. En 97/98, nous nous sommes heurtée au refus de nombreux enseignants de l'école primaire d'accepter d'être observés lors des séances ordinaires sans contrepartie. Nous avons finalement pu négocier avec les enseignantes de « notre » école qui ont alors demandé notre aide pour la mise en place des ateliers de jeux mathématiques pour l'année 98/99. L'accompagnement a donc résulté d'une initiative locale. Nous faisions le pari que cela nous permettrait d'établir des relations suffisamment étroites avec les enseignantes (mais aussi avec leurs élèves), de moduler peu à peu leurs attentes et d'étendre ainsi nos zones d'observation en passant des ateliers de jeux aux séances ordinaires de mathématiques, de l'analyse de décisions prises collectivement par l'équipe des enseignantes sur un projet commun (les jeux mathématiques) à l'analyse de décisions individuelles de chaque enseignante sur son propre projet d'enseignement dans sa classe (les séances ordinaires). Le changement des attentes des enseignantes est dû aux résultats des élèves à une évaluation que nous avons proposée à la fin de la première année de mise en œuvre des ateliers de jeux, évaluation reprenant des items issus de ces jeux. L'échec des élèves sur des points considérés fondamentaux a incité les enseignantes à une demande de formation (ou d'information) sur des contenus mathématiques et didactiques plus ancrés dans le quotidien de leurs pratiques, ceci afin de mieux conduire l'articulation entre les séances ordinaires et les jeux mathématiques. L'accompagnement n'a donc pas été une réponse à des injonctions institutionnelles, ce qui fait son originalité, bien qu'il en ait respecté le cadre.

Le cadre de l'accompagnement

L'accompagnement était donc centré sur l'école, et se déroulait sur le site de cette école. Il concernait plus précisément les enseignantes du cycle 3, et en arrière fond leurs élèves, dans la mesure où il s'agissait de contribuer à l'amélioration des apprentissages de ces derniers en répondant aux besoins spécifiques que les enseignantes exprimaient.

Les partenaires de l'accompagnement étaient représentés par l'équipe des maîtresses du cycle 3, dont la directrice, l'équipe de circonscription (IEN, conseiller pédagogique, coordinateur du REP), l'équipe des formateurs d'IUFM en mathématiques constituée d'un enseignant-chercheur et deux PRCE dont nous-même,

Dans la première forme d'accompagnement relative aux ateliers de jeux mathématiques, nous jouions le rôle de personne-ressource auprès des enseignantes qui nous considéraient tantôt comme partenaire, tantôt comme formateur, avec en arrière plan un « contrat » lié à leur projet, contrat établi d'abord entre elles au sein de leur équipe, puis entre elles et nous. Ceci nous contraignait à une observation participante de séances « extraordinaires » intéressante par ailleurs. Lors des réunions de travail que nous menions avec elles, les enseignantes n'évoquaient les séances ordinaires qu'en arrière plan des ateliers de jeux mathématiques.

Dès la rentrée 99/2000 chaque enseignante devait gérer l'articulation entre les séances ordinaires et les jeux mathématiques en tenant compte de la progression commune, mais aussi des contraintes particulières de sa classe. La nécessité de se centrer davantage sur les apprentissages des élèves lors des séances ordinaires a ainsi conduit à la nouvelle forme d'accompagnement. Les enseignantes nous permettaient d'observer ces séances dans leurs classes, exprimaient des demandes de formation relatives à ces séances, avec cette fois en arrière-fond les jeux mathématiques. Ce changement d'attentes a ainsi entraîné une nouvelle forme d'accompagnement. Dans cette deuxième forme d'accompagnement, les enseignantes interpellaient plus particulièrement notre rôle de formateur, sans « contrat », dans la mesure où elles restaient libres d'intégrer les idées que nous leur fournissions dans leurs pratiques quotidiennes.

Ces deux formes d'accompagnement se distinguent ainsi par notre posture et celle de l'équipe enseignante, mais aussi par la nature de nos observations. Dans le premier type d'accompagnement, nous avons pu étudier les écarts entre les décisions prises collectivement par les enseignantes et le respect de ces décisions, tenter de comprendre le pourquoi de ces décisions et écarts, et considérer les décalages d'un point de vue global pour l'ensemble de l'équipe, même si par ailleurs certaines singularités individuelles ont pu être repérées.. Dans la deuxième forme d'accompagnement que nous présentons ici, bien que les thèmes ayant fait l'objet de formation aient été choisis après concertation avec les enseignantes, ce n'est que lorsqu'elles tentaient de les mettre en application que nous pouvions étudier les écarts éventuels entre les éléments de la formation et la mise en œuvre effective. Dans ce cas, nous pensions mieux cerner ce qui leur semblait important, comment elles interprétaient nos propositions, ce qui semblait se modifier dans leurs pratiques, ce qui résistait éventuellement, et analyser ainsi les effets visibles à court ou moyen terme sur leurs pratiques. Les moments de travail avec les enseignantes se sont ainsi avérés importants pour repérer ces éléments, ce qui nous amène à présenter les moyens dont a disposé l'accompagnement.

Les moyens de l'accompagnement

L'accompagnement a nécessité l'accord de l'IEN de circonscription, du réseau et de la direction de l'école pour la présence des formateurs d'IUFM dans les classes, les enregistrements audio et vidéo, ainsi que pour les nombreuses réunions qui ont eu lieu. Dans notre cas, un soutien important du REP au projet des maîtres s'est manifesté sur d'autres points. Au début, en 98/99, les réunions préparatoires étaient prises sur le temps libre des enseignantes de l'école et des formateurs d'IUFM, en général le mardi soir. Le REP a décidé de soutenir le projet d'ateliers de jeux en accordant d'autres moyens dont une dispense des enseignantes pour les animations pédagogiques de circonscription, les réunions étant considérées comme 6 heures d'animations sur site. Les nombreuses réunions qui ont eu lieu ne compensaient certainement pas en heures cet avantage, mais correspondaient pour ces collègues à une reconnaissance de leurs actions par l'institution. Par ailleurs, les enseignantes ont obtenu l'octroi d'une semaine de stage sur site pendant deux années, 1999/2000 et 2000/2001, stages se déroulant en trois séances d'un jour et demi sur temps scolaire. Les enseignantes étaient remplacées par des « ziliens »[2], ce qui permettait un travail plus approfondi avec les formateurs, réunions auxquelles participait parfois le conseiller pédagogique de circonscription. A ces moyens s'est rajouté l'octroi d'un aide-éducateur supplémentaire à l'école. Cette aide s'est avérée précieuse en particulier lors du déroulement des ateliers de jeux. En plus, il a été donné aux enseignantes la possibilité d'accueillir des stagiaires PE2 pour la mise en oeuvre de séances préparées dans le cadre d'une option sur l'enseignement en ZEP et concernant plusieurs disciplines. En retour, les élèves du cycle 3 sont venus présenter leurs jeux à l'IUFM au groupe de stagiaires participant à cette option. Un soutien de l'IUFM s'est traduit par le prêt d'ouvrages pédagogiques achetés sur les crédits recherche.

Les contenus généraux de l'accompagnement

Dans la première forme d'accompagnement, notre rôle était de favoriser l'émergence de points d'accord entre les enseignantes sur leur propre projet, de discuter avec elles sur les moyens les plus pertinents pour la réussite de la tâche qu'elles s'étaient fixée, d'aménager des moments où elles pouvaient faire des bilans intermédiaires, exprimer leurs désaccords ou proposer des orientations nouvelles. Nous avons pu obtenir certains résultats issus entre autres de cet accompagnement.

Nous avons mis en évidence l'investissement des enseignantes pour mettre en place ce dispositif lourd à gérer par ailleurs, et leurs difficultés à respecter certaines décisions relatives à l'élaboration d'outils communs pour l'efficacité de ce dispositif, outils visant par exemple à repérer les compétences travaillées à travers les jeux, à respecter une programmation commune des activités à mener dans les classes en vue d'une meilleure articulation entre les jeux et les séances ordinaires, ou encore à évaluer les acquisitions des élèves tout au long de l'année et en fin d'année. Nous avons dû leur fournir certains outils,(programmation, listes de compétences devant être travaillées, évaluation…) et avons analysé pour elles les résultats des élèves à l'évaluation finale de la première année sur les jeux. En ce qui concerne les séances ordinaires liées à ces jeux, nous avons mis en évidence à partir des discours des enseignantes et de nos observations des ateliers de jeux une individualisation des apprentissages conjuguée à une absence de mise en commun ou de synthèse dans les classes, mais aussi par exemple une certaine conception de la géométrie comme devant viser essentiellement l'apprentissage du

[2] Un « zilien » est un enseignant-remplaçant de l'école primaire, sur une Zone d'Intervention Limitée (ZIL) comprenant plusieurs écoles.

vocabulaire, ce qui a conduit à des erreurs inattendues des élèves. Ainsi, dans des items visant à reconnaître des figures usuelles, de nombreux élèves de CE2 appelaient pentagone toute figure non identifiée. Certains de ces résultats ont été présentés au colloque Copirelem par M-L Peltier [2000].

Un dernier point nous semble important à rappeler. Au cours de nos réunions de travail, nous avons noté que les bilans menés par les enseignantes sur les ateliers mathématiques se centraient principalement sur les aspects comportementaux des élèves, ce qui nous a conduite à analyser leur projet comme semblant viser en priorité le développement de compétences relationnelles des élèves parfois au détriment des mathématiques.

Cette première phase d'investigation (1998-2000) avant toute formation nous a permis de pointer un certain nombre de ces phénomènes :

- un évitement de tout ce qui pourrait engendrer des conflits, en particulier le traitement de questions mathématiques un peu consistantes
- une individualisation du travail, sous différentes formes, pour éviter les phases collectives
- un glissement dans les consignes qui modifie, simplifie ou dénature la tâche initialement prescrite aux élèves
- un choix de contextes pour les problèmes dans un champ supposé familier, ne conduisant pas toujours à un traitement mathématique de la question
- une nécessaire gestion d'une violence effective ou d'une inhibition patente de certains élèves, qui pèse sur pratiquement tous les choix didactiques et pédagogiques des maîtres.

II.2 L'accompagnement des enseignantes sur les séances ordinaires

La deuxième forme d'accompagnement qui fait l'objet de cette communication visait à améliorer les pratiques. Dans le paragraphe qui suit, nous précisons d'abord les points relatifs aux conceptions des enseignantes sur la géométrie, puis nous indiquons les éléments sur lesquels a porté la formation dans ce domaine avant d'en étudier quelques effets.

Le point de vue des enseignantes sur les mathématiques et leur enseignement à partir de leur discours, exemple de la géométrie

Il nous a semblé important de prendre appui sur les préoccupations des enseignantes relatives à l'articulation des séances ordinaires avec les jeux mathématiques afin de leur faire expliciter la manière dont elles envisageaient certains contenus mathématiques et leur enseignement.

Il nous semblait que les enseignantes hésitaient sur les activités géométriques à proposer à leurs élèves.

c'est en proposant certaines tâches aux enseignantes que nous avons pu repérer une partie de leur point de vue sur la géométrie et son enseignement. Ainsi, en octobre 1999, nous leur avons demandé d'analyser un jeu conçu par notre équipe de chercheurs, ceci afin de les aider à affiner leur définition d'un cahier de charge d'un jeu. En novembre 2000, nous leur avons proposé des figures à analyser afin de sélectionner celles qui leur paraissaient les plus adaptées pour une activité de reproduction. Par ailleurs, au cours d'autres réunions, nous les avons interrogées pour savoir où elles en étaient en géométrie dans leurs classes.

Ainsi pour les enseignantes, l'enjeu d'une reproduction est de développer la dextérité et le soin. Lors d'une séance de travail nous leur avons demandé de préciser quelles activités de reproduction elles menaient dans leurs classes. Les réponses obtenues ont montré que lorsqu'elles envisageaient ces situations, l'enjeu n'était pas d'amener les élèves à développer des compétences en analyse d'une figure. D'après leurs discours, ces activités avaient pour principal but de développer la dextérité et le soin chez les élèves. La recherche de cette dextérité pouvait aller jusqu'à faire recommencer la même tâche autant de fois que nécessaire pour obtenir un résultat correct. C'est ainsi qu'une enseignante de CM1 a dit procéder en trois phases pour faire reproduire une figure : *« Moi j'ai fait une reproduction, en fait il y avait,… on analysait on mesurait, on essayait de la faire sans gommer, puis on essaie de recommencer la même sans erreur. Il y a eu une troisième étape où on essaie de recommencer sans hésitation la même.*. Concernant l'étude des propriétés des parallélogrammes, les enseignantes ont signalé qu'elles ne travaillaient pas sur le parallélisme des côtés d'un polygone, ni sur les propriétés communes à des familles de figures, chaque figure étant vue isolément. Les propriétés des quadrilatères étudiées concernaient essentiellement les côtés de même longueur et les angles droits, les élèves devant savoir « qu'un carré a quatre côtés égaux et 4 angles droits pour le construire ». L'une d'elles a ajouté que l'impasse sur certaines propriétés et sur l'inclusion des familles de figures était volontaire compte tenu de ses propres lacunes dans ce domaine.

D'une certaine manière, la géométrie ne semblait pas constituer un domaine à prendre en compte pour la résolution de problèmes, ce qui peut, de notre point de vue, expliquer l'absence de certaines activités des programmes dans les classes. Nous avons pu constater que ces choix peuvent contribuer à produire une certaine érosion des connaissances des enseignantes elles-mêmes notamment en ce qui concernent les propriétés des quadrilatères particuliers.

Les contenus de la formation : un exemple en géométrie

Nous avons mené cette formation en tenant compte des demandes des enseignantes, mais aussi de certains manques que nous avions constatés lors de nos observations de classe ou à partir de leurs discours. Nous avons privilégié une approche consistant à respecter l'autonomie des enseignantes, à ne pas nous substituer à elles dans leur choix de contenus, dans la préparation et l'organisation des séances de classes, mais à privilégier les échanges sur des outils d'analyse, à n'apporter des exemples d'activités qu'en relation avec ces outils. Il s'est agi comme nous l'avons dit de répondre aux demandes des enseignantes en fonction de leurs besoins, tout en profitant de ces demandes pour suggérer des outils parfois éloignés de leurs pratiques habituelles. Les contenus de la formation que nous décrivons correspondaient ainsi à des possibles, chaque enseignante restant libre de prendre ce qui semblait lui convenir dans cette diversité de possibles. . Nous reconstituons dans le tableau ci-dessous certains de ces éléments.

dates	Les questions soulevées	Formation/informations
Octobre 99	Peut-on faire l'impasse sur les propriétés des parallélogrammes ? Par quelles étapes passe-t-on pour le travail sur les propriétés des figures ?	- Progression en géométrie au cycle 3 : les grandes lignes - Travail sur l'inclusion des familles de figures : les propriétés des parallélogrammes
Février 2000	Comment travailler sur les propriétés des figures lors des séances ordinaires ? Qu'est-ce qu'on institutionnalise ? Quand institutionnaliser ?	- Reproduction des figures . - Propriétés des quadrilatères particuliers - Suggestions d'activités permettant de travailler sur les propriétés des figures planes et le vocabulaire (jeu du portrait, situations de communication, dictées de figures) - Progression et traces écrites associées - Précisions sur l'institutionnalisation.
novembre 2000	Reproduction d'une figure complexe Comment mener la validation, les phases de synthèse ? Quelles aides proposer ? Comment gérer l'hétérogénéité ?	- Analyse de figures complexes dont la figure de base est un carré - Variables didactiques d'une situation de reproduction - Modes de gestion associés
mars 2001	Que faire dans chacune des cases de la progression ? Comment sérier la tâche ? Quelles variables pour les dictées de figures ? Comment gérer les difficultés de mémorisation dans les dictées de figures ? Est-ce important d'insister sur la précision des tracés ?	Progression détaillée en géométrie plane *reproduction *description * construction des figures planes : exemple d'une situation de communication en géométrie *Précisions sur la validation

Années 99/00 et 00/01

Comme le montre ce tableau, certaines questions qui portent aussi bien sur l'activité mathématique que sur la gestion des séances relatives à ces activités sont récurrentes. Ainsi, lors de la réunion d'octobre 99, nous avons cherché à sensibiliser les enseignantes sur la nécessité de mettre en place des activités visant à mobiliser chez les élèves les propriétés des objets géométriques. A cet effet, nous avons repris globalement les textes d'accompagnement aux programmes du cycle 3, notamment les quatre verbes (reproduire, décrire, représenter construire), en donnant des exemples en géométrie plane et en géométrie dans l'espace. En février 2000, nous avons de nouveau eu des questions relatives aux propriétés des quadrilatères particuliers et avons de nouveau échangé avec les enseignantes sur différentes activités dont la reproduction de figures. Lors d'une animation en mai 2000, une enseignante a de nouveau demandé la distinction entre reproduction et construction, ce qui explique que la séance de novembre 2000 est centrée de nouveau sur la reproduction des figures. Ces demandes récurrentes peuvent aussi s'expliquer par le fait que la géométrie à enseigner comportait des références plus éloignées des pratiques habituelles des enseignantes, mais en même temps il nous a semblé que ces dernières ne faisaient pas toujours l'effort de rechercher dans des livres du maître, voire dans des manuels d'élèves les réponses à certaines questions qu'elles se posaient, et qu'elles attendaient de nous des outils immédiatement exploitables.

Ceci fait partie des ajustements que nous avons évoqués pour cet accompagnement pour lequel il est apparu un certain nombre de malentendus entre les enseignantes et nous dans l'interprétation que nous faisions de leurs questions, ou dans l'interprétation qu'elles faisaient de certaines de nos réponses. Nous avons évoqué un de ces malentendus en ce qui concerne la reproduction des figures interprétée différemment par les enseignantes. Nous présentons maintenant quelques-unes des propositions qui ont émergé de ces échanges avec les enseignantes.

Afin d'aider les enseignantes à améliorer l'articulation entre les jeux mathématiques et les séances ordinaires, nous avons ciblé en priorité le travail sur la géométrie plane, domaine dans lequel les enseignantes manifestaient aussi le plus de demandes.

Nous avons cherché à amener les enseignantes à tenir compte de deux aspects en géométrie, aspects devant être travaillés progressivement.

- Une géométrie pragmatique du faire, de l'action où la précision des tracés est importante car la validation se fait avec les instruments. L'essentiel du travail consiste à passer progressivement d'une géométrie perceptive où les objets sont reconnus par la vue à une géométrie instrumentée où les objets sont identifiés par leurs propriétés dont le contrôle se fait avec les instruments. Le recours à la perception demeure nécessaire pour faire des hypothèses et des anticipations sur la nature des objets et sur l'existence de propriétés. Par exemple, on peut vérifier avec l'équerre qu'un quadrilatère possède 4 angles droits, avec la règle ou le compas qu'il possède 4 côtés égaux.
- Une géométrie au sens mathématique qui consiste à réfléchir sur les propriétés des objets, à mettre en œuvre le raisonnement déductif.

Nous avons cherché à favoriser chez les enseignantes l'incorporation de nouvelles démarches dans leurs pratiques personnelles en leur faisant analyser des exemples de situations, en les aidant à repérer l'enjeu de ces situations sans toutefois leur fournir des modèles à reproduire, mais en les incitant à retourner aux sources de l'information (manuels, programmes…). Mais nous avons aussi tenu compte du fait que les enseignantes n'avaient reçu aucune formation depuis leur sortie de l'IUFM (ou de l'école normale pour Mme Poullain) pour leur proposer des exemples plus détaillés de certaines situations (situation de communication, dictée orale…), en prenant notamment appui sur les travaux de M.H Salin et R. Berthelot [1992] concernant les situations de formulation, ou encore ceux de C. Houdement et Kuzniak [1999]relatifs aux différents points de vue au niveau des connaissances engagées en géométrie.

Exemple de proposition effectuée en stage

Voici l'exemple d'une progression que nous avons proposée aux enseignantes au cours d'une séance de travail. Elle est relative aux activités de reproduction et de description de figures planes.

Etape 1 : reproduction à même échelle de la figure
Etape 2 : reproduction de la même figure en changeant d'échelle. Un élément de la figure agrandie (par exemple, un segment représentant le côté du carré à obtenir) est fourni, ceci pour amener les élèves à mieux prendre en compte les propriétés de la figure.
Etape 3 : activités de description, quelques exemples. - Deux programmes écrits sont donnés ainsi qu'une figure, l'élève doit déterminer à quel programme correspond la figure - Un programme est donné ainsi que plusieurs configurations. L'élève doit déterminer à quelle figure correspond le programme. - Situation de communication : deux figures A et B sont données à deux groupes d'élèves, les élèves du groupe A (respectivement B) doivent décrire la figure afin que les élèves du groupe B (respectivement A) puissent l'identifier dans une série de configurations, ou la construire. **-** Dictées de figures : à partir de la description orale d'une figure, les élèves doivent l'identifier parmi plusieurs figures ou construire la figure correspondante**.** - Jeu du portrait sur les figures : les élèves doivent poser des questions permettant d'identifier parmi

plusieurs figures celle que le maître (ou un autre élève) a choisie. Le maître (ou l'élève) ne répond que par oui ou par non.

Quelques éléments d'une progression relative à la reproduction et à la description

Les enseignantes disaient déjà pratiquer dans leurs classes des jeux de portrait des solides. Nous en avons profité pour caractériser le jeu du portrait comme une situation de communication particulière visant à aider les élèves à comprendre qu'une figure plane (ou un solide) est caractérisée par ses propriétés, à favoriser la mise en place et l'emploi d'un vocabulaire approprié et à développer des compétences en argumentation. L'élève doit résoudre un problème visant à identifier une figure plane (ou un solide). Pour cela, il cherche à élaborer un questionnement pertinent et à déduire des informations obtenues la solution à ce problème. En même temps, il doit élaborer une stratégie pour choisir une figure plane et poser des questions, éliminer les figures qui ne conviennent pas, ce qui l'oblige à analyser les figures, mais aussi les réponses aux questions posées par lui-même et par les autres élèves. Une fois la figure trouvée, l'enseignante peut reprendre avec les élèves l'ensemble des stratégies ayant conduit à cette réponse (questions posées, aspects méthodologiques).

Nous présentons maintenant la manière dont les enseignantes ont accueilli l'ensemble de nos propositions.

II.3 Présentation de quelques effets de la formation

Précisons d'abord ce que nous entendons par effet. Comme le montrent les paragraphes précédents, les contenus de l'accompagnement ont revêtu plusieurs formes allant de rappels théoriques à des exemples plus détaillés d'activités. De plus, les enseignantes ont été partie prenante à travers leurs échanges réciproques ou avec nous pour bon nombre de points soulevés sur ces contenus, même si par ailleurs il nous est arrivé de proposer des éléments innovants par rapport à leurs pratiques ordinaires. Nous avons vu que les propositions se sont enrichies au fur et à mesure que les enseignantes précisaient un peu mieux leurs attentes. Les effets dont nous parlons ici peuvent être interprétés comme un impact de cet ensemble complexe d'interactions entre elles, et entre elles et nous. Partant de là, nos critères pour évaluer l'effet de cet accompagnement reposent sur des observations d'une certaine variabilité dans les pratiques jusque là observées, dans les discours des enseignantes sur leurs pratiques ou sur leurs élèves, voire dans les nouvelles questions qui peuvent émerger. Ces recueils d'observations et d'opinions permettent d'étudier un éventuel impact de cet accompagnement à court terme lorsqu'ils sont enregistrés dans les mois qui suivent la formation, ou à moyen terme, lorsque les recueils ont lieu une année plus tard.

Nous présentons d'abord un effet de cette formation à travers les réactions des enseignantes.

Exemples de quelques réactions des enseignantes

Dans le domaine géométrique, les situations que nous avons suggérées aux enseignantes ont généralement reçu un accueil favorable de notre point de vue, si l'on considère les nombreuses questions qu'elles posaient sur leur rôle pendant les séances correspondant à ces propositions. Par exemple, s'agissant des activités de reproduction de figures complexes, les enseignantes cherchaient à savoir quelle aide fournir aux élèves bloqués, si les figures sur papier calque servant à valider les productions des élèves devaient être construites par les élèves ou par elles, si, lors de la mise en commun, elles devaient effectuer la construction des figures au tableau. De la même manière, en ce qui concerne les situations de communication, elles se demandaient si elles devaient fournir un modèle de programme après la mise en commun, échangeaient sur les synthèses à mener, sur les traces écrites à fournir aux élèves, sur les supports à utiliser. Nous avons considéré ces aspects comme traduisant un réel intérêt pour ces activités malgré quelques réticences compréhensibles par ailleurs, dans la mesure où les enseignantes ont semblé prendre conscience de certains manques parmi leurs choix habituels.

Cependant, les enseignantes semblaient accueillir favorablement les outils méthodologiques et théoriques renforçant leur propre rôle, mais ont semblé réticentes aux propositions qui de notre point de vue auraient permis aux élèves de développer de nouvelles compétences. Ainsi, lorsque la tâche de l'élève s'avérait relativement complexe, les enseignantes émettaient des doutes quant aux capacités de leurs élèves à les affronter, ces capacités étaient cognitives, mais parfois comportementales. Ainsi, une enseignante se demandait si l'on pouvait mettre des ciseaux entre les mains de certains élèves, une autre soulevait le problème des compas ou des équerres de mauvaise qualité dont disposaient les élèves. Les enseignantes ne souhaitaient pas renouveler une expérience d'achat de compas de bonne qualité qui s'était soldée par bon nombre de disparitions. Ces aspects ne sont pas négligeables dans la mesure où l'on peut difficilement chercher à développer des compétences en géométrie chez les élèves si ces derniers ne disposent pas d'instruments adéquats. Ainsi certaines enseignantes estimaient « hors contexte » des exemples d'activités de manipulations (superposition de figures planes, activité non décrite ici) permettant d'aider les élèves à se créer des images mentales pour les activités de reproduction, l'une des enseignantes affirmant « *ça me rappelle ces belles choses qu'on enseigne à l'IUFM* ». Ces éléments nous ont conduite à nous demander bien souvent si nos propositions trouveraient un certain écho auprès des enseignantes.

Nous présentons maintenant un exemple de mise en œuvre d'une de nos propositions par les enseignantes afin de montrer la résistance au changement de certaines de meurs pratiques.

Exemple d'effet sur la pratique d'une enseignante

Toutes les enseignantes ont tenté de mettre en œuvre bon nombre de nos propositions. Ainsi, l'enseignante de CE2-CM1, Stéphanie a mené une séance relative à l'étude des propriétés des quadrilatères et reprenant des éléments de la formation. Cette séance s'est déroulée au début d'avril 2000, après le stage de fin février. Il y a donc environ un mois d'écart entre la formation et l'appropriation de la proposition par Stéphanie.

Le projet de Stéphanie.

La séance comporte trois phases et dure une heure. Elle peut ainsi être décrite :

- une succession d'activités riches a priori, dans une articulation intéressante: en effet, la séance comporte quatre phases avec pour buts:

Première phase : distinguer les polygones des non-polygones, (deux minutes)

Deuxième phase : Identifier les quadrilatères. (trois minutes)

Troisième phase : jeu du portrait ; décrire et identifier un quadrilatère à partir de propriétés relatives aux côtés, aux axes de symétrie, à l'orthogonalité, à l'isométrie (trois minutes)

Quatrième phase : CM1. Résolution de problème ; rechercher plusieurs quadrilatères ayant des diagonales perpendiculaires.

- une alternance de formes de travail permettant a priori de maintenir les élèves en constante activité.

Les trois premières phases sont collectives. Dans les deux premières, c'est Stéphanie qui pose des questions pour lesquelles elle dispose de la réponse, et valide les réponses des élèves. Dans la troisième phase, ce sont les élèves qui posent des questions au professeur mais Stéphanie qui contrôle l'activité. Elle peut faire reformuler les questions, en refuser certaines, c'est aussi elle qui valide les réponses.

La dernière phase est individuelle.

Nous analysons plus finement la troisième phase qfin de montrer en quoi la pratique de Stéphanie résisite au changement.

Nous étudions plus particulièrement la phase relative au jeu du portrait

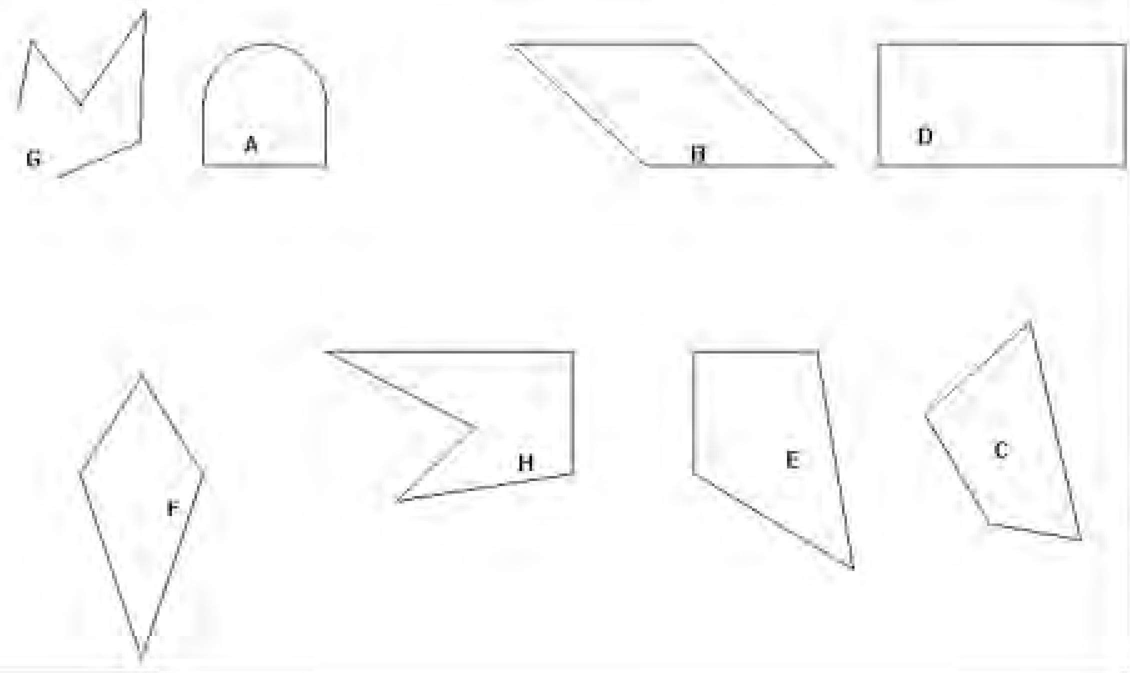
Rappels sur le jeu du portrait

Nous rappelons d'abord quelques éléments relatifs au jeu du portrait des polygones afin de mieux préciser l'origine des décalages constatés entre la pratique de Stéphanie et celle décrite en formation.

Objectifs pour l'enseignant : Aider les élèves à comprendre qu'un polygone est caractérisé par ses propriétés. Favoriser la mise en place et l'emploi d'un vocabulaire approprié et chercher à développer des compétences en argumentation.

Objectif pour l'élève : Résoudre un problème visant à identifier un polygone. Pour cela, chercher à élaborer un questionnement pertinent et déduire des informations obtenues la solution à ce problème.

Matériel : par élève, une fiche comportant des figures planes choisies en fonction des connaissances que l'on cherche à entraîner ou à approfondir ; au tableau les mêmes figures en plus grande taille.



<u>Déroulement :</u> l'enseignant choisit une figure dont il connaît les caractéristiques (sans la montrer). Les élèves à tour de rôle posent des questions, auxquelles le maître ne répond que par oui ou par non. Le premier qui reconnaît le polygone a gagné.

<u>Le jeu du portrait dans la classe de Stéphanie</u>

Stéphanie a dessiné au tableau des figures géométriques. A l'issue des deux premières phases, , elle a effacé les figures G et A (non-polygones). Le jeu du portrait porte donc sur le reste des figures. Les élèves ne disposent d'aucun document.

36.	*Sté*	*... Alors, parmi nos quadrilatères, j'inscris un petit nom ici (*dans sa main*) et en posant des questions vous devez deviner lequel*
37.	*E*	*Qu'est-ce qu'il faut faire ?*
38.	*Sté*	*Voilà, c'est ici (*montrant sa main*). Je vous écoute. Qui suis-je ?*
39.	*E*	(Silence des élèves *)*
40.	*Sté*	*Donc le but du jeu, c'est de deviner le quadrilatère*
41.	*E*	*Eh, Eh,* (manifestations de compréhension*)*
42.	*Sté*	*Qui est inscrit, dont le numéro, le nom, la lettre est inscrit dans ma main. Pour cela, il faut poser des questions. Et bien sûr, vous n'avez pas le droit de demander « est-ce que c'est le D ? »*

Le silence qui accompagne la première formulation de la consigne (L.39), les exclamations à l'issue de la deuxième formulation (L.40 et 41), complétées par la précision sur les contraintes du jeu (L.42) confirment une idée de nouveauté du jeu de portrait. Stéphanie explique qu'il faut deviner parmi les quadrilatères du tableau, celui qu'elle a choisi et dont le nom est inscrit dans sa main. Pour cela, il faut poser des questions. Stéphanie donne un exemple de question interdite : *«et bien sûr vous n'avez pas le droit de demander « est-ce que c'est le D* ? »»(L.42).

Notons que Stéphanie n'a pas effacé le pentagone, soit par oubli, soit peut-être parce qu'elle se donne ainsi un moyen de s'assurer que tous les élèves savent distinguer un quadrilatère. La suite va montrer que certains élèves prennent en compte ce pentagone dans leurs choix.

43.	*Fatima*	*Maîtresse*
44.	*Sté*	*Alors Fatima*
45.	*Fatima*	*Est-ce que c'est un carré ?*
46.	*Sté*	*Ce quadrilatère n'est pas un carré. Aïsha ? (*a levé la main)
47.	*Aïsha*	*Combien a-t-il d'axes de symétrie ?*
48.	*Sté*	*Alors ce quadrilatère, alors demande « est-ce qu'il a des axes de symétrie ». Je ne réponds que par oui ou non.*
49.	*Aïsha*	*Est-ce qu'il a des axes de symétrie ?*
50.	*Sté*	*Ce quadrilatère n'a pas d'axe de symétrie. Si on a trouvé, on lève la main, on vient me le dire dans l'oreille. Ce quadrilatère n'a pas d'axe de symétrie. Monsieur ?*
51.	*Bri (CE2)*	*Est-ce qu'il a six côtés ?*
52.	*Sté*	*Est-ce qu'il a ?*
53.	*Bri*	*5 côtés ?*
54.	*Sté*	*Ce quadrilatère n'a pas 5 côtés parce que, Brice, un quadrilatère, tu entends quoi?*
55.	*E*	*Quatre*
56.	*Sté*	*Ben oui, quatre côtés, donc ça ne peut pas être celui-ci (en montrant le pentagone H) Alors, ce quadrilatère n'a pas d'axe de symétrie*

Les élèves ne disposent toujours que de la perception visuelle. Les caractéristiques intervenant dans les questions sont forcément des indices apparents ou encore des indices prélevés dans les connaissances antérieures des élèves. Ainsi, quand Aïsha parle d'axe de symétrie, il est difficile de savoir si elle « voit » les axes de symétrie du losange malgré son orientation inhabituelle, ou celles du rectangle et du cerf-volant, ou encore si elle se sert de connaissances acquises sur ces figures, ou fait fonctionner la panoplie de propriétés déjà rencontrées dans son histoire scolaire. Stéphanie ne répond pas par oui ou non, comme elle l'a annoncé précédemment (L.48), mais formule avec précision sa réponse, « *ce quadrilatère n'a pas d'axe de symétrie* » (L.50) renforçant ainsi l'information sur le quadrilatère. Comment traiter cette information ?

Le losange est dans la position habituelle du parallélogramme, et il n'est probablement pas identifié par les élèves. L'information suppose que les élèves ont une conception de ce qu'est un axe de symétrie et qu'ils vont pouvoir éliminer au moins le rectangle et le cerf-volant dont les axes de symétrie sont verticaux ou horizontaux.

L'élève de CE2 qui pose une question relative au nombre de côtés, « *est-ce qu'il a 6 côtés ?* » (L.51), puis « *5 côtés* » (L.53), révèle que de nombreux malentendus subsistent, et que les termes géométriques entendus jusqu'ici ne revêtent pas nécessairement une signification pour tous. La partie qui suit montre comment Stéphanie finit par simplifier la tâche des élèves.

57.	*Mam*	*Maîtresse, j'ai trouvé c'est quoi*
58.	*Sté*	*Pose une question*
59.	*Mam*	*Maîtresse*
60.	*Sté*	*Mamadou?*
61.	*Mam.*	*Je sais euh*
62.	*Sté*	*Ah non, tu poses une question*
63.	*Mam.*	*Est-ce qu'il a deux côtés égaux ?*
64.	*Sté*	*Ce quadrilatère… Ah ! (*Stéphanie prend le compas et compare les longueurs des côtés des deux quadrilatères E et C*)*
65.	*E*	*Ah, ça y est maîtresse*
66.	*Sté*	*Je vais pas vous dire lequel (*pendant qu'elle continue sa vérification)
67.	*Sté*	*Ce quadrilatère a deux côtés consécutifs égaux. Mamadou, tu as trouvé ?*
68.	*Mam.*	*Le E*
69.	*Sté*	*Fatima?*
70.	*Fatima*	*Le E*
71.	*Sté*	**D'accord. Et qui plus est, qu'est-ce qu'il a le E ?**
72.	*Mam.*	*Deux côtés égaux*
73.	*Sté*	*Oui, deux côtés égaux*
74.	*E*	*Un angle droit (plusieurs élèves)*
75.	*Fatima*	*Il y a même un angle droit*
76.	*Sté*	*Viens vérifier*
77.	*Sté*	*Ça vous convient mademoiselle ? Tenez, puisque vous êtes au tableau, vous me tracez les diagonales*

Mamadou qui pense avoir trouvé (L.57) obéit à la consigne initiale qui disait de venir dire la réponse dans l'oreille de Stéphanie, « *Si on a trouvé, on lève la main, on vient me le dire dans l'oreille* » (L.50). Stéphanie considère à juste titre que les informations sont insuffisantes pour trouver le quadrilatère et rappelle la règle indiquant qu'on doit poser une question (L.58 et L.62). La question de Mamadou « *est-ce qu'il a deux côtés égaux* ? » (L.63) va plonger Stéphanie dans l'embarras. Il semble que Stéphanie n'ait pas prévu de questions relatives à la longueur des côtés. Elle se voit obligée de comparer les longueurs de 2 côtés pour les deux quadrilatères E et C. De cette manière, en éliminant d'emblée les quadrilatères qui comportent des axes de symétrie, elle se prive de savoir si les élèves ont effectivement pris en compte l'information à leur sujet. D'autre part, la mise en œuvre même de cette comparaison au compas sur deux figures, suivie de la réponse positive à la question de Mamadou transforme le projet initial de l'enseignante.

Cette activité complexe nécessitait une analyse instrumentée de figures, une prise en compte de plusieurs indices, leur mémorisation pour éliminer au fur et à mesure les intrus et déterminer la figure cachée. Dans l'activité effective les élèves n'ont finalement qu'une tâche simple qui se résume à reconnaître parmi deux figures au tableau, en observant l'action de comparaison de longueurs menée par la maîtresse, laquelle comporte deux côtés de même longueur.

On peut penser que Stéphanie avait plutôt prévu une question relative aux angles droits pour identifier le quadrilatère. En effet, les deux côtés consécutifs et de même longueur sont aussi horizontal et vertical. Ceci suggère que Stéphanie comptait sur une détermination visuelle de cet angle droit. On le voit à la question qu'elle pose une fois déterminé le quadrilatère caché : « *Et qui plus est, qu'est-ce qu'il a le E* ? ». Plusieurs élèves répondent « *un angle droit* », ce qui permet à Stéphanie d'inviter l'une des élèves, Fatima, au tableau pour une vérification à l'équerre.

Bilan de la séance

Nous constatons comme une analyse a priori insuffisante des situations proposées, avec en particulier un décalage lié à la préparation matérielle, mais aussi à l'enjeu même de l'activité proposée. Si les figures représentées au tableau permettent effectivement d'identifier les polygones puis les quadrilatères en se fiant à la perception visuelle, cette modalité de présentation s'avère gênante pour la suite des activités. Le jeu du portrait qui prend place sous cette forme oblige les élèves à poser des questions en se fiant soit à la perception visuelle, soit à la panoplie de propriétés géométriques qu'ils ont mémorisées, sans pouvoir par ailleurs utiliser leurs instruments pour analyser ces figures, poser des questions sur des propriétés ainsi repérées et traiter effectivement certaines réponses de Stéphanie pour éliminer des figures. Mais surtout, il semble que Stéphanie n'ait pas réellement mené une analyse *a priori* de ces figures. En effet, la tâche, riche *a priori*, se ramène finalement à choisir, parmi deux figures sur lesquelles elle effectue des comparaisons de longueur au tableau, celle qui a deux côtés de même longueur.

III. CONCLUSION

Cet exemple nous a permis d'illustrer un certain type de décalages que nous avons pu repérer à travers les observations menées dans la classe de Stéphanie, mais aussi à travers les discours de ses collègues sur leurs tentatives de mettre en place des situations qu'elles venaient de (re) découvrir en formation. Tout se passe comme si les enseignantes avaient été déstabilisées par la rupture avec ce qui leur était familier, ce qui peut expliquer que les effets à court terme soit peu sensibles sur les tâches attendues des élèves. Nous pensons que les effets de la formation sur les pratiques de Stéphanie et de ses collègues ne peuvent pas être sensibles sur le court terme sur beaucoup de points à la fois. D'une certaine manière, tout se passe comme si les enseignantes s'étaient approprié des outils d'analyse leur permettant de diversifier les tâches proposées aux élèves, mais en conservant leur idée forte sur les capacités réduites de ces mêmes élèves. A cette opinion sur les élèves correspondrait en même temps une conception de l'apprentissage comme nécessitant la répétition de tâches simples. Par ailleurs, les difficultés des élèves sont aussi comportementales. Ainsi, les enseignantes semblent décidées à contrôler toute possibilité de frustration qui pourrait engendrer des perturbations chez les élèves ou chez elles-mêmes de diverses manières, frustration qui selon elles peut être provoquée par la complexité des tâches proposées, les formes de travail qui accompagnent ces tâches (collectif contre individuel, oral contre écrit, jeu contre travail…). Par ailleurs, convaincues de l'instabilité comportementale et cognitive des élèves, un projet de classe à long terme paraît inutile aux enseignantes. C'est ainsi que la progression sur l'année que nous leur avons fournie a à peine servi de point de repère, et que bon nombre de situations qu'elles avaient tenté de mettre en place en 99-2000 ont été abandonnées. Ces éléments paraissent caractériser une certaine cohérence qui rend difficile une modification à moyen terme des pratiques visant à améliorer les apprentissages.

C'est ainsi que nous avons pu repérer une quasi absence de modification sur le court terme. A moyen terme, nous avons repéré que les enseignantes avaient essentiellement intégré dans leurs pratiques les éléments ne transformant pas de manière profonde leurs stratégies habituelles, et avaient rejeté celles, plus riches d'après nous, qui pouvaient conduire selon elles à des perturbations dans la classe. Nous avons pu cependant observer un léger déplacement du regard qu'elles portaient sur l'activité de l'élève. Ainsi, auparavant, les enseignantes considéraient l'activité de l'élève uniquement du point de vue du produit et non du point de vue du processus, peut-être parce que l'évaluation en était ainsi plus facile. Nous avons pu noter qu'elles échangeaient désormais plus souvent sur les stratégies des élèves, évoquaient leur gestion des traces écrites. Ce phénomène nous paraît important à signaler comme résultat éventuel de l'accompagnement.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1) BAUDELOT CH., ESTABLET R., (1979), *L'école primaire divise*…Paris, Maspero
2) BAUTIER E., (2001), Pratiques langagières et scolarisation, *Revue Française de Pédagogie* n°137, Paris, pp.117-162
3) BERNSTEIN B., (1975), *Langage et classes sociales. Codes socio-linguistiques et contrôle social,* Paris, Minuit
4) BERTHELOT R., SALIN M.H ,(1992), *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse de l'Université Bordeaux BODIN A., (1989), Le problème de l'évaluation in IREM de Lyon, *Suivi Scientifique 1985-1986*, bulletin Inter-IREM premier cycle, pp245-264.
5) BOULE F., VASSERER C., (1987), Lecture des énoncés mathématiques, *Grand N* n° 42, Grenoble, CRDP
6) BRIAND J., CHEVALLIER M.C, (1995), *les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques*, Paris, Hatier
7) BROUSSEAU G., (1998), Théorie des situations didactiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage.
8) BRUNER J.S., (1985), *Le développement de l'enfant, savoir faire, savoir dire*, Paris, PUF
9) BUTLEN D. et al., (2002) : *Pratiques de professeurs d'école enseignant les mathématiques en réseaux d'éducation prioritaire,* Didirem, INRP
10) BUTLEN D., DESCAVES A., (1999), Introduction du symbolisme à la fin de l'école élémentaire et au début du collège, in IREM de Limoges, *Actes du XXVIème colloque inter-IREM de la COPIRELEM* in actes du XXVIème colloque Inter-IREM, pp.175-208
11) BUTLEN D., MONTFORT A.M, PÉZARD M.,(2000), Le rôle du calcul mental dans la connaissance des nombres, des opérations et dans la résolution de problèmes, *REPERES*. n°41, TOPIQUES éditions, Metz, p. 5-24
12) BUTLEN D., PELTIER-BARBIER M.L, PEZARD M. (2002), *Nommés en REP, comment font-ils? Pratiques des professeurs d'école enseignant les mathématiques en REP. Contradictions et cohérence,* Revue Française de Pédagogie n°140, Paris pp. 41-52
13) BUTLEN D., PEZARD M., (1997), Deux exemples de situations d'enseignement de mathématiques s'adressant à des élèves en difficulté, in IREM Paris VII, *Actes du stage national de Rennes organisé par la COPIRELEM –« Documents pour la formation des professeurs des écoles en didactique des mathématiques »*, Tome V, pp. 9-21
14) BUTLEN D.,PEZARD M., MASSELOT P., PELTIER M-L., NGONO B., DUBUT A. (2002), *Pratiques de professeurs d'école enseignant les mathématiques en réseaux d'éducation prioritaire : cohérence et contradictions. Une première catégorisation*, Paris, DIDIREM, INRP
15) BUTLEN D.,PEZARD M., MASSELOT P., PELTIER M-L., NGONO B., DUBUT A. (2002), *Pratiques de professeurs d'école enseignant les mathématiques en réseaux d'éducation prioritaire : cohérence et contradictions. Une première catégorisation*, DIDIREM , INRP Paris
16) CHARLOT B., (1999), *Le Rapport au Savoir en milieu populaire – une recherche dans les lycées professionnels de banlieue*, Paris, Anthropos

17) CHARLOT B., BAUTIER E., ROCHEX J.-Y., (1992), *Ecole et savoir dans les banlieues… et ailleurs*, Paris, A. Colin
18) CLOT Y., FAITA D., (2000) , Genre et style en analyse du travail. Concepts et méthodes, *Travailler,* n°4, pp. 7-42
19) DOUADY R., (1987), Jeux de cadres et dialectique outil/objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 7/2, Grenoble, La Pensée Sauvage
20) DOUAIRE J., CHARNAY R. et VALENTIN D., (1998), Formuler, critiquer et argumenter en mathématiques : un exemple au CM1, *REPERES, recherche en didactique du français langue maternelle*, n° 17, INRP, pp. 139-148
21) HOUDEMENT C., KUZNIAK A., (1999), Géométrie et paradigmes géométriques, *Petit x* n°51, pp. 5-21
22) MOISAN C., SIMON J. (1997), *Les déterminants de la réussite scolaire en zone d'éducation prioritaire, Paris,* INRP
23) NGONO B., PELTIER M.L., DUBUT A. et al. , (2000), *Géologie et autres jeux mathématiques,* IREM de Rouen
24) PELTIER-BARBIER M-L., Problèmes arithmétiques, articulation sens et techniques, *Educación matemática,* à paraître, 2003, México
25) PELTIER M-L, "l'extraordinaire dans la classe de mathématiques". Pratiques professionnelles de professeurs d'école enseignant les mathématiques en ZEP, in IREM de Grenoble, *Actes du XXVIIème colloque Inter-IREM des fromateurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres, pp 127-138.*
26) PERRIN-GLORIAN M-J., (1997), Que nous apprennent les élèves en difficulté en mathématiques ? Peut-on tirer de l'analyse de ces difficultés des enseignements pour la formation des maîtres ? In IREM Paris VII*, Actes du stage national de Rennes organisé par la COPIRELEM –« Documents pour la formation des professeurs des écoles en didactique des mathématiques »* Tome V, pp 121-143
27) RICHARD J.F., (1982), Mémoire et résolution de problèmes, *Revue Française de Pédagogie,* n°60, Paris, INRP, pp 9-17
28) ROBERT A., (1998), Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en didactique des mathématiques,* vol 18/2, Grenoble, La pensée Sauvage, pp139-190
29) ROBERT A., (2001), Recherche sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol 21.1.2. Grenoble, La Pensée Sauvage, pp. 57-80
30) ROBERT A., ROGALSKI J., (2002), Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants : une double approche, *La revue canadienne de l'enseignement des sciences mathématiques et des technologies*
31) ROGALSKI J., (1999), Approche de psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant, in IREM de Limoges, *Actes du XXVIème colloque inter-IREM de la COPIRELEM,* pp. 45-66
32) VYGOTSKY L.S., (1985), *Pensée et langage,* Paris, Ed. Sociales

QUESTIONS DE DIDACTIQUE LIÉES AUX RAPPORTS ENTRE LA GÉOMÉTRIE ET L'ESPACE SENSIBLE DANS LE CADRE DE L'ENSEIGNEMENT À L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

Sophie GOBERT
IUFM d'Aix-Marseille

Résumé :
La communication présentée ici expose en l'approfondissant la partie de mon travail de thèse où il est question d'ostension. Cette question est devenue par la suite majeure et constitue à présent mon objet d'étude. Dans une première partie je rappelle les différentes recherches portant sur ce procédé, de façon à mieux situer mon positionnement, dans un second paragraphe je présente trois modes spécifiques d'introduction ostensive des savoirs, et en conclusion je résume quelques conditions nécessaires pour un usage maîtrisé du procédé.

(Une partie importante du texte a fait l'objet d'une publication dans les actes du séminaire national de didactique des mathématiques janvier 2001 ; d'autre part les exemples concernant la symétrie axiale proposés lors de la communication ne sont pas tous repris dans le texte, ils font l'objet d'un article en cours pour la revue Grand N).

I. QU'EST-CE QUE L'OSTENSION ?

a. Une première définition (Recherche de Harrison Ratsimba-Rajohn)

« L'enseignant fournit « d'un coup » tous les éléments et les relations constitutifs de la notion visée ». C'est comme cela qu'est définie l'ostension pour la première fois dans le cadre de la didactique des mathématiques, par Harrisson Ratsimba-Rajohn, dans un DEA réalisé en 1977, qui s'intitulait : « Etude didactique de l'introduction ostensive des objets mathématiques », dans lequel il montre à partir d'exemples d'introduction de notions dans les manuels des années 60, comment les élèves sont mis en contact avec des éléments représentant des objets géométriques (images, schémas, courbes, listes de propriétés, discours, …) en pensant que ce seul contact suffira à la compréhension et à l'appropriation des connaissances en jeu.

30ème colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres.
pages 189 *à* 198

b. Des caractéristiques de l'ostension (Recherche de Marie-Hélène Salin et René Berthelot)

M-H. Salin et René Berthelot (par la suite désignés par SB) dans leur thèse en 1992 ont également fait une petite étude de l'utilisation de l'ostension dans l'enseignement primaire.[1]

Selon SB la présentation ostensive des savoirs se caractérise par deux aspects essentiels :

« le fait que les savoirs n'apparaissent pas comme des outils pour résoudre un problème proposé aux élèves. Aucune place n'est faite à une approche a-didactique qui les aiderait à identifier l'apport du savoir mathématique à la maîtrise du réel.

Le milieu matériel auquel s'applique la connaissance est absent, il est remplacé par un autre milieu, symbolique, sans que l'enseignant soit en mesure de s'assurer que pour les élèves, le concept visé fonctionne de la même manière à propos des deux milieux. »

Ces chercheurs dans leur étude distinguent deux formes d'ostension qui correspondent à deux périodes : l'ostension qu'ils appellent « assumée », parce qu'elle l'était dans les discours institutionnels, avant les années 70, 80, ce sont les leçons de choses pour dire vite, où le maître montre aux élèves ce qui est à savoir, fait réaliser diverses activités manuelles ; l'élève observe écoute fait, il est supposé comprendre et être capable de transférer les savoirs introduits aux exercices proposés. SB en donnent deux caractéristiques :

- **le savoir officiel est présenté dès l'entrée dans la situation didactique,**
- **il n'existe pas, au sein de la situation d'enseignement, de situation a-didactique d'apprentissage où l'élève peut se situer en « résolveur de problèmes » grâce à ses interactions avec le milieu de référence effectif.**

L'autre ostension apparaît à partir des années 80 et des programmes de 77/80 – 85, qui paradoxalement sont fortement influencés par les apports des recherches en psychologie, en didactique des mathématiques, et où le constructivisme va devenir une référence pour les apprentissages. A partir de l'étude de certains exemples, analyses de manuels essentiellement, SB montrent en quoi *« ces modifications sont de surface et que les propositions d'enseignement qui correspondent à ces nouvelles conceptions n'aboutissent le plus souvent qu'à une forme déguisée d'ostension […] laissant l'élève actuel peut-être plus démuni que ses prédécesseurs. »*

En général les activités présentent des images aux élèves, et à partir de leurs observations ils doivent dégager des propriétés ou des connaissances, à partir de questions du type « Observe, que peux-tu dire de … ».

SB remarquent : « l'ostension « assumée » a été remplacée par l'ostension « déguisée » : au lieu de montrer à l'élève ce qui est à voir, le maître le dissimule derrière une fiction : celle que c'est l'élève lui-même qui le découvre sur les figures soumises à son observation. Comme ce savoir à découvrir est un savoir très élaboré, le maître est obligé de « manipuler » le milieu matériel pour rendre la lecture de ses propriétés la plus simple possible. »

Les auteurs soulignent que l'ostension déguisée laisse peut-être les élèves encore plus démunis que l'ostension assumée, dans la mesure où la responsabilité d'identifier

[1] Une étude plus approfondie est exposée par Marie-Hélène Salin dans *Les pratiques ostensives dans l'enseignement des mathématiques comme objet d'analyse du travail du professeur,* dans : Etudes des pratiques effectives : l'approche des didactiques, ouvrage coordonné par P. Venturini, C. Amade-Escot, A. Terisse, Ed. La pensée sauvage.

un savoir et de l'expliciter est devenue à leur charge, sans qu'ils n'aient réellement de moyen de pouvoir l'assumer.

c. Précision (Guy Brousseau, école d'été de didactique des mathématiques)

C'est dans ce même esprit que Guy Brousseau parle de contrat didactique d'ostension. Il précise à l'école d'été de 95 une définition de l'ostension : *« le professeur « montre » un objet, ou une propriété, l'élève accepte de la « voir » comme le représentant d'une classe dont il devra reconnaître les éléments dans d'autres circonstances. La communication de connaissance, ou plutôt de reconnaissance, ne passe pas par son explicitation sous forme d'un savoir. Il est sous entendu que cet objet est l'élément générique d'une classe que l'élève doit imaginer par le jeu de certaines variables souvent implicites. »* […]

Et il précise : « Le contrat didactique d'ostension est insuffisant pour « définir » un objet mathématique. [Mais] il fonctionne très bien dans de nombreux cas où une définition mathématique serait trop lourde ou inutile. »

d. Les effets négatifs de l'ostension (Recherche de Dilma Fregona)

Dilma Fregona a travaillé dans le cadre de sa thèse sur « les figures planes comme milieu pour l'enseignement de la géométrie » en 1995, et un chapitre est consacré à l'étude de l'ostension, où elle met en évidence des éléments pour expliquer en quoi ce contrat ne fonctionne pas toujours, et peut souvent induire des dérives pouvant gêner les apprentissages des élèves et même y faire obstacle. Elle rassemble différents aspects mis en évidence dans le cadre de la théorie des situations, des effets négatifs de l'ostension, principalement :

- **l'illusion d'une continuité entre ce qui est montré et les savoirs formulés**
- **l'illusion d'une évidence pour la compréhension de l'élève du passage entre l'objet sélectionné par le maître à la classe d'objets qu'il va désigner**
- **et surtout, l'absence de sens, construit autour des savoirs, dans la mesure où ils n'apparaissent pas pour les élèves comme des outils pour résoudre un problème posé.**

e. Passage à ma recherche

Dans mon travail de thèse, j'ai étudié au niveau de l'école élémentaire, des situations par rapport à des thèmes précis, situations dans lesquelles l'articulation du spatial et du géométrique se gérait dans certaines phases, par des moments d'ostension, c'est pourquoi j'ai été amenée à m'intéresser à ce procédé.

J'ai tenté d'examiner la possibilité d'un contrôle efficace du procédé d'ostension, afin d'en faire un procédé didactique maîtrisé par l'enseignant, dans le but de faciliter son travail, et d'éviter les pièges et insuffisances mentionnées précédemment, avec le souci évidemment de faire progresser les apprentissages des élèves.

Avec le recul, il me semble pouvoir dégager mieux les raisons qui justifient que l'on se penche sur ce procédé de façon constructive :

En premier lieu, des raisons liées à la spécificité de l'école élémentaire, et à l'âge des enfants qui viennent à l'école. On utilise des notions ou des objets géométriques à définir, pour lesquelles évidemment on ne peut pas se permettre de définition lourde ou inutile. A l'école élémentaire les élèves travaillent beaucoup à partir de situations d'action, basées sur des manipulations de matériel, ou sur l'observation d'images, et l'ostension déguisée se retrouve fréquemment. De plus les élèves sont la plupart du temps dans une problématique pratique relativement au milieu objectif ou de référence des situations qui leur sont proposées.

Ensuite **les diverses contraintes qui pèsent sur les enseignants** : en particulier la gestion du groupe classe (surtout pour les enseignants débutants), l'avancée du temps didactique, le sentiment de cerner et de maîtriser les savoirs à enseigner, les traces à montrer aux institutions, … un ensemble de contraintes micro ou macro didactiques, qui entraîne pour beaucoup d'enseignants un inévitable usage de l'ostension.

Un autre type de raison : la difficulté à trouver pour une notion une bonne situation d'introduction, un problème à résoudre, qui possède un caractère adidactique, et qui soit tel qu'il n'y ait pas de rupture entre l'activité effective des élèves et les connaissances à institutionnaliser.

D'autre part, quand on en trouve une, expérimentée et étudiée du point de vue de la recherche, et que se mettent en place des ingénieries didactiques, alors se posent tous **les problèmes liés à la reproductibilité des situations**.

Pour toutes ces raisons, il me paraît important de se pencher sur ce procédé, pour étudier en quoi et comment, il peut être maîtrisé par les enseignants pour être efficace dans leur enseignement.
Bien sûr il s'articule avec d'autres procédés à l'œuvre dans des situations d'actions, de formulation, et de validation, où le savoir en jeu transparaît, et des situations de recherche associées, où le savoir participe à la résolution. En particulier ce procédé s'articule avec des situations à caractère adidactique, pour lesquelles les savoirs introduits par ostension peuvent être transformés en connaissances pour les élèves, de sorte qu'ils puissent aussi leur donner du sens comme outils pour résoudre des problèmes posés.

Avant de passer à mes propres travaux, je vais redonner une définition de l'ostension, formulée par Guy Brousseau, s'appuyant sur une définition donnée par U. Eco[2], et adaptée au cadre didactique (elle est proche de celle formulée en 95, mais plus affinée et précise) :

L'ostension a lieu quand le maître choisit un objet ou un événement, dans le milieu de l'élève, qu'il utilise comme signe pour déterminer et exprimer à l'élève une certaine classe d'objets à laquelle le maître sait que cet objet appartient.

[2] ECO U. (1992) *La production des signes,* Livre de poche. « L'ostension a lieu quand un objet ou un événement, produit de la nature ou de l'action humaine (intentionnellement ou inintentionnellement), fait parmi les faits, est "sélectionné" par un individu et désigné pour exprimer la classe des objets dont il est membre. »

II. PRÉSENTATION DE TROIS MODES DIFFÉRENTS DU PROCÉDÉ D'OSTENSION.

J'ai dégagé trois modes différents d'introduction ostensive des savoirs, avec une ostension contrôlée par le maître, notamment par le choix de certaines variables didactiques, et en liaison avec un milieu pour une situation adidactique ultérieure ou conjointe :

- **les savoirs introduits comme contraintes pour une tâche,**
- **les savoirs introduits par les démonstrations visuelles,**
- **Les savoirs introduits comme constats d'observation dans l'environnement spatial ou graphique.**

a. Savoirs introduits comme contraintes pour une tâche

Nous pouvons envisager un premier mode d'ostension qui consiste à placer les élèves dans des situations d'actions, pour lesquelles le milieu objectif contient les connaissances visées dans la mesure où elles sont introduites, formulées, comme contraintes pour la tâche ; et elles sont ensuite reformulées à la fin de la situation comme éléments d'institutionnalisation.

Par exemple, considérons une façon d'introduire la définition des patrons de solides : le maître propose aux élèves une tâche de mise à plat de solides, construits avec du matériel d'assemblages de pièces polygonales[3], mise à plat devant respecter certaines contraintes : « les faces doivent être assemblées les unes aux autres, en un seul morceau, de façon à pouvoir reconstituer le solide ». A la fin de la situation, après l'activité des élèves, le maître peut introduire le vocabulaire et institutionnaliser la définition des patrons comme des mises à plat de solides respectant ces contraintes.

Evidemment on entrevoit tout de suite pour cet exemple que l'efficacité du procédé dépend ici d'une variable essentielle, le type de matériel utilisé par les élèves pour leur recherche, leur permettant de faire des essais, des reprises, dans des contraintes de temps, et de gestion du travail, économique et efficace.

Ainsi on voit bien en quoi les connaissances visées sont introduites dès l'entrée dans la situation didactique, comme contraintes pour la tâche. Les activités des élèves portent sur la compréhension et l'appropriation de ces contraintes comme moyen d'action et de validation, elles sont ensuite reformulées en éléments d'institutionnalisation pour introduire le vocabulaire approprié.

b. Démonstrations visuelles

L'usage des démonstrations[4] visuelles est une forme classique d'ostension assumée, qu'il convient de manier pour des moments de rappel.

Une démonstration visuelle est une mise en scène où le maître montre des objets ou des actions sur ces objets, à partir de manipulations de matériel, pour définir des objets ou notions géométriques, et faire fonctionner ces définitions de façon opératoire.

[3] du type Clixi-géométrie, Ed. CELDA.

[4] Le mot démonstration n'est pas utilisé dans son sens mathématique mais le sens courant de « action de montrer ».

Par exemple, pour réintroduire la définition des patrons de solides :

Le maître peut disposer de solides ; il annonce aux élèves qu'ils vont revoir une façon particulière de construire ces objets, consistant à « dessiner à plat, toutes les faces du solide, juxtaposées les unes aux autres, de façon à obtenir le solide, après découpage du contour du dessin et pliage suivant ses segments ». Le maître montre ensuite de tels dessins, et effectue les manipulations de montée en volume pour visualiser l'obtention du solide. Il montre et manipule également un contre exemple, où l'organisation des faces est pourtant proche d'un patron présenté précédemment.

Pour l'exemple de matériel proposé en annexe 1, les variables pour l'ostension sont le choix du solide, sa nature, son format, sa couleur, les patrons choisis, et la présence d'un contre exemple. Les choix faits sont déterminés par des organisations de la position des faces assez régulières, sans toutefois être prototypiques, cela pour ne pas focaliser l'attention des élèves sur les images utilisées, mais sur les actions effectuées à partir de ces images. Ainsi pour la définition que le maître donne de la notion de patron, les aspects principaux sont mis en évidence : « un patron, c'est un dessin, où toutes les faces du solide sont représentées, juxtaposées les unes aux autres, *pas n'importe où*, mais de telle sorte qu'après découpage du contour et pliage suivant les segments, on obtienne le solide ».

Il est nécessaire, après ce premier moment d'ostension, que les élèves s'approprient la définition donnée pour apprendre à fabriquer ou reconnaître des patrons de solides. Pour cela le maître doit proposer aux élèves *des situations d'action et de formulation* associées à la démonstration visuelle, situations à caractère adidactique pour lesquelles le milieu objectif contiendra alors les savoirs permettant aux élèves de réguler leurs actions et de valider leur travail.

De façon plus générale, caractérisons ce type de présentation ostensive des savoirs :

Une démonstration visuelle consiste à mettre en scène un matériel et des manipulations de ce matériel, en jouant sur des variables, didactiques et non didactiques, de sorte que le maître dit clairement aux élèves ce qu'il veut que les élèves voient dans ce qu'il leur montre.

Dans une démonstration visuelle, les connaissances visées sont formulées déjà comme des savoirs. Les élèves sont dans un rapport passif au milieu, puis dans un rapport effectif lors de situations d'action et de formulation associées à la démonstration visuelle.

Dans les deux modes d'ostension précédents, les démonstrations visuelles, ou les savoirs introduits comme contraintes pour une tâche, les connaissances visées pour l'apprentissage sont présentées d'entrée dans la situation didactique. Ce n'est pas le cas pour le troisième mode d'introduction ostensive des savoirs, que j'aborde maintenant.

c. Les savoirs introduits comme constats d'observation dans l'environnement spatial ou graphique.

Prenons un exemple dans l'environnement graphique, concernant la symétrie axiale. Certaines des configurations présentées dans l'annexe 2 suggèrent les propriétés de la symétrie axiale *nécessaires* pour que les figures soient symétriques par rapport aux axes marqués ; par exemple à partir de la D, la propriété que « deux figures symétriques par rapport à une droite doivent être retournées l'une par rapport à l'autre de chaque côté de la droite », ou à partir de la G que « deux figures symétriques par rapport à une droite doivent être situées à la même distance de cette droite ».

Ce support permet de construire une situation d'argumentation, basée sur l'observation d'images, où *le milieu suggère les propriétés des images qui traduisent l'absence de propriétés géométriques*.

Ainsi les propriétés géométriques de la symétrie axiale :

découlent d'observations et de formulations réalisées dans le cadre de l'environnement graphique,

elles sont des reformulations de propriétés visuelles ou spatiales de dessins.

Cela permet ainsi de formuler ces propriétés, et de les institutionnaliser. Elles peuvent ensuite servir de moyens de résolution ou d'arguments de validation, pour d'autres situations de reconnaissance ou de constructions de figures symétriques. Bien évidemment il s'agira de les rendre opératoires, dans d'autres situations, qui elles auront un caractère adidactique.

Remarquons que l'usage, ici, de l'ostension fonctionne bien pour les propriétés qui sont *bien visibles* et pour lesquelles les formulations dans le domaine de la perception visuelle ne sont pas trop éloignées du vocabulaire géométrique adapté. C'est le cas de la forme (A), la taille (B), le retournement (D), la distance à l'axe (G).

Mais d'autres configurations ne permettent pas si clairement d'établir une propriété déterminée de la symétrie axiale, c'est le cas de la C ou de la E. Elles constituent des contre exemples à l'efficacité de ce type d'ostension.

Pour résumer, le troisième procédé d'ostension permettant d'établir, d'institutionnaliser des savoirs de géométrie, a lieu lorsque : après que les élèves aient fait des constats et des formulations suite à des observations de figures, ou des manipulations de matériel, et des tâches d'argumentation, le maître reformule ces constats sous la forme de savoirs, qui deviennent alors pour les élèves des moyens d'action ou de contrôle des actions sur le milieu pour d'autres situations.

III. CONCLUSION

Pour conclure, résumons les conditions préalables pour que le mode ostensif soit adapté à une présentation constructive des savoirs, et permette la dévolution du milieu objectif de situations d'apprentissage, ou d'un milieu pour la validation par des savoirs de géométrie :

- **Les situations doivent porter sur des savoirs admettant des réalisations spatiales ou graphiques *effectives*.**
- **Le maître doit créer un milieu dans lequel les connaissances visées sont suggérées ou réalisées.**
- **Il fixe les variables de sorte que les savoirs soient clairement identifiables, avec le moins d'ambiguïté perceptive possible.**
- **Les élèves doivent être dans un rapport effectif à ce milieu.**

Ainsi le fonctionnement maîtrisé de l'ostension, pour définir des objets géométriques, ou établir des propriétés géométriques, peut permettre la dévolution du milieu objectif d'une situation d'apprentissage, ou d'un milieu pour la validation par des savoirs de géométrie.

RÉFÉRENCES CITÉES

BERTHELOT R., SALIN M-H. (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire,* Thèse, Université Bordeaux I, IREM d'Aquitaine

FREGONA D. (1995) *Les figures planes dans l'enseignement de la géomét*rie, Thèse, Université Bordeaux I, IREM d'Aquitaine.

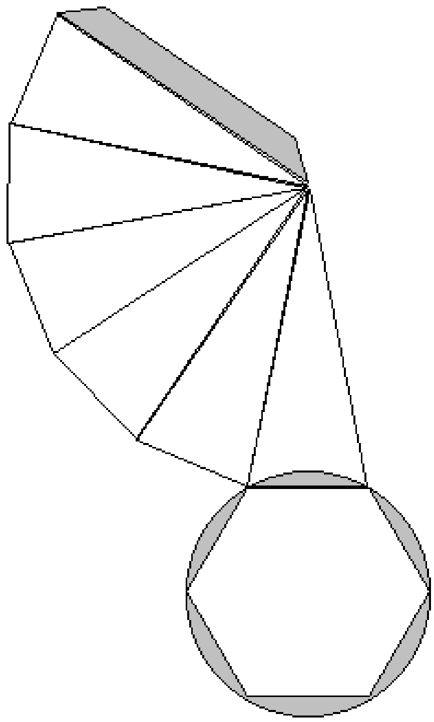
GOBERT S. (2001) *Questions de didactique liées au rapport entre la géométrie et l'espace sensible dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire*, Thèse, Université Paris 7, IREM de Paris 7.

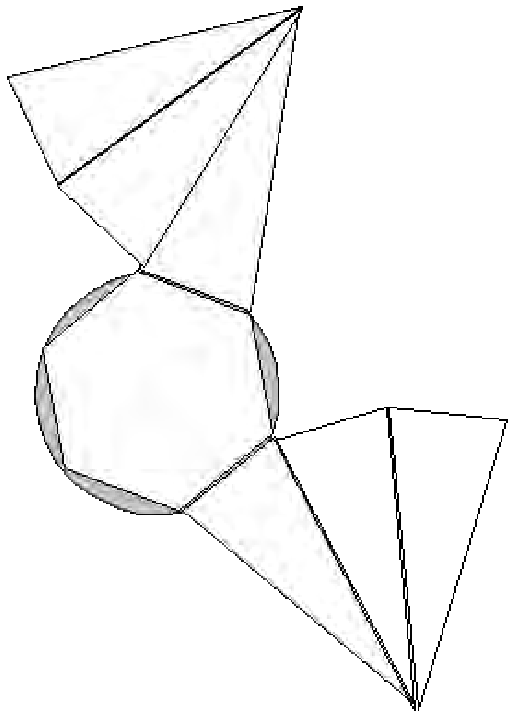
RATSIMBA-RAJOHN H. (1977) *Etude didactique de l'introduction ostensive des objets mathématiques*, DEA, Université de Bordeaux I.

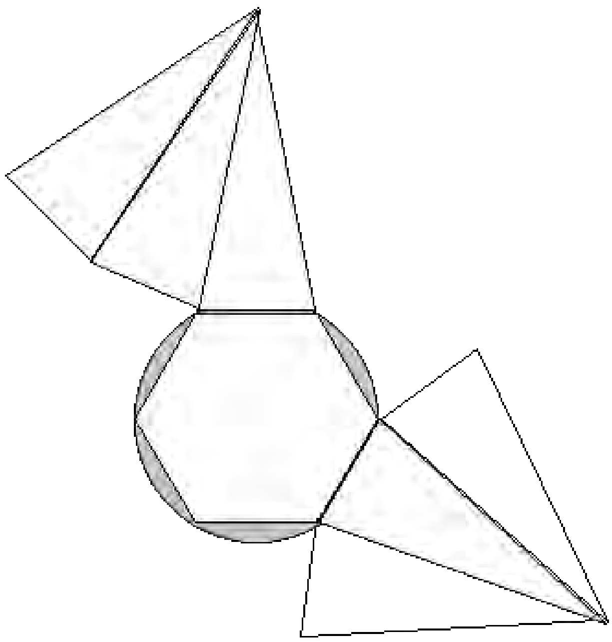
SALIN M-H. (2002) *Les pratiques ostensives dans l'enseignement des mathématiques comme objet d'analyse du travail du professeur,* dans : Etudes des pratiques effectives : l'approche des didactiques, ouvrage coordonné par P. Venturini, C. Amade-Escot, A. Terisse, Ed. La pensée sauvage.

ANNEXE 1: Matériel utilisé pour « la démonstration visuelle » de définition d'un patron de solide.

Un solide (papier canson épais, plastifié, avec les arêtes repassées au stylo épais pour une bonne visibilité) : pyramide à base un hexagone régulier, de mêmes dimensions que celles utilisées pour la constructions des patrons. Diamètre du cercle pour l'hexagone 15 cm, et longueur des autres côtés des triangles 17 cm. En grisé ce sont des éléments visibles sur le matériel, éléments techniques conservés permettant de maintenir les faces pour faciliter les manipulations.

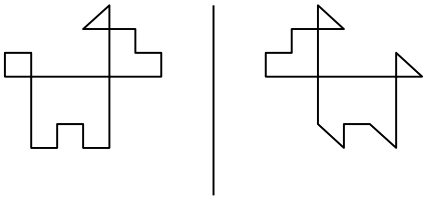




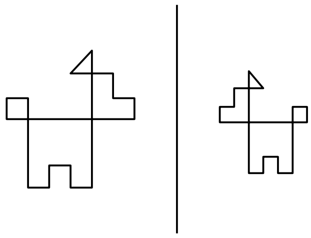


ANNEXE 2: Adaptation d'un document extrait du manuel Nouvel Objectif Calcul CM1, Ed. Hatier

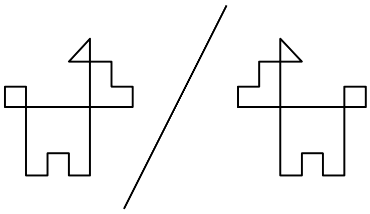
A



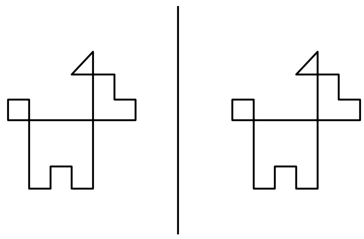
B



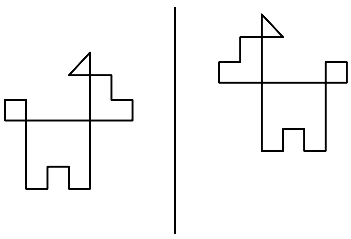
C



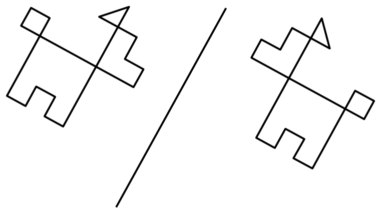
D



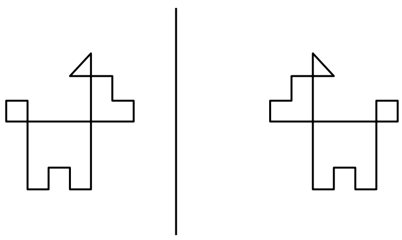
E



F



G



DES GRAINES ET DES SOURIS

Eugène COMIN
Professeur Lycée A. Daniel
Riberac (Dordogne)

Résumé :

La situation des "**graines et des souris**" a été expérimentée en classe de CM1 à l'école Jules Michelet de Talence . Elle a fait l'objet d'un travail d'ingénierie dans le cadre d'une thèse soutenue à l'université de Bordeaux 1 en octobre 2000 :

"Proportionnalité et fonction linéaire
Caractères causes et effets didactiques des évolutions et des réformes
dans la scolarité obligatoire"[1]

Une description de cette situation a fait l'objet d'un article publié dans Grand N n°72.
Le présent compte rendu résume la communication du 21 mai 2003.

1- INTRODUCTION

1) Pourquoi s'intéresser à la proportionnalité ?

Rappelons que la proportionnalité est une connaissance ancienne qui a joué un rôle moteur dans la construction des mathématiques. En décrivant des relations de dépendance entre grandeurs à l'aide des rapports, elle est à l'origine de l'étude des relations fonctionnelles. L'arrivée de l'algèbre a rendu caduque l'usage et le vocabulaire des proportions en mathématiques ; mais les structures numériques de la linéarité ignorent les fonctions sociales de la proportionnalité ; le vocabulaire des fonctions n'est pas utilisé pour décrire la proportionnalité des grandeurs : on ne dit pas couramment de « deux quantités proportionnelles » qu'elles sont « linéairement dépendantes ».

Dans l'enseignement élémentaire, l'étude des grandeurs et de la proportionnalité est à la base des différents apprentissages mathématiques mais, dans l'organisation scolaire française actuelle, les connaissances de la proportionnalité n'alimentent pas correctement l'étude algébrique des relations fonctionnelles faite dans le secondaire.

Plus précisément, différentes enquêtes ont fait apparaître principalement deux types de dysfonctionnement :

- Des difficultés à établir un lien entre "proportionnalité" et "fonction linéaire".
- Des usages inappropriés du vocabulaire de la proportionnalité pour décrire des relations numériques et des glissements de sens qui conduisent à des confusions dans les concepts mathématiques.

Nous avons apporté des explications à ces dysfonctionnements grâce à une étude didactique des conditions d'enseignement de la proportionnalité. En particulier, nous avons montré :

- D'une part que le cadre arithmétique de la proportionnalité et le cadre algébrique de la linéarité constituent un cloisonnement culturel de telle sorte que les

[1] DAEST; Université Victor Segalen; Bordeaux 2; 3 ter place de la Victoire; 33000 Bordeaux; tel 05 57 57 19 26

modèles de la proportionnalité issus de l'arithmétique élémentaire et le modèle "fonction linéaire" issu de l'algèbre moderne restent indépendants.

- D'autre part que l'absence d'une culture précise conduit à des usages inappropriés de termes sur certaines questions. Les nouvelles "manières de dire" qui résultent de ce flottement culturel deviennent de nouvelles "manières de penser" en rupture avec une culture mathématique classique.

Si on admet de plus, que la qualité des apprentissages de la proportionnalité pour les élèves dépend des connaissances des professeurs à ce sujet on en déduit facilement des conséquences en chaîne qui entretiennent une rémanence des dysfonctionnements observés.

Ces difficultés sont donc davantage liées à des questions de culture et d'enseignement qu'à des problèmes d'apprentissage.

Si on veut améliorer la qualité de l'enseignement, il faut repenser les curriculums scolaires en tant que processus d'apprentissage à long terme :

La situation "des graines et des souris" s'inscrit modestement dans ce projet.

2) Pourquoi enseigner la proportionnalité ? Pourquoi ne pas enseigner directement la fonction linéaire en primaire ?

Avant de répondre à cette question, une explicitation succincte de l'objet mathématique "proportionnalité" s'avère nécessaire.

Le modèle général

Nous dirons que deux grandeurs[2] sont proportionnelles si tout rapport entre deux éléments de l'une d'elles est égal au rapport entre les deux éléments correspondants de l'autre. Pour décrire la proportionnalité entre deux grandeurs il faut donc disposer d'un moyen de définir les rapports (multiplicatifs) dans chacune d'elles (rapports internes). Cette condition est réalisée quand les grandeurs sont mesurables[3].

Exemple : Il est connu que sous certaines conditions d'homogénéité la masse d'un corps est proportionnelle à son volume (si le volume est doublé ou triplé … alors la masse est doublée ou triplée …) :

volume — masse

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r] \arrow[d, "\times q"'] & m \arrow[d, "\times q"] \\ v' \arrow[r] & m' \end{tikzcd}$$

Le « rapport interne »[4] q (2 ou 3 …) est conservé dans le passage d'une grandeur à l'autre.

---

[2] Nous ne considérons que des grandeurs arithmétiques telles que : masse, volume, longueur, température, etc.

[3] Nous dirons qu'une grandeur est mesurable si elle a une structure additive de semi-groupe archimédien. Certaines grandeurs ne sont pas mesurables car elles ne sont pas additives : c'est le cas des échelles (potentiel électrique, température en degrés Celsius, échelle de Richter, …) et des indicateurs (audience médiatique, intelligence, pollution, …).

[4] Le rapport de deux éléments d'une même grandeur est dit interne (ou scalaire) alors que le rapport de deux éléments issus de deux grandeurs distinctes est dit externe (ou fonctionnel). Les anciens ne

Le « rapport externe » entre la masse et le volume est inconnu.

Si on sait de plus que 10 centimètres cube de ce corps pèsent 78 grammes alors le rapport externe est explicitable et la relation de proportionnalité précédente établit une correspondance linéaire de coefficient connu, entre deux grandeurs mesurées : les quantités de centimètres cube et les quantités de grammes.

$$\begin{tikzcd}
\text{Nombre de cm}^3 & \text{Nombre de g} \\
10\ \text{cm}^3 \arrow[r, "\times 7{,}8\ \text{g/cm}^3"] \arrow[d, "\times q"'] & 78\ \text{g} \arrow[d, "\times q"] \\
(10\times q)\ \text{cm}^3 \arrow[r, "\times 7{,}8\ \text{g/cm}^3"] & (78\times q)\ \text{g}
\end{tikzcd}$$

Ce rapport externe : 78 g pour 10 cm^3 ou 7,8 g/cm^3 est une grandeur quotient connue sous le nom de masse volumique (chacune de ses valeurs est spécifique du corps considéré).

Cette correspondance induit elle-même une fonction linéaire de R dans R de coefficient 7,8 (ce coefficient dépend du choix des unités de masse et de volume) :

$$\begin{tikzcd}
\square & \square \\
10 \arrow[r, "\times 7{,}8"] \arrow[d, "\times q"'] & 78 \arrow[d, "\times q"] \\
10\times q \arrow[r, "\times 7{,}8"] & 78\times q
\end{tikzcd}$$

Dans cette correspondance, le rapport externe 7,8 est devenu un coefficient (un opérateur) sans "dimension". Cette formalisation s'accompagne d'une perte d'information. Le retour à la relation de proportionnalité précédente nécessite la connaissance des grandeurs étudiées et des unités utilisées !

Ces approches successives permettent de passer du cadre des grandeurs à celui des grandeurs mesurées où les quantités sont exprimées par des couples (mesure ; unité), puis au cadre des variables numériques (ou algébriques) où il est possible d'étudier formellement les propriétés de la fonction qui à tout nombre associe le produit de ce nombre par 7,8. Bien sûr, le cadre conditionne la mise en œuvre des moyens pour la reconnaissance d'une situation de linéarité et la détermination des éléments manquants.

Pour montrer que deux grandeurs sont proportionnelles, il faut trouver une raison de décider que tout rapport de deux éléments de l'une est égal au rapport des deux éléments correspondants de l'autre ; la difficulté est la justification de cette universalité. Dans le cadre des grandeurs mesurées, les rapports externes sont explicitables. On dispose alors d'un autre moyen de décider s'il y a proportionnalité entre deux grandeurs : il faut que le rapport externe soit constant. Dans le cadre numérique, il n'y a aucune raison pour que deux variables réelles x et y soient proportionnelles mais on peut construire de manière

considéraient que des rapports de grandeurs homogènes, ce qui créait un obstacle dit « obstacle de l'homogénéité ». On pourra consulter « Sophie René de Cotret ; 1985 ; étude historique de la notion de fonction ».

formelle une relation du type y=kx. On définit ainsi une fonction linéaire dont les propriétés résultent de la structure algébrique de R.

2- PROBLÉMATIQUE

2 - 1 Questions

2-1-1 Pourquoi enseigner la proportionnalité ?

Les connaissances mathématiques actuelles permettent de traiter la linéarité indépendamment des grandeurs mais les élèves de l'école primaire ne connaissent pas les nombres abstraits. Pour qu'ils puissent donner du sens aux différents objets mathématiques, il faut qu'ils réalisent des opérations sur des objets matériels connus. Il est donc nécessaire de modéliser la connaissance initiale de la linéarité dans son rapport avec les grandeurs. Par conséquent le milieu de référence pour l'école primaire est le domaine des grandeurs. Le répertoire des élèves s'enrichit progressivement de connaissances par une conversion des structures du milieu des grandeurs (rapport, mesures) en structures numériques (nombres entiers, décimaux, rationnels).

2-1-2 Peut-on enseigner la « fonction linéaire » en primaire ?

Une quantité est fonction d'une autre si toute variation de l'une entraîne ou accompagne une variation de l'autre, donc les notions de fonctions et de variables sont indissociables.

Pour abstraire la fonction linéaire de la proportionnalité des grandeurs, il est nécessaire d'établir une dialectique entre les notions de grandeurs et de variables numériques d'une part et les notions de rapports et de nombres d'autre part.

L'épistémologie génétique nous enseigne que les opérations formelles nécessitent de 11 à 12 ans d'âge. Il faut donc attendre le collège pour abstraire de la proportionnalité une formalisation telle que la fonction linéaire ; mais on peut, dès l'école primaire, organiser un enseignement qui prépare les élèves au saut de complexité que suppose cette abstraction. Celle-ci nécessite une connaissance même modeste sur les nombres rationnels, une pratique des techniques de la linéarité, une familiarité dans l'usage implicite des fonctions en relation avec l'idée de variable.

La situation "des graines et des souris" s'inscrit dans un **projet** d'apprentissage où la fonction linéaire apparaîtrait à long terme comme une abstraction qui modélise et réfléchit les connaissances de la proportionnalité entre grandeurs.

2 - 2 Articulation logique.

L'élaboration d'une situation adaptée au **projet** suppose l'analyse didactique des objets qui constituent l'environnement de la proportionnalité, pour une articulation logique et fonctionnelle qui leur permet d'entrer progressivement dans le répertoire des élèves en suivant une complexité croissante de leurs structures.

L'exploration de ces structures mathématiques en termes de variables, fonctions et rapports (nombres) permet d'ordonner cette complexité. Nous en donnons un bref aperçu.

Variables

Différents objets d'étude relatifs aux grandeurs puis aux variables numériques interviennent dans une relation didactique pour une genèse de cette notion. On peut les décrire en termes d'action pour des élèves en situation adidactique, par exemple :

- Comparer, ordonner, additionner plusieurs éléments d'une même grandeur.
- Déterminer l'élément inconnu d'une grandeur (ou une grandeur mesurée) réalisant certaines contraintes matérielles de la situation.
- Proposer des grandeurs mesurées répondant aux contraintes matérielles d'une situation.
- Proposer des mesures virtuelles pour faire fonctionner le modèle de référence.

Fonctions

L'idée de « variable » est étroitement liée à celle de « fonction ». Dans les situations d'action, les élèves peuvent, par exemple, être conduits à :

- Considérer plusieurs couples de grandeurs mesurées donnés au « hasard » mais avec une intention didactique.
- Rechercher un couple de grandeurs mesurées répondant à des contraintes matérielles dans une relation entre grandeurs.
- Proposer des couples de mesures de grandeurs hypothétiques (possibles ou imaginaires) faisant fonctionner le modèle de la situation de référence.
- Considérer un couple de grandeurs mesurées comme caractéristique d'une relation entre grandeurs.

Nombres

Dans ces tentatives de description des différents objets qui peuvent intervenir dans une relation didactique, il y a toujours la présence des nombres qui est à la base de toute activité mathématique. Les nombres naissent de l'étude des rapports et de leur comparaison.

3- DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

3 - 1 Articulation fonctionnelle

Nous souhaitons proposer aux élèves des situations propices à l'émergence de raisonnements arithmétiques :

- qui apportent à chaque élève les connaissances nécessaires à son intégration sociale et professionnelle.
- qui soient adaptées aux développements génétique et cognitif du sujet.
- qui s'inscrivent dans un processus d'algébrisation à long terme.

Dans la recherche de situations didactiques, l'action objective est le fondement de la situation de référence. La mise en place d'une heuristique nécessite un milieu matériel qui problématise cette action de telle sorte que les techniques de la proportionnalité apparaissent comme moyens pertinents de résoudre le problème.

La progression, dans les situations envisagées, est contrôlée principalement par trois variables didactiques : la nature des nombres (naturels, décimaux, rationnels), la fonction des rapports (rapport interne, mesure, rapport externe) et le statut des connaissances mises en œuvre (implicites, explicites, formelles). Dans la suite nous ne proposons qu'un bref aperçu de cette organisation fonctionnelle.

3-1-1 La proportionnalité à l'école primaire.

Avant la mise en place des leçons sur la proportionnalité à l'école primaire, nous essayons d'adapter la complexité mathématique des concepts de fonction, de variable et de nombre, à ses différents cycles pour une genèse de ces notions du cours préparatoire au cours moyen.

Qu'est-ce que concevoir la proportionnalité ?

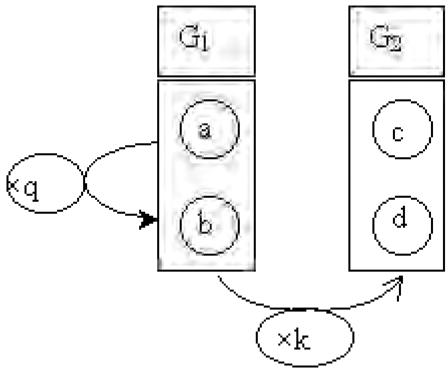
Au C.P.[5], la proportionnalité prend ses racines dans le comptage.

Au C.E., les sources de « relation de proportionnalité » sont la multiplication (éventuellement la division) ; mais les quantités en relation ne sont pas perçues comme des variables où l'une serait fonction de l'autre.

Au C.M., nous souhaitons trouver des situations où il y a obligation de considérer un terme comme une valeur particulière d'une grandeur qui varie en fonction d'une autre grandeur (Le nombre de graines est une fonction du nombre de souris). Il ne suffit pas de donner quelques valeurs particulières à une grandeur mais de faire prendre conscience aux élèves de tous les « possibles » d'une variable.

Qu'est-ce que résoudre un exercice de proportionnalité ?

Le modèle de base s'appuie sur la conservation des rapports internes (q). La structure mathématique standard est donc la proportion. La question standard est la détermination de la quatrième proportionnelle (d).



Les stratégies de résolution vont dépendre de la nature du rapport externe (k), de la nature du rapport interne (q) et des répertoires de connaissances des élèves. Réciproquement les techniques résolutoires vont engendrer des connaissances qui vont enrichir ces répertoires.

Au CE la base des calculs est la multiplication et la division ($a = 1$, $k = c$, $q = b$).

Au CM, la base des calculs est la proportion ($a \neq 1$).

La recherche d'une quatrième proportionnelle nécessite l'explicitation soit du rapport interne (q), soit du rapport externe (k).

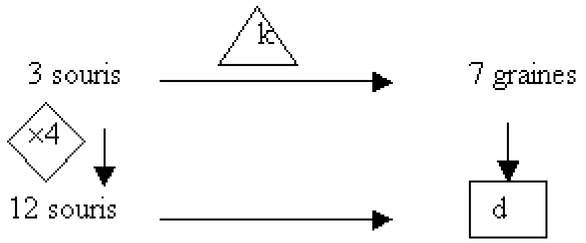
Trois cas peuvent se présenter :

- le rapport interne est calculable ; c'est un entier : $q = \frac{b}{a}$ alors $d = q \times c$.

---

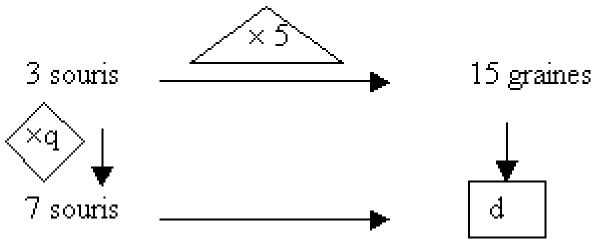
[5] C.P. : cours préparatoire ; enfants de 6 à 7 ans.
C.E. : cours élémentaire ; enfants de 7 à 9 ans.
C.M. : cours moyen ; enfants de 9 à 11 ans.

Exemple :



- le rapport externe est calculable ; c'est un entier : $k = \frac{c}{a}$ alors $d = k \times b$.

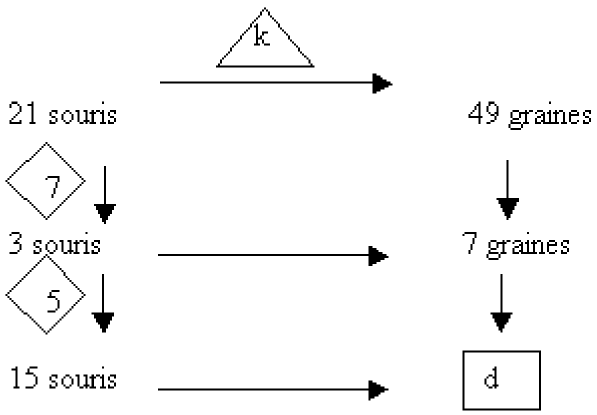
Exemple :



- Aucun de ces deux rapports n'est calculable :

Si on peut déterminer un "couple intermédiaire" grâce à la première procédure alors on peut ensuite déterminer le correspondant de b en réitérant cette même procédure :

Exemple :



Sinon on ne peut pas aboutir.

3-1-2 Choix des caractères pour la situation fondamentale

Les raisons d'utiliser la proportionnalité.

Nous avons repéré trois raisons d'utiliser la proportionnalité : les lois physiques (la proportionnalité entre la masse et le volume exprime que le corps étudié est homogène), les nécessités logiques (l'agrandissement du puzzle est un exemple connu de similitude) et les conventions sociales (les prix, …).

Dans les deux premiers cas, les opérations effectives sur les objets matériels permettent aux élèves des validations perceptives mais ils sont confrontés aux difficultés de mesurages. La dispersion des mesures qu'ils obtiennent les conduit à mettre en doute l'adéquation de leurs stratégies et à en changer. Pour échapper aux contraintes de mesurage nous avons choisi de faire émerger le modèle linéaire de l'idée que les élèves se font de l'équité.

Dans la situation « des graines et des souris », on demande aux élèves de distribuer des paquets de graines à des groupes de souris ; on attend d'eux qu'ils utilisent de manière implicite les propriétés de la proportionnalité pour réaliser l'équité.

Le concept d'équité.

L'idée d'utiliser la proportionnalité comme modèle social pour réaliser l'équité nécessite un premier niveau d'abstraction de la part des élèves (qu'est-ce que l'équité ?) avant même l'élaboration du modèle.

Les premières expérimentations de la situation étudiée montrent que chez les enfants l'**équité** c'est « **l'égalisation des parts** », c'est le premier palier d'abstraction.

Pour égaliser les parts, les élèves vont élaborer les techniques de la proportionnalité. C'est en réalisant une distribution « régulière » que naît l'idée de **ration**[6], de part invariante de graine par souris. Le concept de ration nécessite donc un deuxième palier d'abstraction qui doit réfléchir l'idée de régularité, de « quantité de nourriture par souris » même quand cette quantité n'est pas un nombre entier de graines, c'est à dire n'est pas un nombre pour les élèves de cet âge. Il y a une nécessité de relation circulaire et d'étayage entre les idées de ration, d'équité, de distribution régulière.

Le concept de ration.

L'équivalence des couples représentant une même ration ne peut pas être validée par un mesurage mais par un raisonnement qui s'appuie sur la notion d'équité préalablement modélisée par « l'égalisation des parts ».

Comparaison de deux rations.

L'idée que des souris peuvent manger plus ou moins de graines suggère que la ration soit une grandeur variable. Les stratégies de comparaison dérivent de raisonnements sur ces variations. Les élèves vont construire un pré ordre sur les couples grâce au raisonnement de base suivant : la ration est d'autant plus grande qu'il y a plus de graines ou moins de souris.

Somme de deux rations.

On peut imaginer des situations pour engendrer la somme de deux rations, mais ce n'est plus l'équité qui contrôle cette opération. Il faut que les mêmes souris mangent deux fois. Par exemple, comment additionner les rations (3 graines pour 7 souris) et (8 graines pour 13 souris) ? Remarquons que la tentation serait grande chez les élèves de dire que 20 souris mangent 11 graines puisque additionner c'est grouper les objets.

3 - 2 Description de la situation « des graines et des souris »

L'objectif général de la situation pour les élèves, est de faire apparaître le modèle proportionnel comme une convention socialement équitable. Pour que les élèves puissent réaliser l'idée qu'ils se font de l'équité on leur demande d'attribuer des paquets de graines à des groupes de souris d'effectifs différents (ou projeter de le faire).

[6] Nous appelons "ration" la quantité de graines qui revient à chaque souris dans une "distribution équitable".

Pourquoi des souris ?

On pourrait impliquer plus directement les élèves en leur demandant par exemple de se répartir des sucreries ; mais ce serait prendre le risque de les entraîner dans des querelles qui même après une issue favorable ne seraient pas sans laisser une certaine amertume. En même temps il est nécessaire de « dramatiser » la situation pour éveiller chez les élèves un sentiment de justice sociale qui fasse naître la nécessité d'élaborer des règles tout en gardant une certaine distance par rapport au milieu de référence qui oblige à objectiver ces règles.

Pourquoi des groupes de souris ?

Si on demande aux élèves de distribuer des graines à l'ensemble des souris, leur tâche se résume à effectuer une division euclidienne. Dans la situation considérée, il y a obligation de faire correspondre une quantité de graines à chaque groupe de souris, la quantité de graines étant fonction du nombre de souris.

Pourquoi des paquets de graines ?

Les paquets de graines et les groupes de souris contribuent à matérialiser les couples de la correspondance entre « grandeurs ». Chaque paquet concrétise la « quantité » de graines que l'élève doit prévoir pour un groupe de souris afin de réaliser l'idée qu'il se fait de l'équité. C'est cette obligation de faire des prévisions sur des quantités qui contribue à construire l'idée de « variable » et de « fonction ». La « dépendance d'origine intellectuelle », dictée par l'équité, entre les deux types de variables « quantité de graines » et « quantité de souris » conduit à considérer la « fonction » comme l'explicitation d'une dépendance entre deux grandeurs.

Pourquoi des graines ?

Pour obliger l'élève à expliciter un nombre rationnel avec un couple d'entiers, il faut que ces entiers soient des mesures de grandeurs discrètes (non fractionnables). Les élèves ont des difficultés à concevoir que 3 souris puissent se partager équitablement 7 graines. Il serait plus confortable pour eux d'imaginer que 3 souris se partagent 7 biscuits car les biscuits sont sécables. Mais sous ces conditions les élèves pourraient expliciter la ration sous la forme « deux biscuits et un tiers de biscuit par souris ». Or ce n'est pas l'écriture standard à laquelle nous voulons aboutir. Nous souhaitons obliger les élèves à expliciter cette ration par un couple d'entiers : 7 graines pour 3 souris.

Pourquoi 5 leçons ?

L'articulation fonctionnelle dans la construction des connaissances de la proportionnalité est dictée par la complexité croissante des différents objets décrits dans les analyses précédentes : variables, fonctions, nombres. L'ordination des différentes tâches de type « relation fonctionnelle » conduisant à la genèse de l'idée de fonction linéaire et de variable fait apparaître 3 degrés de liberté didactique qui permettent une certaine souplesse dans l'ordre des leçons :

1. Le rapport externe peut être entier ou fractionnaire dès les premières leçons.
2. On peut permuter l'apprentissage des différentes techniques avec la recherche de couples hypothétiques (notion de variables).
3. Il n'y a pas d'ordre privilégié dans l'introduction des différentes techniques : rapports interne ou externe, addition ou soustraction.

4. LES LEÇONS ET LEURS OBSERVATIONS

La longueur des 3 premières leçons nécessite deux séances d'une heure, les deux autres sont réalisables en une heure chacune. Pour chaque leçon, nous donnons une description succincte des différentes phases puis quelques résultats d'observation. (Les fiches didactiques figurent dans leur intégralité en annexe du mémoire de la thèse citée en préambule).

4 – 1 La proportionnalité comme élément de justice ; coefficient de proportionnalité (entier).

4-1-1 Description de la leçon 1

Dans cette leçon on attend des élèves qu'ils choisissent à la suite d'un débat la « proportionnalité » comme modèle d'équité. Dans une première approche les élèves cherchent à égaliser les parts. On pourrait créer la nécessité d'utiliser les rapports internes dès la première leçon en imposant une ration non entière. La complexité de la situation nous a conduit à choisir une progression où les élèves découvrent en premier lieu l'efficacité du coefficient de proportionnalité (la ration est entière) pour réaliser ce modèle.

<u>Dans la première phase</u> de cette leçon on provoque un débat entre élèves qui les conduit à produire des arguments pour rejeter une répartition inéquitable.

<u>Le maître :</u>

Des bandes de souris à la recherche de nourriture, se sont emparé de paquets de graines et les ramènent au village sans les ouvrir, pour pouvoir les transporter. De retour au camp une dispute s'est élevée entre les souris de la bande bleue et celles de la bande jaune. (Le maître montre les bandes).

Dans la république des souris on aime que toutes les souris soient égales et reçoivent la même chose. *Pourquoi croyez-vous qu'elles se sont disputées ?*

(réponse espérée : « parce que les unes avaient plus de graines que les autres »).

Appelé à la rescousse Sourissot blâme sévèrement la bande bleue qui a 10 graines et la bande jaune qui a, elle aussi, 10 graines, le même nombre. Mais Sourissage continue à prétendre que la distribution entre les bleus et les jaunes n'est pas équitable.

Pourquoi ? (réponse espérée : « Les bandes n'ont pas le même nombre de souris »).

Alors la tribu de souris décide de comparer toutes les parts. Nous allons les aider et dire si la distribution des graines est équitable ou s'il faut la refaire.

<u>Consigne :</u>

Chaque groupe d'élèves reçoit un dessin qui représente les souris d'une bande et le paquet de graines qu'elles sont supposées avoir ramené. Chaque groupe d'élèves doit comparer l'"attribution" qui lui est confiée à celle d'un autre groupe puis dire si la "répartition" est équitable ou non et proposer une justification.

La recevabilité de chaque argument doit faire l'objet d'un débat général.

Exemples :

Nombre de souris dans la bande	3	4	Pour un même nombre de graines il faut un même nombre de souris.
Nombre de graines dans le paquet	10	10	

Nombre de souris dans la bande	5	7	S'il y a plus de souris il faut plus de graines.
Nombre de graines dans le paquet	16	13	

Nombre de souris dans la bande	3	6	S'il y a le double de souris, il faut le double de graines.
Nombre de graines dans le paquet	11	15	

Nombre de souris dans la bande	4	7	$7 \times 3 = 21$ mais $4 \times 3 = 12$. Les souris n'ont pas la même part.
Nombre de graines dans le paquet	17	21	

Nombre de souris dans la bande	2	2	Un même nombre de souris doit avoir un même nombre de graines.
Nombre de graines dans le paquet	11	13	

4-1-2 Commentaires

a) Sur le fonctionnement de la relation didactique.

Le débat scientifique dans une classe ne s'improvise pas, il suppose une culture :

Dans cette leçon, nous avons choisi de faire travailler les élèves par paires de groupes. Chaque groupe compare les quantités de graines et de souris qui lui sont confiées à celles de l'autre groupe et élabore un argument qui explique pourquoi un groupe de souris est désavantagé par rapport à l'autre. Puis les deux groupes confrontent leurs arguments pour en débattre avant la phase collective où seul un rapporteur présentera un argument à la classe entière.

Pourquoi faire travailler les élèves en groupes ?

Il y a des raisons d'ordre didactique, pédagogique et idéologique.

La situation doit permettre l'élaboration d'arguments et l'organisation d'une plaidoirie.

Par ailleurs, la difficulté à gérer un débat avec la classe entière contribue à choisir une organisation démocratique où chaque individu peut participer à la recherche de l'équité en confrontant ses arguments à ceux des camarades du groupe avant de les soumettre au jugement du savoir scientifique de la classe. Le travail en groupe joue un rôle de tri et de mise au point en obligeant les élèves à écrire les arguments qui entreront dans le débat collectif. Cette procédure a en outre l'avantage de limiter le nombre de propositions à traiter par le maître face à la classe entière.

Pourquoi faire travailler les groupes d'élèves par paires ?

Dans une première expérimentation nous avions demandé aux élèves de comparer « les graines et les souris » qui leur étaient confiées à toutes les autres attributions de la classe. Cette situation avait deux défauts : il faut beaucoup de temps aux élèves pour se familiariser avec l'ensemble des attributions ; le débat collectif sur les arguments proposés par les élèves est entièrement à la charge du professeur or il est très lourd à gérer.

b) Sur les arguments des élèves :

Les arguments des élèves sont très contextualisés et formulés avec les mesures qui sont à leur disposition. Il est plus facile pour eux de faire référence à des règles de calcul que de rechercher des « raisons sociales » pour leur argumentation. Les arguments issus de la première phase doivent être des prétextes pour l'élaboration d'une distribution équitable et non des techniques de calcul pour construire cette distribution.

c) Sur l'institutionnalisation :

L'institutionnalisation est un phénomène complexe et un moment sensible pour le maître. Au cours de la situation, le rôle de l'élève évolue : « d'avocat de la défense » il va devoir se poser en « législateur » en construisant progressivement les « règles de l'équité » qui ne sont autres que les techniques de la proportionnalité. Mais les activités ne sont pas auto institutionnalisantes et c'est au professeur de dire ce qu'est l'équité (dans la situation étudiée…) pour créer les moyens collectifs de construction de ces techniques. Or le constructeur d'une leçon ne peut pas projeter dans le détail son déroulement ; le maître est donc obligé de prendre des décisions en situation didactique pour fermer la porte à des aventures, à des évolutions non désirées du système.

Dans la deuxième phase les élèves doivent réaliser une distribution équitable en utilisant le plus possible de ces graines. La « ration » est entière.

Le maître :

Puisque la distribution des graines avec les paquets n'est pas équitable, on va ouvrir les paquets pour les refaire. (On ne change pas la constitution des groupes de souris)

Nous voulons distribuer le plus de graines possible, toutes si nous pouvons. Comment faut-il ***refaire les paquets*** *pour que la distribution soit équitable et utilise le plus de graines possible ?.*

4-1-3 Résultats

Trois procédures sont prépondérantes :

- Certains élèves attribuent une quantité de graines arbitraire au groupe de souris de plus petit effectif puis ajoutent un nombre fixe de graines à chaque souris supplémentaire. Cette procédure additive va réapparaître de manière prégnante chez certains élèves dans les leçons suivantes. *Illustration produite par un groupe d'élèves :*

Souris	*3*	*3*	*4*	*4*	*5*	*6*	*6*	*7*	*7*	*8*	
Graines	*6*	*6*	*7*	*7*	*8*	*10*	*10*	*11*	*11*	*13*	*Proposition 1*
Graines	*6*	*6*	*8*	*8*	*10*	*15*	*15*	*19*	*19*	*23*	*Proposition 2*

- D'autres essaient d'utiliser une part invariante arbitraire de graines par souris puis ajustent cette ration pour essayer d'utiliser le maximum de graines possible.
- Enfin d'autres encore divisent le nombre total de graines par le nombre total de souris pour déterminer la ration.

Dans la séance suivante on fait varier les grandeurs « nombre de souris », « nombre de graines », « ration ». L'une des trois grandeurs étant fixée, la variation d'une autre grandeur détermine la variation de la troisième grandeur. Exemples :

Le maître :

On a attribué 28 graines à 7 souris. Combien faut-il attribuer de graines à 6 souris pour que la distribution soit équitable ?

***

On attribue toujours 4 graines à chaque souris. Trouver combien il faut de graines pour 20, 40, 15, 60 souris ?

***

En attribuant 4 graines par souris, on a distribué 480 graines. Combien a-t-on nourri de souris ?

4 – 2 La conservation des structures pour réaliser l'équité : les rapports internes.

4-2-1 Description de la leçon 2

On veut obliger les élèves à transporter les rapports d'une grandeur sur une autre grandeur. Les élèves n'ont pas la possibilité d'utiliser le coefficient de proportionnalité car il n'est pas entier.

Dans une première phase on leur demande d'ajuster une distribution pour qu'elle respecte la croissance.

nombre de souris à nourrir	3	6	15	21
nombre de graines dans le paquet	8	20	31	54

Dans la phase suivante, les élèves doivent répartir un maximum de graines entre les lots de souris en respectant les rapports internes.

Le maître :

On peut maintenant ouvrir les paquets. Trouvez une distribution équitable qui utilise le plus possible de ces graines et écrivez la sur votre feuille. ***

Recueil des distributions proposées :

Les élèves essaient de construire une distribution avec une ration entière (2 ou 3 graines par souris)

nombre de souris à nourrir	3	6	15	21
nombre de graines dans le paquet	9	18	45	63

Le maître :

Est-ce que cette répartition est équitable ? Est-ce qu'il y a assez de graines pour la réaliser ?

Commentaire :

Le maître peut compter effectivement les graines ou simuler de le faire.

On est dans le paradoxe de la dévolution. Pour aider les élèves le maître peut faire des dessins faisant apparaître les groupes de souris avec leurs graines mais en aucun cas, il ne peut donner la solution :

nombre de souris à nourrir	3	6	15	21
nombre de graines dans le paquet	7	14	35	49

Le maître fait expliciter la méthode ; on attend la technique suivante : envisager pour le plus petit lot de souris un certain nombre de graines puis utiliser les rapports internes pour les autres lots de souris. On compte alors le total des graines :

- s'il y en a trop on enlève une graine au plus petit lot et on complète le tableau comme précédemment.
- s'il reste des graines on en ajoute une au plus petit lot de souris et on complète le tableau.

Commentaires :

Il faut faire valider la distribution voulue par un raisonnement sur la conservation des rapports. C'est au maître d'organiser le débat pour obtenir une validation raisonnée :

Le maître :

Est-ce que toutes les souris mangent la même quantité de graines ?

Est-ce que 14 graines pour 6 souris c'est la même chose que 7 graines pour 3 souris ou que 35 graines pour 15 souris ou que 49 graines pour 21 souris ?

4-2-2 Commentaires

Le paradoxe de la ration non entière :

Un des objectifs de la première leçon était de valider l'idée que l'équité passe par l'égalisation des parts. Les élèves avaient découvert à cet effet l'efficacité du coefficient de proportionnalité quand il est entier.

On veut maintenant obliger les élèves à réaliser une distribution équitable en utilisant les rapports internes. La difficulté est la suivante : si on accepte les restes de graines, il est toujours possible de réaliser une distribution équitable en utilisant une ration entière.

Nous savions que cette ration entière allait s'ériger en obstacle pour les rations non entières d'autant plus qu'il est difficile pour des enfants de concevoir que 3 souris puissent se partager équitablement 7 graines. C'est un paradoxe de la situation : nous souhaitons créer l'obligation d'expliciter une ration (non entière) par un couple d'entiers, ce qui explique le choix des paquets de graines et des lots de souris mais la réalisation de l'équité suppose qu'il est possible de fabriquer des parts égales. Pour permettre aux élèves d'imaginer que c'est possible, le maître leur demandera d'accepter qu'au sein de chaque groupe les souris se débrouillent entre elles parce que les graines sont écrasées avant la distribution effective.

La possibilité de faire des distributions équitables entre lots de souris sans que la ration soit un entier est un saut informationnel incontournable dans la situation envisagée. La contrainte « attribuer des paquets de graines à des lots de souris » et non à des souris est l'instrument ad hoc pour nécessiter les propriétés de la linéarité et construire les rationnels.

Dans la deuxième séance, le "jeu du contrôleur" fait fonctionner les acquis précédents.

4 – 3 La conservation des structures pour réaliser l'équité : additions et soustractions.

4-3-1 Description de la leçon 3

Dans la phase 1 de cette leçon on veut obliger les élèves à transporter l'addition et la soustraction d'une grandeur sur une autre grandeur. Les regroupements de grandeurs se traduisent numériquement par des sommes ou des différences de mesures.

Exemple 1 :

Le maître :

Nous avons 3 lots de souris à nourrir.

Dans chaque groupe vous complétez la distribution suivante pour qu'elle soit équitable. Je vous demanderai comment vous avez fait.

nombre de souris à nourrir	4	8	16
nombre de graines	10		

Le maître :

On doit transporter ces souris et ces graines avec 3 cages qui contiennent au plus 10 souris chacune. On veut que pendant le transport la distribution reste équitable. Ecrivez sur vos feuilles une distribution équitable qui permet ce transport.

***

La contrainte matérielle conduit à imaginer deux étapes :

1. Enlever 6 souris au lot de 16 souris et les graines correspondantes. Le passage par le couple intermédiaire (2 ; 5) est incontournable pour déterminer combien de graines mangent 6 souris.
2. Rajouter les 6 souris et les graines correspondantes au lot de 4 souris.

nombre de souris	10	8	10
nombre de graines	25	20	25

Exemple 2 :

Même activité avec la distribution suivante et un transport avec 4 cages d'au plus 15 souris chacune :

nombre de souris	6	15	21	9
nombre de graines	14	35		

4-3-2 Commentaires

Des nécessités contradictoires :

Dans cette première phase, les élèves doivent compléter des distributions, sous certaines contraintes, qui les obligent à additionner ou soustraire terme à terme des couples équivalents de graines et de souris. Mais on ne peut pas exiger des élèves qu'ils complètent la deuxième distribution sans leur demander au préalable de vérifier l'équivalence des couples qui y figurent. Or pour effectuer cette vérification, ils utilisent le « couple intermédiaire » (3 ; 7) dont les termes sont diviseurs ou multiples communs des termes homologues de deux autres couples à comparer. La connaissance de ce couple intermédiaire permet alors de construire les couples cherchés avec des rapports multiples, ce qui rend inutile l'addition et la soustraction. Pour pallier cette contradiction, nous avons imaginé des « contraintes matérielles » qui conduisent les élèves à faire des manipulations de graines et de souris qui nécessitent l'addition ou la soustraction de couples équivalents. Pour modifier la distribution afin de permettre le transport, les élèves peuvent utiliser le couple (3 ; 7) puis les rapports internes ; mais la réalisation effective sur les graines et les souris nécessite des manipulations qui infèrent une soustraction puis une addition de souris et de graines :

nombre de souris	6+6	15	21-6	9
nombre de graines	14+14	35	49-14	21

Dans la phase 2 les élèves doivent comparer les rations des deux distributions équitables qu'ils viennent de construire ; mais ces rations ne sont pas calculables pour des élèves de CM1. Ils vont devoir chercher des mesures communes aux deux distributions.

Le maître :
Nous avons fabriqué deux distributions équitables :

nombre de souris à nourrir	4	8	16
nombre de graines	10	20	40

nombre de souris à nourrir	6	15	21	9
nombre de graines	14	35	49	21

Le maître : *Dans quelle distribution la ration est-elle la plus grande ?* ***
Laquelle de ces deux distributions donne le plus à manger à chaque souri. ***

4-3-3 Observations

L'importance de la consigne :
La deuxième phase a pour projet de faire comparer les rations des deux distributions précédentes. Or ces rations non entières ne sont pas calculables par des élèves de CM1. Les élèves sont donc obligés de chercher dans chacune des distributions, des couples où figurent des mesures communes de graines ou de souris qui permettent des procédés de comparaison.

Mais la formulation de la consigne a beaucoup d'importance : pour comparer les rations de deux distributions, certains élèves comparent les quantités totales de graines des deux distributions sans se soucier des nombres de souris. Il faut donc choisir des nombres qui ne permettent pas de répondre juste avec un argument faux : le nombre total de graines de la distribution qui utilise la plus grande ration doit être inférieur au nombre total de graines de la distribution qui utilise la plus petite ration.

L'usage d'un « couple intermédiaire » n'est pas spontané chez les élèves.
Les différentes situations étudiées ont fait apparaître des distributions avec un nombre fini de couples. Les contraintes matérielles s'opposent à l'idée que l'ensemble des couples possibles est infini. La recherche d'un « couple intermédiaire » suppose que les élèves ont compris que l'équité ne dépend pas du nombre de souris ou du nombre de graines mais de l'invariance du rapport entre ces deux grandeurs, l'une d'elles pouvant être choisie arbitrairement.

Dans la deuxième séance, pour familiariser les élèves avec l'idée que ces grandeurs peuvent varier arbitrairement pourvu que ce rapport soit conservé, on leur demande de proposer des couples imaginaires qui font fonctionner le modèle indépendamment des contraintes matérielles qui ont donné naissance à la situation.

4 – 4 L'équité pour la genèse des rationnels : comparer des rations.

4-4-1 Description de la leçon 4

L'équité va servir de prétexte pour construire des rationnels. L'idée de ration est présente tout au long du processus. Les élèves se sont familiarisés avec cette notion et ont appris à la désigner avec différents couples équivalents. Ils ont aussi comparé les rations de deux distributions équitables (leçon 3) et découvert deux techniques : comparer les quantités de graines attribuées à deux lots de souris de même effectif ou comparer les effectifs de deux lots de souris à qui on a attribué la même quantité de graines.

Ces comparaisons nécessitent la recherche de couples intermédiaires donc de faire varier les nombres de souris et de graines avec la contrainte de respecter l'équité, c'est à dire les rapports externes. Il y a là l'idée de variable et de fonction. On essaie d'habituer les élèves à considérer des quantités arbitraires de graines ou de souris pour pouvoir faire des comparaisons de rations en utilisant les stratégies décrites précédemment.

Dans la première phase, les élèves "complètent" deux distributions avant de comparer les deux rations :

Organisation :

On partage la classe en deux. Chaque moitié de classe complète un des deux tableaux suivants.

BLEU

nombre de souris			12						
nombre de graines			28						

VERT

nombre de souris						20			
nombre de graines						45			

Le maître :

Dans quelle distribution la ration est-elle la plus grande ? Est-ce qu'il vaut mieux être souris dans la distribution bleue ou dans la distribution verte ?

Dans la phase suivante, chaque "distribution" est représentée par un seul couple, les élèves doivent trouver les distributions qui utilisent la même ration.

Dans une première étape, la ration est entière ; dans la deuxième étape le rapport interne est entier ; la troisième étape nécessite l'usage d'un couple intermédiaire.

4 – 5 Institutionnalisation de la proportionnalité.

4-5-1 Description de la leçon 5

On souhaite maintenant abstraire de la situation « des graines et des souris » le « concept de proportionnalité », on veut construire une connaissance sur des connaissances.

Pour permettre aux élèves d'avoir une activité réflexive sur la « situation des graines et des souris » on leur propose d'autres milieux objectifs qui nécessitent ou non l'usage des techniques déjà rencontrées dans cette situation. C'est une nécessité d'origine logique, physique ou sociale qui permet de décider s'il y a lieu ou non de conserver les rapports internes. C'est en référence à l'égalité de ces rapports que les élèves comparent des situations et donnent un sens au concept de proportionnalité.

La première phase fournit un exemple puis un contre exemple : "La fabrication de tartelettes".

Le maître :

Pour faire 15 tartelettes toutes pareilles un restaurateur a employé 6 œufs. Combien doit-il prévoir d'œufs pour fabriquer 45 tartelettes ?
*Faites les calculs sur vos feuilles. ****

Le maître :

*En fait le restaurateur s'est trompé, il doit fabriquer 50 tartelettes. Combien doit-il prévoir d'œufs ? Faites les recherches sur vos feuilles. ****

Le maître :

Ce restaurateur fait cuire les tartelettes dans un grand four de boulanger. Pour faire cuire 15 tartelettes il a fallu 30 minutes. Le restaurateur met les 50 tartelettes dans le four en même temps. Combien de minutes de cuisson doit-il prévoir ?

Commentaires :

Il faut un peu de mise en scène pour faire comprendre aux élèves que toutes les tartelettes cuisent en même temps.

Institutionnalisation :

Quand une distribution de graines à des souris est équitable, on dit que les quantités de graines sont proportionnelles aux nombres de souris.

Dans la fabrication des tartelettes les quantités d'œufs sont proportionnelles aux nombres de tartelettes mais les temps de cuisson ne sont pas proportionnels aux nombres de tartelettes.

Dans la deuxième phase, les élèves doivent reconnaître les conditions d'usage de la proportionnalité : "grandeurs proportionnelles ou non" dans différentes situations.

4-5-2 Observations sur l'institutionnalisation

C'est en essayant d'utiliser les techniques de la linéarité que les élèves décident d'accepter ou de rejeter le modèle proportionnel. Par conséquent le maître ne peut faire qu'une institutionnalisation « locale » contextualisée aux grandeurs étudiées dans chaque exemple.

L'institutionnalisation est une activité réflexive sur les connaissances qui contribue à fermer la situation d'apprentissage. Elle ne peut réussir que si les élèves ont conscience de leurs connaissances. En construisant une connaissance sur les connaissances, elle libère les élèves de l'environnement didactique des apprentissages antérieurs et leur permet de concentrer leur effort sur le nouvel objet d'apprentissage.

5. PERSPECTIVES

L'originalité de la situation "des graines et des souris" ne réside pas dans son milieu matériel mais dans son fondement qui rend opératoire les techniques de la proportionnalité pour réaliser l'équité. Cette notion apparaît comme une raison sociale de construire le modèle proportionnel dont la validation raisonnée échappe aux contraintes et aléas du mesurage. En même temps, la situation "des graines et des souris" réunit toutes les conditions pour construire les rationnels et apporter des connaissances sur les notions de variable et de fonction qui préparent la formalisation différée de ces concepts et leur institutionnalisation au collège. Les idées de variable et de fonction ne peuvent pas apparaître pertinentes sur une seule situation ; ces concepts prennent de la consistance sur des processus d'apprentissage qui à long terme les font apparaître comme des objets "algébriques" qui réfléchissent et synthétisent les relations entre grandeurs.

LE MANUEL : OUTIL OU OBSTACLE POUR LES ENSEIGNANTS

Ben Salah Breigeat Chedlia
ATER IUFM Créteil

Résumé :
Une étude de la façon dont trois enseignantes exploitent l'écrit que constitue le manuel de mathématiques nous permet de voir s'affirmer des positionnements différents. L'analyse montre que ces positionnements sont partiellement provoqués par les interventions des élèves (en classe). Nous avons tenté de les mettre en relation avec l'utilisation (en classe) que les enseignantes faisaient de leurs connaissances mathématiques. Trois profils de rapport public au manuel se dégagent dont deux présentent des ressemblances malgré des utilisations spécifiques de connaissances mathématiques qui semblent bien différentes entre les enseignantes concernées. Certaines questions se posent alors en formation : comment peut-on entraîner l'enseignant à laisser agir ses propres connaissances de telle sorte quelles soient profitables aux élèves ? Quel entraînement à l'utilisation du manuel pour les enseignants ?

INTRODUCTION ET PROBLÉMATIQUE

Apprentissage et enseignement reposent sur des processus complexes : ce banal constat est un point de départ du travail de thèse dont est issu ce qui suit. Face à la complexité d'apprentissage des élèves et face à la complexité d'enseigner, je me demandais s'il était possible d'isoler des éléments particuliers des savoirs en jeu (les mathématiques) en construction chez les élèves, déjà construits chez les professeurs pour aborder cette double complexité ? Mon questionnement était directement lié aux savoirs mathématiques et à la situation de classe. Pour cette raison, j'ai voulu m'intéresser à l'épreuve du feu que constitue l'entrée des enseignants dans la profession et précisément aux connaissances mathématiques que les enseignants exploitent et à la façon dont ils les exploitent alors qu'ils sont en classe avec les élèves. L'objet de cet article repose sur une partie de la recherche menée. Pour cela je souhaite la présenter très succinctement. L'étude s'est inscrite dans le cadre de l'observation des pratiques enseignantes dont ce que je retiens comme définition rejoint celle qu'en donne A. Robert[1] : « Ensemble des activités de l'enseignant qui aboutissent à ce qu'il met en œuvre en classe et à ses activités en classe ». Cette définition est reprise dans un autre article[2] où les auteurs précisent « nous utilisons (…) le mot pratiques pour désigner tout

[1] Robert A., Didaskalia N°15 Novembre 1999

[2] Robert A., Rogalski J. (soumis à la revue canadienne sur l'enseignement) « Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche »,

ce que l'enseignant met en œuvre avant, pendant et après la classe… ». Ce que les enseignants mettent en œuvre avant la classe et ce qu'ils mettent en œuvre pendant la classe sont les deux aspects importants des pratiques enseignantes directement ou indirectement considérés dans ma recherche.

Concernant les pratiques, l'évolution des travaux dans le domaine m'incite à adopter deux hypothèses :

- elles forment un système complexe, cohérent et relativement stable ;
- les enseignants sont soumis à des contraintes mais il leur reste des marges de manœuvre dont l'investissement n'est pas aléatoire.

Dès lors de nouvelles questions se posent :

- en classe ; comment un jeune enseignant investit les marges de manœuvre dont il dispose du point de vue de ses propres connaissances mathématiques ?
- avant la classe comment interviennent les propres connaissances des enseignants, quelles sont ces connaissances ?

Nous savons que pour faire la classe l'enseignant prépare ce qu'il va proposer aux élèves, que les préparations font entièrement partie des pratiques des enseignants, et ce, quelle qu'en soit la forme : quelques mots, quelques lignes, un document plus consistant… Je fais l'hypothèse que ce point est particulièrement vérifié pour les enseignants débutants. Plusieurs outils peuvent intervenir lors de ces préparations. Il en est un qui m'intéresse particulièrement et sur lequel je m'arrête dans cet article : le manuel. Pourquoi retenir précisément le manuel ? Des éléments de réponse à cette question sont les suivants. Beaucoup d'enseignants exploitent les manuels comme une banque d'exercices à proposer aux élèves. De ce strict point de vue, on peut admettre que le manuel joue effectivement le rôle d'un outil. Cet outil est présent en classe, il y apparaît officiellement puisqu'il est l'objet d'un consensus entre les enseignants. N'est-il qu'un outil ? Les manuels proposent un aspect des connaissances mathématiques qui se situe du côté des élèves, on peut donc estimer qu'ils sont représentatifs du niveau (n) des classes auxquelles ils sont destinés même si des restrictions ainsi que des choix sont opérés. Une lecture d'études antérieures peut susciter un questionnement sur la place du manuel dans le système éducatif et en particulier sur le rapport que l'enseignant tient au manuel. Une analyse curriculaire associée à l'étude de certains manuels de la classe de Troisième permet à T. Assude (1993-1994)[3] de conclure à un phénomène d'arrêt de la transposition didactique sur l'objet « fonction » dont une conséquence est de pas voir l'objet « racine carrée » comme la fonction racine carrée. T. Assude précise que tel qu'il est actuellement abordé en classe de Troisième, l'objet « racine carrée » engendre des problèmes chez les élèves. Face à ces questions, que font les enseignants ?

Sur un thème proche de celui-ci et poursuivant l'objectif de « caractériser les rapports que les enseignants nouent dans les classes de Troisième et de Seconde avec les objets nombres réels et racine carrée » et suite à une étude de plusieurs manuels, A. Bronner(1997)[4] parvient à remarquer :

- un « vide didactique institutionnel » à propos de la négociation du passage des décimaux ou des irrationnels aux nombres réels,

[3] Assude T. (1993-94) Ecologie de l'objet racine carrée et analyse du curriculum, « *petit x* » n°35.

[4] Bronner A. (1997) Les rapports d'enseignants de troisième et de seconde aux objets « nombre réel » et « racine carrée », *Recherche en didactique des mathématiques*, vol. 17.3

- des initiatives de réduction de ce vide prises par les auteurs de manuels.

Ce chercheur conclut que le « vide didactique institutionnel » permet « un espace de position très ouvert pour l'enseignant (et) des distances entre les différents rapports institutionnels des enseignants parfois grands ». Au-delà des contenus spécifiques, nous pouvons considérer qu'un vide didactique institutionnel est susceptible de se produire dès qu'un arrêt de la transposition didactique a lieu sur un objet auquel des points d'un programme peuvent être reliés. L'objet fonction n'est pas au programme de la classe de Troisième mais la racine carrée peut lui être associée : d'un point de vue didactique que propose l'institution autour de la racine carrée ? Y a-t-il un vide didactique institutionnel ?

Nous transposons la question sur le terrain des enseignants : en cas de vide didactique institutionnel que font-ils ? A. Bronner nous indique qu'ils le comblent de façon très diverse. Nous rejoignons ici notre propos, les enseignants impliquent-ils leurs connaissances pour combler ce vide, lesquelles impliquent-ils et comment les impliquent-ils en présence des élèves ?

E. Roditi (1996)[5] précise à propos de la racine carrée que les manuels ne prennent pas en compte les difficultés d'apprentissage des élèves et que la question du sens n'est pas suffisamment posée. Ainsi, l'utilité de certains enseignements est peu développée et les règles de calculs « correspondent à une algèbre inconnue des élèves ».

A. Bronner constatait un vide didactique institutionnel et des initiatives de réduction de ce vide, E. Roditi constate ce vide même au niveau des manuels et propose une direction pour le combler. Citons encore M. Bittar (1999-2000)[6] qui montre en analysant des manuels de classe de Quatrième, Troisième et Seconde qu'une insuffisance dans les manuels provoque des problèmes chez les élèves. Cette analyse est étayée par une expérience à l'issue de laquelle M. Bittar conclut qu'il y a ressemblance entre l'approche adoptée par le manuel et les connaissances des élèves.

Devons-nous conclure que les enseignants des élèves participant à l'expérience ont eux-mêmes adopté l'approche du manuel ? Nous retrouvons ici aussi notre questionnement : comment les enseignants ont-ils utilisé leurs connaissances ?

L'arrêt de la transposition didactique et le vide institutionnel caractérisent essentiellement les programmes officiels dont l'objectif est de préciser les connaissances exigibles des élèves. Si nous considérons que les manuels reflètent les programmes et qu'ils sont principalement destinés aux élèves, nous risquons d'y trouver les mêmes caractéristiques. Nous voyons ici un des rôles possibles des enseignants : faire intervenir leurs connaissances, connaissances que les élèves ne possèdent pas (ou pas encore), qui ne figurent pas toujours dans les manuels, dans l'objectif (partiel) de favoriser les constructions attendues des élèves pour l'année et le niveau considéré.

Dans le cadre de la thèse nous avons étudié succinctement les manuels utilisés par les classes des enseignantes observées. Cette étude, moins approfondie que celles citées, a révélé des imprécisions, des omissions, des décontextualisations non effectuées, des informations pouvant être complétées.

Dans l'ensemble, un double constat émerge :

[5] Roditi E. (1996) La racine carrée en troisième, étude d'une activité *Document de travail pour la formation des enseignants* n° 17, IREM de Paris 7.

[6] Bittar M. (1999-2000) Les vecteurs à l'issue de la seconde, une analyse des manuels et de quelques difficultés d'élèves « *petit x* » n° 52 pp. 49 à 68.

- Certains contenus abordés par les manuels semblent isolés, voire incomplets, sans relation avec aucun autre et les connaissances correspondantes chez les élèves pourraient l'être aussi.
- Des enseignants tentent de combler ce manque de relation.

Les élèves ne sont pas seuls face aux manuels, plus précisément ils ne sont pas seuls face aux savoirs à construire dont des versions sont présentées dans les manuels. Les enseignants interviennent dans cette construction. On peut se demander dans quelle mesure justement les enseignants tiennent compte des manuels, s'y cantonnent ou les complètent. On peut imaginer plusieurs choix : par exemple là où le manuel est imprécis l'enseignant émet un discours correct, mais sans attirer l'attention des élèves sur les points délicats et sans que cela puisse leur être redemandé. Ou bien l'enseignant suit les manuels et ignore ces questions, quitte à avoir un discours incomplet (et il peut en être conscient, mais considérer que ce n'est pas la peine, voire que ce serait dommageable, de faire autrement).

Plus généralement notre questionnement qui porte précisément sur les connaissances mathématiques utilisées par les enseignants au collège sera : débordent-elles celles qui sont exposées dans les manuels, et comment ? Sont-elles plus réduites ? Quelles initiatives, voire quelles exigences les enseignant(e)s développent-ils (elles) entre ce qui est exigé des élèves et leurs propres connaissances, bien plus développées ? Quelles peuvent être les connaissances que l'on peut attendre voir se manifester en classe ? Ce peut-être par exemple :

- des connaissances plus générales que celles exposées ;
- des jeux sur les variables didactiques ;
- un des différents niveaux de conceptualisation ;
- des connaissances méta mathématiques.

A quoi peuvent-elles servir ?

<u>Au moment des préparations :</u>

- Pour varier les degrés de difficultés des problèmes proposés aux élèves,
- Pour anticiper les difficultés des élèves, ce qui nécessite des connaissances approfondies des mathématiques en jeu.
- Pour concevoir une progression, des enchaînements…

<u>Pendant la classe</u>, les connaissances mathématiques des enseignants peuvent leur servir pour :

- Mettre en application leurs préparations ;
- Adapter leurs préparations et prévisions à ce qui se passe réellement en classe ;
- Identifier ce qui ne va pas, varier les réponses, improviser.

Évidemment l'enseignant ne peut pas toujours expliciter les connaissances mentionnées (et d'autres) au risque de ne pas être compris des élèves, au risque de créer des ruptures de contrat ou encore parce qu'elles ne sont pas des connaissances à enseigner. Cependant si ces connaissances ne peuvent pas toujours se manifester explicitement, elles peuvent laisser des traces. Ce sont ces traces que j'ai voulu chercher et confronter aux contenus des manuels. Où chercher ces traces ? Comme c'est l'apprentissage des élèves qui m'intéresse *in fine*, pour chercher ces traces j'ai privilégié la classe réelle et le discours que les enseignants tiennent à leurs élèves. En effet, le discours est informel, il n'est pas figé, il ne constitue pas un résultat abouti comme l'est un écrit (même temporaire), il peut évoluer, se transformer, s'adapter aux situations.

Lors des échanges verbaux entre l'enseignant et les élèves ou entre les élèves eux-mêmes, l'enseignant peut jouer sur ses connaissances mathématiques pour adapter son discours à la classe en fonction de l'état qu'il s'en représente. On connaît des formes de cette adaptation : par exemple l'effet topaze, l'effet Jourdain.

Au-delà d'effets particuliers, c'est justement le caractère d'adaptation du discours de l'enseignant à la classe qui m'a interpellé. Une adaptation nécessite une analyse de situation et une réponse. L'analyse de la situation doit mettre en jeu des connaissances mathématiques ou sur les mathématiques. Je pense donc que dans ces moments, l'enseignant doit se référer à ses propres connaissances : elles pourront s'exprimer explicitement ou non, elles agiront certainement, elles laisseront des traces. Ainsi, c'est en particulier à travers le discours des enseignants que, essayant de cerner les propres connaissances mises en jeu par l'enseignant : n'y a-t-il que les connaissances strictement exposées, y en a-t-il d'autres, peut-on reconnaître des éléments provenant du manuel et dans quelle mesure, je tente de cerner l'incidence du manuel sur ce discours.

METHODOLOGIE GENERALE

La méthodologie générale est classique, elle consiste en un recueil de données puis en une analyse du matériel recueilli. Les discours de plusieurs enseignants ont été enregistrés en classe sur cassettes audio. L'intégralité des parties audibles a été transcrite ainsi que les interventions des élèves. Suivent quelques précisions sur les enseignants observés et les classes observées. Les enseignants sont titulaires du CAPES et présentaient peu d'expérience en nombre d'année d'enseignement (en deuxième année).

Les hypothèses sous-jacentes à ce choix étaient :

- Les pratiques enseignantes se construisent et s'affinent voire se modifient au fil des ans en particulier, elles ne sont pas totalement installées en deuxième année ;
- Les aspects que l'on peut qualifier d'extérieurs aux pratiques d'enseignement (connaissance de l'établissement, des collègues, de l'institution…) ne sont plus aussi importants qu'avant et sont moins susceptibles d'interférer avec les pratiques.

Par ailleurs, je pensais que la proximité dans le temps de la formation en IUFM et de la formation supérieure pouvait jouer un rôle en accroissant la visibilité et la présence des connaissances spécifiques des enseignants. Les classes retenues sont « classiques » ; ni établissements ZEP ni des classes repérées comme particulièrement brillantes, de sorte à obtenir des échantillons représentatifs d'une grande partie de la population d'enseignants. Avec ces restrictions, une liste de 10 enseignants a été dressée et 3 enseignantes ont été retenues. Les 10 enseignants avaient suivi une formation dans le même IUFM. Afin d'éviter que les enseignants ne préparent particulièrement leur séance j'avais choisi de ne pas les questionner de façon spécifique. Pour la même raison, je ne leur ai pas demandé de traces écrites de leur préparation. Les discours recueillis ne concernent que ce que les enseignantes observées ont mis en œuvre pendant la classe et les transcriptions des enregistrements audio constituent la seule base du travail.

METHODOLOGIE PRECISE

La problématique a fait apparaître les deux axes non indépendants que sont les discours et le manuel. Je les ai traités dans un premier temps indépendamment l'un de l'autre puis je les ai confrontés l'un à l'autre. Pour le premier axe, j'ai adopté une analyse du discours basée sur l'apport mathématique que les propos des enseignants sont susceptibles de provoquer chez les élèves, elle tient compte des apports au sens strict ; nouvelles connaissances, procédures plus performantes que les anciennes, réorganisation des anciennes connaissances… D'autres apports peuvent être moins nouveaux pour les élèves : "rodage" de techniques nouvellement abordées, vérification de connaissances supposées acquises, informations d'ordre général qui peuvent se situer à la frontière des connaissances attendues des élèves.

Cette analyse tient compte du degré de généralité que transportent les propos de l'enseignant qui, évidemment, fait intervenir le point de vue élève : un habillage nouveau d'une ancienne technique peut être considéré comme une nouvelle technique par les élèves jusqu'au moment où ils réalisent qu'il n'en est rien. Le résultat de cette analyse se traduit par un découpage du discours en passages décontextualisés qui me permettait de traiter des parties relativement courtes afin de tenter de déterminer les raisons qui ont conduit les enseignants à faire jouer à leurs propos le rôle que je leur attribue.

Cette analyse s'est faite en tenant compte des propos des élèves, elle me conduit à émettre un premier avis portant sur l'utilisation ou non de connaissances propres des enseignants. Le deuxième axe de mon travail où le manuel est pris en compte consiste en une comparaison du texte et des discours, deux dimensions interviennent. Une des dimensions est générale, elle permet de donner une allure globale des deux documents que sont le texte du manuel et le discours des enseignants. La deuxième dimension est plus détaillée, elle fait intervenir les analyses de discours évoquées ci-dessus (premier axe) ainsi que d'autres en fonction des cas de figure et elle permet d'estimer le degré de ressemblance ou de dissemblance des deux documents. Dans l'ensemble, ces deux comparaisons me permettent d'estimer l'impact du contenu du manuel sur ce que les enseignantes proposent aux élèves. Ces comparaisons me permettent aussi d'estimer la façon dont les enseignantes utilisent leurs connaissances pour intégrer cet outil dans leurs pratiques.

LES RÉSULTATS

Seuls sont présentés, par enseignante observée, les résultats qui intéressent notre propos : la comparaison des discours et des textes des manuels.

Résultats concernant E1, la première enseignante observée

L'ensemble de la séance que l'on peut décomposer en deux grandes parties est consacré à la notion de racine carrée d'un nombre positif. La première partie porte sur l'expression d'une relation algébrique entre la mesure de la longueur d'une hauteur d'un triangle équilatéral et la mesure de la longueur de l'un des côtés. La deuxième partie est annoncée par l'enseignante comme portant sur la résolution des équations et la racine carrée. La séance correspond à un petit morceau du chapitre 10 « Racines carrées » du manuel. La correspondance porte sur les titres 6 et 7 du chapitre « calculer des longueurs en géométrie » et « résolution de l'équation $x^2 = a$ ». D'un point de vue global les deux grandes parties de la séance observée se rapportent l'une au titre 6 du manuel et l'autre au titre 7. Ces deux parties apparaissent de la même façon et dans le même ordre que dans le manuel. L'enseignante commence la séance avec cette phrase « *on avait vu avant de partir le calcul de la diagonale d'un carré* » qui est la première activité du titre 6 du manuel. Elle poursuit « *on avait commencé à calculer la hauteur dans un triangle équilatéral* » qui est la deuxième activité du titre 6 du manuel. Le triangle dont elle parle est nommé ABC comme dans le livre, le pied de la hauteur issue de A est noté H comme dans le livre, la mesure de la longueur d'un quelconque des trois côtés est notée « a » comme dans le livre. Les étapes de calcul sont les mêmes que celles du livre. Le résultat n'est pas exprimé de la même façon, l'enseignante ne le décontextualise pas totalement. C'est un élève qui au cours des exercices d'applications de la deuxième partie déduira ce caractère de généralité. au cours de la résolution du problème posé en première partie, la classe utilise le théorème de Pythagore. Personne –ni l'enseignante ni les élèves– ne précise pourquoi le triangle AHB, dans lequel le théorème est appliqué, est rectangle en H : le livre n'attire pas explicitement l'attention sur ce point.

Dans le manuel, cette activité est suivie d'exercices d'application mettant en jeu la relation obtenue. De la même façon, l'enseignante fait suivre l'activité par des exercices d'application. On peut noter une différence entre ces exercices : ceux que propose l'enseignante sont plus simples que ceux du manuel. Une fois les exercices résolus, l'enseignante annonce la deuxième partie à l'aide du titre « application des racines carrées à la résolution d'équations du premier et du second degré », titre qui peut porter à confusion : on peut avoir l'impression que la racine carrée jouera le même rôle outil au premier et au second degré alors qu'il n'en est rien. Le début de cette deuxième partie de séance ne figure pas dans le manuel. Elle met en jeu la formule obtenue précédemment et les résolutions d'équations. Ce contenu ressemble à une transition que l'enseignante aurait voulu établir dans l'objectif d'introduire le titre 7 du manuel, ce contenu constitue le seul élément de dissemblance avec le texte du manuel. Un autre point de ressemblance porte sur des techniques de calcul : en présence de certaines expressions comme $(-x\sqrt{3}-x)$ l'enseignante fait appel à la factorisation en précisant que (x = 1fois x) tandis que pour $(x\sqrt{3}-2x\sqrt{3})$ elle fait appel à une analogie y - $2y$. Le manuel expose les deux même démarches en fin de chapitre.

Une étude encore plus fine du discours comparée au texte du manuel montre une forte présence de ce dernier. Tout se passe comme si l'enseignante répondait aux questions du manuel, elle utilise les mêmes notations, elle dit les choses de la même façon que dans le manuel, elle utilise les mêmes arguments aux même endroits. Il semble qu'elle tente d'établir des liens entre les différentes parties du manuel. En même temps qu'elle agit ainsi, on dirait qu'elle oublie que se sont les élèves qui doivent construire certaines connaissances. Tout se passe comme si elle ne prenait pas suffisamment de recul face aux situations qu'ils rencontrent et comme si elle portait son attention autour de la production de bonnes réponses plutôt qu'autour des éléments constitutifs de ces "bonnes réponses". En particulier des points qui peuvent être importants pour les élèves et qui ne sont pas explicités dans le manuel n'apparaissent pas non plus dans son discours. Par ailleurs lorsqu'elle s'écarte du contenu du manuel, ses apports peuvent être discutables. Pour cette enseignante, le manuel occupe une grande place : avant le cours ainsi que pendant le cours et tout se passe comme s'il l'empêchait de recourir à ses propres connaissances. On voit déjà bien qu'il est difficile de séparer connaissances mathématiques et gestion, on ne traite pas directement les connaissances mathématiques mais seulement leur utilisation.

L'analyse qualitative du discours (premier axe) établie indépendamment du manuel montre que l'enseignante s'écarte difficilement de ce qu'elle avait prévu, quitte à dévoiler aux élèves ce qu'elle attend d'eux. Bien souvent elle décompose une partie des raisonnements qu'elle tient en ne montrant aux élèves que les résultats sans les initier aux processus de mise en place de ces raisonnements. L'enseignante ne s'adapte pas beaucoup aux élèves, elle les remplace : elle les double en montrant la solution. Ses connaissances plus approfondies que celles des élèves ne sont pas directement mises à profit. Les traces d'utilisation de ces connaissances sont faibles. En conclusion, en considérant les analyses du discours et la comparaison au manuel on peut dire que :

- tout se passe comme si l'enseignante présentait des difficultés à adapter son discours aux élèves,
- tout se passe comme si l'enseignante mettait rarement en œuvre ses propres connaissances mathématiques,
- tout se passe comme si l'enseignante était très dépendante du manuel.

Résultats concernant E2, la deuxième enseignante

Le cours correspond au chapitre 6 « Trigonométrie » du manuel de la classe. Le manuel présente trois activités. La première activité « définitions et calculatrice » appelle les élèves à une lecture graphique de cosinus et sinus puis interpelle sur les variations des valeurs que prennent cosinus, sinus et tangente. Cette activité clôt sur une question : y a-t-il proportionnalité entre les mesures des écarts angulaires et les valeurs des cosinus sinus et tangente pour ces mesures. La deuxième activité « calculs dans un triangle rectangle » doit permettre aux élèves de manipuler les relations trigonométriques dans le triangle rectangle. La dernière activité « à la découverte des propriétés » présente comme objectif d'établir les égalités ($\sin B/\cos B = \tan B$ et $\cos^2 B + \sin^2 B = 1$). Pour ces trois activités le manuel invite les élèves à consulter des parties spécifiques du cours. Du côté de l'enseignante, les seules parties du cours et du manuel qui se ressemblent sont les définitions et les propriétés. La présentation des définitions que l'enseignante adopte n'est pas exactement semblable à celle du manuel. Le triangle support est rectangle en B dans le manuel alors qu'il l'est en A pour l'enseignante, les définitions sont semblables. Les propriétés ne sont pas toutes identiques : l'enseignante en propose d'autres. Seule une propriété est commune au manuel et au cours de l'enseignante mais elle n'est pas approchée de la même façon. L'ordre d'exposition des connaissances que l'enseignante propose aux élèves n'est pas le même que celui du manuel. L'enseignante ne dit pas les choses de la même façon que dans le manuel. Elle apporte des commentaires spécifiques, des remarques, des justifications que le manuel n'aborde pas. Dans l'ensemble il apparaît que l'enseignante E2 se démarque du manuel pour la préparation de son cours ainsi qu'en présence des élèves. L'analyse qualitative du discours (premier axe) permet d'assister à un cours dont le niveau correspond à celui des élèves mais où les connaissances ultérieures apparaissent sans être explicitées et sans que cela ne perturbe les élèves. L'enseignante s'adapte aux propos des élèves et elle les conduit à étendre le domaine de validité de leurs connaissances en spécifiant les contextes particuliers. Ainsi elle évolue entre deux points de vue : extension des connaissances et précision des contextes particuliers. De plus elle favorise la participation des élèves à la production de nouvelles connaissances. Un discours implicite proche des connaissances des élèves côtoie un discours plus consistant. Dans l'ensemble, il apparaît que l'enseignante fait jouer ses connaissances dans l'intérêt des élèves. Le discours de E2 révèle la présence de trois éléments :

- adaptation aux élèves ;
- mises en œuvre spécifiques des connaissances personnelles efficaces pour les élèves ;
- relative liberté par rapport au manuel.

Résultats concernant E3, la troisième enseignante

La séance est partagée en deux parties. La première est réservée à des corrections d'exercices qui avaient été donnés lors d'une séance précédente et qui portaient sur la résolution d'équations du premier et du second degré. La deuxième partie de la séance est réservée à des rappels sur les inéquations.

La comparaison au manuel montre les éléments essentiels suivants :

- lorsque les élèves expriment des difficultés de compréhension, l'enseignante adopte un vocabulaire identique à celui du manuel ;
- les implicites du discours de l'enseignante sont également implicites dans le manuel ;
- la façon dont sont organisés les résultats dans le manuel est la même que celle adopter par l'enseignante ;
- là où le manuel présente des exemples particuliers, l'enseignante présente des exemples génériques ;
- le texte précis du manuel n'est pas dit de la même façon par l'enseignante mais les mêmes contenus sont abordés.

Ici ma conclusion est la suivante : l'enseignante adapte ses connaissances à la structure du chapitre du manuel et en personnalise le contenu. Tout se passe comme si elle faisait un compromis entre ses connaissances et celles exposées par le manuel. Le produit de ce compromis nécessite, pour les élèves, un travail auquel l'enseignante répond de différentes façons. L'une des réponses consiste en un « simple » renvoi au texte du manuel qui se caractérise par l'adoption d'un vocabulaire identique à celui-ci et sans plus d'explication. Une autre réponse de l'enseignante consiste en l'amorce d'un processus d'adaptation à ce qui se passe en classe et où ses connaissances sont consultées mais le processus ne s'achève pas : il conduit souvent à une évocation de modèles. Ces caractéristiques me font donc conclure à une efficacité limitée de l'utilisation des connaissances propres de l'enseignante.

Les analyses de discours et la comparaison au manuel montrent que pour E3 tout se passe comme si :

- elle n'adapte que partiellement son discours aux élèves ;
- les mises en œuvre de ses connaissances personnelles sont peu efficaces pour les élèves ;
- son indépendance au texte du manuel est limitée.

Pour les trois enseignantes, si on tient compte de l'analyse fine des discours, on peut conclure que l'utilisation des manuels semble caractéristique des profils des enseignantes. Tout se passe comme si :

- E1 copie le manuel. Du point de vue de l'utilisation de ses connaissances, on a l'impression qu'elle se situe juste au niveau des élèves,
- E3 reformule le manuel à un niveau légèrement supérieur mais s'y réfère lorsque les élèves montrent des difficultés de compréhension. Elle voudrait faire jouer certaines de ses connaissances d'autres niveaux mais ne pose pas d'échelon intermédiaire avec le niveau attendu des élèves,
- E2 s'inspire du manuel mais celui-ci n'est pas une contrainte. Elle oscille entre certains niveaux de ses connaissances et le niveau de ses élèves.

CONCLUSION

Éléments de critiques

Le faible nombre d'enseignantes observées est certainement insuffisant pour se faire une idée des différents profils que l'on peut trouver. Observer et analyser des séances où le même thème est abordé par tous les enseignants faciliterait certainement les comparaisons des analyses des discours ainsi que les mises en relation des comparaisons des discours et des manuels. Le nombre de séance analysée par enseignante est certainement lui aussi insuffisant.

Conclusion partielle

Pour les trois enseignantes le manuel apparaît comme un élément important devant lequel leurs connaissances résistent différemment : plus le manuel semble présent en classe et au cours de la préparation moins les connaissances privées des enseignantes semblent mobilisables. Quelles sont les conséquences que ce mode d'appropriation du manuel par les enseignantes peut entraîner chez les élèves ? Ici nous avons constaté que les prises en compte des élèves étaient variées : trois enseignantes trois profils mais trois profils qui peuvent être mis en relation avec le mode d'utilisation des manuels. La richesse du milieu didactique dans lequel se trouvent les élèves semble être influencée par ce mode d'utilisation du manuel[7] et peut être pouvons-nous inférer des conséquences sur les apprentissages des élèves (au moins sur le moment et à court terme). Un constat provisoire est que le mode d'utilisation du manuel par l'enseignant risque de renforcer les conséquences de la fréquentation individuelle et privée aux mathématiques des élèves[8]. De façon caricaturale cela veut dire que si les élèves ont une « bonne » fréquentation aux mathématiques, leur apprentissage sera renforcé, si les élèves ont une « mauvaise » fréquentation aux mathématiques, leur apprentissage sera fragilisé.

La suite constitue une partie de la conclusion qui porte sur l'ensemble du travail présenté en introduction et déborde la seule utilisation du manuel par les enseignants.

Relecture plus globale des résultats

En relisant les résultats de façon plus globale, on constate des libertés ainsi que des contraintes. Je supposais l'existence de marges de manœuvre : nous les voyons apparaître ici avec l'utilisation des connaissances personnelles des enseignantes autres que celles exposées : quasi absente pour E1, présentent pour E2 et E3. Du point de vue de l'utilisation des connaissances personnelles l'investissement n'est pas le même pour les trois enseignantes. E1 donne l'impression de se l'interdire, E2 donne l'impression de vouloir les partager avec les élèves, E3 donne l'impression d'instaurer une frontière entre elle et les élèves comme si ses connaissances plus avancées ne pouvaient pas leur être utiles. Dans l'ensemble, on ne peut pas affirmer l'oubli ou l'absence de connaissances personnelles d'autres niveaux que celui des élèves. Il y a certainement

---

[7] Si l'utilisation du manuel par l'enseignant est pertinente le milieu didactique des élèves est riche. Moins l'utilisation est pertinente, plus pauvre est le milieu didactique : peu d'explications variées, pas de changement de cadre, pas de mise en perspective des contenus➔ réduction de l'espace mathématique des élèves.

[8] Une seule pensée qui est l'écrit du manuel non interprété, non discuté et seul recours, ce que les élèves expriment en cours ne trouve pas d'écho ; il n'y a donc n'y correction argumentée ni encouragement à poursuivre dans la direction esquissée ➔ renforcement de la fréquentation privée des mathématiques par les élèves.

différent type d'adaptation plus ou moins minimaliste entre le mode de gestion de la classe (représentation des besoins des élèves) et la disponibilité des connaissances. La comparaison au seul manuel de classe est probablement réductrice : les enseignantes utilisent certainement d'autres outils. Cependant cette comparaison s'est avérée concluante et semble vouloir dire que le mode d'appropriation de ces outils se répercute en classe. Il y a peut-être une régularité entre leur utilisation au moment des préparations et la restitution en classe. Une question se pose qui intéresse la formation : comment l'expérience va changer ces choix ?

ATELIERS

PROCESSUS DE FORMATION DE PE1 ET ANAMNÈSE[1] GÉOMÉTRIQUE.

Alain Kuzniak
Jean-Claude Rauscher
IUFM d'Alsace, IREM de Strasbourg

Résumé :
Que reste-t-il de l'enseignement de la géométrie lorsqu'on a presque tout oublié et qu'on doit à son tour enseigner cette discipline ?
Lors du colloque Copirelem 2002, nous avons présenté un dispositif de formation qui sur un temps bref tente de sensibiliser les étudiants à la diversité des approches de la géométrie.
Dans cet atelier, nous revenons sur ce dispositif mais nous essayons aussi d'envisager les informations que nous apportent les réactions des étudiants sur l'état de l'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire

PRÉSENTATION DE L'ATELIER.

Lors du colloque Copirelem de La Roche sur Yon, nous avons présenté aux participants puis discuté avec eux un dispositif de formation expérimenté lors de l'année 2001/2002. Sur un temps bref, il tente de sensibiliser les étudiants à la diversité des approches de la géométrie. Les étudiants doivent résoudre des problèmes puis effectuer un retour réflexif sur leurs productions.

Cette année, nous avons à nouveau présenté, mais plus succinctement, notre action de formation légèrement modifiée par rapport à l'année 2001/2002 pour mieux tenir compte des contraintes institutionnelles.

Plus succinctement car c'est en fait une autre question que celle du dispositif de formation que nous avons mis plus particulièrement au centre de notre atelier cette année : c'est la question des connaissances acquises par les étudiants et des conceptions de la géométrie qu'ils gardent de leur scolarité. Les réactions des étudiants peuvent donner des indications sur l'état de l'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire .

Quelques productions et réactions d'élèves de troisième à propos des mêmes supports ont contribué à notre exploration.

L'examen de l'évolution de deux étudiants PE montre enfin les possibilités et les limites de notre procédure de formation.

[1] Anamnèse : renseignements fournis par le sujet ou son entourage sur l'histoire de sa maladie.

PRÉSENTATION DU PROCESSUS DE FORMATION.

Le processus de formation comporte deux grandes phases pour les étudiants. Il se déroule sur trois séances d'environ trois heures.

1. La **première phase** repose entièrement sur un questionnaire écrit et individuel dont certains éléments servent ensuite à la deuxième phase gérée plus collectivement.

Trois exercices (Annexe 1) :

Deux exercices de mathématiques de fin de Collège que les étudiants doivent résoudre et sur lesquels ils sont invités à exprimer « les incertitudes ou les difficultés qu'ils y ont rencontrées ».

Un exercice de début de Collège où, cette fois, les étudiants doivent s'interroger sur « les incertitudes ou les difficultés que les élèves peuvent rencontrer dans cet exercice ». Cette formulation les invite à dépasser leur posture d'étudiant pour adopter celle de leur futur métier.

Tableau résumé de la phase 1.

<table>
<tr><th></th><th>Tâche principale à effectuer dans l'exercice.</th><th>Tâche à effectuer par l'étudiant après avoir résolu l'exercice.</th><th>Fonction de cette deuxième tâche.</th></tr>
<tr><td>Exercice 1
Niveau $4^{\text{ème}}$</td><td>Prendre position sur des affirmations au sujet de la nature d'un quadrilatère et la justifier.</td><td rowspan="2">Évoquer les incertitudes ou les difficultés rencontrées par l'étudiant lui-même</td><td rowspan="2">Regard de l'étudiant sur ses connaissances.</td></tr>
<tr><td>Exercice 2
Niveau $4^{\text{ème}}$</td><td>Prendre position au sujet de la nature d'un quadrilatère et la justifier.
Modifiez l'énoncé et justifier cette modification</td></tr>
<tr><td>Exercice 3
Évaluation nationale $6^{\text{ème}}$.</td><td>Trouver la longueur d'un segment dans une figure et expliquer sa réponse.</td><td>Imaginer les incertitudes ou les difficultés rencontrées par les élèves</td><td>Se représenter les conceptions et connaissances des élèves.</td></tr>
</table>

2. La **deuxième phase** propose aux étudiants :

- Une activité pouvant mettre en jeu la Géométrie I aussi bien que la Géométrie II (voir plus loin le cadre théorique évoqué à ce propos).
- Deux reprises concernant des productions liées au questionnaire précédent. Ceci permet aux étudiants un retour réflexif sur leur propre rapport aux contenus mathématiques mis en jeu dans les exercices.
- Une institutionnalisation des repères utilisés pour situer les activités en géométrie et les enjeux des apprentissages à l'école.

L'activité consiste à compléter des arcs de cercle dont on ne connaît pas les centres. Les étudiants sont libres du choix des instruments et les méthodes utilisées. Des justifications sont sollicitées a posteriori.

La première reprise s'intitule *"Géométrie : Charlotte et Marie, qui a raison et pourquoi ? Les étudiants ne sont pas d'accord…".* (Annexe 2). Les étudiants ont à lire puis à analyser et à caractériser quatre réponses données à l'exercice 1 de la phase 1. Ils doivent aussi dire de quelle réponse leur production initiale était proche et pourquoi, avant de signaler s'ils modifieraient maintenant leur réponse et dans quel sens.

La semaine suivante, il est proposé aux étudiants une feuille avec les résultats codés de leurs productions et de leurs évolutions. Le travail consiste à mettre en parallèle les exercices, les réponses, les codages pour saisir la signification de ces derniers et ainsi prendre connaissance du cadre théorique qui sous-tend l'analyse. GI et GII sont ainsi présentés. Les discussions qui s'engagent permettent de situer la relativité de la pertinence de l'une ou l'autre réponse.

Enfin, le dernier travail porte sur l'exercice 3, des productions d'élèves de sixième sont données et doivent être analysées par écrits individuels. La synthèse à l'oral des réponses permet de faire un point sur les enjeux des apprentissages en géométrie à l'école et au début du collège.

Tableau résumé de la phase 2.

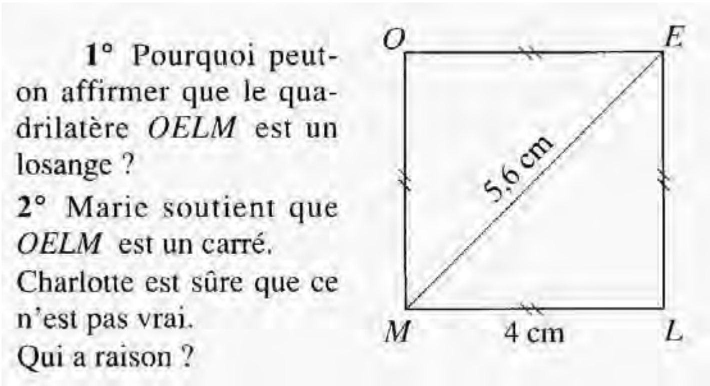
Corpus pris en compte dans la deuxième phase	Tâches à effectuer par les étudiants	Fonction de la tâche et effets recherchés.
	Compléter des arcs de cercles dont le centre n'est pas connu.	Mise en œuvre d'une géométrie instrumentée se situe dans une géométrie I mais qui peut faire appel à la géométrie II pour déterminer ou justifier les constructions. (références aux géométries Iet II non explicitées par l'enseignant)
Quatre réponses d'étudiants à l'exercice 1 produites lors de la première phase.	- Analyser les réponses. - Situer sa propre production par rapport aux quatre proposées. - Signaler de quelle production on se rapprocherait si c'était à refaire.	Regard comparatif sur les connaissances et conceptions des étudiants. Effet : retour réflexif sur ses propres conceptions.
Feuille avec les résultats codés du groupe	Chaque étudiant doit se repérer. Commentaires en parallèle de la feuille de codage et des exercices.	Prise de conscience de la signification du codage. Discussions autour de la pertinence des réponses. Effet : remise en cause de points de vue initiaux. Initiation au cadre théorique GI et GII
Quatre productions d'élèves issues de l'évaluation nationale.	Analyser les productions des élèves.	Comparer les conceptions des élèves à ce qu'on en imaginait a priori. Effet : repérage d'enjeux d'apprentissage à l'école primaire. Synthèse à ce sujet

ANALYSE DES EXERCICES DONNÉS AUX ÉTUDIANTS LORS DE LA PREMIÈRE PHASE.

Les exercices sont choisis pour mettre les difficultés des étudiants en perspective avec celles que rencontrent les élèves de l'école primaire ou du collège.

Dans tous les exercices proposés, une figure est présente. Les données du problème sont indiquées soit sur la figure elle-même (angles droits codés, mesure de longueurs en cm…), soit dans un texte accompagnant la figure (ABCD est un rectangle, ABCD est un carré de côté 5 cm). Ces données permettent de répondre aux questions sans recours à l'apparence de la figure ou à des mesures supplémentaires. Il est donc possible de traiter ces exercices en Géométrie II. Dans les deux premiers exercices, la conclusion donnée par le calcul est en contradiction avec l'appréhension perceptive. Détaillons ce point sur le problème de Charlotte et Marie (Exercice 1).

L'exercice choisi (Hachette Cinq sur Cinq 4ème 1998, page 164) entre dans cette catégorie d'exercices de géométrie où se pose clairement la question de l'existence d'un espace de travail idoine pour résoudre le problème.


1° Pourquoi peut-on affirmer que le quadrilatère *OELM* est un losange ?
2° Marie soutient que *OELM* est un carré.
Charlotte est sûre que ce n'est pas vrai.
Qui a raison ?

Le dessin proposé à l'étude ressemble à un carré mais son statut dans le problème n'est pas clair. Il possède certaines particularités d'un dessin coté : les côtés du quadrilatère sont codés et indiquent leur égalité, des mesures figurent sur le dessin. Mais quelle est l'origine de ces mesures ? S'agit-il de mesure effectuées sur une figure préexistante ou sont-elles, notamment pour la diagonale, le fruit d'un calcul ? La longueur de la diagonale [ME] est donnée au dixième de cm près (5,6 cm), ce qui peut incliner à penser qu'il s'agit d'une mesure réelle. Mais, comme d'autre part le problème est issu d'un livre de fin de collège, on peut penser à une mesure théorique plus conforme au contrat didactique usuel dans ce type de classe.

Ainsi, le dessin est-il une donnée première, un objet réel, que le problème se propose d'étudier ou résulte-t-il d'une construction à partir d'un cahier des charges précisé dans un texte ? Dans ce cas la réalisation pratique est-elle importante ou n'est-elle qu'un support pour aider le raisonnement ?

Le texte du problème doit normalement permettre de répondre à ces questions et déterminer le statut de l'objet figuré et ainsi orienter vers un paradigme géométrique précis. Mais de fait l'énoncé ne donne aucune indication sur ce point car comme le signale un étudiant : *il n'y a pas de textes pour l'énoncé, il n'y a qu'un dessin qui peut tromper.* Seul semble acquis le fait que le quadrilatère est un losange, savoir s'il s'agit d'un carré ou non est laissé à la charge de l'élève.

Finalement, est-ce Charlotte ou Marie qui a raison ? Une façon classique de traiter ce type d'exercice consiste à utiliser le théorème de Pythagore qui évite le recours à une mesure effective de l'angle. Mais là encore, nous allons voir resurgir l'ambiguïté sur le choix de l'espace de travail. Pour notre propos, nous introduirons deux formes du théorème de Pythagore, une forme abstraite classique portant sur des nombres réels et sur des égalités

Si le triangle ABC est rectangle alors $AB^2+BC^2=AC^2$

et une forme concrète pratique qui utilise des nombres approchés et, de façon moins courante, des figures approchées

Si le triangle ABC est « à peu-près » rectangle alors $AB^2+BC^2 \approx AC^2$

La première forme permet de basculer simplement dans une Géométrie qui s'écarte des données de l'expérience en raisonnant ici de manière élémentaire dans le cadre numérique. Quant à la seconde formulation, elle apparaît plutôt comme une forme avancée de Géométrie I.

Si l'on se place en Géométrie II, en utilisant la forme abstraite du théorème de Pythagore, alors on peut raisonner comme le propose un étudiant et donner raison à Charlotte :

On sait que si OEM est rectangle en O alors on a $OE^2+OM^2=ME^2$
On vérifie $4^2+4^2=5{,}6^2$ *et* $32 \neq 31{,}26$. *Donc OEM n'est pas un triangle rectangle.*

Si on utilise le théorème de Pythagore **pratique** dans un cadre mesuré alors on suivra plutôt le raisonnement proposé par un autre étudiant :

C'est un carré si un angle au moins est droit entre deux côtés.
L'angle MLE est droit si et seulement si :
$ML^2+LE^2=ME^2$ *d'après le théorème de Pythagore*
$16+16=32$ *or* $\sqrt{,32} \approx 5{,}6$
Marie a raison OELM est un carré.

En fait, il faudrait conclure qu'OELM est « presque » un carré mais comme on le sait, faute d'un langage adapté, il n'est pas possible aux élèves et aux étudiants de jouer sur ces différentes distinctions. Ils vont être de fait confrontés à un malentendu à la fois épistémologique et didactique sur lequel va s'appuyer notre séance de formation. En effet, ce problème très ambiguë en situation ordinaire de classe devient très riche pour une situation de formation et permet de travailler sur le jeu entre la Géométrie I et la Géométrie II.

LES OUTILS THÉORIQUES SUR LEQUEL S'APPUIE LE DISPOSITIF

Pour élaborer ce dispositif de formation, nous utilisons les paradigmes géométriques. Toutes les productions des étudiants sont analysées grâce à une double approche qui croise paradigmes géométriques et niveaux de Van Hiele. Nous renvoyons à notre compte-rendu de la Roche sur Yon (Kuzniak-Rauscher (2003)) pour tous les détails.

Rappelons simplement le tableau général que nous avons élaboré pour rendre compte des résultats d'un étudiant qui a déjà parcouru tout le cursus scolaire.

Tableau de Synthèse

	Géométrie I	**Géométrie II**	**Géométrie III**	
Niveau 0 **Visualisation**				pôle empirique (Intuition et expérience)
Niveau 1 **Analyse**			*Outil heuristique*	
Niveau 2 **Déduction informelle**	Transition			
Niveau 3 **Déduction démonstration**		Transition		pôle théorique (raisonnement déductif)
Niveau 4 **Abstrait Structure**				
	Horizon technologique	**Horizon axiomatique**	**Horizon formel**	

Nous donnons à titre d'illustration de notre méthode d'approche du travail géométrique l'analyse des réponses données par les étudiants et les collégiens. Signalons qu'un peu plus de la moitié des étudiants de cette cohorte avait choisi Marie (le carré) plutôt que Charlotte. Les problèmes avaient été donnés avant toute révision de géométrie.

En ce qui concerne les paradigmes géométriques nous avons pris en considération le fait que les étudiants ou élèves prennent en compte (Géométrie I) ou non (Géométrie II) des indices visuels ou des indices repérés par des instruments (règle graduée et équerre en l'occurrence). Nous classons aussi en GI les cas qui réfèrent au *théorème de Pythagore* ***pratique*** dans un cadre mesuré (voir plus haut).

Pour les niveaux de Van Hiele nous avons classé en niveau 1 les productions qui énumèrent une liste non minimales de propriétés des quadrilatères particuliers en jeu pour justifier les affirmations. En niveau 2, nous mettons en particulier les productions qui évoquent une relation d'inclusion correcte entre l'ensemble des carrés et l'ensemble des losanges. En niveau 3 figurent les productions qui utilisent des informations minimales et suffisantes pour justifier les affirmations.

UN REGARD SUR DES PRODUCTIONS D'ÉTUDIANTS ET D'ÉLÈVES DE TROISIÈME.

Voici le corpus qui a été présenté aux participants de l'atelier et nos éléments d'analyse.

Rep A (C'est une étudiante de PE1, préparation du CAPE)

> *1°) Le quadrilatère OELM est un losange. Celui-ci répond aux caractéristiques d'une telle figure : les 4 côtés sont égaux ; les diagonales se coupent en leur milieu et forment un angle droit..*
>
> *2°) Les deux filles ont raison, OELM est un carré car il a 4 côtés égaux et 4 angles droits. Il est aussi un losange, même si cette figure qu'est le losange ne se construit pas forcément avec des angles droits.*

Elle justifie sa première réponse en énumérant une liste de propriétés des losanges. Nous classons donc sa production au niveau 1 de Van Hiele.

Les propriétés repérées sont justifiées en partie par des prises d'indices visuels ou instrumentés. Cette étudiante considère donc la figure dans sa réalité matérielle et nous la situons dans une Géométrie 1.

Il est à remarquer que la réponse à la $2^{ème}$ question *"Les deux filles ont raison"* se rencontre assez fréquemment. Sa justification montre alors que l'énoncé "Charlotte est sûre que ce n'est pas vrai" est interprété à tort comme "Charlotte affirme que c'est un losange" occultant en fait l'affirmation "Ce n'est pas un carré". L'étudiante se focalise alors sur la question du lien entre l'ensemble des carrés et l'ensemble des losanges. C'est une question classique (mais qui n'est pas celle qui est posée) à laquelle l'étudiante sait répondre et qui montre qu'elle est entrée dans le classement des figures (niveau 2 de Van Hiele).

Rep B. Il s'agit d'une étudiante.

> *1) OELM est un losange car ses côtés successifs sont égaux deux à deux.*
>
> *2) Si OELM est un carré, alors MEL est un triangle rectangle en L. Selon le théorème de Pythagore on aurait alors,* $ME^2 = ML^2 + LE^2$ $ML^2 + LE^2 = 16 + 16 = 32$
>
> $ME^2 = 5{,}6^2 = 31{,}36$
>
> *L'angle ELM n'est donc pas un angle droit.*
>
> *Par conséquent, OELM n'est pas un carré et c'est Charlotte qui a raison.*

Les seules informations qui sont utilisées sont celles qui sont données par l'énoncé (codage de segments de même longueur, indication sur les mesures des longueurs) et le théorème de Pythagore est utilisé dans toute sa rigueur formelle. Cette production réfère donc à la Géométrie 2.

Les propriétés utilisées pour démontrer qu'il s'agit d'un losange (4 côtés de même longueur) et qu'il ne s'agit pas d'un carré (contraposée du théorème de Pythagore) sont minimales et suffisantes. Nous référons donc cette production au niveau 3 de Van Hiele.

Rep C. Elève de $3^{ème}$.

> *1°) Nous pouvons affirmer que c'est un losange car le quadrilatère OELM a ses quatre côtés de même longueur alors c'est un losange.*
>
> *2°) D'après la réciproque du théorème de Pythagore appliqué au triangle OME*
>
> $ME^2 = 5{,}6^2 = 31{,}36$ $ME^2 \neq OE^2 + OM^2$ *donc le triangle n'est pas rectangle*
>
> $OE^2 + OM^2 = 4^2+4^2=16+16=32$

Le quadrilatère n'ayant pas d'angle droit est un losange donc Charlotte a raison.

Cette production d'un élève de troisième se rapproche beaucoup de la production de l'étudiante précédente. On y repère un ancrage convaincu (répétition des affirmations "c'est un losange", "alors c'est un losange") dans une géométrie hypothético-déductive (G2, VH3). Le théorème de Pythagore (même s'il y a confusion entre "réciproque" et "contraposée") est utilisé dans toute sa rigueur.

Rep D. Etudiante PE1.

1°) OELM est un losange car OE=OM=ML=LE et un losange a ses 4 côtés de même longueur.
2°) Marie a raison car tous les côtés du quadrilatère ont la même longueur et il y a au moins un angle droit. On peut le vérifier par le théorème de Pythagore . $ML^2+LE^2=ME^2$

$4^2+4^2=16+16=32$

$ME=\sqrt{,32} = 4\sqrt{2} \approx 5{,}6$ *donc MLE=90°*

Cette étudiante n'a pas tout oublié, bien au contraire…. Elle maîtrise bien les connaissances nécessaires pour justifier ses réponses. Mais elle utilise Pythagore dans sa forme pratique dans un cadre de mesures, forme que l'on rencontre quasiment jamais en 3ème mais qui apparaît après plusieurs années …quand on a tout oublié.…Elle utilise les propriétés de G2 pour travailler en G1.

Rep E. Élève de 3ème

1°) On peut dire que le quadrilatère OELM est un losange car : par hypothèse les quatre côtés du quadrilatère ont la même longueur or : un quadrilatère ayant quatre côtés de même longueur est un losange. Donc OELM est un losange.
2°) Marie a raison car le triangle OME est isocèle en O donc OEM=45° et OME=45°. Donc MOE=180°-45°x2=90°. Par hypothèse OM=OE. Le quadrilatère ayant deux côtés consécutifs perpendiculaires et de même longueur est un carré. Donc OELM est un carré.

Nous avons un élève qui sait visiblement "raisonner" dans un niveau 3 de Van Hiele mais prend partiellement la figure dans sa réalité matérielle comme base de sa prise d'informations (angles droits) et se situe donc dans un paradigme G1 où les propriétés de G2 sont utilisées comme des outils pour produire de nouvelles informations.

Rep F. Étudiante PE1.

1°) Les 4 côtés du quadrilatère sont parallèles entre eux et de même longueur OE=ML et OM=EL
Définition même du losange, de ce fait on peut dire que les diagonales ont même milieu et sont perpendiculaires entre elles.
2°) Marie a raison, OELM est aussi un carré car les côtés sont tous de même longueur : OE=ML=EL=OM=4cm.
<u>Rappelons</u> que le carré est aussi un losange mais qui a comme particularité d'avoir tous ses côtés de même longueur (<u>donc</u> forment des angles droits) et d'avoir ses diagonales de même longueur.

Avec cette étudiante, nous avons un profil assez fréquent. La syntaxe utilisée pourrait référer à un niveau 3 de Van Hiele : quelques implications en partie correctes sont évoquées. Mais le corps de connaissance est peu fiable. En particulier nous retrouvons là un "théorème étudiant ou élève" assez fréquent qui témoigne de cette instabilité : tout quadrilatère qui aurait 4 côtés égaux serait un carré. Par ailleurs nous sommes clairement dans une Géométrie 1 car des indices visuels sont utilisés pour étayer les "raisonnements".

Rep G. Élève de 3ème

Remarque : la diagonale OL a été tracé et un angle droit avec ME a été marqué *1°)On peut dire que OELM est un losange si :* *-par hypothèse tous les côtés ont même longueur* *-par hypothèse les diagonales (EM) $\perp$ (OL)* *2°) Marie a raison en disant que OELM est un carré car :* *- les diagonales ont même longueur* *- les diagonales sont perpendiculaires* *- les diagonales se coupent en leurs milieux* *- OM=ML=LE=EO=4cm.*

Nous plaçons cette production en Géométrie I. En ce qui concerne le niveau de raisonnement, nous évoquerons le niveau 2 de Van Hiele car le lien entre certaines propriétés de quadrilatères et leurs natures est évoqué. Mais comme pour la production F, le corpus de connaissances en jeu n'est pas fiable.

Comparaison étudiants-élèves de troisième :

En troisième, quand il est utilisé, le théorème de Pythagore l'est dans toute sa rigueur formelle qui semble résulter du contrat didactique fort mis en place dans cette classe d’examen. Les PE, quand ils l’utilisent, en proposent des interprétations différentes. Le contrat didactique est moins fort.

Au delà de cette différence on peut noter beaucoup de similitudes. Dans les deux populations on rencontre une variété importante quant au paradigme de géométrie utilisé. La différence entre dessin et figure (au sens de Parzysz) n'est pas faite, loin de là, ni pour les élèves de troisième ni pour les étudiants.

La forme de raisonnement est très variable également : tantôt on se base sur une accumulation d'arguments relatifs aux propriétés des figures, tantôt on utilise à bon escient les relations entre les propriétés des figures.

Le socle de connaissance des propriétés des figures est aussi variable en 3ème qu'en PE1. En particulier, dans les deux populations se rencontre l'idée que le fait d'avoir quatre côtés de même longueur suffit pour dire qu'il s’agit d’un carré. S'agit-il de la prégnance de l'aspect visuel de la figure ici proposée ou de la méconnaissance d'un degré de liberté ? Un test plus fin permettrait de voir ça de plus près. Mais surtout cette observation montre que tant pour certains étudiants que pour certains élèves de 3ème, un socle solide d'expérience de Géométrie I reste à construire : ce que nous appelions une géométrie de traitement ou une géométrie construite (Pluvinage-Rauscher 1986)

ÉVOLUTION ET STABILITÉ DES ÉTUDIANTS

Nous avons donné aux participants de l’atelier les réponses complètes à l’exercice Charlotte et Marie de deux étudiants PE1, Cyril et Aurélie. Nous avons aussi donné leurs réponses à une partie de la dernière phase (voir annexe 2) où ils doivent revenir sur leurs réponses et les comparer avec celles d’autres étudiants.

<table>
<tr><th>Cas de Cyril</th><th>Cas d'Aurélie</th></tr>
<tr><td colspan="2">1ère phase (résolution de l'exercice 1 et évocation des incertitudes et difficultés rencontrées) :</td></tr>
<tr><td>Il a dessiné la diagonale OL et écrit 5,8 le long de cette diagonale. On voit aussi des traces de construction au compas de la perpendiculaire à(ML) passant par L.</td><td>Elle a dessiné la diagonale OL et a désigné le point d'intersection des diagonales par la lettre A.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Réponse à la question 1 :</td></tr>
<tr><td>OELM est un losange car tous les côtés sont égaux, chacun des côtés opposés est parallèle à l'autre et les diagonales se coupent chacune en leur milieu.</td><td>Un losange est un quadrilatère dont les 4 côtés sont égaux et dont les diagonales sont perpendiculaires. Or, dans le quadrilatère OELM, OE=EL=LM=MO. De plus [OL] est perpendiculaire à [ME].</td></tr>
<tr><td colspan="2">Réponse à la question 2 :</td></tr>
<tr><td>Je pense que c'est Charlotte car ses diagonales ne sont pas de même longueur. De plus en prolongeant la demi-droite [ML) et en traçant (au compas) une médiatrice passant par L, cette dernière ne correspond pas exactement à EL.</td><td>OELM est un carré car il est formé de 4 angles droits. Marie a donc raison.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Quelles sont les incertitudes ou les difficultés que vous venez de rencontrer dans cet exercice ?</td></tr>
<tr><td>Au niveau visuel, on voit effectivement un carré. Incertitude quant aux réelles propriétés du carré et du losange.</td><td>Peut-on dire que les diagonales sont vraiment perpendiculaires ? Peut-on dire que le quadrilatère possède 4 angles droits ? En plaçant son équerre, oui. En calculant avec Pythagore, ce n'est pas exact, mais approximatif. 5,62 = 31,36 ≠ 32</td></tr>
<tr><td colspan="2">2ème phase (retour réflexif sur ses connaissances à partir du corpus de 4 productions d'étudiants dans la phase 1)</td></tr>
<tr><td colspan="2">De quelle production, votre réponse initiale était-elle la plus proche ? Pourquoi ?</td></tr>
<tr><td>La A : j'ai aussi travaillé avec les diagonales en traçant la deuxième.</td><td>Je pense que ma production initiale est plus proche de celle de l'étudiant C, mais je crois n'avoir pas eu le temps de développer mon calcul. De plus j'ai hésité entre la démonstration avec Pythagore et l'observation de la figure. J'ai préféré (malheureusement) l'approximation et j'ai répondu que Marie avait raison.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Et si c'était à refaire maintenant, de quelle production votre réponse serait-elle la plus proche ?</td></tr>
<tr><td>La C : je pense que c'est la plus juste en raison de sa précision.</td><td>Je répondrais comme l'étudiant C, mais complètement cette fois.</td></tr>
</table>

Aurélie et Cyril n'appartiennent pas aux mêmes populations initiales que notre étude permet de dégager à partir des réponses au problème de Charlotte et Marie.

Cyril se rattache à un groupe très attaché au travail expérimental sur le dessin et à la notion de précision. Ces étudiants se situent en Géométrie I avec un appui net sur l'expérience. Cyril semble évoluer grâce à l'analyse des productions vers un groupe qui raisonne toujours en Géométrie I mais en se basant sur des propriétés qui peuvent dispenser de l'usage direct des instruments de mesure (dans notre cas le théorème de Pythagore pratique).

Aurélie est un cas particulièrement complexe que l'on ne peut analyser que grâce aux questions qui lui ont permis d'exprimer les difficultés qu'elle a rencontrées. Dans un premier temps, elle se situe plutôt dans une Géométrie I axée sur les propriétés. Mais ensuite, elle s'inscrit dans une perspective de Géométrie II qui s'éloigne du dessin pour raisonner au sein du cadre théorique. Elle fait partie des étudiants en transition qui semble profiter au mieux de notre dispositif.

CONCLUSION

Nous terminons par quelques considérations sur la formation à assurer auprès des futurs PE et sur l'enseignement de la géométrie dans le cadre du collège et du lycée.

Nos observations permettent d'esquisser une première typologie des étudiants qui préparent le concours du professorat d'école. Elle donne des indications sur leurs besoins de formation dans le domaine de la géométrie.

Un premier type d'étudiants dont la situation initiale se caractérise par des connaissances solides en Géométrie II. L'étudiante B (Rep B) en est, à nos yeux, une représentante. Très souvent, il s'agit d'étudiants qui ont suivi préalablement des filières scientifiques. A priori ces étudiants sont bien armés, en tout cas pour réussir le volet 1 de l'épreuve du concours qui permet souvent d'évaluer la maîtrise par les candidats de ce type de géométrie. Mais le chemin qui reste à parcourir pour situer les enjeux de l'enseignement de la géométrie à l'école pour aller vers le collège n'est pas négligeable : il s'agit de concevoir que la Géométrie II n'est pas la seule vérité et qu'elle n'est pas transmissible d'emblée aux enfants. C'est là que notre dispositif de formation confrontant les étudiants à des productions d'élèves de début de collège (voir dernière ligne tableau résumé de la phase 2) permet parfois une prise de conscience. C'est le cas si l'on en croit cette étudiante qui déclare au sujet de réponses d'élèves de sixième à propos de l'exercice 3 (voir annexe 1) : *"J'ai été très surprise par le fait que les élèves mesurent le segment ."* Et une autre qui dit : *"Ces productions d'élèves me montrent que je ne réfléchis plus comme les enfants, au lieu de chercher plus simplement, je cherche toujours des propriétés, des théorèmes etc.* Un troisième se rend compte du fait que *"pour les élèves géométrie signifie, mesure et outil et donc règle"*

La réponse D est représentative d'**un deuxième type** d'étudiants. Ces étudiants n'ont pas tout oublié, bien au contraire. Ils maîtrisent assez bien les connaissances nécessaires pour justifier leurs réponses. Ils gardent de leurs études un bon souvenir des propriétés qu'ils utilisent pour travailler en Géométrie I, par exemple en utilisant le théorème de Pythagore dans sa forme pratique dans un cadre de mesures. Ces étudiants possèdent a priori les outils pour discerner les différents paradigmes en géométrie et comprendre certains enjeux de l'enseignement de la géométrie dans le cadre de la scolarité obligatoire. Le coup de pouce constitué par le retour réflexif sur des productions variées peut s'avérer suffisant : le cas d'Aurélie que nous avons considéré précédemment est éloquent à ce sujet.

Dans notre typologie, il reste **un troisième type,** très hétérogène**,** à considérer, le plus épineux pour les formateurs ! L'étudiante qui donne la réponse A en est un exemple. Avant de discerner certains enjeux de l'enseignement de la géométrie dans le cadre de la scolarité obligatoire, il faudra que ces étudiants puissent trouver ou retrouver une géométrie où les propriétés des figures s'ordonnent, puis s'organisent en un corpus de propriétés cohérentes. Le chemin est certainement encore paradoxalement plus long lorsqu'il faut revenir (comme pour l'étudiant qui donne la réponse F) sur un "vernis" de connaissances de Géométrie II. Il s'agit alors de reconstruire un corpus de connaissances et d'expériences de la Géométrie I pour entrer ensuite dans une Géométrie II avec un bagage plus assuré. Vaste programme, pour une formation au temps très mesuré.

Pour finir, une dernière et importante considération en forme de **question à propos de l'enseignement de la géométrie dans le cadre de la scolarité obligatoire**. Le fait que les types 2 et 3 soient massivement représentés chez nos étudiants permet de s'interroger sur la réussite du passage d'une Géométrie I à une Géométrie II dans le cadre des efforts d'enseignement au collège et au lycée. En effet, pour ces étudiants, "que reste-t-il quand ils ont tout oublié" ? Le dessin en géométrie semble finalement plus ou moins considéré comme l'objet réel de leurs investigations et questionnements ! Cela semble paradoxal, quand on sait la "rigueur" que les enseignants de collège et de lycée déclarent essayer de transmettre à leurs élèves. Mais sur les causes possibles d'un tel phénomène une enquête et une réflexion complémentaires sont nécessaires. Bien qu'ayant quelques hypothèses à ce sujet, nous ne les développons pas ici, nous contentant de renvoyer nos lecteurs et les participants à l'atelier à leurs réflexions et en leur donnant, espérons nous un rendez vous prochain à ce sujet.

BIBLIOGRAPHIE

Fischbein E.(1987) *Intuition in Science and Mathematics*. An educational Approach. Reidel

Gonseth F. (1945-1954) *La géométrie et le problème de l'espace*. Ed du Griffon Lausanne.

Houdement C. et Kuzniak A. (1999) Quelques éléments de réflexion sur l'enseignement de la géométrie : de l'école primaire à la formation des maîtres *Revue Petit X n°51* Article repris dans la revue *Grand N n°58.*

Houdement, C. and Kuzniak, A. (2002). Pretty (good) didactical provocation as a tool for teachers' training in geometry. *Proceedings of CERME 2*. 292-304. Prague: Charles University. (Disponible sur le Web).

Houdement, C. and Kuzniak, A. (2002). Approximations géométriques *Revue l'Ouvert n°105.* Irem de Strasbourg. Université Louis Pasteur. Strasbourg.

Kuzniak A. et Rauscher JC, (2003) Autour de quelques situations de formation en géométrie pour les professeurs d'école, in *Actes du XXIXème colloque COPIRELEM, La Roche sur Yon, mai 2002,* IREM des Pays de la Loire.

Parzysz (2001) Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1. Actes du Colloque inter Irem des formateurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres. Université de Tours.

Pluvinage F., Rauscher J-C, (1986). La géométrie construite mise à l'essai, in *Petit x n°11*, IREM de Grenoble, 5-36

Rauscher J.C. (1993) L'hétérogénéité des professeurs face à des élèves hétérogènes : cas de l'enseignement de la géométrie au début du collège. Université de Strasbourg.

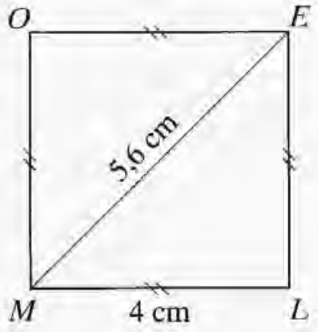
Rauscher J-C (1998), Quelques repères pour enseigner la géométrie au début du collège, in *Des Mathématiques en sixième,* Bulletin Inter-Irem Premier Cycle, p 115 à 127

Van Hiele P.M. (1986) Structure and Insight. A theory of Mathematics Education. Academic Presss Orlando.

Annexe 1: Documents de la Phase 1

EXERCICE 1

1° Pourquoi peut-on affirmer que le quadrilatère *OELM* est un losange ?
2° Marie soutient que *OELM* est un carré.
Charlotte est sûre que ce n'est pas vrai.
Qui a raison ?



Pourquoi ?

Réponse à la question 1 :

Réponse à la question 2 :

Quelles sont les incertitudes ou les difficultés que vous venez de rencontrer dans cet exercice ?

EXERCICE 2

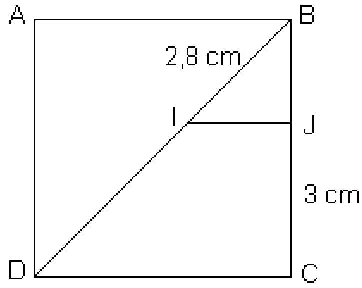
Construire un carré ABCD de côté 5 cm. 1) Calculer BD. 2) Placer le point I de [BD] tel que BI=2,8 cm puis le point J de [BC] tel que JC=3 cm. La droite (IJ) est-elle parallèle à la droite (DC) ?	

Figure :

Réponse à la question 1 :

Réponse à la question 2 :

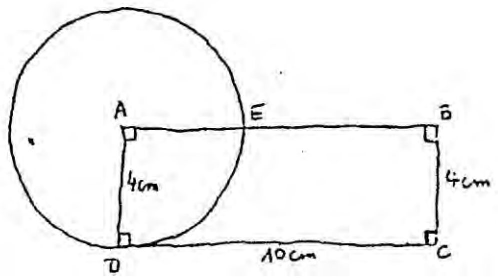
Quelles sont les incertitudes ou les difficultés que vous venez de rencontrer dans cet exercice ?

EXERCICE 3

Voici un exercice posé en évaluation en début de sixième.
Répondre sur la feuille à la question posée.

<u>Exercice 14</u>

Sur ce dessin à main levée, on a représenté un rectangle ABCD et un cercle de centre A qui passe par D. Les mesures réelles sont en centimètres.
Ce cercle coupe le segment [AB] au point E.



Trouve la longueur du segment [EB]. ....

Explique ta réponse : ....

....

....

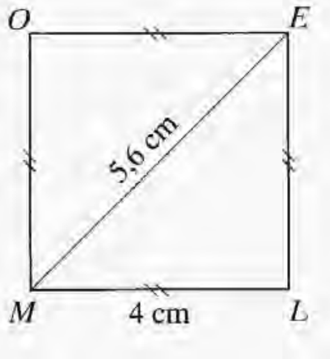
2) Quelles sont les incertitudes et les difficultés que les élèves peuvent rencontrer dans cet exercice.

Annexe 2:
Géométrie : Charlotte et Marie, qui a raison et pourquoi ? Les étudiants ne sont pas d'accord…

Rappel de l'exercice 1 :

1° Pourquoi peut-on affirmer que le quadrilatère *OELM* est un losange ?

2° Marie soutient que *OELM* est un carré. Charlotte est sûre que ce n'est pas vrai. Qui a raison ?



Pourquoi ?

Ci-dessous vous avez 4 réponses d'étudiants. Vous allez lire ces réponses et répondre ensuite aux questions qui figurent sur la deuxième page.

Réponses de l'étudiant A

1) *OELM est un losange car : ses quatre côtés sont égaux*
ses angles sont droits
ses diagonales se coupent en formant des angles droits

Remarque : l'étudiant a construit la deuxième diagonale sur la figure

2) *Marie a raison c'est un carré, puisque en plus d'être un losange, OELM a ses diagonales de même longueur, OELM est un losange particulier.*

Réponses de l'étudiant B

1°) Les 4 côtés du quadrilatère sont parallèles entre eux et de même longueur OE=ML et OM=EL

Définition même du losange, de ce fait on peut dire que les diagonales ont même milieu et sont perpendiculaires entre elles.

2°) Marie a raison, OELM est aussi un carré car les côtés sont tous de même longueur : OE=ML=EL=OM=4cm.

Rappelons que le carré est aussi un losange mais qui a comme particularité d'avoir tous ses côtés de même longueur (donc forment des angles droits) et d'avoir ses diagonales de même longueur.

Réponses de l'étudiant C

1) OELM est un losange car ses côtés successifs sont égaux deux à deux.

2) Si OELM est un carré, alors MEL est un triangle rectangle en L. Selon le théorème de Pythagore on aurait alors, $ME^2 = ML^2 + LE^2$ $\quad ML^2 + LE^2 = 16 + 16 = 32$

$ME^2 = 5{,}6^2 = 31{,}36$

L'angle ELM n'est donc pas un angle droit.

Par conséquent, OELM n'est pas un carré et c'est Charlotte qui a raison.

Réponses de l'étudiant D

1°) OELM est un losange car OE=OM=ML=LE et un losange a ses 4 côtés de même longueur.

2°) Marie a raison car tous les côtés du quadrilatère ont la même longueur et il y a au moins un angle droit. On peut le vérifier par le théorème de Pythagore . $ML^2+LE^2=ME^2$

$4^2+4^2=16+16=32$

$ME=\sqrt{,32} = 4\sqrt{2} \approx 5{,}6$ *donc MLE=90°*

Nom : **Prénom :**

1ère question :Indiquez dans chaque production ce qui est <u>principalement</u> à remarquer et ce qui vous semble caractériser cette production.

Réponses de l'étudiant A :

Réponses de l'étudiant B :

Réponses de l'étudiant C :

Réponses de l'étudiant D :

2ème question : De quelle production, votre production initiale était elle la plus proche ? Pourquoi ?

3ème question : Et si c'était à refaire maintenant, de quelle production votre réponse serait elle la plus proche et pourquoi ?

4ème question : Finalement de Charlotte ou de Marie qui a raison et pourquoi ?

RATIONNELS, PROPORTIONNALITÉ ET DOUBLE ÉCHELLE DANS UN ENVIRONNEMENT INFORMATIQUE

ADJIAGE Robert,
IUFM d'Alsace[1], Strasbourg

Résumé :
Cet article présente les travaux de l'atelier A2 intitulé « Proportionnalité et double échelle dans un environnement informatique ». J'y décrirai un aperçu de mon projet théorique d'approche des rationnels et de la proportionnalité à la charnière école / collège, j'exposerai les temps forts d'un protocole d'enseignement en 6ème et en 5ème sur le même sujet, je présenterai les logiciels de la série NovOra[2], spécialement conçus et développés pour cette ingénierie. Cet article est une réécriture de la communication initiale, enrichie d'idées et d'éclaircissements que le débat et le TP d'exploration des logiciels qui s'en est suivi ont contribué à faire émerger.

COMPLEXITÉ DE LA NOTION DE RATIONNEL

Je distingue quatre variables pour une étude didactique des rationnels et de la proportionnalité à la charnière école / collège :

1. Registre d'expression (langue naturelle, nombres entiers, écritures fractionnaires, écritures décimales, droites graduées, surfaces fractionnées…) des données et / ou du traitement.
2. Nature de l'expérience physico-empirique à laquelle renvoie le problème posé (Transparent Cop/03-1).
3. Nature mathématique de la question du problème posé (recherche d'une quatrième proportionnelle, comparaison de rapports..).
4. Nature du rapport, externe ou interne (Comin ; 2000, pp. 100-101), utilisé pour fournir les données et / ou pour un traitement.

Tout en tenant compte des variables 3 et 4, je me suis particulièrement penché sur les variables 1et 2, moins étudiées que les précédentes, et pourtant pertinentes ainsi que je vais l'établir ici de façon essentiellement qualitative.[3]

[1] Centre de Recherche sur la Formation/ CeRF-EA 2182 /IUFM d Alsace
Nouvelles modalités d'action(s) didactique(s) en mathématiques, enjeux d'enseignement et de formation.

[2] NovORa est une suite à la série des logiciels ORATIO, supports d'un protocole d'enseignement des rationnels en fin de cycle 3, réalisé de mars 1997 à juin 1998. ORATIO et le protocole ont été présentés au colloque de la COPIRELEM en mai 2000.

[3] Des données statistiques quantitatives sont en cours de traitement. Les premiers résultats font apparaître des différences significatives dans les résultats. Par exemple : un problème de comparaison de mélanges lait / chocolat (3 choc ; 2 lait vs 2 choc ; 1 lait), un problème de comparaison de fréquences réussite/échec (3R ; 2E) vs (2R ; 1E) ont engendré, avant

PERTINENCE DE LA VARIABLE 1

Ma première expérience d'enseignement des rationnels au cycle 3 (Adjiage ; 2001a) reposait sur un constat, une hypothèse et une première série de logiciels. Elle a débouché sur une première approche de la complexité d'un rationnel à ce stade de la scolarité et sur des résultats plus que satisfaisants en ce qui concerne les acquisitions.

Un constat

La difficulté d'acquisition de la notion de rationnel est au moins autant sémiotique : expressions et traitements fractionnaires, articulation de ce mode d'expression avec d'autres modes d'expression : langue naturelle, droites graduées, écritures décimales…. ; que conceptuelle : concevoir un objet rationnel à partir de la résolution de problèmes liés aux grandeurs, sur lesquels Brousseau (1986 et 1987) et Douady (1986) notamment ont construit leur ingéniérie. Or, j'ai pour ma part pu constater, lors d'observations de classes, que nombre d'élèves traitent un type de problème comme celui évoqué par le transparent Cop/03-2 avec une certaine habileté rhétorique, alors que les mêmes élèves, s'ils sont amenés, en raison d'un coût de traitement trop élevé ou d'une contrainte pédagogique, à remplacer les mots de la langue naturelle par le symbolisme des fractions, éprouvent de la difficulté à décrire, interpréter et résoudre le même type de problème. Certains d'entre eux semblent même désapprendre, lors de ce passage, les acquisitions pourtant non négligeables de la phase rhétorique : recherche de référents communs (60 feuilles partout), encadrements entiers (plus de 8 feuilles par mm contre 3 feuilles par mm), comparaison à des pivots fractionnaires simples comme un tiers (7 c'est moins que 60 divisé par trois). Une rupture dans le mode d'expression débouche donc sur une rupture de compétences. Ceci me semble être un phénomène didactique d'importance qui, à ce titre, mérite d'être étudié et pris en compte dans les ingéniéries. Ce qui n'est généralement pas le cas (Adjiage ; 1999, p. 68).

Or, si les élèves ont beaucoup de mal à changer de registre, selon Duval (2001, p.91) les mathématiciens professionnels passent continuellement du rhétorique au formel, c'est même ce qui distingue le fonctionnement cognitif du mathématicien du fonctionnement commun. «L'activité mathématique…. nécessite des changements de direction de la pensée qui apparaissent comme des ruptures…. Tout se passe comme s'il fallait brusquement changer la manière de représenter les données, ou penser à autre chose, à l'encontre du déroulement spontané du jeu d'associations qui a été induit par la première compréhension du problème ou les premiers traitements engagés. » (Duval ; 2001, p.85). Ceci tient à la nature des objets mathématiques : on n'y a accès, et donc on ne peut les concevoir, que par une médiation sémiotique (c'est ce qui distingue essentiellement l'accès à un objet mathématique de l'accès à un objet physique, qui peut être multi-sensoriel et / ou instrumenté) ; cette médiation sémiotique est multiforme, « des représentations de registres différents ne présentant pas les mêmes aspects d'un même contenu conceptuel » (Duval : 1995, p. 69). D'où la nécessité de disposer de plusieurs registres pour l'acquisition d'une notion ou pour un traitement mathématique. Ceci m'a amené à formuler une hypothèse.

enseignement, l'erreur des écarts (comparer la différence au lieu du rapport) dans des proportions très différentes : 1/24 pour le premier, 13/24 pour le deuxième (et 0/24 pour un troisième problème de comparaison de rapports de grandeurs hétérogènes).

Hypothèse :

L'acquisition de la notion de rationnel passe par la découverte d'invariants entre trois registres d'expression (Duval ; 1995, p. 21) parmi lesquels celui des droites graduées (Adjiage & Pluvinage ; 2000) joue un rôle prépondérant, tant pour l'expression initiale des rationnels que pour le contrôle des résultats obtenus dans les autres registres (transparentCop/03-3).

Les apprentissages, quant à eux, reposaient sur un travail systématique de séparation et d'articulation des trois registres (droites graduées, écritures fractionnaires, écritures décimales) mobilisés dans l'environnement des logiciels de la série ORATIO (Adjiage & Heideier ; 1998), spécialement conçus et développés dans ce but.

La série ORATIO

Composée de vingt logiciels répartis en deux ensembles et d'une base de données. Le premier ensemble est formé de quatorze logiciels dits de traitement. Il donne aux élèves l'occasion d'une investigation séparée de trois registres d'expression des rationnels, à savoir en respectant l'ordre de leur introduction en classe : les droites graduées (six logiciels) ; les écritures fractionnaires (cinq logiciels) ; les écritures décimales (trois logiciels). Lors de l'investigation de chacun de ces systèmes les liens avec les systèmes précédents ne sont l'objet d'aucun travail spécifique, même si nombre d'élèves les évoquent spontanément. Ce n'est qu'avec l'étude du deuxième ensemble (six logiciels dits de conversion) que les élèves sont invités à un travail de mise en correspondance systématique des trois registres pris deux à deux.

Chaque logiciel propose plusieurs tâches, souvent à partir d'une consigne de comparaison de deux rationnels exprimés dans un des trois registres. Les prérequis sont minimes : droite numérique des entiers, fréquentation de fractions usuelles ou d'écritures à virgules. Le logiciel ne cherche pas à expliquer, il ouvre un accès aux objets mathématiques non par une définition formelle et / ou illustrée, mais par des mises à l'épreuve de leur mode d'expression, de traitement, puis de conversion. L'élève est censé agir en testant des hypothèses : 3,14 est-il supérieur à 3,5 puisque 14 est supérieur à 5 ; $\frac{3}{4}$ est-il inférieur à $\frac{7}{10}$ puisque 3 et 4 sont respectivement inférieurs à 7 et 10 ? Le milieu (le logiciel) rétroagit alors, donne à observer des phénomènes qui invitent à engager une nouvelle action puis à échafauder des règles qu'on remet à l'épreuve. Le questionnement que l'on cherche à provoquer, d'essais en erreurs, serait : quels objets mathématiques méritent une telle expression, un tel mode de traitement ?

La complexité d'un nombre rationnel en tant qu'objet mathématique (transparent Cop/03-4 « Complexité d'un rationnel »)

Le principal obstacle pour construire et mobiliser un objet fractionnaire réside dans la contradiction entre unité (du lien) et pluralité de sa représentation (deux entiers, deux ensembles d'entiers). D'autant que ce risque continue à être renforcé par un enseignement qui privilégie de manière quasi exclusive la représentation en "parts de tarte", alimentant l'illusion que : "c'est facile, il suffit de compter les parts", et ce malgré les études multiples concluant toutes au faible potentiel de cette illustration à rendre compte du concept : Hart & Sinkinson, 1989 ; Streefland, 1993, p. 114 ; Adjiage, 1999, p. 204…

Résultats de cette expérience

Cette expérience a connu des succès, pointés notamment lors de l'évaluation nationale à l'entrée en 6ème (Adjiage ; 1999, pp. 294-369, – pp. 299 et 312 en particulier), mais elle n'a pas permis de départager la population observée de l'échantillon national en résolution de problèmes rationnels liés aux grandeur. C'est pour tenter d'améliorer ces résultats que j'ai conçu un nouveau protocole d'enseignement en 6ème et 5ème[4].

PERTINENCE DE LA VARIABLE 2

Afin de rendre les résultats recueillis opposables, j'ai mis en place un dispositif classe expérimentale vs classe témoin. Les deux classes ont été prises en charge par le même professeur, sur les mêmes objectifs très précisément écrits[5]. En outre, les mêmes problèmes liés aux grandeurs ont été proposés dans les deux classes. La démarche d'enseignement dans la classe expérimentale reposait sur un protocole décrit par le transparent Cop/03-6 (un exemple est fourni par le transparent Cop/03-7). Elle intégrait des passations régulières sur les logiciels ORATIO et NovOra. Dans la classe témoin, la démarche d'enseignement était laissée à l'initiative du professeur titulaire avec une restriction majeure : pas de passation sur les logiciels.

Au-delà des objectifs, forcément différents de la première expérience en cycle 3 puisque se rapportant à un autre niveau d'enseignement, l'intégration forte de problèmes liés aux grandeurs est la nouveauté essentielle de ce nouveau dispositif. Elle résulte de la prise en compte de la variable 2 que nous allons à présent aborder.

Séparation et intégration des composantes de la complexité des problèmes de rapports de grandeurs

L'examen des transparents Cop/03-7 et Cop/03-8 permettra de mieux comprendre le champ couvert par la variable 2. Cette dernière devrait permettre d'étudier l'impact de la nature de l'expérience physico-empirique décrite par l'énoncé d'un problème sur les productions des élèves. On s'intéressera ici à la partie basse du transparent Cop/03-7 qui présente un énoncé de problème de mélange[6], proposé aux deux classes à leur entrée en 6ème, donc avant toute reprise d'enseignement des rationnels au collège. Le transparent Cop/03-8 propose des procédures d'élèves illustrant les six modalités de traitement de ce problème que j'ai pu dégager à partir de l'intégration plus ou moins réussie des deux composants du mélange en une nouvelle entité qui préfigure le rapport de l'un à l'autre (Adjiage ; 2003 ?).

[4] Classes de Michel Barthelet, collège de Herrlisheim, 67850

[5] Une version très abrégée de ces objectifs est proposée par le transparent Cop/03-5

[6] Un problème de mélange permet de bien repérer la prise en compte séparée des deux constituants du futur rapport (volume de lait, volume de chocolat) avant de les intégrer dans une nouvelle entité désignable par un mot, le goût, qui préfigure l'entité mathématique du rapport.

On y observe pêle-mêle et imbriquées les unes dans les autres, des remarques, des analyses, des appréciations, des opinions, des argumentations se rapportant à : une expérience physico-empirique avec des manipulations, réelles ou imaginées, de substances (lait, chocolat) et de grandeurs non précisées (masse, volume), un test sensible (une mesure ?), le goût, dont le protocole n'est pas explicité (comment comparer les goûts, faut-il tout boire, un extrait suffit-il, le goût dépend-il de la quantité absorbé ?…). On remarquera aussi l'ébauche d'un traitement mathématique, avec des entiers, des schémas, des fractions. Bref, peu de séparation et beaucoup de dispersion voire de confusion, ce qui témoigne de la réelle complexité de la notion, dans sa dimension physico-empirique.

Par opposition, le transparent Cop/03-9 montre une argumentation bien disciplinée après enseignement, en fin de 5ème, beaucoup plus centrée sur le traitement mathématique, à partir d'une numérisation fractionnaire assortie parfois d'un changement de registre opportun (recherche d'approximations décimales, pour les comparer, des deux fractions représentant chacun des deux mélanges). Cette tendance est plus nette dans la classe expérimentale que dans la classe témoin, où des procédures privées, justes ou fausses, subsistent (par exemple la recherche d'une référence commune – « pour 35 litres partout »), assorties de commentaires rhétoriques pratiquement absents dans la classe expérimentale.

Je note enfin que, lors d'un test effectué sur un ensemble de 159 PE1 à l'automne 2002 portant sur le problème de comparaison des mélanges : (3 ; 2) vs (2 ; 1) (Partie bas du transparent Cop/03-7), 128, soit 80%, utilisent une procédure fractionnaire (91 comparent $\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{3}$; 37 comparent $\frac{3}{2}$ et $\frac{2}{1}$), 26, soit 16%, utilisent une procédure privée (essentiellement basée sur une linéarité en acte ou plus achevée), 7 enfin donnent une réponse fausse (erreur des écarts surtout).

Je constate donc un mouvement au cours du temps, qui va d'une difficulté à démêler la complexité de la notion, faite de composantes physico-empiriques et mathématiques, à une intégration de ces composantes en un objet mathématique fractionnaire. Et encore n'ai-je étudié ici qu'un seul type de problème de rapport de grandeurs. Cette complexité s'accroît lorsqu'on prend en compte la diversité de ces problèmes (transparent Cop/03-1). Mon hypothèse est que là où un débutant ne verra que de la dispersion : d'un problème de mélange à un problème de dilatation, d'un problème de mesure à un problème de rapport de grandeurs hétérogènes ; de manipulation, de mesures et de tests physiques à une numérisation mathématique ; d'un traitement fractionnaire à un traitement décimal où à une représentation au moyen d'une surface fractionnée, l'expert verra de l'unité autour de la notion de rationnel. La partie visible et donc le témoin de la reconnaissance de ce modèle rationnel intégrateur est l'usage d'un unique objet fractionnaire pour traiter cette diversité de problèmes (voir le public des PE1). C'est pourquoi j'ai attaché tant d'importance à son émergence dans les deux classes observées et que j'ai mis en place, dans la classe expérimentale, un protocole d'enseignement basé sur la séparation et l'articulation des deux ordres de complexité repérés par les variables 1 et 2 résumé par les transparents Cop/03-6, et Cop/03-10.

Ce projet se devait d'avoir un outil privilégié d'intégration. C'est le rôle dévolu à la droite graduée.

Confirmation de la droite graduée

Parmi les logiciels relatifs au registre des droites graduées d'ORATIO, un peut paraître surprenant, Gradu5, dont le transparent Cop/03-11 expose la visée tout en présentant un cheminement typique d'élève en situation apprentissage.

Il peut sembler compliquer inutilement un enseignement déjà suffisamment compliqué : pourquoi un repère [5 ; 9] subdivisé en 3 et pas en 4 ? J'ai en fait conçu ce logiciel parce que je suis tombé naturellement sur ce type de complexité en essayant de représenter sur droite graduée le problème de l'agrandissement du puzzle de Brousseau (1987 ; p.137-144) : transparent Cop/03-12. Par ailleurs, ce type de représentation permettait de résoudre le problème mathématique de la division exacte : transparent Cop/03-13.

C'est à partir de ces deux considérations que j'ai pu mettre au point NovOra et résoudre les problèmes à la fois d'articulation des problèmes physiques entre eux (transparent Cop/03-10, § 4a) et d'articulation des univers physiques et mathématiques (transparent Cop/03-10, § 4b).

La droite graduée de NovOra

Munie d'une double échelle, (transparents Cop/03-12) elle propose aux utilisateurs la recherche d'image et d'antécédent, par une application linéaire rationnelle $y = ax$, en huit logiciels : 4 pour la recherche d'image (deux possibilités selon que x entier ou pas, fois 2 possibilités selon que a entier ou pas), 4 (deux possibilités selon que y entier ou pas, fois 2 possibilités selon que a entier ou pas) pour la recherche d'antécédents. Notons que le produit d'un rationnel r_1 par un rationnel r_2 peut être défini, à l'issue des activités proposées par ces logiciels, comme l'image de r_1 par l'application linéaire définie $y = r_2x$, ainsi que Brousseau (1987, pp. 199-206) le proposait déjà.

La principale ressource est la possibilité de resubdiviser chaque intervalle initial et de déposer les entiers, sur l'échelle du bas ou du haut, à condition de cliquer sur les graduations correspondantes (pénalité autrement).

Munie d'une échelle simple, elle permet, avec les mêmes ressources, de fournir une écriture fractionnaire d'un rationnel x pointé par une flèche dans un repère $[a\ ;\ b]$ quelconque avec une subdivision initiale indépendante de l'amplitude $b - a$ (voir transparent Cop/03-13) ; x peut pointer sur la première graduation (on énoncera alors pour un repère [0 ; 7] fractionné en 4 : $x = 7 \div 4 = \frac{7}{4}$) ou pas (on énoncera alors pour x pointant vers la troisième graduation d'un repère [0 ; 7] fractionné en 4 : $x = \frac{3}{4}7 = \frac{3 \times 7}{4} = \frac{21}{4}$ qu'on lira « trois quarts de 7 est égal à $\frac{21}{4}$ ») ; enfin, l'origine visible de la droite peut être 0 ou pas.

Nous avons déjà établi (Adjiage ; 1999, pp. 157-231) le rôle fédérateur de la droite graduée pour l'expression et le traitement des rationnels. Il nous reste à esquisser ici son rôle de registre de transition et d'articulation entre les univers physique et mathématique, ce qui est résumé par le transparent Cop/03-14. Bien entendu, la fonction de traitement, en l'absence d'un ordinateur, n'est guère conviviale. L'usage de fractions, en revanche, une fois ce mode d'expression maîtrisé, l'est beaucoup plus. D'où l'importance de la fonction d'annonce du registre des écritures fractionnaires par le registre des droites graduées, et le soin tout particulier à apporter à l'opération de conversion entre ces deux registres (logiciels Frac2gra et Grad2fra de ORATIO).

Mais quels sont les types de problèmes liés aux grandeurs susceptibles d'être traités par la recherche d'une quatrième proportionnelle ou d'une comparaison de fractions ? C'est ce que nous allons examiner à présent.

Classification des problèmes de rapport de grandeurs

On se reportera au transparent Cop/03-1.

Traditionnellement, les didacticiens distinguent diverses acceptions d'une fraction à ce stade de la scolarité, en fonction des problèmes liés aux grandeurs, donc des problèmes physiques qu'ils permettent de résoudre. Brousseau (1986 ; pp. 90-94, pp.98-100 et 1987 ; pp.2-18 et pp. 136-151) distingue ainsi le rationnel-mesure, accompagné d'une unité ($\frac{3}{4}km$) du rationnel-dilatation sans unité (agrandir par un coefficient de $\frac{7}{4}$), là où les anglo-saxons (Kieren ; 1980) se réfèrent à cinq sous-constructions (relation partie/tout, quotients, ratios, opérateurs et mesures).

En ce qui me concerne j'ai opté, pour les raisons exposées en 0, pour une classification qui se réfère à la fois au lien entre les grandeurs rapportées, aux objets physiques sous-jacents aux grandeurs et à la nature de l'expérience physique à laquelle renvoie le problème.

J'ai déjà dit (voir 0) que certains résultats empiriques dont je dispose permettent une justification pour le moment partielle de cette classification. Il reste à tester de façon systématique l'impact de cette variable sur les élèves, en termes de procédures et / ou de réussite.

Il est à présent possible de vérifier que le registre des droites graduées permet une représentation et un traitement pour chacun de ces problèmes.

La droite graduée permet d'interpréter et de traiter les problèmes étudiés relatifs aux rapports de deux grandeurs

C'est ce qu'établit le transparent Cop/03-15. Seule la représentation de problèmes est proposée sur ce transparent. Pour le traitement, on se reportera aux ressources des logiciels ORATIO ou NovOra. On se convaincra aisément que la droite graduée à double échelle permet d'interpréter et de traiter les problèmes de type 0 de notre classification (rapport de deux grandeurs susceptibles de varier), soit pour la recherche d'une quatrième proportionnelle, soit pour la comparaison de deux rapports. On notera cependant que certains problèmes (mesures et comparaison de mélanges ou de fréquences) peuvent aussi être représentés et traités au moyen d'une droite graduée à simple échelle. Dans tous les cas, ainsi que nous allons le préciser au paragraphe suivant, l'élève n'est pas censé, en tout cas en phase d'apprentissage, mobiliser spontanément de telles représentations, mais mener des expériences sur leur potentiel purement numérique (calcul d'images, d'antécédents…) avant d'être invités à mettre en relation ces représentations avec les divers problèmes liés aux grandeurs étudiés par ailleurs. Nous faisons l'hypothèse que ce travail de séparation et d'articulation des divers éléments de la complexité d'un rationnel donne aux élèves un mode d'accès au concept. Les expressions numériques usuelles (écritures fractionnaires et décimales), plus conviviales, sont censées relayer, sans la rendre pour autant caduque, la représentation sur droite graduée. Cette dernière est à considérer comme : un registre qui permet d'annoncer puis de contrôler les traitements fractionnaires ; un registre de transition entre l'univers mathématique et physique ; un objet autour duquel se construit l'unité de la notion ; un objet pérenne au-delà de la phase d'apprentissage grâce à son potentiel interprétatif.

LE PROTOCOLE D'ENSEIGNEMENT

Dans un processus d'acquisition de la notion de rationnel, nous distinguerons :

- l'activité physique liée à la réalisation effective ou mentale d'une expérience, de mesurages, de reformulations, d'émissions de conjectures, relatifs à des phénomènes de mesures ou de rapports de grandeurs ;
- l'activité mathématique liée à la mobilisation de divers registres sémiotiques, aux traitements et conversions de représentations exprimant des nombres, des fonctions (opérateurs), ou des points.

Le transparent Cop/03-6 présente les quatre moments d'enseignement du protocole, répétés systématiquement lors de l'étude de chaque logiciel (avec certains regroupements). Le transparent Cop/03-7 donne un exemple de mise en œuvre des quatre moments. On gagnera à rapprocher le transparent Cop/03-6 (moments 1 à 4) du transparent Cop/03-10 (auquel renvoient les points 1, 2, 3, 4a, 4b, 4b ci-dessous) :

- Le moment 1 correspond aux points 3 et 4b (séparation et articulation des registres) ;
- le moment 2 prolonge le moment 1 et réalise, associé au moment 3, le point 1 (séparation des univers) ;
- le moment 3 met en œuvre le point 2 (séparation des divers problèmes de rapport de grandeurs) ;
- le moment 4 réalise les points 4b (articulation des univers physique et mathématique) et 4a (articulation des problèmes de rapports de grandeurs autour de la notion de rationnel, soit de ce qui fait l'unité de ces problèmes au-delà de leur diversité).

CONCLUSION

Afin de disposer d'un « état des lieux initial », chacune des classes de notre expérience a été évaluée en début de 6ème à partir d'exercices portant sur l'ensemble des compétences à acquérir au cours des deux années scolaires à venir, notamment en ce qui concerne la résolution des six types de problèmes liés aux grandeurs. La plupart des contenus sur les rationnels au programme de 6ème et de 5ème ayant déjà été abordés au cycle 3, aucun item de cette évaluation initiale n'était censé rester totalement étranger au champ de compréhension des élèves. Deux évaluations portant sur les mêmes compétences, l'une d'étape en fin de 6ème, l'autre finale en mars 2003 vont permettre d'apprécier les évolutions respectives, notamment en ce qui concerne les points 4a et 4b et 4b du transparent Cop/03-10. J'évaluerai mon expérience en fonction des productions des élèves de la classe expérimentale, comparés à celles de la clase témoin, notamment selon le degré atteint dans le processus d'unification :

- dans le champ mathématique, la capacité à changer de registre (4b) afin de minimiser les coûts de traitement (ce qui témoignera de la conception d'un objet unique rationnel au-delà de la diversité des représentations) ;

- dans le champ physique, la capacité à mobiliser des traitements rationnels (4b) , et notamment des fractions, quelle que soit la nature du problème physique abordé (4a). C'est l'usage d'un seul objet de traitement mathématique qui attestera de la mise au jour du lien, au-delà de la diversité, entre les différents problèmes physiques étudiés.

La droite graduée, outil transversal d'expression et de traitement de n'importe lequel de ces problèmes devrait fortement contribuer à l'unification de la notion.

Transparent Cop/03-1: Quels problèmes sont susceptibles de mobiliser un rapport rationnel de deux grandeurs ?

UNE AU MOINS DES DEUX GRANDEURS RAPPORTÉES EST FIXE : PROBLÈMES DE MESURE

Ce sont des problèmes de rapport d'une grandeur, continue ou discrète, à une grandeur unité fixée.

- $5V = 41\ u$, ou $V = \frac{41}{5}u$; u est l'unité et V la grandeur à mesurer
- 5 jeux de roues contiennent 20 roues. Soit R la quantité de roues. Si on choisit une roue comme unité r, on a : R = 20r ; Si on choisit le jeu comme unité j, R = 5 j

LES DEUX GRANDEURS RAPPORTÉES SONT SUSCEPTIBLES DE VARIER

Les deux grandeurs rapportées sont différentes : Problèmes définissant une grandeur quotient

Problèmes de vitesses, de débit, de masse spécifique, de prix au poids…

Les deux grandeurs rapportées sont les mêmes

Un seul objet sous-jacent

Les unités sont différentes : problèmes de changement d'unité

Mesure au moyen d'une unité U d'une grandeur V variable, connaissant sa mesure au moyen d'une unité u et connaissant $\frac{u}{U}$

Les unités sont les mêmes : problèmes de dilatation

L'objet sous-jacent (un côté, un prix, une distance, un achat…), variable, subit donc une transformation.

- Agrandissement : $4 \longrightarrow 7$
- Pourcentages, échelles
- Vous payez 2 tablettes, vous en emportez 3

Deux objets sous-jacents

Les objets, a priori séparés, sont réunis : problèmes de mélanges

5 verres de cacao pour 41 verres de lait

Les objets, a priori réunis, sont séparés par l'introduction de modalités : problèmes de fréquences

Sur 46 réponses, 5 échecs et 41 réussites

Transparent Cop/03-2

Les élèves comparent l'épaisseur de deux feuilles de papier, chacune issue d'un tas différent, connaissant l'épaisseur et le nombre de feuilles de chaque tas (dans un tas donné, les feuilles sont de même épaisseur). Ce problème est destiné à la construction de la notion de rationnel-mesure (Brousseau, 1986, p. 141)

Un traitement rhétorique du problème de la comparaison des épaisseurs de deux feuilles de papier

« 60 f[euilles] ; 7 mm, c'est du (papier) fin, c'est pas du A [un des types de papier étudiés auparavant], on avait trouvé pour A (3f ; 1 mm) » – sous-entendu 60 f de A feraient bien plus de 7 mm".

Un traitement fractionnaire du problème de la comparaison des épaisseurs de deux feuilles de papier

$$\frac{1}{3}=\frac{20}{60} \quad \text{or} \quad \frac{20}{60}>\frac{7}{60} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{3}>\frac{7}{60}$$

Transparent Cop/03-3

Pourquoi la droite graduée, dans un environnement logiciel, comme système d'expression privilégié des rationnels ?

1. Traite d'entrée de jeu les rationnels comme des **nombres** parmi les premiers nombres rencontrés (les entiers).

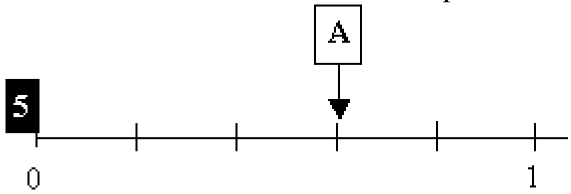
2. Séquentialise la prise en compte du couple d'entiers (a ; b) nécessaire à l'expression d'un rationnel.

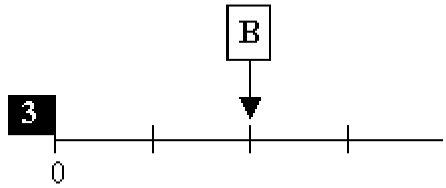
3. Met en avant le lien de a à b (**position** d'un point relativement à un repère**,** invariante sous changement d'échelle) plutôt que les entiers a et b.

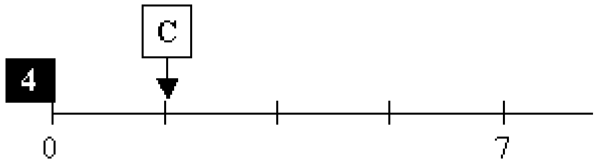
4. Fonctionne comme un outil de transition entre un univers mathématique (droite des nombres) et un univers physique (tout problème de rapport est représentable sur droite graduée).

5. fonctionne comme un outil d'expérimentation et de contrôle

- Permet la visualisation des opérations de report et de subdivision, fondatrices des rationnels ;
- annonce et contrôle les futurs traitements fractionnaires ;
- permet une démarche essai / erreur à coût acceptable grâce à l'environnement informatique.







Transparent Cop/03-4
Complexité d'un nombre rationnel

1. Un objet à double détente

- **un lien** numérique entre deux entiers, ce qui fait d'un rationnel **un** nombre exprimé par **deux** nombres ;
- un **lien linéaire** entre **deux séries** de couples d'entiers, ce qui fait d'un rationnel un nombre exprimable par un **ensemble** de couples "réputés" équivalents.

Par exemple, dans l'écriture $\frac{3}{4}$:

L'expert voit le lien de 3 à 4 pouvant exprimer aussi le lien de 75 à 100 ou de 15 à 20… ; l'élève ne voit souvent que 3 et 4, ou 3 parmi 4.

2. Un objet exprimable dans des registres hétérogènes

droites graduées, écritures fractionnaires, écritures décimales, écritures scientifiques…. dont la séparation et l'articulation demande un enseignement spécifique.

Transparent Cop/03-5
Les objectifs généraux visés

1. Exprimer un rationnel dans un des trois registres étudiés (les droites graduées, les écritures fractionnaires et décimales) ; convertir l'expression d'un rationnel, d'un de ces registres vers un autre ;
2. interpréter les données numériques d'un problème au moyen de rationnels exprimés dans l'un des trois registres ;
3. comparer et encadrer des rationnels, intercaler un rationnel entre deux autres rationnels ;
4. utiliser un critère permettant de décider qu'un rationnel est entier ;
5. conjecturer et utiliser un critère permettant de décider qu'un rationnel est décimal.

Transparent Cop/03-6
Quatre moments forts d'une séquence d'enseignement

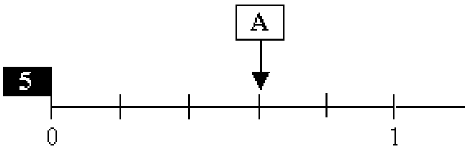
Moment 1. Passation sur un logiciel de la série ORATIO.

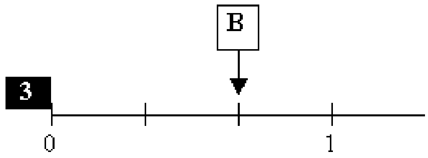
Moment 2. Un problème de type ORATIO est posé aux élèves dans un environnement papier /crayon.

Moment 3. Un problème **lié aux grandeurs**, structurellement et numériquement analogue à celui Moment 2 est posé aux élèves. Les élèves résolvent le problème par les moyens de leur choix. Certains d'entre eux identifient spontanément dans ce nouvel énoncé une **expression différente du même problème** que celui du Moment 2.

Moment 4. **La convergence provoquée** : le professeur rappelle en début de séance les enjeux du débat scientifique : "en quoi ces deux problèmes sont-ils différents et en quoi sont-ils analogues".

Transparent Cop/03-7
Deux expressions différentes du même problème

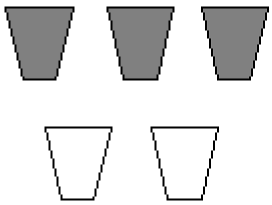




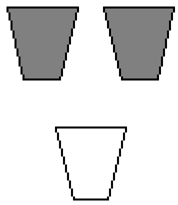
Un nombre fractionnaire est représenté sur chacune des droites graduées ci-dessus. Lequel de ces nombres est le plus grand ?

TransparentCop/03-8

On prépare une boisson chocolatée en mélangeant du chocolat et du lait. La recette A mélange 3 parts de chocolat pour 2 parts de lait. La recette B mélange 2 parts de chocolat pour 1 part de lait. Quel est le mélange qui a le plus le goût du chocolat



Mélange A



Mélange B

TransparentCop/03-8bis

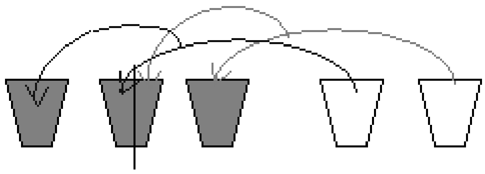
(Les productions ci-dessous se rapportent au problème de mélange du transparent Cop/03-8)

LINDA : "le mélange **A**, parce que dans la recette A, il y a 3 parts de chocolat qu'on mélange et dans la recette B, il y a 2 parts de chocolat, alors dans la recette A il y a plus de goût."
GEOFFREY : "le mélange **B**, la recette B a le plus le goût du chocolat parce qu'il y a moins de lait que dans A."

FLORIAN : "Recette **A**, parce que dans la recette A il y a 3 bols de chocolat, 2 bols

LOÏC : "Recette **A**, [*parce que dans la recette A*] il y a **plus** de tasses de chocolat **que** de tasses de lait. Le B a **moins** de tasses de chocolat et 1 tasse de lait"
EMMANUEL : "La recette **A** parce qu'il y aura **plus** de lait, mais ça laissera **plus de goût** vu qu'il y a **plus** de chocolat."

NATHALIE : "C'est la **B** car si le A serait égale, il y aurait 4 parts de chocolat."
JENNIFER : "La recette **B**. Dans la recette A, il y aura 1 entière et 1 demi part de chocolat dans chaque bol [*de lait*] et dans la recette B il y aura 2 parts entière dans le bol [*de lait*]."
ÉRIC : "Recette **B**, parce qu'on met 1 verre noir dans le blanc et après il reste encore 1 noir. Alors que dans la recette A le dernier verre [*après avoir fait le mélange 2 verres de chocolat pour 2 verres de lait, implicitement reconnu équivalent au 1 pour 1*], il faut le partager en 2.
MARJORIE : "Recette **B**, parce qu'il n'y a qu'un verre de lait et deux au chocolat. Parce que dans le A il y a trois verres au chocoat.



ANTOINE : "le mélange **B**, parce que dans la recette A il y a que $1 + \frac{1}{2}$ de chocolat, et dans la recette B il y a 2 parts de chocolat."

CÉLIA : "Les deux ont le même goût. Si pour 2 parts de chocolat, il y a 1 part de lait [*recette B*]et que pour la recette A on rajoute 1 part de chaque, les deux auront le même goût."

Transparent Cop/03-9
Un problème de mélange en fin de 5ème

5 litres du liquide A pèsent 3 kg. 7 litres du liquide B pèsent 4 kg. On remplit deux récipients identiques, l'un avec le liquide A, l'autre avec le liquide B. Lequel des deux récipients ainsi remplis est le plus lourd ?

Classe expérimentale **procédures majoritaires** (> 10%)
LOÏC : $\frac{5}{3}=1{,}6666666667.$; $\frac{7}{4}=1{,}75$. Le liquide B est le plus lourd. **PERRINE** : Liquide A : $\frac{5}{3}\times\frac{4}{4}=\frac{20}{12}$; liquide B : $\frac{7}{4}\times\frac{3}{3}=\frac{21}{12}$. On constate qu'en ayant le même dénominateur, le numérateur de B est plus grand. Donc : B > A (**Modalité 9eFrac** : **33%**)
JENNIFER : 1 litre de A : $\frac{3}{5}$ de kilo ; 1 litre du liquide B : $\frac{4}{7}$ de kilo. $\frac{3}{5}\times 10=\frac{30}{5}=6$; $\frac{4}{7}\times 10=\frac{40}{7}$. Or : $5<\frac{40}{7}<6$. Donc A est le plus lourd. (**Modalité 1eFrac** : **13%**)
Absence de réponse ou réponse lapidaire : « Même poids » ; « B » ; « A » …. (**Modalité 0** : **33%**)
Classe témoin **procédures majoritaires** (> 10%)
ALEXANDRA : 5l = 3kg ; 7l = 4kg. Le récipient avec le liquide B sera plus lourd, car le liquide B est plus lourd que le liquide A (**Modalité 9a** : **23%**)
ESTELLE : liquide A : 5 ÷ 3 = 1,6; liquide B : 7 ÷ 4 = 1,75. Le récipient B est le plus lourd parce que si on divise la quantité avec le poids c'est le récipient B le plus lourd (**Modalité 9eDiv** : **18%**)
YANNICK : Liquide A est le plus lourd. Car au début il y a 2 litres de différence entre A et B mais que 1 kg de différence . Donc si on remplit un récipient de même taille avec les deux liquides, A est le plus lourd. (**Modalité 9f** : **14%**)
CLAIRE : Pour 35 l : liquide A = 21 kg (3 x 7) ; liquide B = 20 kg (4 x 5). c'est le liquide A qui pèse le plus lourd car pour 35 litres, il pèse 21 kg. (**Modalité 1d ou 9d** : **14%**)

Transparent Cop/03-10
Cahier des charges pour une ingéniérie d'enseignement des rationnels

1. Séparer l'univers physico-empirique des grandeurs de l'univers mathématique des rationnels qui diffèrent sur le **projet** (étude d'objets du monde sensible vs étude de nombres), sur la **méthode** (expérimentale vs hypothético-déductive), les **moyens d'investigation** (mesures vs mobilisation de registres).
2. Dans l'univers physico-empirique, séparer les différents types de problèmes de rapports de grandeurs.
3. Dans l'univers mathématique, séparer les divers registres mobilisés afin de repérer la complexité et la spécificité de chacun.
4. Articuler :
   a. dans l'univers physico-empirique, les problèmes physiques entre eux ;
   b. l'univers physique / l'univers mathématique ;
   c. dans l'univers mathématique, les divers registres entre eux, afin de concevoir des objets, les rationnels, au-delà de leurs représentations hétérogènes.

Transparent Cop/03-11
Gradu5 et la démarche expérimentale

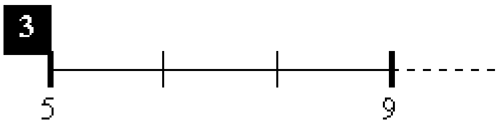


Figure 1 : déposer 8 dans un contexte peu favorable

Ressource principale : saisir un nombre par lequel on souhaite subdiviser chaque intervalle initial (ci-dessous par 3).

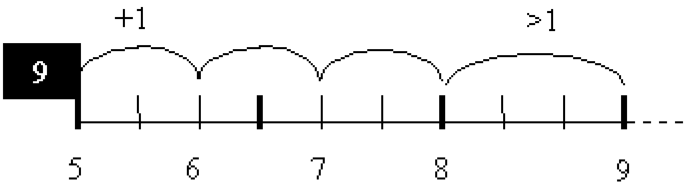


Figure 2 : une tentative qui échoue mais ouvre la voie d'un nouvel essai : modifier soit le regroupement unitaire, soit la resubdivision

Possibilité ouverte d'une évolution vers un constat du type : ce serait plus simple d'attraper le pas unitaire si le nombre total de sous-intervalles était un multiple de **4** (4 = 9 – 5)

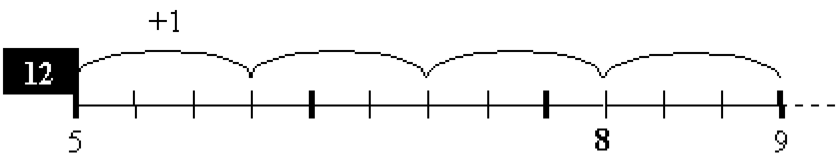
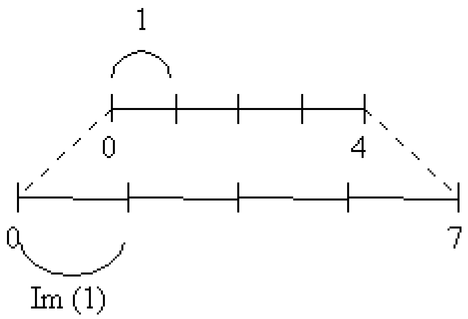


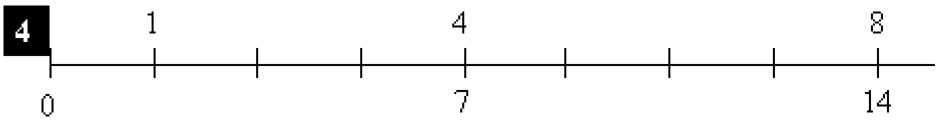
Figure 3 : la procédure experte pour déposer 8

Transparent Cop/03-12

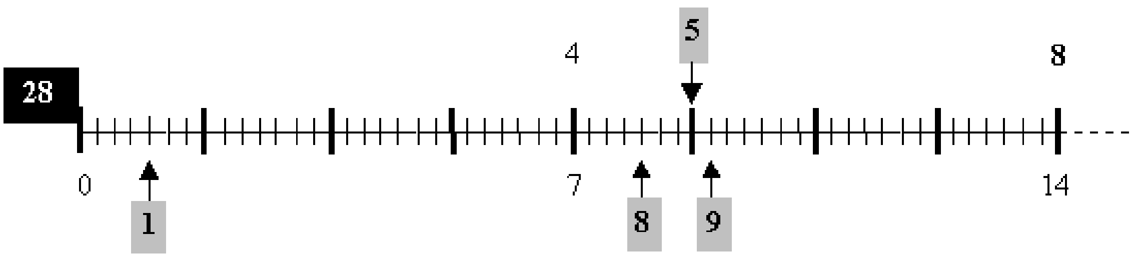
Produit par un rationnel



Dilatation *x définie par x* (4) = 7



Le rationnel-dilatation *x*, exprimé au moyen d'une double échelle



La dilatation $\times \frac{7}{4}$: recherche de l'image de 5

puis de l'antécédent de 8

Transparent Cop/03-13
Fraction d'un nombre

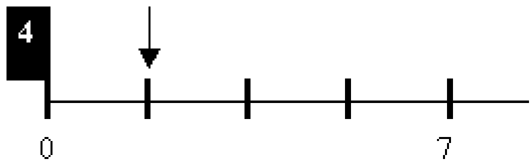


Figure 4 : un quart de sept ou sept divisé par quatre

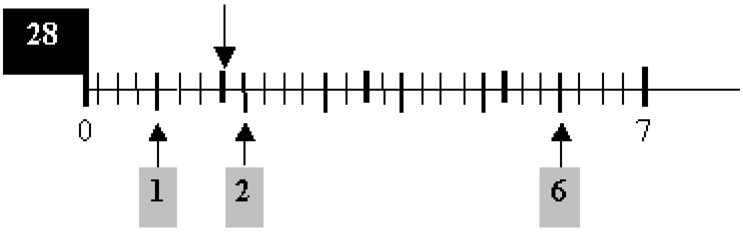


Figure 5 : sept fois un quart

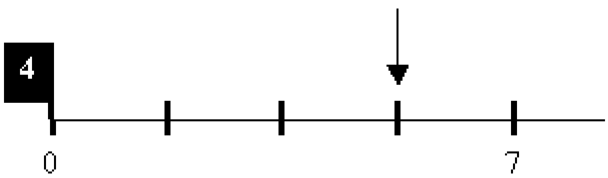


Figure 6 : trois quarts de sept

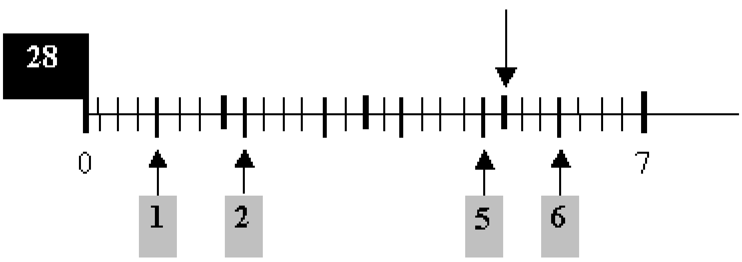


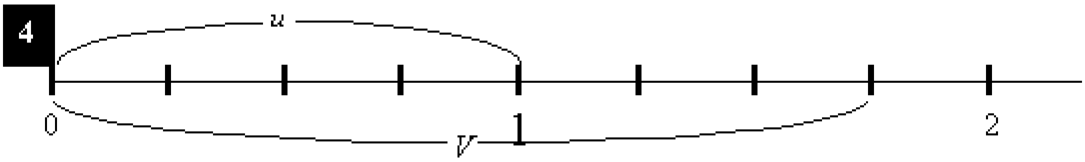
Figure 7 : trois fois sept…quarts ou vingt-et-un quarts

TransparentCop/03-14
Le registre des droites graduées (suite)

1. La droite graduée n'est pas qu'un mode d'expression et de traitement des rationnels, c'est une interface entre les univers physico-empirique et mathématique.
2. Munie d'une simple ou d'une double échelle, elle permet d'interpréter et de traiter l'ensemble des problèmes physiques et mathématiques abordables à ce stade de la scolarité.
3. Elle mérite donc sa place de registre central pour prendre en charge les articulations annoncées dans le programme de recherche.
4. Sa mobilisation spontanée par des lèves n'est pas envisageable. Il faudra donc la provoquer.

Transparent Cop/03-15
La droite graduée et les problèmes étudiés de rapports de deux grandeurs

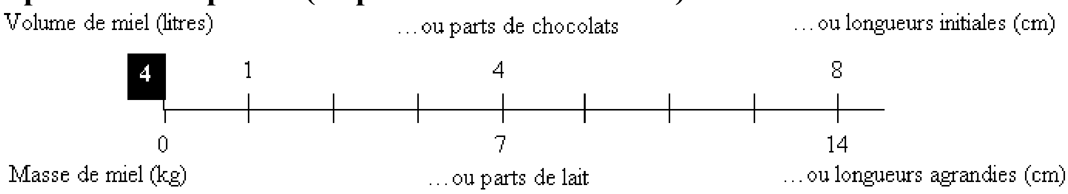
Problèmes de mesure



$$V = \frac{7}{4}u$$

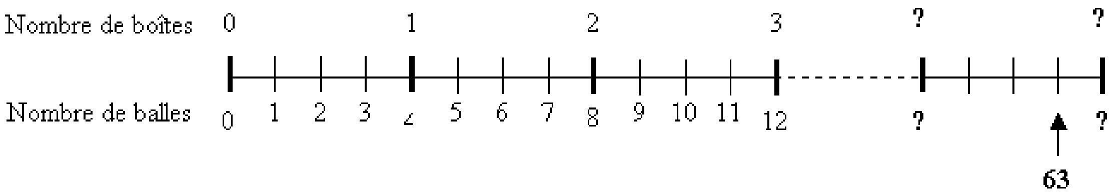
Rapport de deux grandeurs différentes ; mélanges ou fréquences ; dilatations.

Exemple étudié : 4 pour 7 (respectivement 4 devient 7)

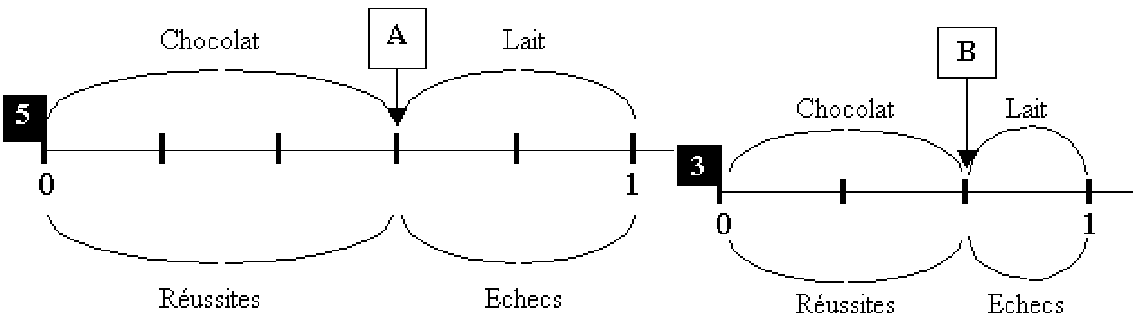


Changement d'unité :

Quantité de balles de tennis, mesurée balle par balle, en fonction de la quantité de balles mesurée en nombre de boîtes (de 4 balles).



Comparaison de mélanges ou de fréquences (3 contre 2 vs 2 contre 1)



BIBLIOGRAPHIE

Adjiage R. & Heideier A. (1998), *didacticiels de la série Oratio*, éditions Pierron, 57206 Sarreguemines.
Adjiage R. (1999), *L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial*, thèse, IREM, ULP Strasbourg 1.
Adjiage R. et Pluvinage F. (2000), *Un registre géométrique unidimensionnel pour l'expression des rationnels*, RDM, La Pensée Sauvage (éd), Grenoble, Vol.20.1, pp.41-88.
Adjiage R. (2001a), *Fondements théoriques et présentation des logiciels de la série ORATIO,* Actes du XXVII[e] colloque Inter-IREM, pp 309-317, IREM de Grenoble, 100 rue des Mathématiques BP-41, 38402 Saint Martin d'Heres cedex.
Adjiage R.(2001b) *Maturations du fonctionnement rationnel. Fractions et décimaux : acquisitions d'une classe, projets de* ***programme 2000*** *pour l'école élémentaire*, Annales de didactique et de sciences cognitives, IREM de Strasbourg, Vol 7, pp. 7-48.
Adjiage R. (2003 ?), *Registres, grandeurs, proportions et fractions*, Actes du colloque Argentoratum 2002, Annales de didactique et de sciences cognitives, IREM de Strasbourg, Vol 8 – à paraître.
Alarcon J. (1982), *L'appréhension des situations probabilistes chez des élèves de 12-14 ans : résultats d'une enquête proposée à des élèves de 4ème et de 5ème*, thèse de 3ème cycle, IRMA, ULP Strasbourg 1.
Brousseau G. (1981), *Problèmes de didactique des décimaux*, RDM, Vol 2.1, pp. 37-128, La Pensée Sauvage (éd), Grenoble.
Brousseau G. (1986), *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, thèse, Bordeaux.
Brousseau G. et N. (1987), *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, IREM de Bordeaux.
Brousseau G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, La Pensée sauvage, éditions,Grenoble.
Comin E. (2000), *Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire*, thèse, Université de Bordeaux 1.
Carraher D. W. & Dias Schliemann A. L. (1991), *Children's Understanding of Fractions as Expressions of Relative Magnitude*, PME XV, pp. 184-193, Assisi.
Douady R. et Perrin M.J., (1986), *Nombres décimaux*, liaison école-collège, IREM, Université de Paris VII, Paris.
Dupuis et Pluvinage, (1981), *La proportionnalité et son utilisation*, RDM Vol. 2, pp. 166-212, La Pensée Sauvage (éd.), Grenoble.
Duval R. (1993), *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol. 5, pp. 37-65, IREM de Strasbourg.
Duval R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Bern.
Duval R. (1996), *Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ?* RDM, Volume 16-3, pp. 349-382, La Pensée Sauvage (éd), Grenoble.
Duval R. (1998-1), *Signe et objet, trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol. 6, pp. 139-163, IREM de Strasbourg.

Duval R. (1998-2), *Signe et objet, questions relatives à l'analyse de la connaissance*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol. 6, pp. 165-196, IREM de Strasbourg.

Duval R. (2001), *Comment décrire et analyser l'activité mathématique ? Cadres et registres*, Actes du colloque « Journée en hommage à Régine Douady », pp. 83-105, IREM Paris 7.

Figueras O. ; Filloy E. ; Valdemoros M. (1987), *Some Difficulties which Obscure the Appropriation of the Fraction Concept*, PME XI, vol..1, pp. 366- , Montréal.

Hart K. & Sinkinson A. (1989), *They're useful - Children's view of Concrete Materials*, PME XIII vol. 2, pp. 60- 66, Paris.

Julo J. (1995), *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*, Presses Universitaire de Rennes.

Julo J. (2000), *Aider à résoudre des problèmes, Pourquo ? comment ? quand* ? Actes du XXVII[e] Colloque Inter-IREM des formateurs chargés de la formation des maîtres, pp. 9-28, IREM de Grenoble.

Kieren T.E., (1980), *The rational number construct - its elements and mechanism*, in T.E. Kieren (ed), Recent Research on Number Learning, ERIC/SMEAC, pp. 125-150, Columbus.

Klein Étienne, (2000), *L'atome au pied du mur*, Éditions Le Pommier-Fayard.

Legrand Marc, (2000), *Sciences, Enseignement, Démocratie et Humanisme*, Actes du XXVII[e] Colloque Inter-IREM des formateurs chargés de la formation des maîtres, pp. 9-28, IREM de Grenoble.

Noelting G., (1980), *The development of proportional reasoning and the ratio concept*, Educational Studies in mathematics, Vol. 11, pp. 217-253, Cambridge.

Pitkethly A. & Hunting R., (1996), *A Review of Recent Research in the Area of Initial Fraction Concepts*, ESM vol. 30 N° 1, pp. 5-37 , Cambridge.

Pluvinage F., (1998), *La nature des objets mathématiques dans le raisonnement*, Annales de didactique des mathématiques, volume 6, pp. 125 - 138, IREM de Strasbourg.

Ratsimba-Rajohn H. (1982), *Eléments d'étude de deux méthodes de mesure rationnelle*, RDM vol.3.1., pp. 66 - 113, La Pensée Sauvage (éd), Grenoble.

Streefland L. (1993), *The Design of a Mathematics Course, a Theoretical Reflection*, Educational Studies in Mathematics, Vol. 25, pp. 109-135, Dordrecht, Holland.

Vergnaud G. et Laborde C. (1994), *Apprentissages et didactiques, où en est-on ?*, Hachette Education (ed), pp. 57-93, Paris.

LIAISON E.P.S. – MATHÉMATIQUES : DÉRAISON ... DES RAISONS PÉDAGOGIQUES

Aline Blanchouin
Professeur d'EPS ; IUFM de Créteil
Nathalie Pfaff
Professeur de Mathématiques ; IUFM de Créteil

Résumé :
Le travail de cet atelier portait sur :
- Les liens possibles entre les mathématiques et l'E.P.S. Cela conduira , en s'appuyant sur les trois cycles de l'école primaire à identifier :
  * Les enjeux (pourquoi concevoir des liens entre ces deux disciplines ?)
  * Les caractéristiques (quels types de liens imaginer : interdisciplinaire, transdisciplinaire, pluridisciplinaire ?)
  * Les obstacles à la mise en œuvre de progressions et de séances dans une telle perspective.
- L'intérêt pour les professeurs des écoles de se questionner sur cet objet, lors de la formation initiale et continuée.

INTRODUCTION

L'objectif de l'atelier était d'étudier les liens possibles, à l'école primaire, entre des contenus d'enseignement mathématiques d'une part et EPS, d'autre part.

L'ancrage institutionnel (les Instructions Officielles de 2002), ainsi que le concept d'interdisciplinarité[1] ont servi d'appui pour caractériser quatre projets articulant les deux disciplines. Ceci a permis d'identifier deux pistes pour spécifier les liens qui peuvent être tissés : le niveau auquel est interrogée l'articulation (progression ou séance), et la nature du lien réalisé (fonction du renvoi d'une discipline à l'autre).

Les conséquences des points de vue didactique, conceptuel et de la formation professionnelle des PE n'ont pu être abordées lors de l'atelier. Nous les présenterons néanmoins dans cette contribution.

[1] Pour un retour sur la genèse du concept et le débat contemporain (interdisciplinarité instrumentale et/ou épistémologique) voir la contribution d'Y.Lenoir ; Y.LENOIR (1999) : Interdisciplinarité, pp 291-313 dans l'ouvrage coordonné par J.Houssaye, Encyclopédie historique, questions pédagogiques.

30ème colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres.

pages 271 *à* 292

I - INTERDISCIPLINARITÉ A L'ÉCOLE PRIMAIRE

Les Instructions Officielles[2] apparaissent explicites sur le fait de réaliser des liaisons entre les disciplines.

Ainsi, « l'organisation progressive des enseignements en champs disciplinaires ne signifie pas, pour autant, que l'intégration des différents apprentissages de l'école primaire doive s'effacer. L'enseignant met à profit sa polyvalence *pour multiplier les liaisons et les renvois d'un domaine à l'autre*. Il évite ainsi l'empilement désordonné des exercices » (p.49).

L'invitation reste cependant imprécise et évoque surtout les liens à effectuer avec « la maîtrise du langage et de la langue française » : « Les programmes sont conçus pour que *toutes les disciplines concourent à l'apprentissage de la langue française, qui les conforte en même temps,* en rendant leur enseignement possible » (p.9).

Néanmoins, nous pouvons remarquer qu'existent, tant dans le chapitre concernant les objectifs et programmes de l'EPS que dans celui des mathématiques, des allusions à l'autre discipline.

Ainsi, si les finalités de l'EPS (p.143) lui assignent de participer à la maîtrise de la langue et à la construction de la citoyenneté, la nature de ses activités supports (les Activités Physiques Sportives et Artistiques), lui permettent d'être « l'occasion d'acquérir des *notions (relation espace et temps* par exemple), et de construire des compétences dans la vie de tous les jours (se repérer dans un lieu, apprécier une situation à risque). (…) *Ainsi, elle aide à concrétiser certaines connaissances et notions plus abstraites : elle en facilite la compréhension et l'acquisition en relation avec les activités scientifiques, les mathématiques,* l'histoire géographie » (p.144 et p.271).

De même pour les mathématiques, au cycle 2, dans le domaine « Espace et Géométrie », la structuration de l'espace constitue « un objet de préoccupation permanente en *liaison avec d'autres disciplines comme l'EPS* ou la géographie » (p.107). Nous pouvons même noter que dans le dossier sur l'évaluation nationale CE2, l'auteur écrit : « si le maître juge qu'une remédiation est nécessaire, sur les aspects de repérage et de déplacement sur un quadrillage, celle-ci pourra s'effectuer à partir d'exercices papier/crayon, par des activités sur support informatique ou encore dans le cadre de l'EPS ».

En fait, cette prescription institutionnelle renvoie à la problématique de l'interdisciplinarité, qui s'est développée tout le long du XXème siècle. Nous retiendrons pour le moment la définition qu'en réalise Y.LENOIR[3] :

« Il s'agit de la mise en relation de deux ou plusieurs disciplines scolaires qui s'exerce à la fois aux niveaux curriculaire, didactique et pédagogique et qui conduit à l'établissement de liens de *complémentarité ou de coopération, d'interpénétration ou d'actions réciproques entre elles sous divers aspects* (finalités, objets d'études, concepts et notions, démarches d'apprentissages, habiletés techniques …), *en vue de favoriser l'intégration des processus d'apprentissages et des savoirs chez les élèves* ».

---

[2] Qu'apprend-on à l'école élémentaire ? Les nouveaux programmes (2002), CNDP, 287p et Qu'apprend-on à l'école maternelle? Les nouveaux programmes (2002), CNDP, 159p.

[3] Y.LENOIR (1999) : *Interdisciplinarité,* Encyclopédie historique, questions pédagogiques ; coordonnée par J.Houssaye, p300.

La façon de lier des disciplines apparaît donc plurielle pour répondre à l'enjeu central de l'interdisciplinarité : permettre de relier des savoirs pour leur conférer davantage de sens. Tardif[4] pense même qu'elle peut faciliter le transfert des apprentissages : « les objectifs sont abordés d'une manière linéaire alors qu'il serait beaucoup plus efficace, relativement à la transférabilité des apprentissages, de les aborder en concomitance ».

Dès lors que l'interdisciplinarité paraît bénéfique pour les élèves, la question est de savoir comment amener les professeurs des écoles à y avoir recours.

Nous proposons deux pistes de travail que nous évoquerons tour à tour (même si la seconde, par manque de temps, n'a pu être abordée lors de l'atelier). C'est ainsi qu'avant de se centrer sur les obstacles à une pratique interdisciplinaire à l'école primaire, nous allons tenter de préciser ce qu'elle peut être.

II - OPÉRATIONNALISER LE CONCEPT D'INTERDISCIPLINARITÉ

L'enjeu est de mettre à jour les différentes formes que peuvent revêtir des projets basés sur plusieurs disciplines (ici, plus précisément deux, l'EPS et les mathématiques), et d'interroger la réalité et la pertinence des liens conçus entre elles.

En effet, si « le regard interdisciplinaire » force « à jeter des ponts nécessaires en vue de poursuivre des finalités communes », il s'agit bien pour autant de « maintenir *la différence disciplinaire et la tension bénéfique entre les spécialisations disciplinaires* »[5].

Nous nous inscrivons dans cette logique de ne pas nier les disciplines. Il s'impose de veiller à ne pas les faire disparaître sous couvert d'intégration des savoirs entre eux et de chercher à s'appuyer avant tout sur elles pour servir la construction de compétences disciplinaires (en plus des transversales).

L'analyse des 4 projets[6] proposés a permis d'aborder et d'illustrer 2 niveaux de discussions :

- **Celui des progressions :**

Existent-elles dans les deux disciplines ? Se déroulent-elles en parallèle ou en décalé ?

Le tableau ci-dessous présente un essai de synthèse des différentes configurations rencontrées dans le cas de deux progressions disciplinaires :

	Exemple de projets	**Description du lien entre les 2 progressions**
1	**Le sablier** *(annexe n°1)*	Lien au départ et à la fin **d'UNE** des deux progressions, l'autre ne fonctionne pas ou après.

[4] TARDIF J (1999) : Le transfert des apprentissages Ed Logiques, p19-20
[5] Y.LENOIR. ibid.
[6] *Cf* les annexes : n°1 « le sablier », n°2 « la proportionnalité et les sports collectifs », n°3« la longueur », n°4 « l'endurance ».

2	**Le sablier « variante »** *(annexe n°1)*	Les deux progressions fonctionnent en parallèle et présentent **un lien au départ ET à la fin.**
3	**Sports collectifs et Proportionnalité** *(annexe n°2)*	Les deux progressions sont liées **du début à la fin** pour que l'une **OU** l'autre des deux progressions puisse avancer, en fonction du moment. Les liens entre les séances peuvent être de même nature ou variés.
4	**La longueur** *(annexe n°3)*	Les deux progressions sont liées **du début à la fin** pour que l'une **ET** l'autre des deux progressions puissent avancer. Les deux progressions sont INTERDÉPENDANTES à chacune de leurs étapes clés.

L'articulation des deux progressions peut donc s'avérer plus ou moins ténue, un fort degré de dépendance (4) s'avérant à priori le gage d'un projet plus prometteur en termes d'apprentissages (disciplinaires et transversaux).

Il reste que la complexité qui s'en dégage (tant au niveau de la conception que de la mise en œuvre) pourrait relativiser cette première réflexion...

- **Celui des séances :**

Les liens sont-ils permanents entre chaque séance ? Épisodiques ? À quoi servent-ils ?

Les deux premières questions relèvent du point que nous venons de traiter plus haut, à savoir la place et le nombre des allers - retours qui caractérisent la liaison entre les deux progressions.

En ce qui concerne les fonctions de ces liens, à la lueur des projets analysés nous formulons les propositions suivantes (qui ne sont que des pistes de recherche).

Les mathématiques servent l'EPS pour :

1. Asseoir un principe d'action par des arguments mathématiques.

Exemple :

« La course de longue durée et la comparaison de distances réalisées sur des durées de 15 s et 6 x 15s » qui conduit à verbaliser et asseoir une règle différenciant le « courir vite » et le « courir longtemps » (Annexe 4).

2. Mieux comprendre les dispositifs des situations ou/et aider à identifier le but de la tâche.

Exemple :

« En jeux collectifs, la mise en place d'un arbitre du temps ».

3. Favoriser la mise en place de projets individuels ou collectifs de performances à partir de contrats et / ou de prédictions de résultats.

Exemple :

« En sports collectifs, réussir 70% des tirs ».

Ainsi, les maths servent *plus ou moins directement* les apprentissages moteurs visés en EPS en favorisant également l'accès aux connaissances **générales** en termes de lucidité et de projet dans l'engagement physique.

L'EPS sert les mathématiques pour :

1. Ancrer le questionnement mathématique dans une situation de départ à partir de laquelle la notion (mathématique) à acquérir prendra sens.

Exemple :

A partir de l'interrogation : « Pourquoi est-ce l'équipe des souris bleues qui a réalisé le plus long collier ? », la notion de durée est questionnée.

2. Contextualiser une notion dans une situation - problème, en ce qu'elle impose aux élèves de découvrir une procédure ou de constater la limite de leurs connaissances immédiates pour résoudre le problème.

Exemple :

« En athlétisme, sur quel sautoir suis-je le plus performant ? »

3. Réinvestir dans un autre contexte une notion identifiée en classe.

CONSEQUENCE SUR LE QUESTIONNEMENT DE DEPART

Intégrons l'ensemble des éléments recueillis à notre questionnement de départ (l'interdisciplinarité à l'école primaire), afin de l'affiner dans plusieurs directions.

Du point de vue institutionnel :

Une lecture fine des textes doit permettre d'identifier pour les disciplines retenues les notions et compétences transversales communes[7]. En effet, la source institutionnelle ne doit pas être négligée, elle se présente comme un repère réel et donc incontournable pour effectuer les choix de contenus qui nourrissent le projet.

Du point de vue théorique :

Le seul concept d'interdisciplinarité ne suffit pas à rendre visible la spécificité d'un projet ; mobiliser en complément les concepts de pluridisciplinarité et de transdisciplinarité s'impose. Nous distinguons ainsi trois types de projets[8] :

---

[7] L'annexe n°5 illustre cette proposition pour le cas particulier de projets math/EPS pour les 3 cycles.

[8] Auteurs de référence :

M.DEVELAY parle plus précisément de transdisciplinarité instrumentale (lien notionnel entre les disciplines) et de transdisciplinarité comportementale établie sur un lien relatif aux connaissances procédurales.

F.CROS parle d'interdisciplinarité centrifuge (lien au niveau des compétences transversales ↔ transdisciplinarité comportementale) et centripète / thématique (↔ pluridisciplinarité).

En fait, elle distingue quatre cas de figures :

Relation d'équivalence entre les deux disciplines : le lien se fait autour de la réalisation d'un événement, d'un objet (pluridisciplinarité).

Relation de prédominance d'une des deux disciplines : une seule discipline fonctionne en réalité ; l'autre joue le rôle de déclencheur ou organise une activité qui lui est propre.

Relation de dépendance entre les deux disciplines : le lien se construit sur une notion commune et demande un ordre particulier dans les interventions disciplinaires (interdisciplinarité).

Le projet pluridisciplinaire

Les deux disciplines ne sont pas liées par un même objet de savoir. Elles se retrouvent soit autour d'un thème, soit parce que l'une des deux disciplines offre à l'autre un matériau concret de départ (elle contextualise la notion à aborder ou offre un matériau de réinvestissement). En général, la situation d'EPS constitue une situation - problème pour une notion donnée mathématique ou un moment de réinvestissement.

Le projet transdisciplinaire

Les deux disciplines ne sont pas liées par un même objet de savoir, elles se retrouvent autour d'une même compétence transversale. Celle - ci peut être relative aux attitudes des élèves face aux apprentissages et à la vie du groupe « classe », aux méthodes qu'ils mobilisent pour apprendre, aux pratiques langagières qu'ils ont, ainsi qu'aux écrits qu'ils utilisent/produisent pour apprendre.

Le projet interdisciplinaire (au sens de F.CROS)

Les deux disciplines sont liées par une notion commune et une compétence transversale. Parallèlement, chacune développe des objectifs spécifiques qui lui permettent de « ne pas perdre ». Il s'agit que chacune ne soit pas niée ou oubliée dans sa valeur disciplinaire.

À première vue, nous serions tentés de construire prioritairement des projets du troisième type, appelés à convoquer différentes disciplines de façon ambitieuse et pleine (sur tous les plans).

Du point de vue didactique :

Questionner le choix des objets disciplinaires à mettre en relation apparaît essentiel et déterminant ainsi que de penser les moments et les enjeux des allers - retours à effectuer, la pertinence de la démarche se mesurant également à l'aune de ses possibilités de mise en œuvre.

Voici quelques exemples d'objets EPS / Math pouvant être rapprochés :

Cycle 1	- EPS : Jeux collectifs et Athlétisme & Math : la notion de nombre - EPS : Jeux collectifs & Math : la notion de quantité - EPS : Jeux collectifs & Math : la notion de formes - EPS : Athlétisme & Math : la notion de grandeur - EPS : Jeux collectifs, Course d'orientation et les formes de travail en ateliers/circuits & Math : la notion d'espace - EPS : Jeux collectifs et Athlétisme & Math : la notion de temps

Collaboration des deux disciplines en vue d'un objectif n'appartenant ni à l'une ni à l'autre (transdisciplinarité).

Cycle 2	- Math : Exploitation de données numériques, Connaissances des nombres entiers naturels, Calcul & EPS : Jeux collectifs et Athlétisme. - Math : Espace et Géométrie & EPS : Course d'orientation, GRS, Danse et Jeux collectifs. - Math : Grandeurs et mesure & EPS : Jeux collectifs et Athlétisme.

Cycle 3	- Math : Exploitation de données numériques, Connaissances des nombres entiers naturels, Calcul, Connaissance des fractions simples et des nombres décimaux & EPS : Sports collectifs / duels et Athlétisme. - Math : Espace et Géométrie & EPS : Athlétisme, Course d'orientation, GRS, Danse et Sports collectifs / duels. - Math : Grandeurs et mesure & EPS : sports collectifs / duels et Athlétisme.

Du point de vue de la formation professionnelle :

Le dernier projet « autour de la longueur » (qui nous paraît le plus ambitieux des quatre), pose la nécessité d'accompagner les professeurs d'école pour la conception et la mise en œuvre. Dès lors, la construction « d'outils d'aide » paraît incontournable. Certains éléments de réflexions développés ci-dessus pourraient répondre à cet enjeu.

La mise en perspective de ces quatre niveaux de questionnement pourrait aider à identifier des problématiques de recherches précises autour de l'interdisciplinarité à l'école primaire. Terminons en nous centrant sur les principaux obstacles rencontrés par le professeur d'école pour s'engager dans des pratiques (au sens large) « interdisciplinaires ».

III - LES OBSTACLES A L'INTERDISCIPLINARITE A L'ECOLE PRIMAIRE

Dans les actes de l'Université de Reims[9], H.G. RICHON propose des pistes que nous allons reprendre. En fait, il nous semble important de juguler les difficultés dans quatre directions différentes, faisant référence à des obstacles de nature très singulière.

Les obstacles conceptuels

La nébuleuse des propositions de définitions des concepts de pluridisciplinarité, transdisciplinarité et d'interdisciplinarité n'œuvre pas pour baliser clairement l'accès à une démarche d'articulation des disciplines.

Nous avons tenté de préciser plus haut notre cadre de référence. Toutefois, c'est la mise à jour des caractéristiques de la liaison réalisée entre les disciplines, du double point de vue des progressions et des fonctions des liens, qui nous semble essentiel et à creuser, ces deux éléments définissant sa complexité.

[9] Interdisciplinarité, polyvalence et formation professionnelle en IUFM, Actes de l'Université d'automne, IUFM de Reims du 2 au 5 novembre 1999, CNDP Champagne – Ardenne, 2001.

Les obstacles institutionnels

Le français et les mathématiques ont un statut particulier leur accordant une priorité au détriment des autres disciplines.

Ainsi, les mathématiques trouvent-elles moins facilement la possibilité de se poser la question du « gain à gagner » pour construire une notion à aborder, stabiliser/réinvestir une notion découverte préalablement par l'approche interdisciplinaire. Par essence et donc en priorité, la discipline « Mathématiques » dispose d'un temps privilégié (dans les textes et les têtes des PE), pour être enseignée.

Au contraire, pour l'EPS, il s'agit de lutter doublement, contre son externalisation en *cycle 2 et cycle 3* et son statut en *cycle 1*.

Ainsi, en élémentaire, la délégation à des intervenants extérieurs des séances a plusieurs effets pervers dont, entre autres, une confusion sur les apprentissages recherchés (distinction entre les enjeux scolaires et ceux d'une animation « sportive » non maîtrisée par les IE), des enseignants qui sans collaboration d'un IE ne font pas d'EPS.

Pour ce qui concerne la maternelle, le statut de propédeutique à d'autres apprentissages (graphiques, topologiques) empêche l'EPS d'être identifiée en tant que domaine d'activités à part entière avec des compétences spécifiques à développer.

Les obstacles socio-culturels

Les enseignants ont un cursus universitaire souvent spécialisé sur une discipline qui peut inviter au repli frileux sur celle-ci.

Pour le cas particulier des professeurs d'école, la spécialisation comme son absence ne permettent pas de relever pleinement le défi de la polyvalence : la capacité à établir des ponts (qu'il peut effectuer d'un point de vue « fonctionnel » mais non didactique), entre les contenus disciplinaires, apparaît fortement dépendante d'une connaissance pointue de la didactique des disciplines à enseigner.

Ainsi, pour articuler les mathématiques et l'EPS, la non-maîtrise de la logique interne d'une Activité Physique Sportive et Artistique (APSA) et du champ conceptuel d'une notion mathématique rend difficile la conception en termes d'idée puis de pertinence des allers - retours programmés.

Ainsi pour favoriser un changement de posture chez les professeurs d'école, les inciter à faire preuve d'appétit pédagogique et didactique, il semble incontournable de les aider à vaincre l'angoisse du nouveau et de l'inconnu.

Dans cette perspective, des outils d'aide sont à construire (avec ou sans les professeurs d'école, lors de la formation initiale et continuée), et à diffuser pour :

- Extraire des Instructions Officielles les pistes formulées : dans cette perspective, des documents comme ceux de l'annexe n°5 pourraient être élaborés.

- Déterminer le « type de lien entre les séances » et le « type d'articulation entre les progressions disciplinaires » : cela a été l'objet principal de la réflexion menée plus haut relative à « l'opérationnalisation » du concept d'interdisciplinarité.

Les obstacles matériels

Pour la conception tout d'abord, il existe peu de recherches et de littérature pédagogiques sur ce sujet. Or des pistes précises de travail faciliteraient la mise en mouvement et l'investigation par certains de telles modalités pédagogiques.

De plus, d'autres difficultés qui intéressent davantage la mise en oeuvre peuvent apparaître, en fonction des disciplines mobilisées.

Ainsi, pour des projets math/EPS, pouvons-nous relever les problèmes possibles suivants :

- Les causes propres au fait que l'EPS est là : infrastructure à utiliser plus longuement et à avoir régulièrement.
- Le matériel mathématique pour recueillir le matériau dans un environnement inhabituel pour les élèves (problèmes de représentations), et l'enseignant (problèmes d'anticipation du matériel à utiliser/mobiliser), qui fait référence selon le cycle à la prise de notes (en dehors de la classe !) ou à la pérennisation des données recueillies.
- Les difficultés liées à toute mise en situation d'appropriation du savoir par l'élève se trouvent exacerbées : par exemple, la durée, la place/le moment des verbalisations.

Les quatre types d'obstacles à relever appellent indéniablement une vigilance dès la formation initiale, qui doit s'exprimer dans les différents modules disciplinaires mais aussi ceux d'analyse de pratiques. Ils nécessitent également un travail de long terme, et en ce sens la formation continuée nous semble un enjeu fondamental[10].

CONCLUSION

L'atelier avait été un moment d'échanges à partir des différents projets EPS – Mathématiques présentés (les annexes 1 à 4). Il avait conduit à s'interroger sur la pertinence de ces derniers et à identifier précisément la nature de la collaboration entre les deux disciplines. Le temps avait manqué pour conclure sur des outils d'aide à la conception et à la mise en œuvre. Cette contribution a tenté d'y palier.

En effet, l'enjeu est bien de proposer des pistes opérationnelles pour qu'une pratique interdisciplinaire puisse être mobilisée par les PE. D'ailleurs, J.N. FOULIN nous le rappelle :

« On attend des didacticiens qu'ils organisent l'interprétation et l'exploitation des produits (utiles) de la recherche mais aussi qu'ils aillent plus loin en participant à la production des outils d'enseignement. Leur tâche serait de prendre en charge une seconde forme de transposition, celle qui assure la traduction des options didactiques en actions pédagogiques.

[10] Nous proposons d'ailleurs au plan de formation départemental de la Seine Saint Denis (académie de Créteil), pour l'année 2003/2004, 3 stages de 3 semaines sur l'interdisciplinarité.

Les enseignants ont en effet besoin qu'on mette à leur disposition des méthodes et des outils de qualité afin qu'ils consacrent leur temps de préparation de la classe, non à la construction des outils d'enseignement, mais à leur adaptation, à leur différenciation et à l'évaluation des élèves.

Cette disposition nous paraît une condition clé du passage des connaissances didactiques établies à leur appropriation pratique par les enseignants. Elle participe d'une conception plus générale selon laquelle la réduction des contraintes d'enseignement est l'une des conditions majeures d'amélioration des pratiques d'enseignement. »[11.]

[11] FOULIN J.N. (2000) : Psycholinguistique pour la classe. Lire, écrire, compter, apprendre. Les apports de la psychologie des apprentissages. Coordonné par J.N. FOULIN et C. PONCE. CRDP Aquitaine, pp69-70.

Annexe n°1
Le projet du sablier

Le projet proposé s'appuie sur un document pédagogique EPS[1]. Il tente de mettre en relation les jeux collectifs et la structuration du temps au cycle 2.

<u>1ère étape :</u> Situation EPS

- C'est un jeu de « déménageurs » : il s'agit pour chaque joueur de transporter une seule perle à la fois de la maison de départ de son équipe à celle d'arrivée. Il y a 2 équipes. Celle qui gagne est celle dont le plus de perles ont été déménagées (celle qui aura fabriqué le collier le plus long).
- Le nombre de souris est identique dans les deux équipes et les distances à parcourir sont les mêmes. Lors du jeu, un panneau « chat » peut être brandi devant une maison d'arrivée, imposant alors aux souris de cette équipe de rester dans leur maison de départ. Toutefois, les durées d'apparitions des deux chats sont très différentes, de façon à ce qu'une équipe de souris ait pu courir beaucoup plus et donc gagner largement.
- C'est ainsi que la recherche de la raison de l'équipe gagnante aboutit à la notion de durée.

<u>2ème étape :</u> Situation classe

- La durée ayant été découverte sur la situation EPS, se pose maintenant la question de savoir comment faire pour la mesurer afin de jouer dans des conditions égalitaires.
- Le sablier est proposé comme instrument de mesure de la durée.
- Les élèves émettent des hypothèses à propos de la durée d'écoulement de quatre sabliers contenant des quantités de semoule différentes. Les élèves expérimentent pour valider ou non leurs hypothèses et, ainsi, comprendre que le sablier permet de mesurer la durée.

<u>3ème étape :</u> Situation classe

L'enseignante utilise les constats de l'expérience pour faire émerger la nécessité de durée égale dans les jeux collectifs.

<u>4ème étape :</u> Situation EPS

Le jeu collectif vécu en étape 1 est rejoué avec un sablier par équipe tenu par des « arbitres du temps ».

[1] Il s'agit d'un document vidéo« LE TEMPS DU SABLIER », conçu par le CRDP de Dijon.

Le projet du sablier, variante

Présentation rapide du projet :

EPS	Le sablier :	Mathématiques
Coopérer et s'opposer individuellement ou collectivement « Jeux collectifs de poursuite ». Objectifs : Participer à un jeu collectif en respectant ses règles. Compétences : * Distinguer les trois statuts et agir en fonction d'eux (arbitre – chat – souris). * Identifier ses partenaires de jeu. * Verbaliser ses actions / décisions en tant que « gardiens du temps ».	Construction & Manipulation ***OBJECTIFS:*** * **Mettre en jeu son activité de manière ordonnée,** et notamment accès à la démarche scientifique *(Hyp. / Expé. / Valid).* **** MAÎTRISE DU LANGAGE ET DE LA LANGUE FRANÇAISE :*** *Maîtrise du langage oral : communiquer & maîtrise du langage de l'évocation.*	*Grandeurs et mesure* Compétences : * « Volumes (contenances) » : Comparer la contenance de 2 récipients en utilisant un récipient étalon. * « Repérage du temps » : Utiliser un sablier pour comparer ou déterminer des durées.

Démarche poursuivie :

1ère étape	Apparition du problème : comment désigner le gagnant du jeu de chat (EPS)
2ème étape	Construction d'un sablier pour jouer avec le même temps (Découvrir le monde). Stabilisation des compétences relatives à l'appartenance à une équipe, au respect de l'espace de jeu et au fait d'agir en fonction d'un score (EPS) à partir de jeux en parallèles (quatre équipes).
3ème étape	Manipulation du sablier (Découvrir le monde). Résolution du problème en grand groupe : désigner l'équipe chat gagnante (EPS).

Contenus proposés :

- **En mathématiques** : *cf* « le projet sablier initial ».

- **En EPS** :

Etape 1	*Un jeu de chat / souris :* - Deux équipes dans la classe, chacune d'elle tour à tour est chat sur des durées très contrastées (30'' à 3', par exemple) et l'autre souris. **But pour les élèves chats** : prendre le plus de « queues possibles (un foulard qui pend derrière le coureur qui l'a glissé entre son pantalon et son dos / ses fesses) ». **But pour les élèves souris** : ne pas perdre sa queue. Si c'est le cas s'en procurer une autre en allant vers les « réserves à foulards » pour continuer à jouer. - Au bout de deux parties, on identifie l'équipe « chat » gagnante et on émet des hypothèses (celle qui sera attendue est relative à la durée de jeu).
Etape 2	Les élèves ne disposant pas de moyens pour mesurer le temps de jeu, le « chat/souris » est organisé à partir de quatre équipes et de deux terrains de jeux. Ceci permet de comparer les chats les plus performants (dans des conditions de prises d'informations moins complexes) et en introduisant des « arbitres » (appartenant aux « chats » ou composant une équipe indépendante = tournoi à 3 équipes sur chaque terrain). Les variables permettant de faire évoluer la situation seront : - La densité en joueurs de l'espace de jeu. - La place de la réserve, dans l'espace de course ou en dehors. - L'introduction d'une « super » souris qui détient « les vies » (elle remplace les réserves) puis d'un jeu de délivrance habituel (toute souris en action peut redonner vie).
Etape 3	Jeu de chat – souris avec les dernières règles établies, à partir de trois équipes : une équipe de chat, une de souris et une d'arbitres. La meilleure équipe « chat » sera désignée à la suite des trois parties car elles auront duré le même temps (grâce au sablier manipulé par des arbitres).

Annexe n°2
Le projet "proportionnalité"

EPS	LIEN EPS – MATH: *Sports collectifs / données numériques*	MATH
* Compétence générale : S'affronter individuellement ou collectivement. * APSA support : Sport collectif * Compétences spécifiques : - Attaquant : Se démarquer dans un espace libre, recevoir une balle, progresser vers l'avant et la passer ou tirer en position favorable. - Défenseur : En fonction de la situation : Courir pour gêner le porteur de balle OU courir pour récupérer la balle OU s'interposer entre les attaquants et le but. - Equipe (en 4 contre 4) : S'organiser collectivement pour monter la balle à la cible adverse et l'attaquer de façon efficace.	<u>Définition :</u> Construire la notion de pourcentage dans des situations d'EPS afin de donner sens (en termes de compréhension des critères de réussite et de contrats de réussite minimal) au projet d'action défini en EPS. <u>Compétences transversales :</u> Construire un projet d'action (le formuler, le mettre en œuvre…)	* Domaine d'activités : Exploitation de données numériques * Compétences spécifiques travaillées au cours des séances : - Organiser des séries de données numériques (listes, tableaux…) - Résoudre des problèmes relatifs aux pourcentages en utilisant des raisonnements personnels appropriés.

DESCRIPTIF DES ÉTAPES DU PROJET

1ère étape	**EPS** : Prendre conscience de l'importance des deux paramètres permettant la réussite dans un sport collectif de démarquage (Hand-ball, Basket-Ball, Football, Hockey) : l'adresse aux tirs à la cible et la montée à plusieurs de la balle à la cible. **Math** : Prendre conscience que pour comparer deux séries de grandeurs, les valeurs d'une des grandeurs doivent être identiques.

2ème étape	**EPS** : Les contraintes des trois types de situations proposées évoluent pour faire progresser les habiletés des élèves dans les domaines : * Des habiletés « manipulatoires » : tirs, passes, déplacement en dribble (situation 1). * Des habiletés « informationnelles » liées au principe de marquage/démarquage (situation 2). * Des habiletés à attaquer à plusieurs la cible adverse en situation de match. **Math** : Découvrir que pour comparer deux séries de grandeurs, lorsqu'elles n'ont pas de valeurs identiques, une des procédures de calcul possible est de les ramener à une valeur identique.
3ème étape	**Math** : Découvrir que la notion de pourcentage (ramener à la base de 100) permet de comparer deux séries de grandeurs lorsqu'elles n'ont pas de valeurs identiques. **EPS** : *cf* étape 2.
4ème étape	**Math** : Utiliser la notion de pourcentage pour établir un projet de réussite aux tirs et aux passes. **EPS** : Répondre à un contrat de réussite relatif aux « montées de balles à la cible par son équipe», défini et calculé en termes de pourcentages. Les contraintes des différentes situations de la séance évoluent pour faire progresser les élèves (*cf* étape 2).

PRÉCISIONS POUR LA PARTIE MATHÉMATIQUE :

1ère et 2ème étapes :

* Objectifs :

Découvrir que la comparaison de séries de deux grandeurs nécessite de se ramener à une valeur commune à toutes les séries. Comparer des séries de grandeurs en utilisant une procédure additive ou multiplicative (x 2).

La 1ère séance se déroule en salle après 1 ou 2 séances d'EPS.

* Situation de départ :

Lors de la phase de tirs en EPS, les élèves ont tenté des tirs pendant 5 min. Ils ont inscrit leurs résultats (nombre de tirs tentés et nombre de tirs réussis) dans un tableau.

La recherche de l'élève le plus adroit permet de constater que la comparaison est facile lorsque les élèves ont tenté le même nombre de tirs, mais plus compliquée pour des nombres de tirs tentés différents.

Les séances suivantes de mathématiques ont pour objectif de faire découvrir un moyen de comparaison.

* Situation – problème :

Lors de la phase de montée de balles dans l'embut en EPS, les équipes ont inscrit leurs résultats (nombre de balles tentées et nombre de balles mises dans l'embut), dans un tableau. La moitié des équipes a tenté 10 balles, l'autre moitié a tenté 20 balles.

La recherche de l'équipe la plus performante pour monter la balle dans l'embut permet de faire ressortir que la comparaison est facile entre les équipes qui ont tenté le même nombre de balles. Pour comparer les équipes ayant tenté 10 balles et celles ayant tenté 20 balles, il faut se ramener à un nombre de balles commun à tout le monde.

Des exercices de réinvestissement sont proposés pouvant être contextualisés autrement qu'à partir du vécu EPS.

3ème étape :

* Objectif :

Découvrir la notion de pourcentage. Calculer un pourcentage avec une procédure additive ou multiplicative.

La séance se déroule en salle après une / de nouvelles séance(s) d'EPS.

* Situation - problème :

Lors des différentes phases de montées de balles à la cible en EPS, les équipes ont inscrit leurs résultats dans un tableau. Cependant, 3 équipes ont tenté 20 balles d'attaque, l'autre 25.

La recherche de l'équipe la plus performante pour monter la balle à la cible permet d'identifier les différentes procédures de comparaison possibles. La base 100 est introduite si elle n'a pas été proposée.

Chaque élève calcule ensuite le pourcentage de réussite de son équipe « d'attaque de la cible » minimal à réaliser lors de la prochaine séance d'EPS.

4ème étape :

* Objectif :

Calculer une valeur en fonction d'un pourcentage donné par une procédure multiplicative. Chaque élève dispose du score de réussite de montée de balle de l'équipe sur 25 tentatives.

* Exercice de réinvestissement :

Chaque élève doit déterminer si l'équipe a atteint le pourcentage minimal prévu, puis doit se fixer un nouveau contrat en terme de pourcentage minimal à atteindre pour la prochaine séance d'EPS.

* Situation – problème :

Chaque élève doit prévoir le nombre d'attaques réussies par son équipe en fonction du pourcentage prévu et cela dans deux cas : pour 20 montées de balles tentées, pour 15 montées de balles tentées.

PRÉCISIONS POUR LA PARTIE EPS

Chaque séance est scandée par 3 moments incontournables, qui permettront de recueillir des données numériques à partir d'auto ou de co–évaluations.

1. Débuter la séance à l'aide d'une situation permettant aux élèves de manipuler la balle dans un contexte qui va devenir de plus en plus complexe aux niveaux :

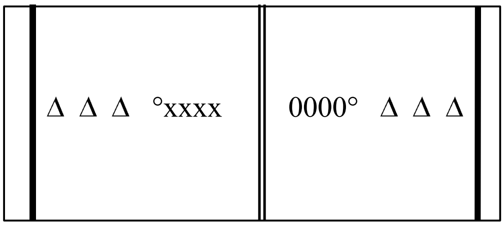
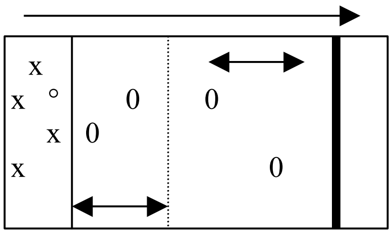
* Des coordinations à effectuer : se déplacer comme « on veut », se déplacer en dribblant, se déplacer à l'aide d'un dribble réglementaire (une main, avec ou sans accompagnement de la balle).

* Des informations et des décisions à prendre : quelle trajectoire emprunter, quelle action réaliser, en fonction d'un contexte plus ou moins prévisible, plus ou moins anticipé grâce à des aides extérieures ou à sa « perception personnelle des natures de l'incertitude ».

2. Poursuivre à l'aide d'une situation d'attaque/défense, afin de se centrer sur les principes de réalisation relatifs aux marquage / démarquage pour monter une balle vers une cible.

3. Terminer par un match à thème 3 contre 3 (BB) à 5 contre 5 (FB, HB, Hockey) conduisant à réinvestir les deux moments précédents, en situation extrême de complexité informationnelle et de pression temporelle (exemples de matches à thèmes : « prison pour un joueur agissant sans respecter la règle d'or », « 5 passes minimales avant d'attaquer la cible », « pas de déplacement avec la balle »…).

Aussi, les 2 situations principales proposées avant un réinvestissement en match à thème, peuvent prendre les formes suivantes :

Situation 1 : pour affiner sa précision au tir (lors de la 1ère phase de la séance)	*Situation 2 : pour monter la balle à la cible collectivement*
Un jeu de tirs 1 contre personne après un enchaînement d'actions :  X : Equipe 1 ; 0 : équipe 2 ; ° : ballon ; Δ : plot. Il s'agit au bout de 3' d'appartenir à l'équipe qui enregistre le plus de buts marqués. **NB :** Marquer un but : tir arrivant dans la zone d'embut et touchant la cible (cage, tapis vertical, 1 grand plot…). Le joueur qui possède la balle réalise un « parcours » pour tirer puis donne la balle à un de ses co-équipiers.	Un jeu d'attaque / défense 4 contre 2 contre 2, avec des zones de défense définies :  x : attaquant. Déplacement 0 : défenseur. Déplacement ° : balle à transporter dans la zone d'embut <u>Ainsi, il s'agit pour :</u> x : amener la balle dans la zone d'embut à plusieurs en respectant les règles de manipulation de balle. 0 : Récupérer la balle, sans toucher le porteur de balle et en respectant sa zone de déplacement pour défendre.

Annexe n°3
Le projet “longueur”

Synthèse sur la démarche poursuivie (Cycle 2 : étapes 1 à 4 ; Cycle 3 : étapes 5,6)

Étape 1 : *« situation inégalitaire du déménageur »*

EPS	Mathématiques
Situation qui fait apparaître la notion de longueur permettant de donner sens à l'APS à introduire : l'athlétisme et le saut en longueur particulièrement	Situation qui fait apparaître la notion de longueur de façon concrète.

Étape 2 : *« changer le dispositif de jeu pour avoir les mêmes chances de gagner »*

EPS	Mathématiques
Situation qui fait apparaître la notion d'origine qui va permettre de comprendre le procédé de « mesure d'un saut » à partir d'une ligne (d'appel) pour que puissent comparer les différents essais.	Situation qui fait apparaître la notion d'origine de façon concrète.

Étape 3 : *« Sauter sur des aires dont la zone d'appel est plus ou moins visible et identifier le sautoir où l'on saute le plus loin ».*

EPS	Mathématiques
Situation qui fait apparaître la nécessité pour franchir une grande distance d'enchaîner 3 actions successivement : courir, sauter sur 1 pied dans une zone particulière et arriver dans le sable.	Situation qui fait apparaître la nécessité pour comparer directement des performances d'utiliser un objet intermédiaire.

Étape 4 : *« Sauter par-dessus des « rivières » plus ou moins proches de son record personnel et identifier le sautoir où l'on saute le plus loin ».*

EPS	Mathématiques
Situation qui fait apparaître la nécessité pour franchir une grande distance de ne pas enjamber mais de rechercher un temps de suspension long et un regroupement du corps lors de la réception.	Situation qui fait apparaître la nécessité pour comparer des longueurs d'utiliser un objet étalon (l'étalon choisi sera inférieur à un saut -autour de 20cm-).

Étape 5 : *« Sauter avec ou sans contrainte de pied d'appel et identifier les conditions favorables à la réalisation de son record ».*

EPS	Mathématiques	
	Mesure :	**Fractions :**
Situation qui fait apparaître la nécessité pour franchir une grande distance de prendre une impulsion sur un pied particulier, celui qui est le « plus fort » (notion de pied d'appel).	Comparer des longueurs de façon précise, choisir un instrument adapté (ici le décamètre).	Prendre conscience des nombres entiers et de la nécessité de nouveaux nombres (fractions décimales).

Étape 6 : *« Réaliser une prédiction de performance et la tester sur 3 aires imposant des contraintes différentes sur la longueur de la course d'élan »*

EPS	**Mathématiques**	
Situation qui fait apparaître la nécessité pour franchir une grande distance de prendre une course d'élan sur une dizaine de mètres afin de « pouvoir arriver vite mais pas fatigué » pour prendre son impulsion.	**Mesure :** - Exprimer un mesurage de longueur par encadrement. - Estimer une mesure.	**Fractions :** Exprimer une somme d'entiers et de fractions pour mesurer (fractions décimales et simples).

Annexe n°4
Le projet “endurance”

Le projet proposé est un document pédagogique EPS[1].
La partie visionnée est relative au cycle 3.

Descriptif des moments visionnés :

1ère étape : *Situation EPS*

Les élèves courent et font le maximum de tours (de 200 m) sans s'arrêter. Toutes les 15 secondes, l'enseignant fait défiler la frise numérique, ce qui permet de connaître le temps mis pour effectuer chaque tour.

2ème étape : *Situation classe*

En fonction du nombre de tours effectués, chaque élève calcule la distance sur laquelle il a couru. Les élèves comparent les résultats pour désigner celui qui a couru la plus grande distance puis celui qui a couru le plus longtemps.

Les résultats sont, ensuite, ordonnés selon deux critères : en ordre croissant de distance parcourue, en ordre croissant de durée de course. La comparaison des résultats dans chaque classement permet d'introduire la notion de vitesse en tant que variable dépendant de la distance et du temps.

L'enseignant institutionnalise le fait que l'une de ces deux grandeurs doit être commune à tous les élèves pour qu'ils puissent comparer leur vitesse.

3ème étape : *Situation EPS*

Chaque élève effectue trois essais pour courir la plus grande distance pendant 15 secondes. Chaque élève effectue trois essais pour courir 50 m en mettant le moins de temps possible.

4ème étape : *Situation classe*

Les trois essais de chaque catégorie sont comparés pour travailler, à nouveau, la notion de vitesse. À partir de leur résultat sur 15 secondes, chaque élève doit déterminer la distance qu'il parcourra en 30 secondes puis en 60 secondes.

5ème étape : *Situation EPS*

Chaque élève court 30 secondes puis 60 secondes. La distance parcourue dans les deux cas est mesurée.

6ème étape : *Situation classe*

Chaque élève compare la distance qu'il avait prévue par calcul et la distance effectivement réalisée. Les écarts entre ces deux distances permettent de faire émerger la notion de sprint et d'endurance.

7ème étape : *Situation EPS*

Les élèves doivent courir plusieurs fois 2 minutes sans s'arrêter, ce qui nécessite la gestion de leur vitesse de course.

---

[1] La vidéo « La course de longue durée : un prétexte pour apprendre », conçu par l'INSEP, MNS.

Annexe n°5
Lecture approfondie des Instructions Officielles

Pour le cycle 1

Notions communes	**• Structuration de l'espace (repérage et orientation) :** - Se repérer dans différents espaces, s'y déplacer avec ou sans contraintes, représenter des objets localisés, coder un déplacement. - Utiliser les marques spatiales du langage. Construire l'image orientée de son propre corps. Utiliser des repères spatiaux et temporels pour structurer ses observations et son expérience. **• Grandeurs et mesure (longueur et durée)** - Utiliser correctement les indicateurs temporels et chronologiques. - Comparer des événements en fonction de leur durée.
Compétences transversales communes	• Donner à l'enfant la possibilité d'échapper à l'usage exclusif de son propre point de vue et le conduire à adopter celui des autres. • Prendre des repères dans l'environnement pour réussir leurs actions. • Comprendre et mettre en œuvre des règles, des codes. • Prendre conscience des usages plus contraints du langage. • Utiliser un lexique plus précis et acquérir une syntaxe plus complexe mieux adaptée à la description des relations spatiales, temporelles, de causalité, et au cheminement du raisonnement. • Formuler des interrogations plus rationnelles. • Anticiper des situations. Prévoir des conséquences. Constater qu'on peut relier la cause et l'effet. Observer les effets de ses actes. Construire des relations entre les phénomènes observés. Identifier des caractéristiques susceptibles d'être catégorisées. • Prendre conscience du pouvoir que lui donnent ses connaissances pour analyser une action ou le résultat de celle-ci, la réalisation effective de l'action venant ensuite confirmer ou infirmer la pertinence de sa prévision.

Pour le cycle 2

Notions communes	**• Structuration de l'espace (repérage et orientation) :** - Connaître et utiliser le vocabulaire lié aux positions relatives d'objets ou à la description de déplacements. - Situer un objet, une personne par rapport à soi ou par rapport à une autre personne. - Situer des objets d'un espace réel sur une maquette ou un plan. **• Grandeurs et mesure (longueur et durée)** - Apprendre à mieux se servir des repères temporels.

Compétences transversales communes	• Développer son imagination et son désir de chercher, la confiance en ses moyens. • Développer son aptitude à effectuer un travail personnel. • Développer ses capacités à travailler en équipe. Plus précisément, - Prendre conscience qu'une élaboration est faite d'étapes ou d'essais plus ou moins organisés. - S'engager dans une procédure personnelle de résolution et la mener à son terme ; admettre qu'il existe d'autres procédures que celle qu'on a soi-même élaborée et essayer de les comprendre. - Rendre compte oralement de la démarche utilisée (expliquer sa méthode), la mettre en débat, argumenter. - S'initier à l'argumentation : écoute des autres, contrôle par autrui de ce qui est avancé. ⇒ * Expliciter un événement ou un phénomène un peu complexe ; * Découvrir la rigueur et la modestie ; * Apprendre à écouter les autres ; * Tenir compte des échanges pour faire avancer la réflexion collective.

Pour le cycle 3

Notions Communes	**• Structuration de l'espace (repérage, utilisation de plans, de cartes)** - Améliorer sa vision de l'espace. - Utiliser un plan ou une carte pour situer un objet, anticiper ou réaliser un déplacement, évaluer une distance. **• Grandeurs et mesure (longueur, durée et vitesse)**
Compétences transversales communes	• Utiliser : ses connaissances pour traiter des problèmes / son imagination / son désir de chercher / la confiance en ses moyens, afin de développer son aptitude à effectuer un travail personnel. • Développer ses capacités à travailler en équipe ; se servir du dialogue pour organiser les productions du groupe. • Exposer sa démarche oralement, rapporter devant la classe de manière à rendre une production compréhensible. • Argumenter à propos de la validité d'une solution produite par soi-même ou par un camarade. ⇒ Expliquer sa méthode, la mettre en débat, argumenter ; ⇒ Se servir des échanges verbaux dans la classe ; ⇒ Prendre en compte les points de vue des autres ; ⇒ Contrôler et discuter la pertinence ou la vraisemblance d'une solution.

ESPACE ET GEOMETRIE GEOMETRIE DANS LE MESO-ESPACE A L'ECOLE PRIMAIRE ET AU DEBUT DU COLLEGE

Isabelle Bloch, Marie-Hélène Salin
IUFM d'Aquitaine

Résumé :

Cet atelier s'inscrit dans la continuité de celui présenté par René Berthelot au colloque de Chamonix (2000) : comment préparer à l'école élémentaire la géométrie du collège, ainsi que la problématique du dessin technique ; quelles connaissances géométriques peuvent être travaillées dans un espace assez grand, connaissances qui conduiront à comprendre les savoirs géométriques comme permettant d'anticiper et de contrôler les phénomènes spatiaux ?

Modalités : rappel des bases théoriques et des situations déjà expérimentées présentées en 2000. Présentation par une vidéo des nouvelles expérimentations et conclusions.

Travail des participants sur le matériel et les situations : comment les organiser ? quels préalables ?

INTRODUCTION

Le travail que nous présentons dans cet atelier a été réalisé avec deux classes d'élèves de CM2 de l'école Jules Michelet à Talence (ex COREM) ; il a ensuite été repris dans deux classes de Quatrième SEGPA à Pau. Il s'inscrit dans la continuité de l'atelier présenté à Chamonix, aux journées COPIRELEM 2000, par René Berthelot[1]. La problématique de ce travail est donc celle introduite par la thèse de René Berthelot et Marie-Hélène Salin : l'enseignement de la géométrie, du cycle 3 de l'école primaire au collège, en prenant en compte les connaissances spatiales des élèves ou même en favorisant leur construction ; ceci devant s'accompagner d'une organisation de situations permettant la mise en œuvre et la prise de conscience de la modélisation qu'entraîne le passage d'une validation de type spatial à une validation dans le cadre d'une théorie géométrique, soit à ce niveau la géométrie euclidienne. Nous rappelons donc les bases théoriques d'élaboration des situations présentées, puis leur construction, et présentons l'analyse de leur mise en œuvre. En conclusion nous essaierons de présenter quelques éléments de réponse aux nombreuses questions des participants à l'atelier.

[1] Berthelot 2001.

30ème colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres.
pages 293 *à* 306

I. LES TROIS PROBLÉMATIQUES DU TRAVAIL SPATIO-GÉOMÉTRIQUE ET LA NÉCESSITÉ DE L'INTRODUCTION DU MÉSO-ESPACE

I.1 Les trois problématiques spatio-géométriques

L'analyse des modes culturels – courants ou savants – de rapport à l'espace met en évidence trois problématiques du travail spatio-géométrique qui existent dans la société et sont en jeu dans l'enseignement :

1. La problématique *pratique* est caractéristique des problèmes spatiaux non scolaires, tels que vécus dans la vie de tous les jours, dans des situations d'action. Dans cette problématique, l'individu contrôle ses rapports à l'espace de manière immédiate et empirique. Les solutions retenues sont empruntées à la culture, dans la logique du "sens pratique" (Bourdieu) ; les situations nouvelles sont résolues par ajustement, et la vérification de l'adéquation de la solution se fait sous le mode de l'évidence immédiate. Ce mode de fonctionnement ne nécessite pas de regard réflexif sur les méthodes utilisées pour réussir ; la communication des indications utiles, quand elle est nécessaire, s'effectue avec la même économie de conceptualisation. On peut noter que ce mode "naturel" de rapport à l'espace était presque universellement partagé par les enfants du milieu du XIXème siècle vivant dans une France rurale ; à l'heure actuelle, le mode de vie dominant (usage intensif de véhicules particuliers, temps moindre accordé aux jeux à cause de la télé…) ont pu rendre plus rares les occurrences de tâches spatiales pour les enfants d'âge scolaire.

2. La problématique de la *géométrie scolaire du secondaire* est celle qui est attendue des élèves à partir du collège ; elle exige un rapport à l'espace qui fait appel à des dénominations théoriques et non plus empiriques (vocabulaire géométrique qui fait l'objet d'un entraînement intensif dès la classe de Sixième) et une consistance théorique du discours, notamment dans l'apprentissage de la démonstration. Les difficultés des élèves lors de cette transition sont suffisamment connues ; ce sont elles qui motivent les propositions figurant dans le projet introduit par R.Berthelot et M.H.Salin, et repris ici.

3. La problématique de *modélisation* est celle du monde scientifique et technique : c'est celle qui organise un travail de résolution de problèmes spatiaux avec prévisions des solutions, formulation et justification des moyens géométriques ayant permis de les obtenir, et éventuellement invalidation des modèles inadéquats par des moyens empiriques adaptés. Cette problématique est la plus difficile à concevoir car elle est absente d'une culture exclusivement mathématique ; de plus elle nécessite la prise en compte du champ des approximations, or celui-ci a été complètement écarté de l'école primaire et secondaire, du moins en mathématiques, et n'est que peu abordé même dans les enseignements de sciences expérimentales. La prise en compte de cette problématique suppose que l'on fasse une distinction claire entre l'espace modélisé, où les moyens spatiaux empiriques n'ont pas à être disqualifiés, et le modèle, qui obéit quant à lui à des critères théoriques. Les moyens de communication et de validation dans le modèle ne sont donc pas, ni comme supports ni comme formulations, les moyens ayant cours dans l'espace modélisé. Ainsi la feuille de papier est un moyen efficace de communication et de

vérification dans le modèle alors que les problèmes posés peuvent l'être dans un espace de grande dimension.

La problématique de modélisation a un intérêt social évident, dans la mesure où elle est l'outil pertinent de résolution du monde scientifique et technique, de niveau moyen ou élevé : elle sera donc utile à un nombre important d'élèves dans leur future vie professionnelle. Mais de plus, elle est la seule qui permette de faire le lien entre les deux premières problématiques, et ainsi de motiver la géométrie théorique par son efficacité dans la prévision de phénomènes spatiaux.

I.2 L'introduction du méso-espace

Des travaux déjà anciens ont fait apparaître que le rapport pratique à l'espace est un obstacle à l'introduction de la géométrie théorique, car ce rapport pratique est inégalable en termes d'efficacité pour un moindre coût de conceptualisation. L'élève placé devant une injonction d'avoir à justifier mathématiquement un résultat prouvé empiriquement, voire "évident", ne comprend souvent pas la nature et les buts de ce jeu qui semble gratuit. Or l'enseignement secondaire fait actuellement l'économie du passage par la modélisation, et prend donc de plein fouet les incompréhensions et obstacles provoqués par l'articulation brutale pratique/théorique.

La prise en compte de la modélisation dans l'enseignement de la géométrie est ce qui permet de faire le lien entre problématique spatiale et problématique de géométrie théorique. Mais cette prise en compte ne peut s'effectuer directement sur un micro-espace comme la feuille de papier, pour des raisons de trop grande proximité de l'espace et du modèle, et aussi de non fonctionnalité du micro-espace pour certaines tâches, ainsi que nous l'argumentons ci-dessous.

Il y a donc lieu d'introduire des problèmes à résoudre dans le méso-espace – espace "moyen", soit espace domestique, ou espace de l'établissement scolaire, de la cour de récréation, du gymnase – afin que la distance souhaitable existe entre l'espace des problèmes posés et l'espace de leur représentation.

Par ailleurs une analyse des possibilités de contrôle des objets géométriques dans les deux espaces – micro et méso – fait apparaître la différence de leurs fonctionnalités, différence qui explique un certain nombre des déboires de la géométrie au collège. En effet le micro-espace ne permet pas d'organiser un milieu permettant de discriminer l'évidence et la preuve formelle, ceci pour de nombreux concepts géométriques.

Ainsi le micro-espace, contrairement au méso-espace, est transparent pour certaines tâches :

- Les tâches de tracé – droites, cercles – sont effectuées avec des instruments qui prennent en charge le travail et le contrôle sans que l'élève ait à investir des connaissances pour effectuer ou vérifier ; dans le méso-espace, la cour par exemple, le tracé d'une droite, d'un angle droit, ou d'un cercle nécessite la mise en œuvre de connaissances géométriques ; de plus les bords de la feuille étant absents, les repères visuels qu'ils constituent ne peuvent plus jouer leur rôle à l'insu de l'élève ou du professeur.
- Dans le micro-espace, les figures élémentaires étant tracées globalement, il est plus difficile pour les élèves d'envisager une partie ou un prolongement de la figure ; dans le méso-espace il est souvent nécessaire de prolonger les segments tracés, ou de se situer sur une partie d'une ligne ou d'un cercle ; on est *dans* l'espace et non plus en vision globale de cet espace, ce qui change la perspective

et les modes d'action : le méso-espace impose des déplacements et des recollements.

- Dans le méso-espace, la nécessité de la saisie et du recollement d'informations conduit d'emblée à l'introduction de *plans*, et, en fait, au moins les plans horizontaux et verticaux. De plus, dès que les informations sont suffisamment complexes, il devient nécessaire de représenter pour raisonner et communiquer. La feuille de papier acquiert ainsi naturellement un statut de représentation, d'outil d'aide à la décision et de traitement.
- Les objets de base que l'on questionne seront modélisés par des surfaces découpées dans les plans horizontaux ou verticaux (fils tendus par exemple) ; les représentations posent alors la question de la conservation ou non de propriétés géométriques ;
- La taille de l'espace permet de prendre en compte les problèmes de mesurage, d'approximation… Le matériel à la disposition des élèves comprend des décamètres, des équerres et règles de tableaux, des fils à plomb, des ficelles à tendre… Ce matériel, contrairement à un double-décimètre dans le micro-espace, ne substitue pas son contrôle à celui de l'élève ; au contraire c'est l'élève qui doit contrôler que les informations fournies par le matériel sont bien pertinentes, plausibles, valides. Ainsi pour tracer une droite, on pourra mettre bout à bout des règles de tableau ou des tasseaux, mais dans ce cas on devra contrôler que le produit final est bien une ligne droite – par utilisation de ficelle ou visée …

Le méso-espace constitue donc un *milieu* (au sens de la théorie des situations didactiques) pour construire des situations de modélisation permettant de mettre en évidence la fonctionnalité des savoirs géométriques pour anticiper, décider, tracer dans l'espace : un espace de réalisation de propriétés géométriques dont on vise à travailler l'opérationnalité, ce qui ne peut être fait dans le micro-espace. Il reste à spécifier des milieux précis, avec des objets, des consignes, des variables didactiques, pour travailler des savoirs de géométrie. Nous en donnons un exemple ci-dessous : une des situations construites dans le méso-espace a été expérimentée dans deux CM2 à l'école Jules Michelet, il s'agit de travailler sur la notion de distance d'un point à une droite puis de l'utiliser comme outil pour définir le parallélisme.

La deuxième partie présente successivement les objectifs des situations, des indications sur les résultats de l'analyse a priori et sur le déroulement effectif dans les classes, les questions des participants. Sont placées en annexe les fiches didactiques détaillées (annexe 1), et les questions posées aux participants de l'atelier pour guider une analyse a priori succincte portant sur la présentation des fiches didactiques allégées (annexe 2).

II. DISTANCE D'UN POINT À UNE DROITE – DROITES PARALLÈLES : DESCRIPTION DE LA SITUATION ET COMPTE-RENDU DE L'EXPÉRIMENTATION

II.1 La situation

La situation a été construite par R.Berthelot et M.H. Salin, dans le cadre de leurs travaux sur la géométrie au primaire.
Les séances se déroulent en partie dans le préau de l'école, en partie dans la classe.

Objectifs :

- Introduire la définition de la distance d'un point à une droite comme la longueur du segment le plus court que l'on peut tracer entre le point donné et un point de la droite.
- « découvrir » que c'est la longueur du segment d'extrémités le point donné et le pied de la droite perpendiculaire à la droite donnée passant par ce point.
- « découvrir » que tous les points à une distance donnée d'une droite donnée sont alignés. La droite qu'ils forment est dite parallèle à la première.
- placer les élèves dans une situation au cours de laquelle pour échanger sur leurs résultats, ils ont intérêt à représenter la situation du méso-espace par un schéma. Il y a donc deux espaces de travail : celui du sol du préau, auquel s'appliquent des tâches proposées par l'enseignant, et l'espace du tableau de la classe, sur lequel les élèves représentent l'espace du sol et formulent les actions réalisées ou à réaliser dans le préau.

Les séances sont construites autour de deux problèmes, faisant appel au matériel suivant : ficelle, décamètre par groupe, crayon et papier, règle et équerre de tableau mais pas de règles ni de double décimètre, craie.

Problème 1 :

Une ligne droite d'une dizaine de mètres de longueur est tracée sur le sol de la cour. Chaque groupe se voit attribuer un "point" matérialisé par une croix. Ces points sont placés à une distance de la ligne comprise entre 1m 60 et 2m. Les élèves ont à mesurer la distance des points à la droite. Ils ont à leur disposition, règle, équerre, décamètre, ficelles, craies …

Problème 2 :

Problème 2-a La droite est tracée, les points précédents effacés. Chaque équipe place un point à 1m92 de la droite.

Problème 2-b– Après avoir placé 2 points à 125 cm de la droite, chaque groupe doit placer, en un temps bref décompté par le professeur, le plus de points possibles à la même distance de la ligne droite.

II.2 L'analyse a priori (voir fiches détaillées en annexe 1)

Pour le problème 1, la suite des mesures obtenue en faisant tourner le mètre ruban autour du point donné indique à une incertitude près, liée au matériel, une solution de type « zone la plus proche » sur la ligne. Une mesure est trouvée par chaque groupe pour plusieurs points. On peut éventuellement s'attendre à des difficultés de mesurage ; par contre, avec les distance considérées, il est relativement facile de repérer la zone où la distance passe par un minimum. Remarquons que dans le micro-espace de la feuille de papier, ce travail n'aurait pas de sens : il est impossible de repérer la zone de distance minimale avec une évidence suffisante. Par contre, un logiciel de géométrie dynamique tel Cabri ou Géoplan, où l'on affiche la distance au fur et à mesure qu'un point M se déplace sur la droite, permet de visualiser de la même façon le moment où la distance passe par un minimum. Cette phase ne requiert donc pas de se rendre compte que la plus petite distance est atteinte lorsque l'on a une perpendiculaire menée de P à la droite.

Pour le problème 2, il est par contre très difficile de réussir sans mettre cette propriété en œuvre. L'hypothèse faite est que les angles droits sont connus, et que les élèves les introduiront spontanément comme moyen d'être sûr que l'on est bien "en face" de la droite.

Il est du reste difficile de construire une situation fonctionnelle de cette propriété, en tant qu'elle apparaît dans une progression comme étant un des axiomes de la géométrie euclidienne. A. Berté avait analysé, dans "Différents ordres de présentation des premières notions de géométrie métrique dans l'enseignement secondaire"[2] la dépendance existant entre les notions d'inégalité triangulaire, de perpendiculaire plus courte que l'oblique, l'intersection de deux cercles, et le théorème de Pythagore ; elle montrait qu'il était très difficile de trouver une problématisation rationnelle de toutes ces notions, dans la mesure où certaines opèrent comme des axiomes pour les autres, et que le choix des propriétés problématisées était assez fortement contraint : s'il est assez facile de problématiser Pythagore, il est beaucoup moins naturel de le faire pour les cas d'intersection de deux cercles ou la perpendiculaire plus courte que l'oblique.

La situation construite n'est donc pas adidactique, mais *à dimension adidactique*. Il s'agit de retrouver un savoir mathématique par *abduction* et non par induction : c'est-à-dire, s'apercevoir qu'un savoir connu est celui qui va donner la solution d'un problème rencontré, on va donc, non pas découvrir mais *reconnaître* ce savoir comme fonctionnel pour résoudre le problème.

Le problème 2b contraint les élèves à placer beaucoup de points très vite, ce qui conduit à des erreurs de distance ou d'orthogonalité, ce qui revient au même ; la contrainte temporelle est une variable didactique destinée à inciter les élèves à trouver une stratégie plus efficace, à savoir, prolonger la ligne obtenue dès que l'on a quelques points (deux évidemment, au minimum, mais quelques uns de plus peuvent être souhaitables pour la précision).

II.3 Le déroulement effectif

Lors de l'atelier, quelques extraits de vidéos ont été présentés, montrant des solutions ou des difficultés rencontrées par les élèves. On peut résumer ainsi très rapidement le déroulement effectif :

- à la première séance, certains élèves trouvent effectivement la distance la plus courte en utilisant le mètre déroulant et d'autres ont déjà « l'intuition » de l'angle droit, mais sans nécessairement pouvoir coordonner correctement la position de l'équerre (courte) avec celle du point A. Le retour en classe pour échanger sur la situation favorise bien l'emploi d'une figure qui « représente » ce qui se passe sous le préau, même si à ce moment, cela se fait à la demande du professeur.
- A la deuxième séance, nous avons observé les différentes stratégies énumérées dans la fiche. Les exercices sont essentiels pour que les élèves s'approprient individuellement la méthode de tracé.

[2] Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 15/3, 1995.

- La dernière phase est la plus problématique. Alors que l'alignement des points à 1m25 de la droite semble évident pour les observateurs adultes, les élèves développent des tactiques pour placer très vite les points demandés, au risque de faire de nombreuses erreurs de mesures. C'est l'affirmation de la professeure : « moi si je veux, je place 20 points en moins d'une minute", qui dans les 2 classes a suscité la découverte de la solution. On voit alors des élèves faire un croquis, où certains montrent aux autres que tous ces points à même distance sont alignés ; après quoi l'équipe gagnante prolonge la ligne des points déjà placés. L'institutionnalisation prévue est faite ensuite par la maîtresse : **tous les points qui sont à 1m 25 de la droite sont alignés, et la droite qu'on obtient est parallèle à la ligne tracée**.

Remarque : pour que ces connaissances se stabilisent chez les élèves, outre les exercices décrits, des activités de réinvestissement et d'entretien seront nécessaires.

III. QUESTIONS DES PARTICIPANTS À L'ATELIER

Pour les participants à l'atelier, un certain nombre de questions ont été l'objet de discussions :

- *Comment effectuer la dévolution de la première situation ?* La solution présentée dans la fiche didactique, où la part de l'enseignant est importante, n'a pas rencontré de difficultés particulières, sauf en SEGPA (voir Bloch-Salin, Séminaire national de didactique des mathématiques en mars 2003). Les élèves se saisissent bien du problème qui est pour eux un problème usuel de mesurage. En fait, ici, ce n'est pas le problème qui fait problème, c'est le moyen de résoudre le problème ! Ceci est lié aux difficultés évoquées de problématisation d'un axiome.

- *Faudrait-il prévoir une étape intermédiaire où l'on fasse constater par les élèves qu'il existe des droites (dites parallèles à D) où quelle que soit la position d'un point sur ces droites, ces points sont à la même distance de la droite D ? Cela pourrait préparer la leçon 3 ?* Non, le milieu objectif est bien installé, et les élèves ont donc déjà des moyens suffisants, d'ailleurs la solution est trouvée. D'autre part cela ferait disparaître l'enjeu de la leçon 3, qui a passionné les élèves.

- *La solution n'est pas trouvée par tous, et le côté compétition du jeu du béret peut être gênant.* On a là un exemple du fait que construire une situation consiste à trouver un compromis entre des exigences contradictoires : nous avons bien observé la force de cette situation de concurrence entre les 2 équipes, incluant des moments de concertation, qui a incité les élèves à s'investir, à chercher des solutions (et à trouver celle attendue). Ce jeu permet donc diffusion de connaissances et formulation. Mais d'un autre côté, la pression du jeu est telle que certains groupes étaient prêts à faire n'importe quoi (i.e. ne plus contrôler les mesurages ou la position de l'équerre pour aller plus vite). Le professeur joue un rôle important d'arbitre, refusant les points mal placés et rappelant les règles.

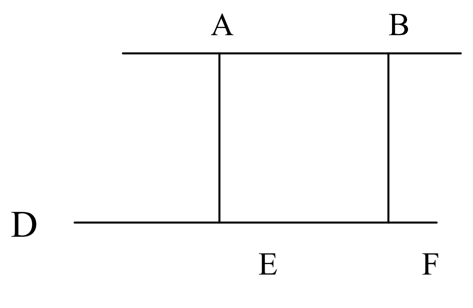
- *Le professeur est toujours la personne qui fait les tracés intermédiaires pour conclure sur la validité des points proposés.* Ceci prouve que l'espace n'est pas homogène pour le professeur et les élèves. Ceux-ci n’ont pas encore acquis les compétences nécessaires pour pouvoir réaliser ces contrôles de manière rapide.

- *Une droite est-elle définie par deux points ?* c'est une question sensible de l'enseignement et qui revient jusqu'en secondaire. Cette question peut être problématisée avec les visées, par exemple en demandant à un élève de viser un autre élève pour définir la ligne droite, et d'autres élèves viennent se mettre sur la droite ou à l'écart de la droite … On observe alors que cette consigne met certains élèves en difficulté, ce qui prouve bien qu'ils ne maîtrisent pas les critères perceptifs de l'alignement.

En primaire, on tracera des droites correspondant à une situation de proportionnalité avec plusieurs points, et ceci perdure jusqu'en Troisième où on vérifiera que des points (plus de deux) sont alignés lorsqu'une équation est donnée. En classe de Seconde, le professeur exige que les élèves tracent la droite avec deux points seulement. Les élèves s'y habitueront puis on étudiera des fonctions quelconques, où de nouveau il faudra plus de deux points pour tracer les graphiques … On peut faire l'hypothèse que les élèves ne percent généralement pas le mystère de ces aller-retour entre deux et plusieurs points. En classe de première scientifique, une expérimentation a demandé à des élèves de faire graphiquement le produit de deux fonctions affines, et ils ont produit le "théorème" : *le produit de deux droites est une droite*. Il a fallu leur faire placer plusieurs points du graphique pour qu'ils invalident ce théorème.

- *Quelles questions pose l’institutionnalisation proposée ?* Nous n’avons pas eu beaucoup le temps d’examiner cette question que nous n’avons nous-même pas complètement éclaircie, en particulier par l’élaboration de situation et par des observations.

A l’issue du processus, les élèves savent construire une droite D’ parallèle à la droite donnée D. Mais la première droite est-elle parallèle à celle qu’on a construite ? D’un point de vue mathématique, l’axiome d’Euclide permet de le démontrer. Il n’en est bien sûr pas question avec des élèves de ce niveau. On peut d’ailleurs se demander si la symétrie de la relation de parallélisme n’est pas pour eux une espèce d’évidence liée à la connaissance du rectangle, ce qui permettrait de construire ainsi un critère de reconnaissance du parallélisme de 2 droites : on choisit 2 points d’une même droite et on vérifie qu’ils sont à la même distance de l’autre droite.

	Pour construire la droite AB parallèle à (D), et à une distance donnée, on a tracé les segments EA et FB tels que EA = FB et les angles AEF et BFE soient droits. Les élèves peuvent-ils reconnaître dans cette configuration le quadrilatère ABFE comme un rectangle ? comment répondent-ils à la question : quelle est la distance de E à la droite (AB) ?

QUELQUES RÉFÉRENCES

BERTE A. (1995) Différents ordres de présentation des premières notions de géométrie métrique dans l'enseignement secondaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques, vol.* ***15/3****, 83-130.*

BERTHELOT R. & SALIN M.H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire.* Thèse Université Bordeaux 1. LADIST 40 rue Lamartine 33400 Talence.

BERTHELOT R. et SALIN M.H. (1994), L'enseignement de la géométrie à l'école primaire, *Grand N n°* ***53.***

BERTHELOT R. et SALIN M.H. (1995), Un enseignement des angles au cycle 3, *Grand N n°* ***56.***

BERTHELOT R (1998) Adaptation de recherches et questions liées au statut de l'espace dans l'enseignement *Actes du XXVème colloque inter-IREM (Copirelem),* IREM de Brest.

BERTHELOT R. et SALIN M.H. (1999), L'enseignement de l'espace à l'école primaire *Grand N n°* ***65.***

BERTHELOT R. (2000) Quelques moyens pour placer l'espace au centre de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire et pour préparer tant l'enseignement technique de l'espace que l'enseignement mathématique du premier cycle. *Actes du XXVIIème colloque inter-IREM (Copirelem),* IREM de Grenoble.

BERTHELOT R et SALIN M.H.,.(2001), L'enseignement de la géométrie au début du collège : Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ? *Petit x n°* ***56*** , IREM de Grenoble.

GOBERT S. (2001) Questions de didactique liées au rapport entre la géométrie et l'espace sensible dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire. *Thèse Université Paris 7 .*

GROUPE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES AU COLLEGE (2000) *Géométrie au cycle central 5ème et 4ème : un enchaînement d'activités* IREM de Bordeaux.

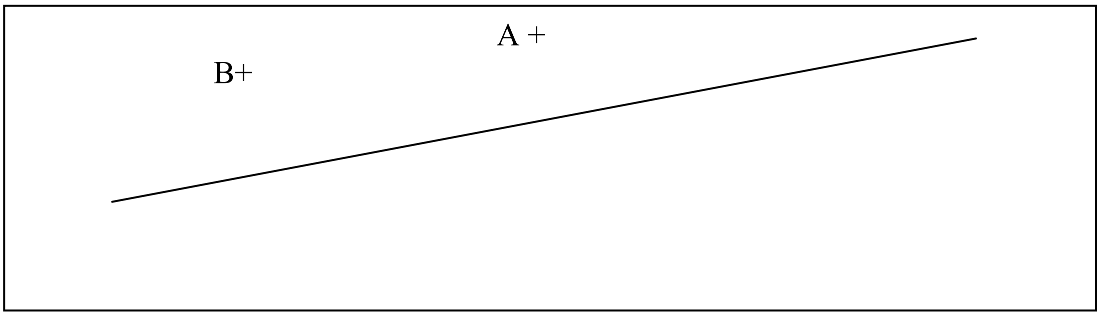
MAURIN C. (2001) La feuille de papier comme laboratoire d'expérimentation graphique. *Articulation école –collège : des activités géométriques Commission inter-irem 1er cycle et COPIRELEM, ed. IREM de Paris.*

Annexe 1

LEÇON 1

Mesurer la distance d'un point à une ligne droite

Organisation de la classe : par groupes : G1, G2, G3 , etc
Une ligne droite D d'une dizaine de mètres de longueur est tracée sur le sol.



ETAPE 0 : **Présentation de la question étudiée**

Les élèves sont rassemblés autour d'une droite tracée. Il y a deux plots (un bleu, un rouge) situés à des distances différentes de la droite. Le professeur (P) demande quel est le plot qui est situé le plus près de la ligne droite puis de placer un plot vert tel que le plot vert et le plot rouge soient tous les 2 à la même distance de la droite.

Ce petit échange permet au professeur d'annoncer « *Vous savez mesurer la distance entre 2 points, aujourd'hui, vous allez apprendre à mesurer la distance d'un point à une droite.* »

ETAPE 1 : **Recherche de la plus courte distance**

P place sur le sol à la craie, 6 points A, B... répartis le long de la droite, à des distances différentes de la droite, entre 1,50 et 2 m. Le problème est présenté par P à l'ensemble du groupe sur un exemple.

P place un point M sur la droite (assez loin du pied de la perpendiculaire) et demande : « *A quelle distance est-on de A ?* ». Un élève vient mesurer la distance entre les 2 points.

P continue : *« Est-ce que je pourrai dire que la distance de A à la ligne droite est ce nombre ? Si on essaie de mesurer en prenant d'autres points de la ligne droite, est-ce qu'on va toujours trouver la même longueur ? non »* (au besoin un élève vient le montrer en mesurant).

« Hé bien, voilà le problème que je vous pose : y-a-t-il un endroit de la ligne où on est le plus près de A ? à quelle distance est-on alors de A ?

Chaque groupe va répondre à cette question pour son point en marquant le résultat de la mesure sur un papier. Puis vous tournerez et essaierez pour un autre point. »

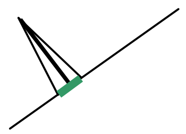
ETAPE 2 Echanges sur les résultats, dans la classe

On rentre dans la classe, et on mène un échange collectif sur les résultats, d'où peut ressortir :

- accord sur les 2 mesures effectuées pour un même point,
- ou nécessité de vérification collective (si la différence entre 2 groupes est supérieure à 1 cm).

ETAPE 3 Premiers échanges sur la position de la ligne le long de laquelle est réalisée la mesure la plus petite

P demande : « *Pouvez-vous m'expliquer s'il y a un endroit particulier où vous mesurez pour trouver la distance la plus courte ?* ». Des élèves (ou P) suggèrent l'utilisation d'un schéma, qui représente n'importe lequel des domaines.

	Remarque à accueillir, si elle vient, sans insister : les mesures minimales sont faites dans une certaine zone. On peut caractériser cette zone comme proche (à gauche et à droite) de la perpendiculaire à la ligne de base menée du point.

ETAPE 4 Institutionnalisation :

Le professeur prend l'exemple d'un premier domaine et dit : « en géométrie, on dit que la distance de A à la ligne droite est la plus courte longueur que vous avez trouvée, c'est ...cm »

Le nombre trouvé a une incertitude qui pourra être convenue dans une mesure réalisée sous contrôle collectif (réalisation lorsque le problème se pose).

La propriété de perpendicularité n'est pas institutionnalisée à ce moment sauf si elle a été utilisée et /ou formulée par une majorité d'élèves.

LEÇON 2

Placer un point à une distance donnée d'une ligne droite

Matériel : identique

ETAPE 1 : Chaque équipe de 4 place un point à une distance donnée de la droite (1m92cm) de la ligne

Quelques stratégies possibles :

1) Partir d'un point extérieur à la ligne, mesurer la distance à la droite, et rapprocher ou éloigner le point jusqu'à obtenir un point à la bonne distance. Prolonger la ligne de mesure suppose d'avoir perçu que toutes étaient dans la même direction, et que l'on peut économiser des tâtonnements en « glissant ».

2) Partir de la ligne, placer un point au jugé du point de vue de la direction mais à la bonne distance, puis vérifier que 1,92 m est bien la plus courte distance entre le point placé et tous les points de la droite. Si ce n'est pas le cas, déplacer la position du point, comme en 1.

3) Partir de la ligne, et sur la bonne direction (ce qui suppose d'avoir perçu la perpendicularité), rechercher le point à la bonne distance.

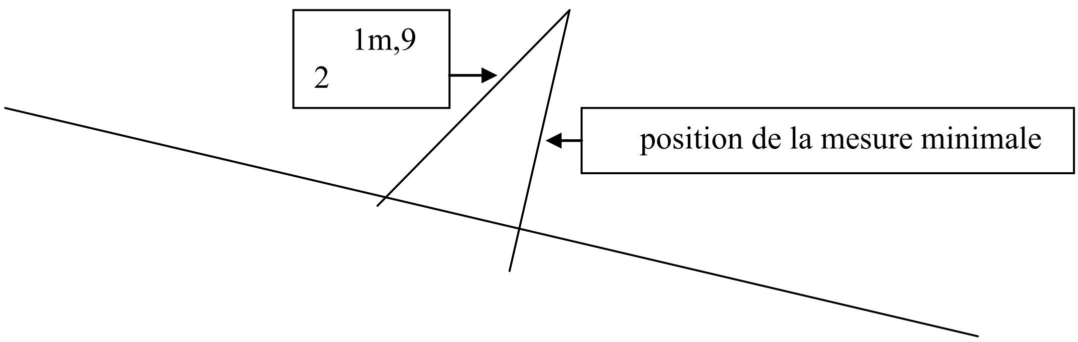
ETAPE 2 Vérification tournante d'un groupe par un autre.

Est-ce que le point placé par vos camarades est bien situé à 1,92 m de la droite ?

ETAPE 3 Examen des situations erronées : dans le préau puis dans la classe

Une situation sur le sol. Matérialisation avec un mètre de la position de vérification et recherche avec un autre instrument de sa position par rapport à la droite pour obtenir 1m92. Donc question : comment bien placer l'instrument pour réussir du premier coup ? On va réfléchir à cela dans la classe .

En classe quelqu'un vient montrer le problème sur un dessin au tableau sur une feuille, représentant la ligne droite, le point et la position des 2 instruments. « *Qu'est-ce qui ne va pas ? Vous avez choisi un point sur la droite mais l'instrument de mesure n'est pas placé dans la bonne direction. Le problème c'est de trouver la bonne direction pour bien placer l'instrument.* »



Si aucun élève ne propose une piste exploitable par P (« espace coupé en 2 parties égales », angle droit), P s'explique en terme d'espace partagé en deux, et montre l'angle droit.

ETAPE 4 : Exercice individuel

Sur une feuille où le professeur a tracé une droite, les élèves doivent placer un point à 12 cm de la droite.

Contrôle entre voisins avant examen collectif des difficultés rencontrées et des erreurs.

LEÇON 3

Placer vingt points à une distance donnée d'une ligne droite
Notion de droite parallèle à une droite donnée

Matériel : dans le préau, une ligne droite au sol. Matériel antérieur et papier à disposition

La classe est partagée en 8 groupes de 3, 4 d'un côté de la ligne, 4 de l'autre, numérotés de 1 à 4.

ETAPE 1 : Préparation

Chaque groupe construit 2 points à une distance de 125 cm de la droite. Le professeur vérifie rapidement (par alignement visuel discret) et fait refaire les points nettement mal positionnés.

ETAPE 2 : le jeu du béret

P. annonce :

- « 4 groupes d'un même côté forment une équipe, 4 autres une autre équipe.
- Chaque équipe a placé 8 points à 1m25 de la droite. Je vais appeler un groupe de chaque équipe pour placer d'autres points. L'équipe qui la première aura placé correctement 20 points aura gagné.
- On va jouer en plusieurs parties, chaque partie sera jouée par un groupe de chaque équipe que j'appellerai (par ex les deux groupes 3), c'est eux qui joueront et la partie durera 2 minutes. Entre 2 parties, vous pourrez vous concerter pour vous donner des conseils. »

Première partie : j'appelle les groupes 2. (le professeur joue sur la durée, il arrête quand chacun des groupes a construit un point)

Vérification par P de la validité des points placés, et détermination du score de chaque équipe.

Plusieurs parties sont jouées (trois maximum), entrecoupées de concertation par équipes. Si à la 3ème partie, aucune équipe n'a entrevu la solution, P dit : « je vous signale qu'il y a un moyen très rapide de placer des points justes qui peut permettre de gagner en une fois »

Puis concertation et déroulement avec changement d'équipes.

ETAPE 3 Explicitation de la propriété d'alignement des 20 points

- Arrêt du jeu, une fois les 20 points placés ou au bout d'un certain temps.
- ou bien l'alignement a été mis en œuvre, le professeur le fait expliciter, vérifier etc…
- ou bien le professeur l'explique et le fait réaliser.

ETAPE 4 Institutionnalisation

- Les points situés à la même distance d'une ligne droite (et d'un même côté) sont sur une autre ligne droite, que l'on dit parallèle à la première.
- Comment construire une ligne droite parallèle à une droite donnée ? (en construisant 2 points à la même distance de cette droite et en les joignant.)

Exercice

Chacun place le plus de points qu'il peut, distants de la ligne droite de 12 cm, en un temps limité.

ANNEXE 2

Questions posées aux participants pour guider l'analyse a priori

Leçon 1

- Comment assurer la dévolution de la situation aux élèves ?
- Quelles procédures peuvent utiliser les élèves pour répondre à la question : y a t il un endroit où on est le plus près de A ?
- Quelle difficulté principale peuvent rencontrer les élèves quand le professeur demande : pouvez-vous m'expliquer s'il y a un endroit particulier où vous mesurez pour trouver la distance la plus courte ?

Leçon 2

- Décrire plusieurs procédures possibles pour placer un point à une distance donnée de la droite
- Quelle erreur peut faire apparaître la vérification ? sur quel « schéma » le professeur peut-il s'appuyer pour mener à bien l'étape 3 ?

Leçon 3

- Intérêt et limites du jeu du béret
- Quelles questions pose l'institutionnalisation proposée ?

RÉSOUDRE DES PROBLÈMES ENTRE ARITHMÉTIQUE ET ALGÈBRE

AU PRIMAIRE, AU SECONDAIRE… EN FORMATION INITIALE

Lalina Coulange
Maître de Conférences à l'IUFM de Créteil

Résumé :

L'enseignement de la résolution de problèmes, ou plus ponctuellement la participation à des rallyes mathématiques amènent les élèves de l'école élémentaire à rencontrer des énoncés complexes, traités par l'algèbre au secondaire.

Ces problèmes faisaient autrefois l'objet d'un enseignement d'arithmétique élémentaire. En nous appuyant sur des extraits d'ouvrages du début du XXe, nous proposerons aux participants de l'atelier de revisiter des classes de problèmes arithmétiques et les techniques de résolution associées. Puis, à partir de quelques exemples, nous montrerons en quoi des procédures personnelles d'élèves du primaire, voire du secondaire, se rapprochent à l'occasion, de ces techniques de résolution, qui ne font pourtant plus l'objet d'aucun enseignement explicite.

L'objectif de cet atelier était d'explorer des problèmes « entre arithmétique et algèbre », afin de questionner leur rôle à divers niveaux d'enseignement, ainsi qu'au sein de différents domaines du savoir enseigné. Nous regroupons ces problèmes selon des catégories mises en avant par le savoir autrefois enseigné en arithmétique élémentaire : problèmes de partages en parties inégales, de fausses positions, …

I. LES PROBLÈMES DE PARTAGE EN PARTIES INÉGALES

La première classe de problèmes présentée lors de l'atelier est celle des énoncés, dits de *partages en parties inégales.*

I.1 Problèmes d'arithmétique ou d'algèbre ?

Nous avons distribué à chaque participant, une fiche comportant une série de cinq problèmes. Une échelle *entre arithmétique et algèbre* est associée à chaque énoncé.

La consigne donnée était :

Pour chaque énoncé, complétez l'échelle associée suivant le modèle

Arithmétique						Algèbre

1. *Problème résolvable par l'arithmétique, pour lequel une solution algébrique vous paraît inadéquate ou inexistante.*
2. *Problème qui vous semble plus facile à résoudre par l'arithmétique que par l'algèbre.*
3. *Problème dont la complexité de la résolution par l'algèbre et par l'arithmétique vous paraissent équivalentes.*

4. *Problème qui vous semble plus facile à résoudre par l'algèbre que par l'arithmétique.*
5. *Problème résolvable par l'algèbre, pour lequel une solution arithmétique vous paraît inadéquate ou inexistante.*

1. Nicolas a 14 billes de plus que Lucie. Ils ont rassemblé leurs 68 billes dans un sac. Combien de billes possède chaque enfant ?

Arithmétique						Algèbre

2. Marie, Paul et Brenda ont ensemble une collection de timbres. Si Marie a 6 fois plus de timbres que Paul, que Brenda en a 128 de moins que Marie et que Paul en possède 32, quel est le nombre de timbres des trois enfants ?

Arithmétique						Algèbre

3. Marc a quatre fois plus d'économies que Pauline. Blandine a deux fois moins d'argent que Marc. Pauline a 33,60 € de moins que Marc. Quelle est la somme totale économisée par les trois enfants ?

Arithmétique						Algèbre

4. Trois enfants se partagent des douceurs… Jim a mangé trois fois moins de bonbons que Laura. Jules a dévoré à lui tout seul deux fois plus de sucreries que Jim et Laura réunis ! Sachant qu'il y avait 24 bonbons au départ, combien chaque enfant en a-t-il mangé ?

Arithmétique						Algèbre

5. Il y a trois tas de cailloux. Il y a trois fois plus de cailloux augmenté de 5 dans le premier tas que dans le troisième. Le deuxième tas contient 15 cailloux de plus que le double du nombre de cailloux du premier tas. Sachant qu'il y a 180 cailloux en tout, combien chaque tas contient-il de cailloux ?

Arithmétique						Algèbre

Problèmes de partage « entre arithmétique et algèbre »

Après un temps de recherche individuel, la mise en commun des réponses a révélé que :

- Le deuxième problème de la série est considéré par l'ensemble des participants comme relevant de l'arithmétique, une solution algébrique en réponse à cet énoncé leur paraissant tout à fait inadéquate.
- La majorité des formateurs a considéré que le troisième énoncé relevait essentiellement de l'algèbre : pour la plupart, ils n'entrevoyaient pas de solutions arithmétiques simples en réponse à ce problème.
- Pour les énoncés restants, les réponses étaient diverses. Le premier problème étant souvent vu comme plutôt « arithmétique », tandis que les quatrième et cinquième énoncés étaient loin de faire l'unanimité.

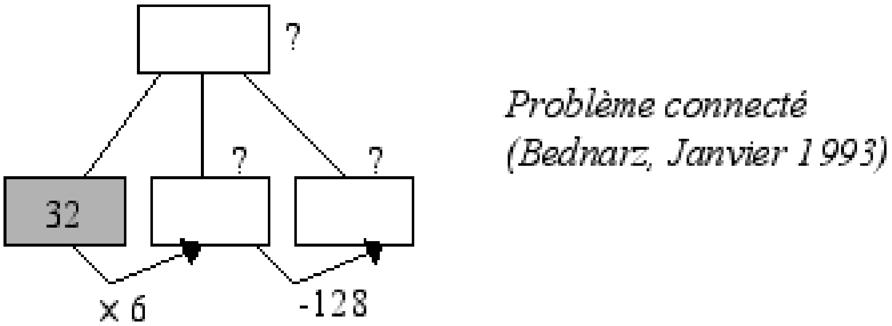
Ce premier bilan a permis de soulever les questions suivantes.

- Pourquoi l'énoncé 3 est-il qualifié d'arithmétique, de façon unanime ? En quoi l'algèbre ne paraît-il pas pertinente pour résoudre ce problème ?

D'aucuns ont répondu que cela venait du fait que l'on connaissait le nombre de timbres appartenant à Paul. Ce qui permet de calculer directement, le nombre de timbres de Marie (qui en a six fois plus que Paul, soit 32 × 6 = 192) puis le nombre de timbres appartenant à Brenda (qui en a 128 de moins que Marie, soit 192 – 128 = 64 timbres) et enfin le nombre total de timbres (32 + 192 + 64 = 288).

Autrement dit, pour résoudre ce problème, on peut calculer directement les données inconnues (les parts de Brenda et Marie) à partir des données connues (la part de Paul), selon les transformations élémentaires décrites dans l'énoncé.

Ce problème peut être schématisé de la façon suivante :

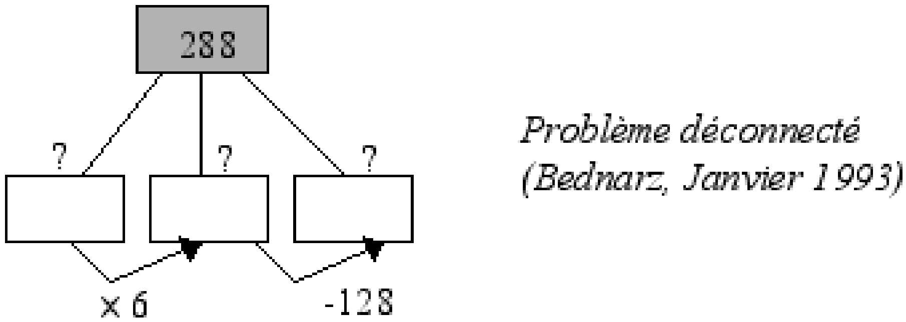


Selon Bednarz et Janvier (1993), les problèmes que l'on peut résoudre ainsi, *en cheminant directement du connu vers l'inconnu*,[1] sont dits *connectés*. Ils font l'objet de solutions arithmétiques élémentaires ; une résolution algébrique de ces problèmes paraît effectivement peu pertinente.

Ces mêmes auteurs définissent à l'opposé les problèmes *déconnectés* de la manière suivante : *aucun pont ne peut être établi a priori directement entre des données connues pour trouver les données inconnues.*

On peut transformer le problème 3 en un énoncé déconnecté :

> Marie, Paul et Brenda ont ensemble une collection de 288 timbres. Si Marie en a six fois plus que Paul et que Brenda en a 128 de moins que Marie, quel est le nombre de timbres de chacun ?



Comme le schéma ci-dessus l'illustre bien, les données inconnues du problème (nombre de timbres de chaque enfant) ne sont pas constructibles, en partant directement du connu (le nombre total de timbres). On ne peut a priori faire l'économie d'un détour symbolique, ou d'un raisonnement intermédiaire, permettant d'exprimer le nombre total de timbres en fonction du nombre de timbres de l'un des enfants, pour résoudre ce problème.

[1] Sans détour de raisonnement, ou symbolique : tout résultat intermédiaire étant calculable à partir du précédent.

Selon Bednarz et Janvier (1993), les problèmes qui sont généralement présentés en algèbre au niveau du secondaire, sont déconnectés. Tandis que la majorité des problèmes présentés en arithmétique à l'école élémentaire seraient des énoncés connectés.

Si c'est effectivement le cas aujourd'hui, de nombreux problèmes *déconnectés* étaient autrefois étudiés dans le cadre d'un enseignement d'arithmétique élémentaire. Notamment, on a pu montrer le rôle particulier joué par les problèmes dits de partages en parties inégales dans la transition entre arithmétique et algèbre dans le savoir mathématique enseigné pendant la première moitié du XX siècle (Chevallard 1989, Coulange 2001b).

C'est à ce titre que nous qualifions ces énoncés de problèmes *entre arithmétique et algèbre*.

- ***Pourquoi les problèmes 1, 4 et 5 ne font-ils pas l'unanimité entre arithmétique et algèbre ?Le fait de considérer le problème 2 comme algébrique est-il pertinent ?***

Les divergences constatées dans les réponses relatives aux énoncés 1, 4 et 5 révèlent une familiarité plus ou moins grande des participants, avec les techniques de résolution arithmétique autrefois enseignées pour résoudre les problèmes de partages connaissant la somme des parts et leur rapport ou leur différence.

La majorité de réponses « algébriques » relative au problème 2, révèle quant à elle, une méconnaissance assez générale de la catégorie de partages inégaux qu'il représente.

Méconnaissance partagée et justifiée par le fait que les solutions arithmétiques de ce type de problèmes, sont tombées dans les « oubliettes » des institutions scolaires. Nous y reviendrons.

I.2 A la recherche de l'arithmétique perdue…

Nous avons proposé aux participants de l'atelier de revisiter les problèmes de partages inégaux, à la lueur d'extraits d'anciens manuels d'arithmétique élémentaire.

Des documents provenant d'ouvrages scolaires de la première moitié du XX siècle (cf. annexe 1.b,c : *Réunion de professeurs 1949, Royer et Court 1932)*, et d'un manuel plus ancien (annexe 1.a, *Camus 1753)* ont été mis à disposition. Il s'agissait dès lors de résoudre un ou deux problèmes de la série initiale (de préférence ceux qui paraissaient plus caractéristiques de l'algèbre lors de la phase précédente), en appliquant le plus fidèlement possible les techniques de résolution autrefois enseignées.

Nous explorons ci-dessous des solutions arithmétiques en réponse aux énoncés du I.1, ainsi « calquées » sur celles décrites dans les manuels anciens.

Solution inspirée de Royer et Court (1931)

1. Nicolas a 14 billes de plus que Lucie. Ils ont rassemblé leurs 68 billes dans un sac. Combien de billes possède chaque enfant ?

Raisonnement :

On demande combien chaque enfant a de billes.

Nous savons :

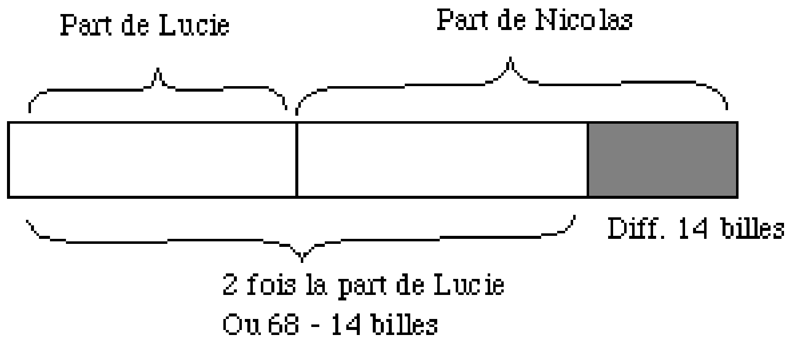
1) que les deux parts contiennent 68 billes au total ;

2) que Nicolas a une part égale à celle de Lucie plus 14 billes.

Le nombre total de billes contient donc : la part de Lucie + 14 + la part de Lucie. Si du nombre de billes total, on retire 14 billes, il reste donc deux fois la part de Lucie.

Solution :

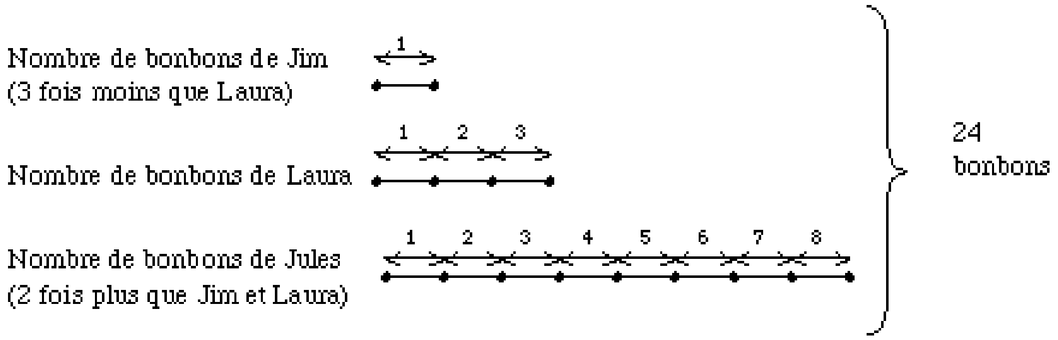
Si l'on retranche 14 à 68, il reste deux fois la part de Lucie ou : 68 – 14 = 54. Lucie a donc 54/2 = 27 billes. Et Nicolas : 27 + 14 = 41 billes.



Solution inspirée de Réunion de professeurs (1949)

> 4. Trois enfants se partagent des douceurs… Jim a mangé trois fois moins de bonbons que Laura. Jules a dévoré à lui tout seul deux fois plus de sucreries que Jim et Laura réunis ! Sachant qu'il y avait 24 bonbons au départ, combien chaque enfant en a-t-il mangé ?

24 bonbons = deux fois le nombre de bonbons de Jim et Laura + nombre de bonbons de Jim + nombre de bonbons de Laura
= deux fois et six fois le nombre de bonbons de Jim + nombre de bonbons de Jim + trois fois nombre de bonbons de Laura
= douze fois le nombre de bonbons de Jim



D'où Jim a mangé : 24/12 = 2 bonbons

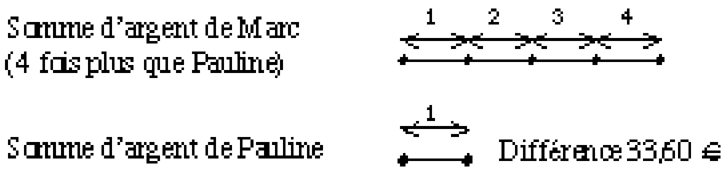
Laura a mangé : 6 bonbons. Et Jules a mangé : 2 × (6 + 2) = 16 bonbons.

Solution inspirée de Réunion de professeurs (1949)

> 3. Marc a quatre fois plus d'économies que Pauline. Blandine a deux fois moins d'argent que Marc. Pauline a 33,60 € de moins que Marc. Quelle est la somme totale économisée par les trois enfants ?

On isole un problème de partage inégal connaissant le rapport et la différence entre deux parts, en rapprochant l'indication : « *Pauline a 33,60 € de moins que Marc* » de : *« Marc a quatre fois plus d'économies que Pauline. »*.

33,60 € = part de Marc moins part de Pauline
= quatre fois part de Pauline moins part de Pauline
= trois fois la part de Pauline



La somme d'argent de Pauline : 33,60 : 3 = 11,20 €
La somme d'argent de Marc : 4 × 5,60 = 44,80 €
D'où l'on en déduit la somme d'argent économisée par Blandine :
44,80 : 2 = 22,40 €.
Puis la somme économisée par les trois enfants 11,20 + 44,80 + 22,40 = 78,40 € .[2]

Solution « deux fausses positions » inspirée de Camus (1753)

> 5. Il y a trois tas de cailloux. Il y a trois fois plus de cailloux augmenté de 5 dans le premier tas que dans le troisième. Le deuxième tas contient 15 cailloux de plus que le double du nombre de cailloux du premier tas. Sachant qu'il y a 180 cailloux en tout, combien chaque tas contient-il de cailloux ?

Si le nombre de cailloux du troisième tas avait été :	1
Le nombre de cailloux du premier tas qui contient trois fois autant que le troisième tas et 5 cailloux de plus, aurait été :	8
Le nombre de cailloux du deuxième tas qui contient deux fois autant que le premier tas et 15 cailloux de plus aurait été :	31

Et la totalité du nombre de cailloux des trois tas aurait été :	40

Voilà la première supposition qui est fausse, non seulement en ce que les parties supposées ne sont pas véritables, mais encore qu'elles ne sont pas proportionnelles à celles dans lesquelles il faut diviser 180, parce que les parts des premier et deuxième tas de cailloux, renferment chacune deux autres parties dont une est relative au nombre de cailloux du troisième tas, et dont l'autre est déterminée (…)

On fait une seconde supposition dans laquelle n'entreront point les parties déterminées 5 et 15 qui accroissent les parts des tas de cailloux :

Le nombre de cailloux du troisième tas est	1
Le nombre de cailloux du premier tas qui contiendrait trois fois autant que le troisième tas aurait été :	3
Le nombre de cailloux du deuxième tas qui contiendrait deux fois autant que le premier tas aurait été :	6

Et la totalité du nombre de cailloux des trois tas aurait été :	10

Cette seconde supposition est encore fausse, non seulement parce que les parties supposées ne sont pas véritables mais encore parce qu'elles ne seront pas proportionnelles aux véritables parts (correspondant aux tas de cailloux).

Si l'on retranche la somme 10 de la deuxième supposition, de la somme 40 de la première supposition ; le reste 30 sera la portion pour laquelle les parties déterminées entrent dans la somme 180 qu'il faut partager. D'où il suit qu'en retranchant 30 de 180,

[2] Notons la simplicité apparente de cette solution, pourtant méconnue par la majorité des participants…

le reste 150 sera la portion qui contient les parties des premier et deuxième tas de cailloux, proportionnelles au nombre de caillloux du troisième tas.

On peut dès lors trouver le nombre de cailloux du troisième tas de cailloux, à partir de la seconde fausse supposition. On le trouvera par cette règle de trois : *comme 10 est à la part supposée 1, 150 est au nombre de cailloux du troisième tas*. Le troisième tas de cailloux contient donc (150 × 1) : 10 = 15 cailloux. Le premier tas de cailloux contient dès lors : 15 × 3 + 5 = 50 cailloux. Le deuxième tas contient 2 × 50 + 15 = 115 cailloux.

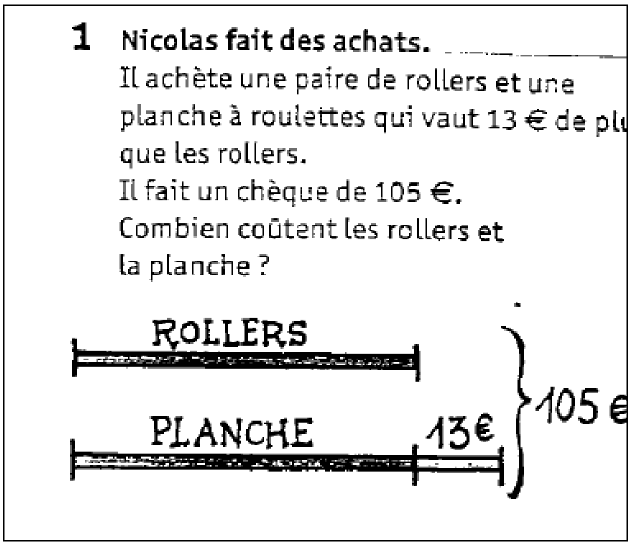
A la suite de cette exploration, nous avons commenté le caractère rhétorique de certaines solutions (certains des participants s'étant appliqués à reproduire fidèlement le discours en langage naturel, tenu par les auteurs d'ouvrages anciens). Nous avons également mis en avant la présence de schémas de natures différentes (s'appuyant sur des graphiques conventionnels sous forme de barre ou de segment), supports du raisonnement arithmétique dans les manuels de la première moitié du XXe.

I.3 Aujourd'hui à l'école…

Quel place accorde-t-on et quel rôle fait-on jouer aux problèmes de partages en parties inégales dans l'enseignement actuel ?

S'il est vrai suivant Bednarz et Janvier (1993), que la majorité des énoncés de partages rencontrés à l'école élémentaire sont *connectés,* l'enseignement de la résolution de problèmes peut conduire les élèves du cycle 3 à rencontrer quelques problèmes de partages inégaux *déconnectés.* Nous avons distribué aux participants de notre atelier, des extraits d'ouvrages scolaires de CM1 - CM2, illustrant notre propos (annexe 2). Commentons brièvement certains de ces documents.

Dans les manuels *Math Outil CM2* et *Math Elem CM2*, on relève la présence de problèmes de partages inégaux : en trois parties connaissant leur somme et rapports deux à deux ; en deux parties connaissant leur somme et différence. Aux énoncés « concrets » présentés, sont toujours associés des schémas sous forme de segments, identiques à ceux des anciens manuels d'arithmétique. Nous en donnons un exemple ci-dessous :


1 Nicolas fait des achats.
Il achète une paire de rollers et une planche à roulettes qui vaut 13 € de pl
que les rollers.
Il fait un chèque de 105 €.
Combien coûtent les rollers et la planche ?

Math Outil CM2

Dans ces manuels, l'enjeu des partages en parties inégales semble précisément la représentation schématique d'énoncés écrits, comme support à la résolution de problème, comme l'indique la consigne associée : « *aide-toi des schémas et des dessins* *pour résoudre les problèmes… », « résous les problèmes suivants en représentant les différentes situations par un schéma… ».*

Un tout autre choix est fait dans le *Ermel CM2.* Les problèmes de partages inégaux en deux parties connaissant leur somme et différence, y occupent une place de choix. Mais les auteurs du Ermel, ne semblent pas faire intervenir cette classe d'énoncés, dans le but d'enseigner la schématisation comme support à la résolution de problèmes. Le problème « somme et différence » présenté est d'ailleurs dépourvu de tout habillage concret, énoncé sous sa forme générale : « *il s'agit de trouver deux nombres dont on connaît la somme et la différence ».* Et c'est une étude approfondie de cette classe de problèmes qui est proposée : amenant les élèves à trouver des solutions, mais également à étudier des cas d'impossibilité de l'énoncé général.

Lors de la première phase de résolution (d'énoncés instanciés pour lesquels les sommes et différences sont toutes deux paires ou impaires), les auteurs affirment que la majorité des stratégies observées en classe se rapprochent de procédures par essais-erreurs, avec amélioration des essais et de leur contrôle, au fur et à mesure des exemples traités.

Notons cependant le commentaire fait au sujet d'une méthode se rapprochant des techniques de résolution arithmétique autrefois enseignées (revenant à soustraire la différence des parts de leur somme, pour obtenir deux fois la plus petite part) :

> *Une autre méthode apparaît souvent dans les classes : calcul de S – D et de (S – D)/2*
>
> *« Je fais 38 – 16 = 22, je prends la moitié de 22, c'est 11, je cherche ce qui fait 38 avec 11, c'est 27. D'où la solution : 27 ; 11. »*
>
> *Cette méthode paraît un peu « magique » pour beaucoup d'élèves, elle marche, mais il est difficile d'en fournir une explication, sans doute une idée intuitive de partager un écart ! Nous ne cherchons pas à l'institutionnaliser car un objectif de ce module est d'apprendre aux élèves à gérer des essais successifs et non pas d'enseigner des solutions expertes qui seront abordées éventuellement au collège. (Ermel CM2)*

Cet extrait attire doublement notre attention. D'une part, parce que les auteurs affirment que cette méthode « apparaît souvent dans les classes ». Les problèmes posés favoriseraient donc l'émergence de cette solution arithmétique, qui diffère profondément des essais successifs (dont la maîtrise figure pourtant parmi les objectifs annoncés par les auteurs).

D'autre part, l'institutionnalisation de cette solution experte et des savoirs arithmétiques associés, est renvoyée au collège. L'adverbe « éventuellement » employé laisse pourtant place au doute…

Qu'en est-il dans les faits ?

I.4 Au collège

L'étude d'extraits de manuels de collège amène à retrouver la présence de problèmes de partage en parties inégales. Mais sous la forme de problèmes à mettre en équation et à résoudre par l'algèbre en Quatrième/Troisième. Les techniques de résolution arithmétique des énoncés de partages inégaux ont disparu des contenus abordés au secondaire.[3]

[3] L'enseignement de l'arithmétique élémentaire a disparu depuis la réforme des mathématiques modernes.

Notons pourtant la grande proximité de certains de ces problèmes, étudiés en algèbre en fin de collège, des énoncés rencontrés au cycle 3 de l'école élémentaire. Le tableau ci-dessous illustre cette proximité sur quelques exemples :

Extraits de manuels de cyle 3	Extraits de manuels de Troisième
Deux amies, Lili et Zoé, collectionnent les cartes postales. Si elles mettaient toutes leurs cartes postales ensemble, elles auraient au total 180 cartes postales. Zoé possède 10 cartes de plus que Lili. **Combien chacune des deux amies a-t-elle de cartes postales ?** (Cap Maths CM1)	Deux frères pèsent ensemble 95 kg. Sachant que l'aîné pèse 10 kg de plus que le cadet, trouver le poids de chacun d'entre eux. *(Triangle mathématiques 3^e)*
Le chat Ronron pèse 450 grammes de plus que Pilou le lapin. Ensemble, Ronron et Pilou pèsent 6,750 kg. Quel est le poids de chacun ? (Math Outil CM2)	Deux objets coûtent ensemble 15,80 euros. L'un coûte 14,40 euros de plus que l'autre. Quel est le prix de chacun des deux objets ? *(Trapèze Mathématiques 3^e)*
Combien chaque enfant a-t-il mangé de papillottes ? Alex en a mangé trois fois plus que Céline. Brice en a mangé deux de plus qu'Alex. Au total, ils en ont mangé 44. (Cap Maths CM1)	On veut partager une baguette de 3,60 m en trois morceaux. La longueur du deuxième est le double celle du premier, la troisième mesure 60 cm de plus que le deuxième. Quelle est la longueur de chaque morceau ? *(Cinq sur Cinq Math 3^e)*

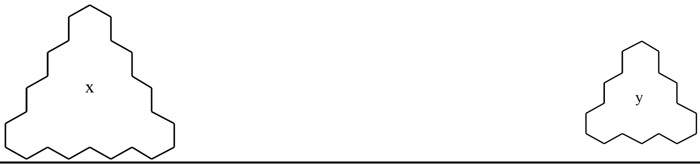
Dans le cadre de notre travail de thèse (Coulange 2001a), nous avons observé l'élaboration et la réalisation d'une activité introductive des systèmes d'équations (inspirée de la revue *Petit x*) qui remet sur le devant de la scène une série problèmes de partages en partie inégales, dans une classe de Troisième. Le professeur (désigné par P dans la suite du texte) nous a fait part de son projet didactique lors d'un entretien préalable : il s'agissait pour lui de mettre en concurrence la résolution algébrique de ces énoncés et des stratégies non algébriques spontanément mises en œuvre par ses élèves.

Nous avons proposé aux participants d'étudier des extraits de protocoles (cf. annexe 3.a, b et extrait cité ci-dessous), retranscrivant quelques échanges entre P et ses élèves, au sein de la classe. Il s'agissait d'analyser les problèmes de partage proposés, les solutions arithmétiques données par les élèves à ces problèmes (en les rapprochant éventuellement de celles étudiées dans la première phase de l'atelier) et les interactions professeur-élèves qui en résultent.

Les interactions retranscrites révèlent de fait, le caractère inhabituel ou inattendu de certaines solutions arithmétiques, aux yeux de l'enseignant qui les observe.

Étudions à titre d'exemple un échange entre P et un de ses élèves, Thibault qui interpelle le professeur pour lui montrer une résolution non algébrique du troisième problème de la série (partage en deux parties inégales connaissant somme et différence) :

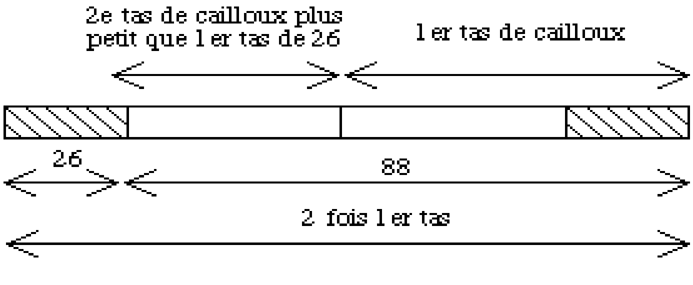
3 -Refais le même travail qu'en 1 avec les renseignements suivants :[4]
- le 2ème tas a 26 cailloux de moins que le 1er ;
- il y a 88 cailloux en tout.



P : Pourquoi tu as rajouté 26… [E. c'est ces 26 là]
Thibault. Au début j'ai fait 88 plus 26, et après j'ai trouvé, j'ai fait 88 plus 26, et après j'ai trouvé.
P. Alors… comment tu fais ? Ici tu as 88 en tout… là tu me dis 26.
Thibault. Parce x égale moins 26… y égale x moins 26…
P. Pourquoi tu me fais… Attends… Non mais là c'est bon… là…
Thibault. Ça c'est juste c'est l'énoncé ça…
P. Oui, d'accord… donc 88.
Thibault. Je fais plus 26, ça me fait 114 là, donc après je fais diviser par 2 pour trouver les deux tas… en fait c'est comme si les deux tas faisaient la taille de x… j'ai pris comme si les deux tas faisaient la taille de x.
P. Attends, il faut que je regarde…
Thibault. Comme si c'était deux grands tas quoi… ça fait qu'il faut en rajouter… à droite.
P. Ah d'accord tu inverses… donc tu rajoutes la différence [Thibault. voilà]… c'est à dire tu rajoutes les 26 [Thibault. voilà] et après tu divises par 2… non c'est ça ?
Thibault. Je divise par 2 et j'enlève les 26…

Le problème posé est un énoncé de partage en deux parties inégales connaissant leur somme (88) et leur différence (26).

La solution arithmétique proposée par Thibault pourrait être schématisée par le diagramme conventionnel sous forme de barre, et formulée plus en détail de la manière suivante :



Si j'ajoute 26 cailloux au deuxième tas, j'obtiens le nombre de cailloux du premier tas. Mais le nombre total de cailloux augmenté de ces 26 cailloux. Il égalera 88 + 26 = 114, et vaudra 2 fois le nombre de cailloux du premier tas.
Nombre de cailloux du 1er tas : 114 : 2 = 57 cailloux.
Nombre de cailloux du 2e tas : 57 – 26 = 31 cailloux.

[4] (Cf. annexe 3.a).

Le dialogue entre l'enseignant et Thibault montre la difficulté pour le professeur à comprendre la méthode non algébrique de l'élève. Mais les explications de Thibault offrent à P une occasion d'apprendre. La reformulation enthousiaste de cette solution arithmétique que le professeur adresse à un des observateurs (qui n'assistait pas à cet épisode) prouve cet apprentissage et sa nouveauté :

> P. D'accord… elle est pas mal celle-là (à L. Coulange à côté) ... T'as regardé celle là ?… Attends je vais faire voir à A. Bessot, (plus éloignée) :
> (à A. Bessot) il inverse c'est-à-dire il rajoute 26… c'est-à-dire qu'il se met ses deux tas au maximum… donc il a au départ 88… donc il rajoute 26 de façon à avoir deux tas équivalents et il divise par 2 (…) et donc il a le gros tas, après il enlève 26.

Les autres épisodes au sein de la classe observée, révèlent d'une part le succès et la présence persistante de telles solutions arithmétiques, d'autre part l'incompréhension du professeur de certaines de ces solutions.[5]

Cette méconnaissance n'est pas le fait de cet enseignant et est partagée par de nombreux professeurs : elle découle de l'absence dans l'institution scolaire française actuelle, des savoirs arithmétiques élémentaires autrefois enseignés.

I.5 En formation initiale

On relève quelques problèmes de partages en parties inégales dans les sujets de concours de professeur des écoles ; ils apparaissent essentiellement dans le premier volet attenant à l'évaluation des contenus mathématiques.

On peut citer le sujet suivant :

> **EXERCICE 2 :**
> Tous les trois ans Madame X a donné naissance à un enfant : Aline, puis Bernard et enfin Charles. La somme des âges des trois enfants est égale à 63.
> Quel est l'âge de chacun des trois enfants ? Justifiez votre réponse.
> Même question si la somme des âges est égale à 126.
> (*Sujet 1998 Académie de Rouen)*

Ici le candidat est laissé libre du choix de la procédure arithmétique ou algébrique de la résolution. Mais dans d'autres sujets, il est explicitement demandé de résoudre de tels problèmes par l'arithmétique (avec le support éventuel de schémas donnés ou non), ou par l'algèbre. Citons à titre d'exemple l'exercice :

> Trois émissions sont enregistrées sur une cassette. Elles se partagent les 180 minutes de la cassette de la manière suivante : la première dure deux fois plus que la troisième qui, elle, dure 12 minutes de moins que la deuxième.
> Trouver la durée de chaque émission :
> a) en utilisant un schéma et sans sortir du domaine des programmes de l'école primaire ;
> b) par une solution algébrique.

Les problèmes de partages en parties inégales peuvent également faire l'objet de la deuxième partie consacrée à l'analyse de travaux d'élèves (cf. annexe 4).

[5] Par ailleurs les participants ont pointé les difficultés apparentes pour les élèves, comme pour l'enseignant observé à formuler certaines de ces solutions arithmétiques.

La présence de tels énoncés au sein des sujets de concours CERPE reste peu importante, mais montre néanmoins une volonté d'articulation entre méthodes algébriques et arithmétiques de résolution de ces problèmes, dans la formation initiale des futurs professeurs d'école, qui n'existe dans aucun lieu de la scolarité obligatoire.

II. LES PROBLÈMES DE FAUSSE POSITION

Nous avons revisité plus rapidement une seconde classe de problèmes entre arithmétique et algèbre : les énoncés dits de « fausse position » ou de « fausse supposition ».

II.1 Un exemple de solution arithmétique

Un document extrait d'un manuel de la première moitié du XX siècle (cf. annexe 5 : *Royer et Court 1931)*, mis à la disposition des participants, présentait conjointement des solutions arithmétiques et algébriques répondant au problème :

> Une couturière reçoit en tout 324 f pour confectionner en tout 60 chemises d'homme et de garçonnet. Sachant que la chemise d'homme lui est payée 6f et la chemise d'enfant 4f, on demande combien il ya de chemises de chaque sorte. *(Royer et Court 1931)*

II.2 A l'école élémentaire

Tout comme les problèmes de partages en parties inégales, on relève la présence de quelques énoncés type « fausse position » dans les manuels du cycle 3, au sein de rubriques consacrées à la résolution de problèmes.

On peut citer à titre d'exemple le problème de la « Tirelire », extrait du *Ermel CM2 :*

> Dans ma tirelire, j'ai 32 pièces de monnaie.
> Je n'ai que des pièces de 2 € et des billets de5 €.
> Avec ces 32 pièces et billets, j'ai 97 €.
> Combien y a-t-il de pièces de 2 € et de billets de 5 € dans ma tirelire ? *(Ermel CM2)*

Ou bien le problème analogue extrait du *Cap Maths CM1* :

> Dans sa tirelire, Aki n'a que des pièces de 20 centimes, et de 50 centimes.
> En tout, il n'a que 13 pièces qui représentent 5 euros.
> Combien a-t-il de pièces de chaque sorte ?*(Cap Maths CM1)*

D'après les auteurs du *Ermel CM2,* l'ojectif de ces problèmes est avant tout l'émergence et le contrôle de stratégies par essais-erreurs de la part des élèves.

Habillé de contextes particuliers, ce type d'énoncés peut également donner lieu à des représentations schématiques, représentant un support pour la résolution arithmétique. Nous renvoyons à Grugnetti et Jacquet (1998) qui en donnent des exemples, relatifs à la résolution d'un problème intitulé « Chameaux et dromadaires » :

> Cléopâtre a dessiné des chameaux et des dromadaires, cela fait 19 bosses et 52 pattes. Elle sait que les chameaux ont deux bosses et que les dromadaires n'en ont qu'une. Puis elle a dessiné un homme sur le dos de chaque chameau. Combien a-t-elle dessiné d'hommes en tout ? *(Grugnetti et al. 1998)*

II.3 Au collège

Là encore, au niveau du secondaire, on relève des problèmes de « fausse position » dans les manuels de fin de collège, au sein des chapitres consacrés à l'enseignement de l'algèbre (et plus précisément des systèmes d'équations) :

> A la fin de la journée, on demande à Monsieur C. Malaint combien il a tué de lièvres et de palombes. '12 têtes et 30 pattes', répond-il. Peut-on savoir le nombre de lièvres et de palombes tués ? *(Cinq sur Cinq Math 3e)*
>
> Thomas a 7 euros dans son porte-monnaie, uniquement avec des pièces de 10 centimes et de 50 centimes. Il a en tout vingt-deux pièces. Combien a-t-il de pièces de 10 centimes ?
> *(Trapèze Mathématiques 3e)*

II.4 En formation initiale

L'étude d'un problème de « fausse position » a fait l'objet du troisième volet (connaissances didactiques) du sujet CERPE de La Martinique en 2002.

III. EN GUISE DE CONCLUSION

L'atelier nous a permis d'explorer deux classes de problèmes « entre arithmétique et algèbre » : les énoncés de partages en parties inégales et de fausse position. Nous avons également étudié la place et les fonctions distinctes de ces problèmes dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire et en fin de collège. A la suite de ce travail, nous avons engagé une discussion autour du rôle spécifique, apparemment joué par les problèmes d'origine arithmétique, dans le contexte de la formation initiale de futurs professeurs d'école :

- Les futurs professeurs, portent-ils un regard plutôt arithmétique ou algébrique sur de tels problèmes ?
- Au regard de l'apparition de tels énoncés « entre arithmétique et algèbre » dans les sujets de concours, quels peuvent-être les contenus de formation initiale relatifs à leur résolution par l'arithmétique ou par l'algèbre ?

Voici, entre autres, les questions dont nous avons débattu à la fin de cet atelier.

BIBLIOGRAPHIE

CHEVALLARD Y. (1989), *Arithmétique, algèbre, modélisation. Etapes d'une recherche,* Publications de l'IREM d'Aix-Marseille, n° 16.

COULANGE L. (2001a), Enseigner les systèmes d'équations en Troisième, Une étude économique et écologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 21.3, La Pensée Sauvage, Grenoble, 305-353.

COULANGE L. (2001b) Évolution du passage arithmétique-algèbre dans les manuels et les programmes du 20e siècle: contraintes et espaces de liberté pour le professeur, *Petit x*, 57, 61-78.

GRUGNETTI L., JAQUET François (1997-1998), La résolution de problèmes par classes, *Grand N*, 61, 61- 69.

Annales du CERPE

Annales du concours externe de recrutement des professeurs d'école – IREM Paris 7 – COPIRELEM – 1992 2002.

Manuels d'arithmétique élémentaire

CAMUS (1753) *Cours de Mathématique, Première Partie, Élémens d'arithmétique,* Imprimerie de Ballard.

RÉUNION DE PROFESSEURS (1949), *Algèbre et notions de Trigonométrie pratique,* Editions libraire générale de l'enseignement libre.

ROYER M., COURT P. (1931), *Arithmétique cours supérieur,* Editions Armand Colin.

Manuels scolaires de l'école élémentaire

BILHERAN M., CHARLES A., SEMENADISSE B. (2001), *Math outil CM2, cycle 3,* Editions Magnard.

CHAMPEYRACHE G., FATTA J-C., STOECKLE D. (2001), *Le nouveau Math. Elem CM2, cycle des approfondissements,* Editions Belin-scolaire.

CHARNAY R., COMBIER G., DUSSUC M-P. (2001), *Mathématiques CM1, Cap Maths,* Editions Hatier.

ERMEL (2001) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes, cycle des appronfondissements CM2,* Editions Hatier.

Manuels scolaires de Troisième

CHAPIRON G., MANTE M., MULET-MARQUIS R, PÉROTIN C. (2003), *Mathématiques 3ème collection Triangle,* Editions Hatier.

DELORD R., VINRICH G. (1999), *Mathématiques 3ème collection Cinq sur Cinq,* Editions Hachette.

GERALD N., JACOB N., RIOU E, COURIVAUD C.N, DODARD A. et RONCIN P. (1999), *Trapèze Mathématiques 3ème,* Editions Bréal.

Annexe 1
Extraits de manuels d'arithmétique élémentaire

<u>a. extrait de Camus (1753</u>)

CHAPITRE IV.

Des Regles de Fausses positions.

117 Les Regles de Fausses positions ressemblent à des Regles de Compagnie, en ce que par leur moyen l'on partage un nombre donné, ou une partie d'un nombre donné, en parties proportionnelles à celles d'un autre nombre que l'on prend à volonté, en suivant cependant les conditions de la question.

On distingue deux sortes de *Regles de Fausses positions*, savoir les *Regles d'Une Fausse position* & les *Regles de Deux Fausses positions*.

Dans les Regles d'Une Fausse position, l'on ne fait qu'une supposition de parties proportionnelles à celles dans lesquelles il faut partager le nombre proposé.

Dans les Regles de deux Fausses positions, l'on fait réellement deux suppositions qui sont toutes deux fausses, & l'on en conclud les véritables parties du nombre proposé à diviser.

118 Les Regles d'Une Fausse position consistent, comme nous l'avons dit, à supposer des parties proportionnelles à celles du nombre qu'on doit diviser. Ces parties supposées font une fausse position, en ce qu'elles ne sont pas égales aux parties dans lesquelles le nombre proposé doit être divisé. Mais comme ces mêmes parties supposées sont proportionnelles à celles qu'on demande ; la totalité de ces parties supposées est à chacune d'elles en particulier ; comme le nombre donné à diviser, est à chacune des parties que l'on demande. Ainsi lorsqu'on a une fois supposé des parties proportionnelles à celles que l'on demande, & qu'on en a fait la somme, le reste de l'opération se fait comme la Regle de Compagnie, par des Regles de Trois.

EXEMPLE

Trois personnes ont partagé 100^{tt}, de maniere que ;
La seconde a eu 2 fois autant que la premiere.
La troisiéme a eu autant que la premiere & la seconde ensemble.
On demande combien chacune a eu.

Si la part du premier avoit été	1
La part du second qui a eu deux fois autant que le premier auroit été	2
La part du troisiéme qui a eu autant que les deux premiers ensemble, auroit été	3
Et la totalité des parts ou du bien partagé auroit été	6

La question se réduit donc à partager 100^{tt} en parties proportionnelles à celles 1, 2, 3, dans lesquelles 6 auroit été partagé. Ainsi l'on trouvera les parties de 100^{tt} par la proportion suivante, c'est-à-dire par trois Regles de Trois.

Comme le nombre total supposé 6

$$\textit{Est à ses parties} \quad \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases}$$

Ainsi le nombre 100^{tt} qu'on a partagé

$$\textit{Est à ses parties} \quad \begin{cases} 16^{tt} & 13^{s} & 4^{d} \\ 33^{tt} & 6^{s} & 8^{d} \\ 50^{tt} & 0^{s} & 0^{d} \end{cases}$$

DES REGLES DE DEUX FAUSSES POSITIONS.

119 Dans une Regle de Deux Fausses positions, il s'agit de partager un nombre en deux parties, & de partager encore une de ces parties en parties proportionnelles à d'autres parties supposées.

Pour faire ces deux partages, on fait deux fausses suppositions, comme nous allons le voir dans l'exemple suivant.

EXEMPLE.

Trois personnes ont partagé 120^{lt}, de maniere que la seconde a eu deux fois autant que la premiere, & 3^{lt} de plus.

La troisiéme a eu autant que les deux autres, & 4^{lt} de plus.

On demande combien chacun des partageans a eu.

Si la part du premier avoit été	1^{lt}
La part du second qui a eu deux fois autant que le premier & 3^{lt} de plus, auroit été 2^{lt} & 3^{lt} ou	5^{lt}
La part du troisiéme qui a eu autant que les deux autres & 4^{lt} de plus, auroit été 6^{lt} plus 4^{lt} ou	10^{lt}
Enfin la totalité des parts auroit été	16^{lt}

Voilà la premiere supposition qui est fausse, non seulement en ce que les parties supposées ne sont pas les véritables, mais encore en ce que ces parties ne sont pas proportionnelles à celles dans lesquelles il faut diviser 120^{lt}; parce que les deux dernieres parties supposées, renferment chacune deux autres parties, dont une est relative à la premiere part 1^{lt}, & dont l'autre est déterminée. La seconde part 5^{lt}, par exemple, est composée de deux parties 2^{lt} & 3^{lt}, dont l'une 2^{lt} doit être double de la premiere part supposée, & changeroit de valeur proportionnellement aux variations qui arriveroient à la premiere part 1^{lt}; au lieu que la deuxiéme partie 3^{lt} est une grandeur déterminée qui ne changeroit point, en changeant la valeur de la premiere part 1^{lt}.

En considérant que chaque part est ainsi composée de deux parties dont l'une est relative à la premiere part supposée, & dont l'autre est une grandeur déterminée qui seroit toûjours la même, quelle que fût la premiere part; on examinera quelle est la portion du nombre 120^{lt} qui contient les parties des parts proportionnelles à la premiere part supposée; & quelle est la portion du même nombre 120^{lt} qui contient les parties déterminées de ces parts: & lorsque cette derniere portion de 120^{lt} sera découverte, on la retranchera de 120^{lt}, pour n'avoir que la premiere portion qui contient les premieres parties des parts.

Pour déterminer cette seconde portion de 120^{lt}, on fera une seconde supposition dans laquelle n'entreront point les parties déterminées 3^{lt} & 4^{lt} qui accroissent les parts; l'on fera, dis-je comme si la question étoit ainsi proposée.

Trois personnes ont partagé 120^{lt}.

La seconde a eu deux fois autant que la premiere.

La troisiéme a eu autant que les deux autres.

On supposera, comme on a déja fait, que

la part du premier partageant est	1^{lt}
La part du second sera	2^{lt}
La part du troisiéme sera	3^{lt}
Et la somme de ces trois parts sera	6^{lt}

Cette seconde supposition sera encore fausse, non seulement parce que les parties supposées ne seront pas les véritables, mais encore parce qu'elles ne seront pas proportionnelles aux véritables parts des partageans.

Comme les parts qu'on a prises dans cette seconde supposition, ne contiennent point les parties déterminées 3^{lt} & 4^{lt} dont les parties proportionnelles des parts sont accrues; leur totalité 6^{lt} ne contiendra pas non plus le résultat de ces parties déterminées; au lieu que la totalité 16^{lt} des parts de la premiere fausse position, contenoit le résultat de ces parties déterminées.

Donc si l'on retranche la somme 6^{lt} des trois parts de la deuxiéme supposition, de la somme 16^{lt} des trois parts de la premiere supposition; le reste 10^{lt} sera la portion pour laquelle les parties déterminées 3^{lt} & 4^{lt} entrent dans la somme 120^{lt} qu'il faut partager: d'où il suit qu'en retranchant 10^{lt} de 120^{lt}, le reste 110^{lt} sera la portion qui contient les parties des parts, relatives à la premiere part.

Après cet exposé, il ne sera pas difficile de trouver la part du premier partageant par la seconde fausse supposition, où les parts sont supposées 1, 2, 3 dont la totalité est 6; on trouvera dis-je la part du premier partageant, sur laquelle sont fondées les deux autres, par cette Regle de Trois.

Comme la *somme 6^{lt} des trois parts supposées.*

Est à la premiere part 1^{lt};

Ainsi 110^{lt},

Est à la part du premier.

La Regle de Trois, étant faite en regardant les deux premiers termes comme des nombres absolus, on trouvera que

La part du premier partageant est 18^{lt} 6^{s} 8^{d}.

A l'égard des deux autres parts, on les trouvera en suivant les conditions de la question, comme il suit.

Le second doit avoir deux fois autant que le premier & 3^{lt} de plus: ainsi il aura 36^{lt} 13^{s} 4^{d} & 3^{lt} de plus, c'est-à-dire qu'il aura 39^{lt} 13^{s} 4^{d}.

Le troisiéme doit avoir autant que les deux premiers & 4^{lt} de plus: il aura donc d'abord 58^{lt} & ensuite 4^{lt}: ainsi il aura en tout 62^{lt}.

Les trois parts demandées sont donc 18^{lt} 6^{s} 8^{d}, 39^{lt} 13^{s} 4^{d}, & 62^{lt}.

ÉLÉMENS

b. extraits de Réunion de Professeurs (1949)

Partages en parties inégales

2 parts. — On connaît leur *somme* et leur *différence*.

279. Problème type. — On a partagé 28 f entre Paul et Charles ; le 1er a eu 4 f de plus que le 2e. Trouver la part de chacun.

1re *Solution.* — Si j'enlève à la part de Paul, je la rends égale à celle de Charles.

Mais la somme des parts sera diminuée de ces 4 f ; elle égalera

28 — 4 = 24 f

et vaudra 2 *fois* la part de Charles.

Part de Charles : 24 : 2 = 12 f.

Part de Paul : 12 + 4 = 16 f.

2e *Solution.* — Ajouter 4 f à la part de Charles ; on la rend ainsi égale à celle de Paul ; la somme des parts sera augmentée de ces 4 f ; elle égalera 28 + 4 = 32 f et vaudra 2 *fois* la part de Paul.

280. Un lot d'essence de 87 litres a été partagé en deux bidons, l'un contient 15 litres de plus que l'autre. Trouver la valeur de chaque bidon si le litre d'essence coûte 43,50 f.

281. Deux voisins ont acheté en commun 26,50 kg d'aliments complets pour bestiaux, ils ont payé 927,50 f. Au partage l'un d'eux a payé 227,50 f de plus que l'autre. Quelle est la part de chacun ?

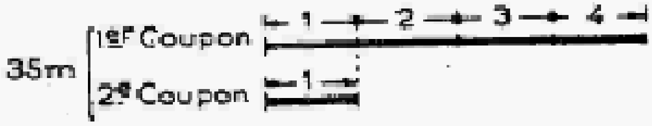
282. Henri et Gabriel ont ensemble 316 points. Si Henri en donnait 58 à Gabriel leurs parts seraient égales. Combien chacun a-t-il de points ?

Arithmétique. Classe de 5e. 4.

2 parts. — On connaît la *somme* et le *rapport des parts*.

284. Problème type. — *Partager une pièce d'étoffe de 35 m en deux coupons, de manière que le 1er soit 4 fois plus long que le 2e.*

Solution. — 35 m = 4 fois long. du 2e + 1 fois long. du 2e = 5 fois long. du 2e.



Longueur du 2e coupon :

$$\frac{35}{4+1} = \frac{35}{5} = 7 \text{ m.}$$

Longueur du 1er :

$7 \times 4 = 28$ m.

Indication générale. — *On remplace la plus grande part par 2, 3, 4… fois la plus petite.*

285. Deux caisses contiennent ensemble 720 oranges. Sachant que l'une en contient 8 fois plus que l'autre, trouver le prix de chaque caisse à 95 f la douzaine d'oranges.

286. Deux coupons de drap mesurent ensemble 41,20 m. Si l'on prélevait 3 m sur chaque coupon, la longueur du 1er serait alors le double de celle du second. Trouver la longueur de chaque coupon.

287. La somme de deux nombres est 65 et leur quotient exact est 4. Quels sont ces deux nombres ?

288. Pierre et Léon ont ensemble 165,50 f. Quel est l'avoir de chacun sachant que si Pierre avait 13 f de plus son avoir vaudrait 6 fois celui de Léon?

289. Partager 696 f entre deux personnes de manière que la 1re ait 3 fois autant que la 2e et 32 f en plus. *R.* 530 f.

290. Deux personnes jouent au billard à 1 f la partie. L'une a 69 f et l'autre 30 f. Au bout d'un certain nombre de parties, la 1re qui les a gagnées toutes, possède 5 fois autant que la 2e et 3 f de plus. Combien ont-elles joué de parties ?

291. Trouver deux nombres sachant que leur somme est 156 et que le premier dépasse le triple du second de 16.

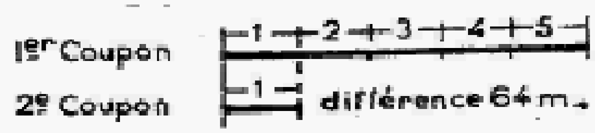
2 parts. — On connaît la *différence* et le *rapport des parts*.

292. Problème type. — *On a partagé une étoffe en 2 coupons qui diffèrent de 64 m. Trouver leur longueur, sachant que le 1er est 5 fois plus long que le 2e.*

Solution. — 64 m = 5 fois long. du 2e — 1 fois long. du 2e,
64 m = (5 fois — 1 fois) = 4 fois long. du 2e.

Longueur du 2e coupon :

$$\frac{64}{5-1} = \frac{64}{4} = 16 \text{ m.}$$



Longueur du 1er coupon :

$16 \times 5 = 80$ m.

Indication générale. — *On remplace la plus grande part par 2, 3, 4… fois la petite part.*

La différence des parts égale alors (2 — 1), (3 — 1),… *fois la petite part*

c. Extrait de Royer et Court (1931)

PROBLÈMES : Somme et différence (Partage).

Deux ouvriers ont reçu ensemble une somme de 249f. Le premier a reçu 75f de plus que l'autre. Combien chacun d'eux a-t-il reçu ?

SOLUTION ARITHMÉTIQUE.

Raisonnement. — On demande combien chaque ouvrier a reçu. Nous savons : 1° que les deux parts valent ensemble 249f ; 2° que le premier a reçu une part égale à celle du second plus 75f.

La somme à partager 249f contient donc : la part du second + 75f + la part du second (fig. 62). Si de la somme à partager l'on retranche 75f, il reste donc deux fois la part du second.

SOLUTION.

Si l'on retranche 75f à 249f, il reste deux fois la part du second où :

$$249^f - 75^f = 174^f.$$

Le second ouvrier a donc reçu :

$$\frac{174^f}{2} = 87^f.$$

Et le premier :

$$87^f + 75^f = 162^f.$$

Vérification.

$$162^f + 87^f = 249^f.$$
$$162^f - 87^f = 75^f.$$

Remarque. — On aurait pu raisonner aussi bien, en remarquant que la somme 249f, augmentée de 75f, contient 2 fois la première part.

SOLUTION ALGÉBRIQUE.

Désignons la part du premier par x et la part du deuxième par y on a :

$$\begin{array}{ll} (1) & x + y = 249 \\ (2) & x - y = 75 \\ \hline & 2x = 324 \end{array}$$

Additionnons, membre à membre, les équations (1) et (2) : $+y$ et $-y$ s'annulent. On obtient

$$2x = 249 + 75 = 324$$
$$x = \frac{324}{2} = 162$$

d'où $y = 162 - 75 = 87$.

Réponses : 162f et 87f.

Remarque. — Cette façon de résoudre un système de deux équations se nomme *méthode de réduction par addition ou soustraction.*

AUTRE SOLUTION ALGÉBRIQUE.

Désignons par x la part du deuxième ouvrier. La part du premier sera :

$$x + 75.$$

On a donc d'après l'énoncé :

$$x + 75 + x = 249$$
$$2x = 249 - 75$$
$$= 174$$
$$x = \frac{174}{2} = 87$$
$$x + 75 = 87 + 75 = 162.$$

Réponses : 162f et 87f.

Fig. 62.

Annexe 2
Extraits de manuels du cycle 3

a. Extraits de Math Outil CM2, Math elem CM2, Cap Maths

Aide-toi des schémas et des dessins pour résoudre les problèmes 1, 2 et 3.

1 **Nicolas fait des achats.**
Il achète une paire de rollers et une planche à roulettes qui vaut 13 € de plus que les rollers.
Il fait un chèque de 105 €.
Combien coûtent les rollers et la planche ?

ROLLERS
PLANCHE 15€ } 105 €

Résous les problèmes suivants en représentant les différentes situations par un schéma.

Dans la tirelire
Chloé et son frère Valentin ont économisé ensemble 217 € mais Valentin a économisé 34 € de plus que sa sœur.
À combien se montent les économies de Chloé ? et celles de Valentin ?

Le chat Ronron pèse 460 grammes de plus que Plou le lapin.
Ensemble, Ronron et Plou pèsent 6,750 kg.
Quel est le poids de chacun ?

Math Outil CM2

1 Découvrir

1 Nicolas a dépensé 40 €. Il a acheté un jeu électronique et un livre. Le jeu coûte 6 € de plus que le livre.
Quel est le prix de chacun de ces deux achats ?

Pour t'aider

livre 6 €
jeu } 40 €

Fais les calculs pour trouver :
• le prix du livre
(40 − 6) : 2 = ……
• le prix du jeu ……………

2 S'exercer

1 Julie et Marie se pèsent. Quand elles sont toutes les deux sur la balance, celle-ci affiche 58 kg.
Quelle est la masse de chacune des deux fillettes sachant que Marie pèse 4 kg de plus que Julie ?
Lequel des deux schémas correspond à l'énoncé ?

a) Masse de Marie 4 kg
} 58 kg
Masse de Julie

b) Masse de Julie
} 58 kg
Masse de Marie 4 kg

Math Elem CM2

Deux amies, Lili et Zoé, collectionnent les cartes postales.
Si elles mettaient toutes leurs cartes postales ensemble, elles auraient au total 180 cartes postales.
Zoé possède 10 cartes postales de plus que Lili.
Combien chacune des deux amies a-t-elle de cartes postales

Cap Maths CM1

Annexe 3

Extraits de la chronique d'observation d'une classe de 3^{e} (20 et 25 mars 1998)

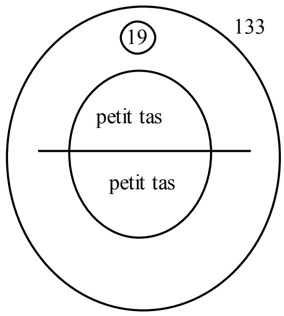
a. La solution d'Ambline

1 Voici deux tas de cailloux.
x désigne le nombre de cailloux du 1er tas.
y désigne le nombre de cailloux du 2ème tas.
Le second tas a 19 cailloux de plus que le premier.
a) Donne une écriture de y à l'aide de x.
b) Il y a 133 cailloux en tout. Ecris une égalité vérifiée par x et y.
c) Trouve x et y.

Sol. 2 *(Ambline, Caroline ... Laure)*
I 133-19=114
114÷2=57
x=57
y=57+19=76
x+y=133

Ambline ; parce qu'en fait heu … les 2 tas ça fait 133, donc le deuxième tas a donc 19 cailloux de plus que l'autre [P. ouais] donc en fait ce que je fais c'est que je [P. chut, chut] je soustrait 19… comme ça je trouve … les deux premiers…le résultat … donc il y en a un qui arrive à moitié [P. bien…] je mets mon résultat et après il faut au deuxième il faut rajouter les 19.

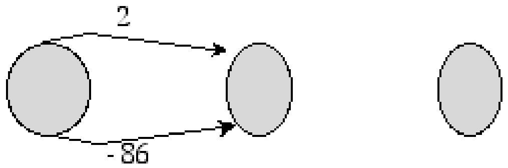
P. Alors je réexplique un peu ce qu'elle fait… c'est à dire qu'elle dit, voilà… en tout ici j'ai donc 133… cailloux *[P commence le dessin ci-contre]…* je sais qu'il y en a un qui en a 19 de plus que l'autre… donc je considère qu'ici j'ai mes 19…l es 19 elle les enlève… d'accord?… donc si elle enlève les 19 pour ceux qui restent ici… Chuut, Claire merci… pour… donc ici tout ça ça nous fait 133… cailloux… et on sait qu'il y en a un qui en a 19 de plus, donc elle veut retomber sur des tas qui seraient équivalents… donc elle prend dans son deuxième tas, elle en enlève 19… ça c'est des 19 qui sont en trop… donc ici elle sait qu'on a deux tas pareils… donc elle les divise en deux, ces deux tas pareils… et donc ici elle a le petit tas… et ici le petit tas qui, ajouté avec ces 19, va faire le gros tas… donc on a 133… elle enlève les 19 il lui reste ici 114… elle divise en deux elle va trouver le petit tas, ça lui donne 57. … puis maintenant elle rajoute les 19 au 57, 57 plus 19 elle va trouver le deuxième tas… d'accord ? C'est ce qu'elle a expliqué sur sa… ici *[montre sol.2]* ouais ?



b. La solution de Benoît

8 - Tu sais que : - le 1er tas a 2 fois plus de cailloux que le 2ème ; - le 3ème tas a 36 cailloux de plus que le 1er ; - le 2ème tas a 86 cailloux de moins que le 1er. Trouve x, y et z.

Benoît : Le premier tas il a 2 fois plus de cailloux que le deuxième. Et au troisième, on dit le deuxième tas a 86 cailloux de moins que le premier. Donc ça fait 86 comme référence pour le deuxième tas. Parce que l'autre il en a 2 fois plus et euh...



Benoît dessine sur le tableau (la partie gauche du dessin)

P : Essaie de voir le... B : les cailloux supplémentaires...

P : Attends, ce qui serait peut-être plus simple, c'est que tu nous fais 3 tas. Et puis tu m'expliques ça avec un dessin.

B : (il fait le dessin) Un tas... 2 tas... 3 tas. (P : Bien) premier tas égal 2 fois plus de cailloux que le deuxième. D'accord ? (il complète son dessin). Le deuxième tas, il a 86 cailloux de moins que...

P : Attention, c'est le deuxième. Le deuxième a 86 de moins que le premier. (E : Il est plus petit)

B : Mais je sais pas comment faire... (P : Chut.) Donc j'ai pris 86 comme référence pour celui-là et j'ai fait 2 fois plus. J'ai multiplié 86 par 2, ça m'a donné le premier tas et ça faisait 86 de moins. Le premier tas faisait bien 2 fois plus que le deuxième et le deuxième tas faisait bien 86 de moins que le premier.

P : Et après tu trouves le troisième en fonction. Donc tu joues sur les deux premiers tas en fait. Attends, attends.

B : Après, on dit que le troisième tas a 2 fois de plus de cailloux que...

P : Oui, après, une fois que t'as les deux premiers, c'est bon. B : Le premier. Donc ça fait...

P : D'accord, une fois que t'avais les deux premiers. Et donc tu pars en fait du 86... B : Ouais, comme référence.

P : Je sais pas trop. Ben on va voir si ça marche tout le temps, ton truc.

Annexe 4
Extrait d'un sujet de CERPE
(Bordeaux, Caen, Clermont, Nantes, Orléans-Tours, Poitiers, La Réunion 2000)

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Analyse de travaux d'élèves d'une classe de CE2, travail de groupes (A, B, C, D), début d'année scolaire.
(Les productions des groupes A, B, C, D figurent en annexe 1.)

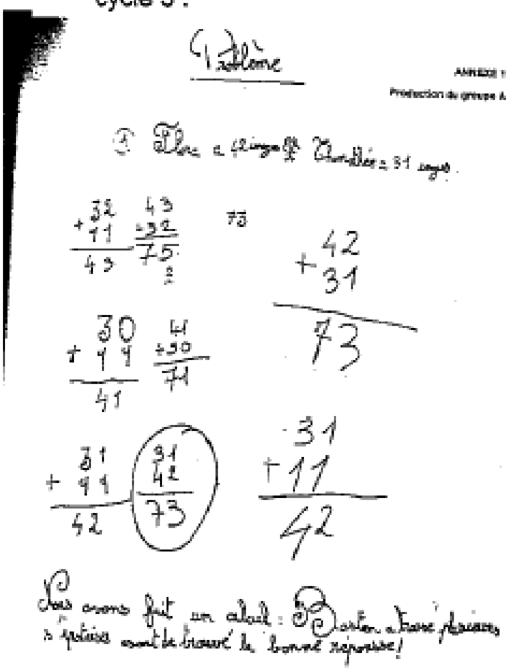
Situation problème proposée aux élèves:

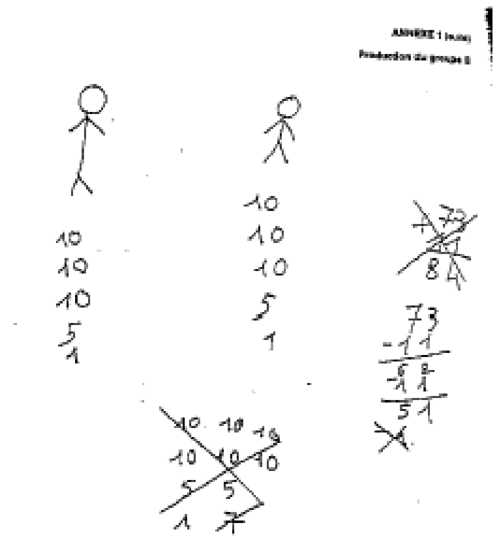
Timothée et Flora ont chacun un lot d'images, mais Flora a 11 images de plus que Timothée. Ils comptent leurs images et constatent qu'ils ont 73 images à eux deux. Combien chaque enfant a-t-il d'images ?

1) Citez au moins une difficulté que pose cet énoncé à un élève de début de cycle 3.

2) Analysez les réponses apportées au problème par chacun des groupes A, B, C et D (annexe 1), vous décrirez les procédures utilisées en analysant les erreurs lorsque cela est possible.

3) Indiquez une procédure valide qui pourrait être proposée par un élève de fin de cycle 3 .





Annexe 5
Extrait de Royer et Court (1931)

PROBLÈMES : Fausse supposition.

Une couturière reçoit 324f pour confectionner en tout 60 chemises d'homme et de garçonnet. Sachant que la chemise d'homme lui est payée 6f et la chemise d'enfant 4f, on demande combien il y a de chemises de chaque sorte.

SOLUTION ARITHMÉTIQUE.

Raisonnement. — On demande combien il y a de chemises de chaque sorte. On sait que la couturière a reçu en tout 324f ; mais comme les chemises sont de valeurs différentes, on ne peut pas calculer directement le nombre de chemises de chaque sorte.

Si toutes les chemises étaient des chemises d'enfant, la couturière recevrait : $4^f \times 60 = 240^f$, somme inférieure de $324^f - 240^f = 84^f$ à la somme indiquée. Dans les 60 chemises, il y a donc des chemises d'homme. Chaque fois que la couturière confectionne une chemise d'homme au lieu d'une chemise d'enfant, elle reçoit en plus :

$$6^f - 4^f = 2^f.$$

Or la somme reçue — en calculant sur 60 chemises d'enfants — doit être augmentée de 84f ; la couturière doit donc confectionner :

$\dfrac{84}{2} = 42$ chemises d'homme.

D'où la solution suivante.

SOLUTION.

Si la couturière confectionnait 60 chemises d'enfant, elle recevrait :

$$4^f \times 60 = 240^f ;$$

soit : $324^f - 240^f = 84^f$ de moins.

Chaque fois qu'elle confectionne une chemise d'homme au lieu d'une chemise d'enfant, elle reçoit :

$6^f - 4^f = 2^f$ de plus.

Pour recevoir le compte exact,

SOLUTION ALGÉBRIQUE.

Mise en équation. — Soit x, le nombre de chemises d'homme ; le nombre de chemises de garçonnet est $60 - x$.

La couturière reçoit pour x chemises d'homme $6x$;

Et pour $(60 - x)$ chemises d'enfant $4(60 - x)$.

On a donc :

$$6x + 4(60 - x) = 324.$$
$$6x + 240 - 4x = 324.$$
$$6x - 4x = 324 - 240$$
$$2x = 84$$
$$x = \frac{84}{2} = 42.$$

Réponses : Il y a 42 chemises d'homme ;

Et $60 - 42 = 18$ chemises d'enfant.

Vérification. —
$6^f \times 42 = 252^f$
$4^f \times 18 = 72^f$
Total. . 324^f

Remarques. — Pour résoudre l'équation : $6x + 240 - 4x = 324$, *on a fait passer le terme connu 240 du premier membre de l'équation dans le second en l'écrivant avec un signe contraire.* L'égalité subsiste, car les deux membres de l'équation sont diminués de la même quantité. (Pour le comprendre, pensez à une balance en équilibre dont les plateaux sont chargés de poids égaux. Si on enlève le même poids sur chaque plateau, la balance reste en équilibre).

A.R.M. & TABLE ARITHMÉTIQUE NATURELLE

Jean-Noël Manouba
P.E. École de Bonneveine 2 à Marseille
jnmanouba@club-internet.fr

Pierre Eysseric
Formateur à l'I.U.F.M. d'Aix-Marseille
p.eysseric@aix-mrs.iufm.fr

Résumé :
Les participants ont eu l'occasion de vivre le début d'un A.R.M. (Atelier de Recherche en Mathématiques) en référence au dispositif présenté par P. Eysseric au cours des colloques de St.-Étienne et Limoges : cf. actes ou sur Internet : http://perso.club-internet.fr/peysseri/DOCUMENTS/ARM/Atelier221APMEPNICE2000.htm.

Le sujet de recherche proposé a été celui de la Table Arithmétique Naturelle : une table numérique mise au point par J.N. Manouba et expérimentée depuis octobre 2001 avec ses élèves de cycle 3 de l'École Freinet Bonneveine 2.
(sur Internet : http://www.structureimaginaire.com).

Le travail s'est déroulé en petits groupes à partir de ce support. Il s'agissait tout d'abord d'observer la T.A.N. puis de commencer à explorer quelques pistes de recherche.

Celles-ci furent alors présentées et discutées collectivement (phases 1 à 3 du dispositif A.R.M.). Nous avons également essayé d'imaginer ensemble les recherches en mathématiques envisageables à partir de ce support pour des élèves de différents niveaux (élémentaire et secondaire).

L'atelier s'est poursuivi par une présentation par J.N. Manouba de quelques travaux réalisés dans ses classes avec la T.A.N. et d'autres tables arithmétiques.

En mode de conclusion a eu lieu un débat et un bilan personnel des participants autour du potentiel disciplinaire et de recherche de ces tables.

Conseil au lecteur du présent article :

Avant de lire cet article et si vous ne la connaissez pas encore, prenez le temps d'observer la T.A.N. (**T**able **A**rithmétique **N**aturelle, voir page suivante) et de réfléchir par vous même à toutes les possibilités qu'elle offre au niveau de la structuration arithmétique et ce, principalement pour deux raisons :

- Il a fallu à la plupart des personnes qui s'y sont intéressées un certain temps (de quelques dizaines de minutes à plusieurs heures) pour se l'approprier ce qui est infiniment mieux que d'en accepter les principes et potentialités dans la mesure où elle offre un angle de vue original et profond de l'arithmétique.
- l'originalité et la simplicité de la Table en font un support visuel propre à l'observation : c'est un ostensif mathématique puissant.

I - COMPTE RENDU DU DÉROULEMENT DE LA PARTIE « RECHERCHE »

I - 1. L'introduction

Un sujet de discussion a été proposé en introduction quant à la place de la recherche au niveau de la structuration des connaissances mathématiques :

- apprendre à chercher est-il un objectif à part entière des programmes, auquel il est légitime de consacrer des séances spécifiques dans lesquelles les contenus mathématiques passent au second plan ? (Les savoirs mathématiques ne sont pas absents, mais ils ne constituent pas l'objectif principal de la séance. Le contenu mathématique auquel la recherche aboutit peut même dans certains cas ne pas avoir été anticipé par l'enseignant, voire se situer en dehors du programme. Mais lorsque les résultats de la recherche coïncident avec un savoir au programme de la classe, on revient sur ceux-ci et on les institutionnalise au cours d'une séance spécifiquement consacrée à ce savoir.)
- ou bien peut-on ou doit-on mener l'apprentissage de la recherche conjointement aux apprentissages disciplinaires sous-jacents dont elle permet de révéler les contenus ? (Apprendre à chercher est alors un objectif présent dans toutes les séances d'apprentissage ou tout au moins dans certaines phases de celles-ci. On apprend à chercher en travaillant sur les savoirs mathématiques inscrits au programme de la classe. Ce point de vue exclut toute recherche mathématique débouchant ou pouvant déboucher sur un contenu mathématique hors programme.)

Pierre Eysseric a défendu le premier point de vue. Quelques participants se sont manifestés dans un sens comme dans l'autre. Il a été convenu de revenir à la fin de l'atelier sur cette question qui renvoie à la distinction faite entre *sujet de recherche*, *problème de recherche* et *phase de recherche d'une situation d'apprentissage* dans « Le plaisir de chercher » (Repères IREM n°35 – avril 99, pages 23-38).

La consigne de travail a porté sur trois types d'observation/ réflexion :

- Chercher à son niveau d'expertise les apports numériques et opératoires de la T.A.N. : *découvrir la T.A.N. avec ses yeux et son esprit.*
- Imaginer les recherches en mathématiques envisageables à partir de ce sujet pour des élèves aux différents niveaux de l'école élémentaire et du collège : *penser la T.A.N. comme point de départ d'activités de recherche.*
- Réfléchir au processus ayant amené une classe de CE2 à construire une telle table haute en couleurs : *penser la T.A.N. comme aboutissement d'activités de classe.*

I - 2. Le travail de recherche

En investissant la partie de la salle où la TAN (dimensions : 1 m x 6 m) était installée à même le sol, les participants se sont réellement mis en situation de recherche tels des archéologues essayant de remonter le temps pour mieux comprendre ce qui avait pu amener de jeunes élèves à construire une telle mosaïque ou encore tels des paléontologues observant sous toutes ses coutures une fouille surprenante sans autre préoccupation que de chercher à voir et à comprendre.

Table de 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Table de 2		2		4		6		8		10		12		14		16		18		20		22		24		26		28		30		32
Table de 3			3			6			9			12			15			18			21			24			27			30		
Table de 4				4				8				12				16				20				24				28				32
Table de 5					5					10					15					20					25					30		
Table de 6						6						12						18						24						30		
Table de 7							7							14							21							28				
Table de 8								8								16								24								32
Table de 9									9									18									27					
Table de 10										10										20										30		
Table de 11											11											22										
Table de 12												12												24								

<u>Portion de la Table Arithmétique naturelle qui se poursuit jusqu'à 84</u> [1](les cases concernées des lignes entières y sont colorées : celle de 1 en blanc, celle de 2 en jaune très clair, celle de 3 en bleu clair, celle de 4 en jaune clair, celle de 5 en rouge, celle de 6 en vert, celle de 7 en gris, celle de 8 en jaune, celle de 9 en bleu, celle de 10 en orange, celle de 11 en hachuré, celle de 12 en vert clair, …)

Une demi-heure s'est écoulée pendant laquelle chacun semblait découvrir ou redécouvrir individuellement un arrangement « dérangeant » de nombres : la table observée (T.A.N.) n'est pas à proprement parler une table à double entrée et plusieurs lectures y étaient faites. Pour certains, une lecture horizontale était nécessaire, transcrivant la notion de multiples. Pour d'autres, la lecture verticale s'imposait comme faisant rejaillir miraculeusement la notion de facteur ou diviseur des nombres du haut.

Le fait qu'un nombre donné corresponde à une seule colonne et inversement n'était pas toujours instantanément compris (obstacle cognitif) du fait de l'habitude de lire des tableaux à double entrée, et notamment la sacro-sainte Table de Pythagore.

Peu à peu, la notion de quotient (liée à celle de multiple) a été suffisamment perceptible pour la plupart des participants (au niveau des « escaliers ») qui ont alors également perçu celle de reste pour des nombres (ou colonnes) dont la case sur une ligne donnée était vide.

Le travail d'observation/recherche s'est ensuite poursuivi par groupe autour des tables. Une T.A.N. en couleurs a été distribuée aux participants.

Il a été remarqué que ce n'était pas la même table et que cette seconde table était moins « lisible » car surchargée.

[1] Dans ces Actes, cette figure et les suivantes ont été reproduites en niveau de gris. Vous pouvez accéder à la version couleur des documents sur le site www.arpeme.com .

Table de 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Table de 2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Table de 3	11	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Table de 4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Table de 5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Table de 6	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

I - 3. Les remarques et découvertes des participants à l'issue de leur travail de recherche sur la T.A.N.

- La différence entre le support pour la classe au format 1 m x 6 m et le support pour les élèves au format A4 dans lequel tous les nombres sont écrits sur chaque ligne.
- La table murale fait apparaître de nombreuses dispositions géométriques intéressantes à étudier : les « escaliers », les motifs revenant périodiquement, …
- L'intérêt et les limites de l'usage des couleurs :
  - Les multiples de 2 sont jaunes, les multiples de 3 sont bleus et les multiples de 6 (2x3) sont verts (VERT = JAUNE + BLEU)
  - Les multiples de 2 sont jaunes ; ceux de 4 sont aussi jaunes, mais un peu plus foncé ;ceux de 8 sont encore plus foncé … « Plus un nombre est grand, plus il a de couleurs ».
  - Mais il y a une infinité de nombres premiers et seulement trois couleurs primaires…
- Extrapoler la table au-delà de la partie représentée sur l'affiche conduit à passer du perceptif à l'algorithmique.
- La table permet de retrouver : $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$
- La table permet de trouver quotient et reste d'une division euclidienne.
- Un bel ostensif pour produire les diviseurs d'un nombre.
- Utilisation de la table pour multiplier deux nombres.
- Utilisation de la table pour décomposer un nombre en base 2 par exemple.
- Utilisation de la table pour la recherche du PGCD ou du PPCM.

I - 4 Des questions à poser aux élèves pour lancer la recherche

(Questions proposées par les participants à l'atelier)

- Qu'est-ce que vous voyez ?
- Que représentent les cases coloriées ?

- Pourquoi certaines lignes ont la même couleur ?
- Y a-t-il deux colonnes consécutives sans cases coloriées ?
- Recherche des diviseurs d'un nombre.
- Extrapoler la table vers la droite, vers le bas, …
- Des questions d'anticipation : par exemple prévoir les cases coloriées pour 78.
- Un dispositif pour faire émerger des questions dans une classe : poser à un autre groupe des questions auxquelles la table vous permet de répondre et une question que vous vous posez à son sujet et à laquelle vous ne savez pas répondre.

I - 5 Discussion sur l'utilisation de la table en classe

- Qui pose les questions lorsque la T.A.N. est utilisée comme sujet de recherche : le maître ou les élèves ?
- Le problème de la régularité de ce genre d'activité en classe est posé.
- Quel est le statut des objets mathématiques rencontrées au cours de l'exploration de la table : qu'institutionnalise-t-on ?
- Le risque de dériver en dehors du programme.

On revient à la question posée en introduction qui n'a pas été tranchée…

II - ÉLÉMENTS D'UNE DIDACTIQUE DE CLASSE

II -1 Petit historique de classe

II – 1.1 L'année scolaire 2001/ 2002 : classe de CE2

Cette année scolaire a été basée sur une approche de construction collective des savoirs arithmétiques. Une quinzaine de séances ont été dédiées à la construction, à l'exploration, l'appropriation et au dépassement de la T.A.N. Les principales étapes ont été les suivantes :

1) Suite au questionnement de classe « comment apprendre nos tables ? », la table multiplicative classique à double entrée ou Table de Pythagore a été observée. Des recherches de coloriages susceptibles de mettre en relation les différentes tables ont été réalisées. Le jaune a été choisi pour les tables de 2, 4 et 8, vues comme très semblables. Le bleu pour les tables de 3 et 9 et le rouge pour la table de 5. La table de 6 avait par exemple été vue comme pouvant être de couleur jaune ou bleue, et n'avait donc pas reçu de couleur.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

(Exemple du 9 intersection de la ligne bleu clair 3 et de la colonne bleu clair 3 : sa case est bleu soutenu, les deux 6 et les deux 12 qui l'entourent en croix sont en vert ; les 4, 8 et 16 qui l'entourent sont en jaune, alors que les lignes et colonnes 2 et 4 sont en jaune clair.)

Ce coloriage de classe permit ainsi de trouver la couleur de 6 et de ses multiples : vert !

2) Ces tables réunies derrière une couleur ont alors été mises en cascade **tout en respectant l'écart naturel entre les nombres** : productions individuelles de ce qui sera appelé plus tard Table Arithmétique Primitive (T.A.P.).

Table de 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Table de 2		2		4		6		8		10		12		14		16		18		20		22		24		26		28		30		32
Table de 4				4				8				12				16				20				24				28				32
Table de 8								8								16								24								32
Table de 16																16																32
Table de 32																																32
Table de 64																																

4 = x 1
x 2
x 4

8 = x 1
x 2
x 4
x 8

12 = x 1
x 2
x 4

16 = x 1
x 2
x 4
x 8
x 16

20 = x 1
x 2
x 4

24 = x 1
x 2
x 4
x 8

28 = x 1
x 2
x 4

32 = x 1
x 2
x 4
x 8
x 16
x 32

36 = x 1
x 2
x 4

40 = x 1
x 2
x 4
x 8

Premier type d'exercice donné en application (cf. stratégie de remplissage).

3) La nécessité de ne pas considérer ces tables séparément mais simultanément s'est alors fait sentir. La table en question, regroupant **tous les entiers naturels** (car ouverte contrairement à la table de Pythagore souvent limitée à 10x10 ou à 12x12), et leur laissant leurs **espacements et rapports naturels** a été appelée

Table Arithmétique Naturelle (T.A.N.) car **plus naturelle** à aborder pour le jeune élève : simple, claire et très structurante.[2]

Des coloriages individuels de T.A.N. (distribuées) ont été réalisés. Des observations ont amené à écrire toutes les décompositions multiplicatives visibles sur la T.A.N. Des stratégies très structurantes d'écriture ont d'ailleurs été élaborées lors des ré-écritures de ces égalités successives. Les nombres premiers ont été caractérisés simplement et appréciés pour ce qu'ils sont : « Les pauvres ne sont les multiples d'aucun nombre plus grand que 1 et plus petit que eux mêmes. Ils sont dans la table de 1 et dans leur propre table et c'est tout ! », sans qu'aucun apprentissage ne les concerne directement mais également sans vouloir non plus chercher à les écarter du discours au quotidien. La T.A.N. permettait d'aborder les entiers dans toute leur globalité et complexité, sans tabou !

4) La Construction d'une T.A.N. aux dimensions de la classe (6m x 1m) a alors été perçue comme nécessaire : les élèves ont réalisé tout le coloriage aux pastels secs lors de plusieurs séances d'Arts plastiques (utilisation de patrons, mélange de couleurs…). La T.A.N. murale terminée, ils se l'étaient appropriée physiquement. Le début de l'aventure conceptuelle pouvait véritablement commencer…

5) La T.A.N. a alors été explorée lors de séances dédiées.

- La commutativité a été vue comme évidente et a été travaillée de façon très fonctionnelle et donc efficace du point de vue du calcul réfléchi : les élèves préféraient lire ou calculer 2 paquets de 7 plutôt que 7 de 2 !
- La distributivité était aussi très lisible et fonctionnelle (présence des escaliers plus ou moins profonds, calculs de multiples du type 5x17 avec référence visuelle à 50 puis à 5 x 7 = 35…).
- L'associativité a juste été travaillée par la recherche des couples de facteurs. Une distinction visuelle entre division-partage et division-groupement a aussi été rendue possible. Le geste mental de division-groupement y a été vu comme bien plus facile. La systématisation ultérieure d'utiliser ce dernier n'a pas posé de difficultés.
- Par ailleurs, la technique de division utilisée a été systématiquement celle de la division-groupement, quel que soit le type de problème de division rencontré. Voir la division-partage dans la T.A.N. était plus délicat mais également structurant pour la compréhension de l'équivalence des gestes mentaux.

6) L'utilisation fréquente : <u>exploration</u> (séances dédiées), <u>appropriation</u> (calculs, réflexe de référence à certains nombres, cf. la propriété de distributivité), <u>dépassement</u> de la T.A.N. (calculs hors champ à droite et en bas, activités dos à

[2] Il est intéressant de remarquer ici que les auteurs de l'ouvrage « Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire » - ERMEL INRP (Tome 2, pages 128 à 130) proposaient en 1978 une construction du répertoire multiplicatif dans laquelle la première étape était une table ressemblant fortement à la T.A.N. (la seule différence est l'absence de « jeu » avec les couleurs primaires), pouvant déboucher (en la « compactant ») sur la table de Pythagore. Voir reproduction en annexe.

la T.A.N. etc.) ont animé plusieurs séances à travers des résolutions de problèmes, des activités sur les mesures etc.

7) Des brevets sur l'utilisation/ dépassement de la T.A.N. (multiples, quotient et reste) ont été passés avec succès par les élèves : 100% ont réussi le brevet relatif à la détermination quotient et reste (sur des nombres hors champ de divers ordres de grandeur).

II – 1.2 L'année scolaire 2002/ 2003 : classe de CM2

Cette année scolaire a été basée sur une approche d'introduction, d'approfondissement et d'éclaircissement des savoirs arithmétiques liés à la T.A.N. Entre 15 et 20 séances ont été dédiées à la T.A.N. ainsi qu'aux divers supports tirés de la T.A.N.

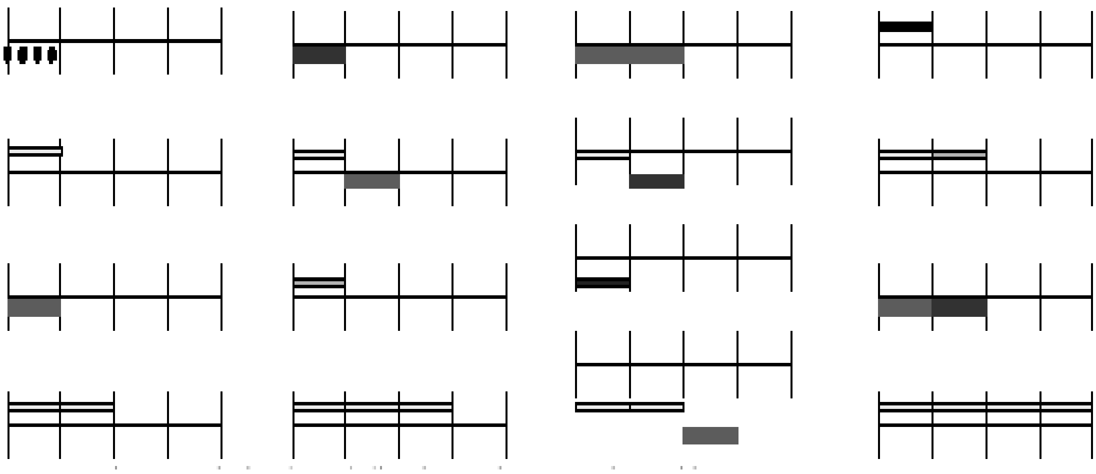
Les principales étapes ont été les suivantes :

1) **Introduction à la T.A.N.**
   - Tout d'abord, les élèves ont été sollicités à propos des familles qui existent « chez les nombres ». L'introduction des familles des multiples de 2 et de 3 a permis de mettre en évidence que le nombre 6 et ses multiples appartiennent aux deux familles.
   - La T.A.N murale a alors été introduite et explorée de façon libre pendant une dizaine de jours : quelques propriétés intrinsèques de la T.A.N. ont été observées et la recherche des facteurs des nombres entiers a été appréhendée comme un jeu : « Ah oui, 6 est un facteur de 72 parce que l'on a… *(recherche visuelle)* 72 = 6 x 12 (…) ».

2) **Utilisation et exploration de la T.A.N.** dans le but d'une appropriation assez rapide : (calculs, fonctionnalités : quotient et reste etc.) et si possible de réinvestissements de l'outil.

3) **Activités basées sur la décomposition maximale des entiers naturels**
   - Stratégie de la poupée russe, dont le principe a été « présenté » par le maître et poursuivi individuellement lors de quelques séances de travail personnel *(où une individualisation du travail est rendue possible : chacun travaille à son rythme sur des fichiers diversifiés en fonction de son contrat de travail) ;*

Principe : les élèves ont ouvert de façon itérative les entiers pour voir ce qu'ils contenaient et se ramener à un nombre déjà « épluché ». Par exemple, 24 = 2 x 12 et comme 12 avait déjà été décrit (non pas comme $12 = 2^2 \times 3$ mais plutôt comme 12 contient deux traits jaunes et un trait bleu), les élèves se sont servi de son écriture en couleurs pour trouver celle de 24. Ce principe itératif supposait donc à chaque étape de trouver au moins un facteur du nombre considéré, ce qui sollicitait complètement l'attention des élèves.

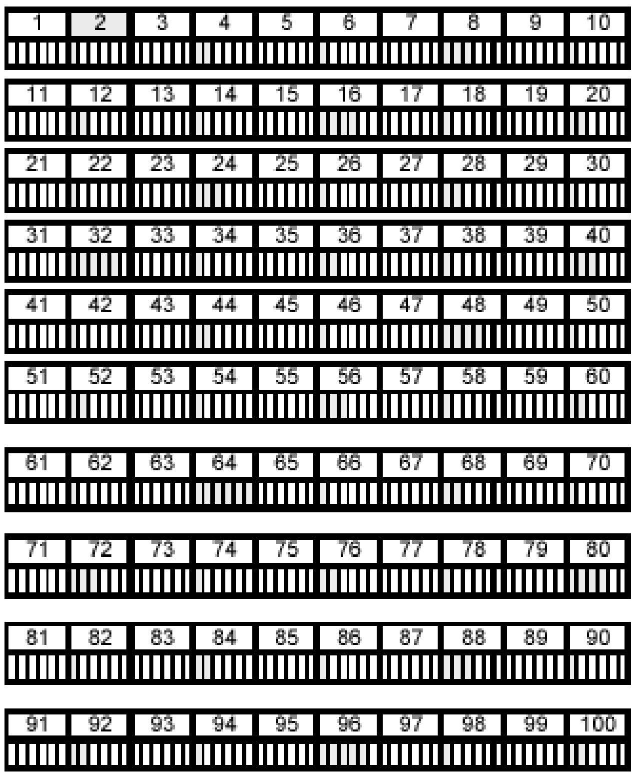


Les entiers naturels de 1 à 16 (de haut en bas puis de gauche à droite) révélant les nombres en couleur qui les composent : 1 trait jaune pour 2, 1 trait bleu pour 3, 2 traits jaunes pour 4, 1 trait rouge pour 5, 1 trait jaune et 1 trait bleu pour 6, …

- <u>Stratégie de la reconstruction</u> : construction collective de la **Table Arithmétique des Décompositions** ou **T.A.D.**

L'algorithme de coloriage de la T.A.D. a été le suivant : Colorier une barre jaune à tous les multiples de 2. Or d'autres nombres contiennent plusieurs fois 2 ! 4 par exemple contient deux 2 et comme il a déjà une barre jaune, on lui en rajoute une seconde ainsi qu'à tous ses multiples puisqu'ils contiennent également 4. Et ainsi de suite : 8, 16, 24 etc. ont le droit à une troisième barre jaune etc.

Les facteurs de 2 présents
dans les 100 premiers entiers naturels

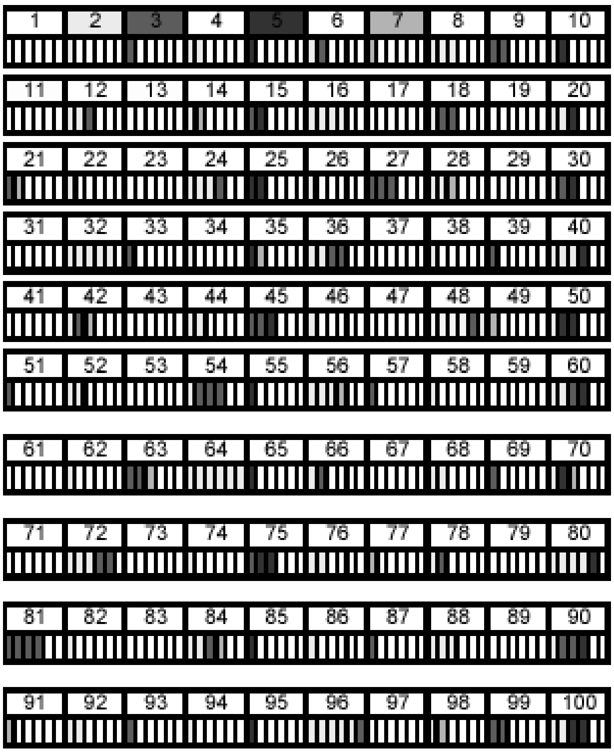


On procède de même en bleu pour tous les multiples de 3 (deux barres pour les multiples de 9…) etc. 5 n'a pas de barre ? On lui en colorie donc une en rouge (comme à ses multiples). Et 6 ? Il a déjà été inventé (1 barre jaune et 1 bleue). Et 7 ? Une barre grise (…). 10 a déjà été inventé etc.

Les élèves ont donc construit sur le mode du jeu tous les nombres de 1 à 100 ce qui a permis par la suite d'observer leurs propriétés très étroitement liées aux particularités de cette décomposition. Ce coloriage a été fait à plusieurs occasions sans perte d'intérêt bien au contraire ! Chacun découvrait de nouvelles stratégies de coloriage, stratégies liées à la structure des tables de multiples en base 10. Lorsque l'on ajoute 13 à 26, il suffit d'ajouter 3 (3 cases vers la droite) puis 10 (une ligne vers le bas) : la procédure est structurante pour le calcul réfléchi et ne nécessite pas la T.A.D.

C'est de fait comme un crible d'Érathostène amélioré où les nombres premiers apparaissent mais aussi leurs multiples et les multiples de leurs puissances (cf. ordres de multiplicité). À l'élimination on préférera la valorisation !

Les facteurs premiers de 2 à 13 présents
dans les 100 premiers entiers naturels



L'outil constitué par la T.A.D. a été peu discuté mais a été décrit par une participante comme étant très intéressant pour donner du pouvoir aux élèves quant à leur compréhension des nombres (en vue de la structuration arithmétique nécessaire à leur arrivée au collège où le formalisme arrive très vite).

Quelques utilisations ont été abordées comme la simplification de fractions, la factorisation ou encore la caractérisation univoque des multiples d'un entier donné. En effet, remarquons que les multiples de 18 (3 fois 6) pouvaient grâce à la T.A.N. être vus comme également des multiples de 3 et 6 (réciproque fausse). Grâce à la T.A.D. on les « voit » comme étant les multiples de 2 et 3^2, ce qui les caractérise de façon non équivoque dans la mesure où {a et b premiers entre eux} implique {a^n et b^p premiers entre eux}, ce qui est donc a fortiori vrai pour des nombres premiers. Il est par ailleurs possible et souhaitable de leur faire retrouver tous les facteurs des entiers (à suivre).

<u>Un autre exemple d'utilisation au collège évoqué lors de l'atelier :</u>

La recherche sur la T.A.D. des multiples des carrés peut être mise à profit dans le calcul des racines carrées. Par exemple, la racine carrée de 72, serait celle de 36x2 où 36 serait clairement le carré de 6 (2 barres jaunes et deux barres bleues). Ainsi, on cesserait d'attendre passivement que les élèves « voient » derrière 72, 128 etc. des multiples de carré, en leur permettant de découvrir, de manipuler, voire d' « éplucher » les nombres eux-mêmes et à travers eux la structure qui les anime.

Enfin, des fiches d'identité des nombres (affichées en classe) ont été conçues à l'égard des trente premiers entiers dont la décomposition devait être retenue.

4) **L'introduction des fractions** a suivi par une approche classique, entre autres basée sur des pliages par 2, 4 et 8 de bandes de papier.

La T.A.P.2 (Table Arithmétique Primitive de 2) issue de la mise en cascade des tables des puissances de 2 : 1, 2, 4, 8 et 16 a alors servi de départ aux T.A.F. (Table Arithmétique Fractionnaire) et notamment au début à celle de base ½. (T.A.F.P. 1/2).

Les fractions multiples des 1/16èmes de 0 à 4

Table de 1/16	1/16	2/16	3/16	4/16	5/16	6/16	7/16	8/16	9/16	10/16	11/16	12/16	13/16	14/16	15/16	16/16
Table de 1/8		1/8		2/8		3/8		4/8		5/8		6/8		7/8		8/8
Table de 1/4				1/4				2/4				3/4				4/4
Table de 1/2								1/2								2/2
Table de 1																1

Table de 1/16	17/16	18/16	19/16	20/16	21/16	22/16	23/16	24/16	25/16	26/16	27/16	28/16	29/16	30/16	31/16	32/16
Table de 1/8		9/8		10/8		11/8		12/8		13/8		14/8		15/8		16/8
Table de 1/4				5/4				6/4				7/4				8/4
Table de 1/2								3/2								4/2
Table de 1																2

La T.A.F. de 1/30 a été également construite et a permis de conclure quant à la comparaison de 2 fractions : 3/5 et 2/3 comparées auparavant de façon approximative sur un cercle (en atelier).

Table de 1/30	1/30	2/30	3/30	4/30	5/30	6/30	7/30	8/30	9/30	10/30	11/30	12/30	13/30	14/30	15/30
Table de 1/15		1/15		2/15		3/15		4/15		5/15		6/15		7/15	
Table de 1/10			1/10			2/10			3/10			4/10			5/10
Table de 1/6					1/6					2/6					3/6
Table de 1/5						1/5						2/5			
Table de 1/3										1/3					
Table de 1/2															1/2
Table de 1															
Table de 1/30	16/30	17/30	18/30	19/30	20/30	21/30	22/30	23/30	24/30	25/30	26/30	27/30	28/30	29/30	30/30
Table de 1/15	8/15		9/15		10/15		11/15		12/15		13/15		14/15		15/15
Table de 1/10			6/10			7/10			8/10			9/10			10/10
Table de 1/6					4/6					5/6					6/6
Table de 1/5			3/5						4/5						5/5
Table de 1/3					2/3										3/3
Table de 1/2															2/2
Table de 1															1

<u>Remarque</u> : ces tableaux de fractions basés sur l'approche multiplicative de la T.A.N. mettent en exergue des fractions irréductibles (la plus basse de chaque colonne), la suite de fractions de base (par exemple 1/30, où 30 est le PPCM des dénominateurs des autres fractions) et permettent de comparer voire d'ajouter directement des fractions en exerçant un certain plaisir de l'œil : « Mais c'est facile, quand on regarde à quoi est égal la fraction 1/ 3 on trouve aussi 10 / 30 tandis que 2 / 5 égal 12 / 30 … Et même avec des 15$^{\text{ièmes}}$ on peut le voir car… ».

Et grâce à l'observation, les élèves manipulent les fractions et peu à peu se les approprient.

Ces tables, sans systématiser en aucune façon la mise au même dénominateur, ont donc permis de trouver « des » dénominateurs communs propices à la comparaison. De même, les liens entre les pliages correspondants aux mesures de 1/2 + 1/4 + 1/8 (exemple) et la T.A.F. ½ ont été mis en évidence.

D'autres T.A.F. ont alors été distribuées, remplies (avec un certain tâtonnement) et explorées (égalités de fractions, comparaisons). La Table des Centièmes a été très utile pour la compréhension de l'écriture décimale (et grâce aussi au travail sur la T.A.F. 1/2).

5) **Passage de brevets sur l'utilisation/ dépassement de la T.A.N. et de la T.A.F. 1/2 et 1/100** (multiples, quotient et reste, fractions, décompositions, écriture décimale).

Table de 1/100	1/100	2/100	3/100	4/100	5/100	6/100	7/100	8/100	9/100	10/100	11/100	12/100	13/100	14/100	15/100	16/100	17/100	18/100	19/100	20/100
Table de 1/50		1/50		2/50		3/50		4/50		5/50		6/50		7/50		8/50		9/50		10/50
Table de 1/25				1/25				2/25				3/25				4/25				5/25
Table de 1/20					1/20					2/20					3/20					4/20
Table de 1/10										1/10										2/10
Table de 1/5																				1/5
Table de 1/4																				
Table de 1/2																				
Table de 1																				

<u>Remarque :</u> Les fonctionnalités plus fines des tables ont été laissées à la charge éventuelle de leur enseignant de 6$^{\text{ème}}$.

II - 2 Une Arithmétique naturelle en couleurs : un milieu didactique ?

Principes :

- Redonner aux nombres entiers (et fractionnaires) leurs proportions et espaces « naturels », tout en permettant d'unifier visuellement les concepts de multiplication/ division.
- Réhabiliter ainsi les concepts de facteur et multiple à travers une approche globale des nombres (tables ouvertes) en introduisant simultanément la variable (didactique ?) : couleur/ facteur.
- Aller jusqu'à la décomposition des entiers naturels en produit de facteurs premiers sans effort et sans formalisme, le tout pour favoriser le sens et la fonctionnalité et non juste la « technique ».

Trois champs abordés

La T.A.N. et les tables de facteurs entiers

Elles permettent d'obtenir tous **les facteurs des nombres** (la T.A.D. le permet également), les quotients et restes.

Toutes les propriétés opératoires y sont révélées (commutativité, distributivité …, distinction entre division-partage et division-groupement). PGCD & PPCM deviennent très accessibles.

Les Tables Arithmétiques Fractionnaires

Construction, comparaisons et calculs y sont un jeu d'élève (basé sur les mêmes principes) et permettent d'accompagner l'élève dans ses représentations successives autour des fractions et notamment la « nécessaire » recherche d'un dénominateur commun.

La Table Arithmétique des Décompositions

Elle fournit la décomposition des entiers en **produit de facteurs premiers** avec leur ordre de multiplicité. Les fonctionnalités sont très diverses et structurantes : pour préparer la conceptualisation autour du nombre (requise au collège) ou pour accompagner le formalisme propre au collège. Les nombres premiers sont mis à la portée des élèves pour leur plus grand bonheur en arithmétique.

III - BILAN DE L'ATELIER

Les outils ont donc été largement appréciés et ce, d'autant plus que les participants les ont réellement investis pendant cette recherche d'abord individuelle puis en petits groupes et enfin discutée collectivement.

Au niveau de l'adéquation avec les programmes scolaires notamment de l'élémentaire et donc de la formation, des mises en garde ont cependant été formulées : peut-on demander ou suggérer aux P.E. stagiaires de s'éloigner du programme sous prétexte d'une structuration arithmétique pertinente alors que le discours type est de partir du programme et des objectifs assignés pour en déduire des activités ciblées ?

D'autres participants ont souligné la profondeur des concepts disciplinaires présents dans ces tables (T.A.N. et T.A.D.) comparées au « négatif du crible d'Eratosthène », suggérant l'intérêt d'utilisations directes dans un contexte restant à déterminer.

Le potentiel des outils notamment au niveau des recherches possibles en élémentaire mais aussi au collège et au lycée a donc été reconnu comme pouvant être extrêmement structurant et révélateur de la nature des nombres dans toutes leurs dimensions arithmétiques et opératoires.

Annexe

Extrait de « Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire » (ERMEL INRP 1978, Tome 2, pages 128 à 130)

III.3.2. *Organisation du répertoire multiplicatif*

III.3.2.1. Activité

But

Travail sur l'ordre.

Déroulement

- les enfants travaillent par deux.
- chaque enfant reçoit une bande numérotée de 1 à environ 100 (80 à 120) de la forme suivante :

1	2	3	4	5	6	....	98	99

A chaque paire d'enfants est attribué un nombre de 3 à 15 (par exemple 8).

Premier temps

Les enfants doivent colorier les cases de a en a (8 pour notre exemple).

Deuxième temps

Une des bandes va être découpée à droite des cases coloriées.

Troisième temps

L'un des enfants fabrique une suite de rectangles emboîtés, èt à chaque fois il note le nombre de cases du rectangle obtenu sous la forme 8 ×.

Pendant ce temps l'autre enfant note également sur sa bande intacte le produit correspondant à la place convenable.

1	2	3	4	5	6	7	8

puis

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16 8×2

puis

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16 8×2
17	18	19	20	21	22	23	24 8×3

Quatrième temps

On compare les différentes productions des groupes : comparaisons des bandes intactes d'une part, comparaison des rectangles successifs obtenus d'autre part.

Remarque : Certaines équipes, par suite par exemple d'une erreur dans le découpage, pourront ne pas avoir obtenu de rectangles. Il sera alors fort utile de leur faire rechercher la cause de leur erreur.

On pourra ici décider, par continuité de signification sur la bande, que $n \times 1 = n$.

III.3.2.2. Prolongements possibles

Activité

Le prolongement de l'activité 3.2.1 pourra amener à deux modes de représentation.

Premier mode de représentation

La simple juxtaposition dans l'ordre croissant des bandes intactes de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4, etc., offrira aux élèves un outil appréciable se prêtant à de nombreuses utilisations :

2	1	2	3	4 2x2	5	6 2x3	7	8 2x4	9	10 2x5	11	12 2x6	13	14 2x7	15	16 2x8
3	1	2	3	4	5	6 3x2	7	8	9 3x3	10	11	12 3x4	13	14	15 3x5	16
4	1	2	3	4	5	6	7	8 4x2	9	10	11	12 4x3	13	14	15	16 4x8
5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 5x2	11	12	13	14	15 5x3	16

Utilisations possibles

- trouver 4×5 : 5ème étape sur la 4ème ligne ou 4ème étape sur la 5ème ligne
- trouver pour un nombre donné sous forme usuelle, des écritures avec + et × : $11 = (5 \times 2) + 1 = (3 \times 3) + 2 = (4 \times 2) + 3$

Deuxième mode de représentation

Si l'on recopie les bandes déjà étudiées lors du 4ème temps de l'activité 2, on peut par pliages (ou découpage et recollage) supprimer les cases non colorées.

On obtient ainsi des bandes plus courtes du genre :

8 8 × 1	16 8 × 2	24 8 × 3	32 8 × 4	etc.

Leur juxtaposition, sur un tableau préparé à cet effet, amène à la table de Pythagore de la multiplication :

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

DEUX PROBLÈMES POUR PENSER LA QUESTION DES RAPPORTS ENTRE MATHÉMATIQUES ET RÉALITÉ

Viviane Durand-Guerrier
IUFM de Lyon, LIRDHIST UCBLyon 1 & IREM de Lyon

Résumé :
Il s'agissait dans cet atelier de proposer aux participants de résoudre deux problèmes, l'un sous la forme du dispositif du problème ouvert, l'autre sous la forme du débat scientifique ; d'en faire émerger un certain nombre de questions concernant le rapport entre mathématiques et réalité ; de proposer quelques résultats obtenus auprès des professeurs d'école en formation ; et pour finir d'essayer de dégager ce qui, dans chacune de ces deux situations, est porteur d'un questionnement didactique.

I LES SOLIDES DE PLATON

I.1 Présentation de la situation

Les solides de Platon sont des objets ayant une valeur culturelle certaine et on les trouve parfois proposés dans certains manuels de cycle 3 avec la propriété remarquable qu'ils sont au nombre de cinq exactement. Ce résultat est en général cependant peu connu des professeurs d'école stagiaires, et lorsqu'il l'est les arguments permettant d'affirmer ce résultat ne sont en général pas disponibles. Nous avons donc là a priori un bon candidat pour un problème ouvert que je propose depuis plusieurs années en formation aux professeurs d'école stagiaires ainsi qu'aux professeurs stagiaires de l'AIS sous la forme indiquée ci-dessous (figure 1.) en respectant le dispositif problème ouvert (Arsac et al. 1989). Naturellement, la résolution de ce problème à l'intérieur de la géométrie euclidienne dépasse très largement le niveau de mathématiques requis pour l'exercice du métier de professeur d'école, ce qui rend nécessaire de considérer que la solution du problème va mobiliser des éléments extérieurs aux théories mathématiques. Dans l'organisation de la situation, nous mettons à la disposition des participants du matériel permettant de faire et défaire facilement des solides : polygones en plastique avec procédés d'articulation type Polydron ou Clixi que l'on trouve assez souvent dans les écoles maternelles. Nous proposons également règles, compas, ciseaux, équerre ….

C'est ce dispositif que nous avons proposé aux participants de l'atelier d'Avignon. Il y avait treize participants répartis en quatre groupes.

Résolution de problème en géométrie

Un polyèdre est un solide délimité par des faces planes.

Un polyèdre régulier est un polyèdre convexe dont les faces sont des polygones réguliers deux à deux superposables tels que à chacun des sommets correspond un même nombre de faces.

Déterminer tous les polyèdres réguliers

1. Résoudre le problème
2. Faire une affiche présentant vos résultats, leur justification, la démarche de résolution et les difficultés éventuelles.

Figure 1. le texte du problème ouvert de géométrie

I.2 Eléments recueillis dans le cadre de l'atelier

Je rapporte ci-dessous les éléments principaux qui se sont dégagés lors de la mise en commun en ce qui concerne la résolution du problème[1] :

Un premier groupe fait état des questions qu'ils se sont posées : faut-il construire ? trouver une méthode ? prouver l'existence ? et propose trois types de procédures : 1. à partir des triangles , partir de la pyramide régulière, imaginer d'autre solides , y compris non réguliers, en augmentant le nombre de faces ; 2. travailler à partir du type de faces ; 3. utiliser des symétries par rapport à un plan, en remarquant que, à part pour l'octaèdre, un tel plan n'est pas matérialisé par les arêtes.

Un deuxième groupe fait état d'une résolution qu'il qualifie d'empirique : ‘concernant tout d'abord le triangle se posent plusieurs questions : comment prouver l'existence, l'unicité, pourquoi y a t-il un nombre fini de solutions, comment on le sait ? On regarde ce qui se passe au niveau du sommet : on le voit complètement, on déplie les faces de base sur un plan, on rajoute une face (4), puis un autre (5) ; avec six faces on obtient un plan et avec sept ça se chevauche. Les angles sont égaux, pour plier il faut au moins trois faces, il faut que ça soit inférieur à 360°. On peut voir sans construire et faire une vérification expérimentale. Avec le carré : 90×3 = 270 ; 90×4 = 360 , donc un seul ; avec le pentagone : 108×3 <360 ; on peut peut-être le construire ; avec un hexagone, 120×3 = 360, C'est impossible.

Comment contrôler l'existence sans construire ?' Un groupe dit avoir recherché une méthode expérimentale permettant de montrer que les polyèdres sont faisables ; ils ont établi qu'il faut au moins trois faces pour avoir un sommet et que on peut le faire jusqu'à 6-1 pour les triangles, 4-1 pour les carrés etc.

A la question des difficultés prévisibles pour des professeurs stagiaires, les participants ont envisagé :

1. des difficultés pour comprendre la consigne, en particulier l'expression « deux à deux superposables »;

[1] A partir de mes notes et de celles prises par Catherine Houdement que je remercie.

2. la possibilité que certains n'osent pas manipuler ;
3. des confusions entre espace et plan ;
4. des hypothèses erronées, par exemple qu'il y a autant de faces que de sommets ;
5. des difficultés à inférer des informations à partir des manipulations.

I.3 Eléments recueillis dans diverses situations de formation

Lors des observations que nous avons pu conduire en formation, la difficulté à interpréter l'expression « deux à deux superposables » apparaît très régulièrement, avec l'interprétation selon laquelle ce sont les faces opposées qui doivent être superposables. Le refus de manipuler apparaît rarement chez les professeurs stagiaires, parfois chez les professeurs titulaires. On observe cependant des comportements variables entre ceux qui explorent le problème directement avec le matériel et ceux qui cherchent à résoudre dans l'environnement papier crayon avant de confronter leurs hypothèses avec le matériel, mais d'une manière générale, la nécessité de recourir au matériel apparaît généralement assez vite, ceci d'autant plus facilement que le matériel est disponible.

Concernant le point de 3., la situation précisément pose la question de la relation entre espace et plan, puisqu'en effet l'impossibilité de réaliser un polyèdre régulier avec des faces hexagonales est liée intrinsèquement au fait que l'on peut paver le plan avec des hexagones réguliers isométriques. C'est là que se trouve le plus souvent le point nodal dans la situation. En effet, une conjecture fréquemment faite par les professeurs stagiaires est qu'il doit y avoir une infinité de polyèdres, un pour chaque type de polygone régulier. Dans ce cas, la confrontation avec la « réalité » est cruciale ; il n'est pas rare de voir des groupes argumenter pour savoir s'il est possible ou non de réaliser un polyèdre avec les hexagones. La possibilité est soutenue par le fait que le matériel n'étant pas absolument rigide, il est possible d'obtenir une courbure, ce qui peut laisser croire que si on avait suffisamment d'hexagone, on réussirait à réaliser un polyèdre. Cependant, dans cette situation, les rétroactions du « réel » sont suffisamment fortes pour créer a minima le doute, et dans la plupart des cas permettre une remise en cause des conjectures erronées. En effet, dans la plupart des cas, les participants finissent par s'accorder sur le fait qu'il est impossible de réaliser un polyèdre régulier à faces hexagonales car dans ce cas, on reste dans le plan[2]. Se pose alors la question de savoir pourquoi il en est ainsi ; la réponse est en général cherchée du côté des mathématiques, et non pas du côté des contraintes du réel. Du point de vue de l'évolution de la situation mathématique, nous avons là un élément moteur. En effet, ceci permet de mettre en relation le phénomène observé et les résultats sur les angles, ce qui en retour permet de faire des prédictions sur les polyèdres qu'il devrait être possible de construire, en mettant en oeuvre des procédures exhaustives du type de celles mentionnées plus haut. Le plus souvent, c'est seulement à ce moment-là que l'icosaèdre, obtenu en associant cinq triangles équilatéraux par sommet, est envisagé. Il reste alors à vérifier expérimentalement que l'on peut en effet réaliser tous les polyèdres que les contraintes repérées permettent d'envisager.

Lors de la mise en commun, on peut alors stabiliser le résultat suivant : pour obtenir un sommet, il faut au minimum trois faces et il est nécessaire que la somme des angles au sommet ne dépasse pas 360°. Ces deux conditions apparaissent comme les éléments minimaux d'un modèle géométrique dans lequel on pourrait rendre compte du « fait matériel » : il y a exactement cinq polyèdres réguliers ».

---

[2] On retrouve dans cette situation des éléments de la situation du « triangle aplati » étudier dans Arsac et al. 1989

I.4 En guise de conclusion

On se trouve ici, selon moi, dans une perspective de modélisation au sens de Sensevy & Mercier (1999) qui écrivent « Assimiler une culture des « modèles » c'est donc se rendre capable de considérer le modèle, non dans un rapport mimétique à la réalité (…) ; mais comme un système de signification susceptible de nous apprendre des choses sur la réalité, et par là même, de nous rendre susceptible d'agir sur elle. (…) ». En effet, le recours au modèle mathématique que constitue ici la géométrie euclidienne, dans une perspective minimaliste, permet de rendre compte des phénomènes observés, de faire des prédictions sur le réel et nous donne des indications pour agir afin de confronter ces prédictions au réel. Ceci relève de ce qu'on appelle dans les programmes de l'école élémentaire la démarche scientifique et fournit un exemple de ce que peut être une démarche expérimentale en mathématique.

II LE CYCLISTE

II.1 Présentation de la situation

La situation du cycliste est empruntée à Marc Legrand [3]qui l'utilise, dans le cadre du débat scientifique à l'université, pour introduire l'intégrale. En ce qui me concerne, je l'utilise en formation tant auprès de professeurs d'école stagiaires que de professeurs de mathématiques de collège et de lycée en formation continue, avec des ambitions plus modestes sur le plan des concepts mathématiques convoqués, mais pour sa richesse quant aux questions qu'elle permet de poser sur les rapports entre mathématiques et réalité . Je la propose en général sous la forme du débat scientifique (Legrand 1993) et c'est sous cette forme qu'elle a été proposée dans l'atelier. Le problème est introduit par le texte de la figure 2.

[3] Legrand, M. Le cycliste, (non publié, cassette vidéo IREM de Lyon, transcription IREM de Grenoble) et Legrand & al, 2003, pp.23-24

Un cycliste monte un col à la vitesse de 21km/h. Arrivé au sommet, il redescend aussitôt par le même trajet à la vitesse de 63km/h.

Quelle est la vitesse moyenne de ce cycliste sur l'aller-retour ?

Ce problème a été proposé à des élèves de collège qui ont donné les réponses suivantes :

28km/h 30km/h 31,5km/h 42km/h

Enfin, certains élèves ont répondu qu'on ne pouvait pas répondre à la question.

Quelle est selon vous la bonne réponse à la question posée ? Indiquez votre réponse sur le bulletin qui vous a été remis.

<u>Figure 2. la présentation du problème du cycliste</u>

Après un court temps de réflexion, les participants sont invités à répondre à la question sur un bulletin de vote anonyme. Ceci a pour fonction de permettre à chacun de proposer une réponse et d'en favoriser le décompte. En général, la réponse majoritaire est la réponse 42km/h qui correspond à la moyenne arithmétique ; la réponse « on ne peut pas répondre à la question » apparaît également très fréquemment ; les trois autres valeurs apparaissent plus rarement. Ceci permet d'engager un débat entre les participants. Certains sont d'emblée convaincus que la vitesse moyenne est, dans ce cas, indépendante de la distance et du temps de parcours mais ne sont en général pas capable dans un premier temps de l'argumenter (ceci correspond à une preuve intellectuelle au sens de Balacheff (1987). D'autres au contraire ne voient pas pourquoi cela serait indépendant et en l'absence d'arguments réfutent ce résultat. Si personne ne propose alors de faire les calculs pour plusieurs valeurs de la vitesse de descente, je fais la proposition au groupe. Les résultats d'une part montrent que la valeur 42 ne convient pas, d'autre part permettent de faire la conjecture que le résultat est bien indépendant de la distance et du temps de parcours et vaut 31,5. Il reste alors à prouver ce résultat et pour certains à expliquer cette indépendance inattendue. Certains participants s'engagent dans des calculs algébriques, d'autres cherchent des résultats de type arithmétique, voire même graphique. Une fois le résultat établi, je pose aux participants la question subsidiaire suivante : *à quelle vitesse le cycliste devrait-il descendre pour que sa vitesse moyenne sur l'aller-retour soit de 42km/h ?*. nous procédons alors à un nouveau vote. Les réponses se partagent en général entre *84 km/h*, *c'est impossible*, et dans une proportion non négligeable *je ne sais pas répondre*. La réponse 84km/h obtenu par analogie avec le fait que 31,5 est la moitié de 63 est facilement réfutée ; il suffit de faire le calcul pour voir que cela ne convient pas. Un nouveau débat s'engage alors entre ceux qui refusent que ce soit impossible et ceux qui le soutiennent, le plus souvent en s'appuyant sur les formules littérales obtenues lors de la première phase de l'activité. On peut alors réinterroger le modèle mathématique adopté pour résoudre le problème en se demandant s'il est encore valable dans une situation limite où le résultat proposé est en désaccord avec l'intuition. Pour s'en convaincre, on va chercher un argument à *l'extérieur* des mathématiques : pour atteindre une vitesse moyenne de 42 km/h, il faudrait arriver en bas du col au moment même où on arrive au sommet, ce que les cyclistes montagnards savent bien d'ailleurs !

I.2 Quelques éléments du débat au sein de l'atelier

Les réponses spontanées données par les participants reflètent la diversité rencontrée en formation, mais on peut faire l'hypothèse que certains participants connaissant la réponse ont jouer le jeu du « non expert ». Les échanges ont alors portés sur le type de réponse que l'on pouvait attendre, ce qui a donné lieu à une grande variété : divers types de calcul littéral selon ce que l'on choisit d'introduire la distance, le temps de montée, le temps de descente …, utilisation de la moyenne harmonique qui est une solution experte lorsque elle est connue, utilisation de tableaux, utilisation de graphiques, raisonnement de type arithmétique en langue naturelle. Lorsque l'on introduit la distance d dans le calcul littéral, le déroulement du calcul « montre » que la distance ne joue aucun rôle puisqu'on simplifie par d ; ceci permet de mettre en évidence l'efficacité d'un traitement littéral pour traiter la question de la généralité. A la question subsidiaire, on retrouve aussi la variété habituelle des réponses. Il faut noter que la formule de la moyenne harmonique[4]permet de trouver par le calcul que c'est impossible, alors que les calculs plus classiques induisent facilement la réponse erronée 84 km/h. Certains participants ont fait remarquer qu'il est bien connu qu'il est difficile d'envisager qu'en mathématique, un problème soit impossible.

II.3 Quelques caractéristiques de cette situation

Cette situation relève d'une catégorie de problèmes que l'on pourrait qualifier de pseudo-concrets, puisqu'en effet, on a déjà fait un premier travail de simplification en éliminant « ce qui se passe au col » ; toutefois la question posée - la valeur de la vitesse moyenne - est une question relativement pertinente vis a vis de la situation de la vie courante évoquée, qui permet d'envisager un contrôle de la vraisemblance des résultats proposés par un recours à cette situation évoquée. Sur le plan mathématique, un premier résultat remarquable dans la perspective de la formation des professeurs d'école est que nous avons une illustration de ce qu'il est illusoire de prétendre déterminer « à coup sûr » les données nécessaires à la résolution d'un problème avant d'avoir résolu ce problème. Un deuxième résultat est de montrer que la question de la généralité peut se traiter de plusieurs manières, et pas seulement par du calcul littéral, mais que celui-ci fournit des outils de contrôle, donne à voir et rend explicites certaines relations et propriétés et permet de faire des prédictions sur le « réel ». Or ceci est un enjeu important de l'enseignement des mathématiques dans l'articulation école élémentaire/collège. Sur le plan didactique, nous avons ici un exemple éclairant de ce qu'est un théorème en acte au sens de Vergnaud (1991). En effet la réponse majoritaire 42km/h provient de l'application du théorème en acte suivant : « *la vitesse moyenne s'obtient en divisant par deux la somme des vitesses* ». Ce théorème en acte a un domaine de validité étendu puisqu'il s'applique lorsque l'on considère des intervalles de temps égaux. Mais utilisé en dehors de son domaine de validité, il conduit à des résultats en contradiction avec les données de la situation. Dans le cas du cycliste, la

[4] La moyenne harmonique de deux nombres réels non nuls a et b est le nombre réel c défini par $\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

confrontation ne se fait pas directement avec le monde réel, mais avec une situation évoquée et, contrairement au problème des solides de Platon, le problème peut se traiter à l'intérieur des mathématiques. Cependant, comme on l'a vu plus haut, le modèle mathématique mobilisé peut être remis en question si les résultats qu'il produit heurtent l'intuition[5]. Enfin, ce problème permet de travailler également des concepts mathématiques plus élaborés. Nous avons déjà vu que Marc Legrand l'a introduit pour travailler l'intégrale ; on peut également l'utiliser pour travailler la notion de limite et d'asymptote puisqu'en effet, si on considère la fonction qui pour une vitesse de montée de 21km/h associe la vitesse moyenne à la vitesse de descente, on obtient une fonction homographique dont la limite en $+\infty$ est 42 km/h et dont la représentation graphique admet la droite d'équation $y = 42$ comme asymptote. Di Martino (2002) décrit également une utilisation de ce problème en seconde en entrant directement par ce que j'ai appelé la question subsidiaire.

CONCLUSION

Je voudrais conclure sur quelques éléments de réflexion qui guident l'institutionnalisation que l'on peut faire à l'issue de ces situations en formation initiale ou continue, en sachant que, en formation, il est toujours demandé aux stagiaires d'envisager une situation pour des élèves d'un niveau donné (ici, dans les deux cas, la fin du cycle 3) s'appuyant sur les caractéristiques repérées de la situation travaillée. En outre, la situation du cycliste permet d'introduire en formation les concepts nécessaires pour étudier la situation du puzzle (Brousseau 1998).

La première concerne ce que l'on appelle parfois conceptions (voire *misconceptions*) qui peuvent se manifester par des théorèmes en acte : ce sont des connaissances du sujet qui ont un certain domaine de validité et qui, utilisées en dehors de leur domaine de validité, peuvent conduire à des résultats et/ou des raisonnements erronés. En situation de résolution de problème, la reconnaissance de l'erreur est le moteur de la poursuite de la recherche : or pour reconsidérer son résultat, il faut en douter sérieusement et pour abandonner une procédure qui a fait ses preuves dans de nombreuses situations, il faut avoir une bonne raison de le faire. Les situations permettant des rétroactions fortes du côté du réel, matériel ou évoqué, favorisent ce questionnement.

La deuxième concerne la modélisation mathématique des problèmes « concrets » ou « pseudo-concrets ». La mobilisation d'outils mathématiques est une aide à la résolution du problème, qui *devient* un problème de mathématiques et cette exploration du problème permet un approfondissement des notions mathématiques en jeu ; ceci n'est pas exclusif d'autres types de raisonnement. Il faut alors « rendre des comptes au réel ». On ne peut pas faire n'importe quoi ; les mathématiques sont *autonomes*, mais leur rapport au réel ne l'est pas. Autrement dit, si l'utilisation d'un modèle mathématique pour un problème concret permet de faire des prédictions sur le comportement du réel, il faut cependant s'assurer que l'on reste dans le domaine de validité du modèle. En effet, dans toute modélisation, on abandonne une partie des paramètres de la situation, et parmi ceux-ci certains pourraient être cruciaux dans des situations limites. Ce va et vient entre modèle et réalité aide à construire un rapport idoine aux mathématiques à ce niveau d'enseignement et favorise le développement de compétences nécessaires à la conduite des raisonnements mathématiques.

[5] Ceci apparaît clairement dans Di Martino, 2002 pp. 9-10

A l'école élémentaire, et même encore au collège, une partie importante de l'activité mathématique relève de ce paradigme : en d'autre termes, la *décontextualisation* doit être progressive. L'organisation de situations didactiques, comportant des phases d'action, de formulation, de débat, de validation et d'institutionnalisation s'appuyant sur les concepts de variable didactique et de contrat didactique (Brousseau 1998) permet de relever ce défi.

Je terminerai en disant que, pour moi, ces deux situations illustrent ce que peuvent être des situations de formation articulant les dimensions mathématique, épistémologique et didactique dans la perspective du développement de compétences professionnelles essentielles pour l'organisation des situations d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques à l'école élémentaire, et au-delà. C'est ceci que j'ai souhaité partager et mettre en débat lors des deux sessions de cet atelier. Il est clair au vu des échanges que la question de la nature des relations entre mathématique et réalité fait l'objet de débat, ce qui renvoie à la question de savoir si les mathématiques comportent ou non une dimension expérimentale[6].

RÉFÉRENCES

Arsac,G. & al. 1989 *Initiation au raisonnement déductif au collège*. Presses Universitaires de Lyon ; IREM de Lyon

Balacheff, N. 1987 Processus de preuves et situation de validation in *Educational Studies in Mathematics* 1 !/2 pp.147-176

Brousseau,G. 1998 *Théories des Situations Didactiques*. La Pensée Sauvage

Di Martino, H. 2002 Comment ça s'écrit , Lire, écrire, interpréter des expressions algébriques en seconde in *PetitX* n°59. IREM de Grenoble, Université Joseph Fourier.pp.5-22

Durand-Guerrier, V. 2004Enseigner les mathématiques à l'école élémentaire. Un défi à relever. *La Gazette des mathématiciens n°99 41-44*

Legrand, M. 1993 Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse in *Repère-IREM* n°10 Topiques Editions pp ;123-158

Legrand, M. & al. 2003 A la recherche d'une cohérence pour une véritable activité mathématique en classe, in *Faire des maths en classe ?* , coord . jacques Colomb, jacques Douaire et Robert Noirfalise. INRP/ADIREM.pp. 13-51

Mercier,A. & Sensevy,G. Pourquoi faire encore des mathématiques à l'école *Le Télémaque n°15*- Enseigner les sciences- mai 1999 pp.69-78

Vergnaud, G.(1991) La théorie des champs conceptuels. Recherche en Didactique des Mathématiques 10/2.3 133-169

[6] Ces questions sont abordées dans Durand-Guerrier 2004.

L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE EN CYCLE 3 À PARTIR DE PROJETS

Michel Sarrouy
IUFM de Montpellier

Résumé :
L'apprentissage de beaucoup de connaissances géométriques en cycle 3 peut être organisé à partir de projets.
La première séance a été consacrée à un exposé rapide de projets et au cours de la seconde, nous avons discuté de la mise en place d'un travail pour des PE2 dans le cadre de l'un des projets.

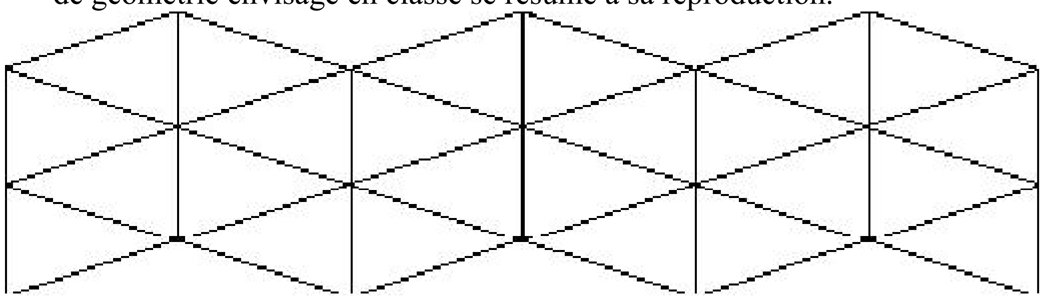
I. PROJETS (CM)

Ces projets sont des travaux en géométrie dont la mise en place est prévue au CM. Ils sont destinés à couvrir une partie importante du programme et constituent un essai de finalisation à l'enseignement de la géométrie en fin de cycle 3, le reste du programme[1] et l'» entretien » courant des notions rencontrées étant assuré par des activités plus classiques.

Chacun de ces projets est assez ambitieux, mais ne se doit-on pas d'être ambitieux pour ses élèves ? Ils constituent de plus une bonne école de rigueur dans les tracés. La preuve en est dans l'excellence des tracés réalisés.

1. Kaléidocycle[2]

a. Il s'agit ici d'une proposition de travail à partir d'un patron, l'essentiel du travail de géométrie envisagé en classe se résume à sa reproduction.



Il est constitué de triangles, tous isocèles, de parallélogrammes (des petits et des grands), de trois directions de parallèles.
Remarques sur la construction : si le patron n'est pas « parfait », il ne sera pas possible de le fermer ou il ne tournera pas sur lui-même ; les angles à la base des triangles isocèles doivent mesurer plus de 60° ; tous les plis sont dans le même

[1] Le programme qui a servi de base est celui de 1995, ce travail n'a pas encore été mis à jour pour tenir compte des évolutions de 2002.

[2] Pour d'autres points de vue, voir « Différents types de kaléidocycles » et « Des kaléidocycles » dans les *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, tome IV, IREM de Paris VII, mars 1996.

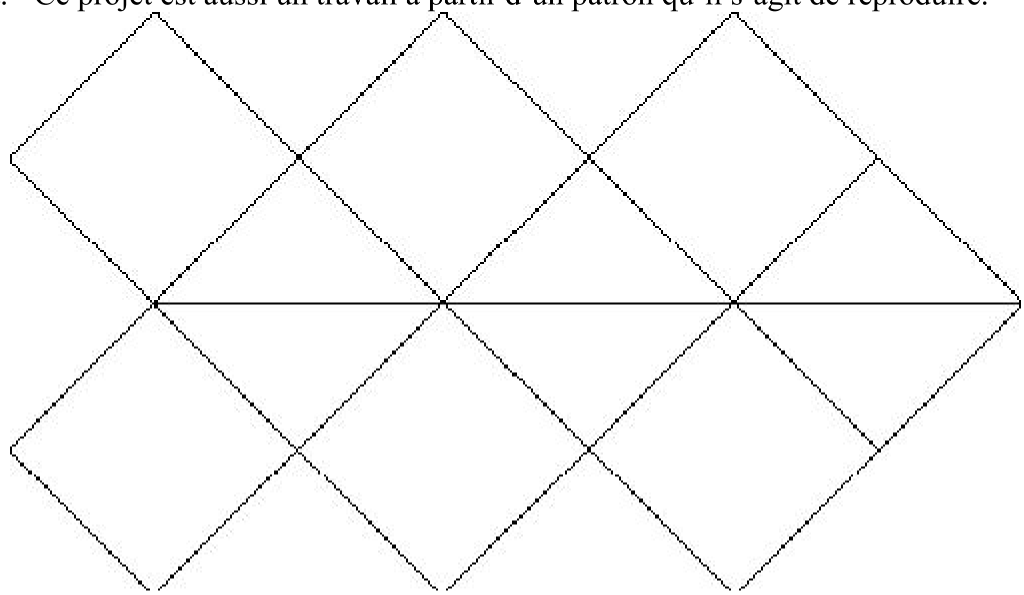
sens à l'exception des petits segments de même longueur à supports parallèles qui sont dans les deux sens.
Pour arriver à construire le kaléidocycle, il faut donc arriver à des tracés aussi précis que possible et pour ce faire, on s'occupe des tracés les plus longs. Ce sont des parallèles d'où l'idée d'utiliser ce patron pour travailler plus particulièrement le parallélisme.

b. Travaux en classe :
C'est ce qui a été fait en classe assez régulièrement.
Pour obtenir une très bonne précision dans le tracé de ces parallèles, l'idée qui a prévalu est la suivante : on construit des parallèles en construisant des parallélogrammes et pour ces derniers, on s'appuie sur des segments de même longueur à supports parallèles, des segments portés par des côtés opposés d'une feuille de papier ordinaire A4. Les parallèles des trois directions du patron ont été « prolongées » jusqu'aux bords de la feuille.
Voir un exemple en Annexe 1.

c. Travail en formation PE2
Plusieurs années, ce projet a été proposé à des PE2 en stage de pratique accompagnée. D'autres fois, nous sommes allés faire des séances de maths à l'École Annexe avant un stage de pratique accompagnée et le travail a été poursuivi en stage.
Pour faire ce travail, le groupe de PE2 attaché à ce projet a été mis en situation : après avoir observé et manipulé des kaléidocycles, je leur demande de reproduire le patron, le plus fidèlement possible, le modèle proposé étant adapté à une feuille de papier A4.
Après leurs essais, nous en venons aux parallèles et à leur tracé.

2. 2 cubes imbriqués

a. Ce projet est aussi un travail à partir d'un patron qu'il s'agit de reproduire.

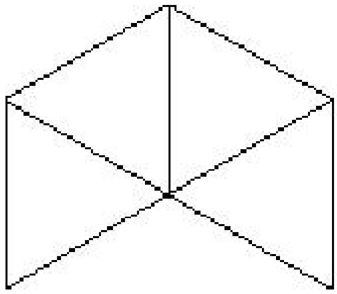


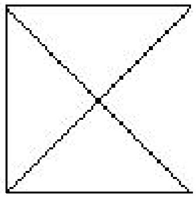
Le patron est formé de carrés, de parallèles, de perpendiculaires. L'élément géométrique retenu pour un travail en classe est l'orthogonalité.
Remarque sur la construction : tous les plis sont dans le même sens à l'exception du segment le plus long qui est dans l'autre sens.

b. Travail en classe :
   Le souci initial était de trouver un projet ressemblant au précédent. La plupart de nos classes sont en effet des classes à niveaux multiples dans lesquelles le même projet ne peut pas servir chaque année.
   En termes de projet, on a bien là une alternative et en termes de contenus mathématiques travaillés, ils sont complémentaires.

3. Cube et octaèdre imbriqués

a. Il existe un patron de ce solide, mais il est trop compliqué pour être utilisé à l'école. Par contre, il est possible de procéder à sa construction en construisant des petites pyramides. Il en faut 6 pyramides à base carrée (sans la base) et 8 tétraèdres (sans base).





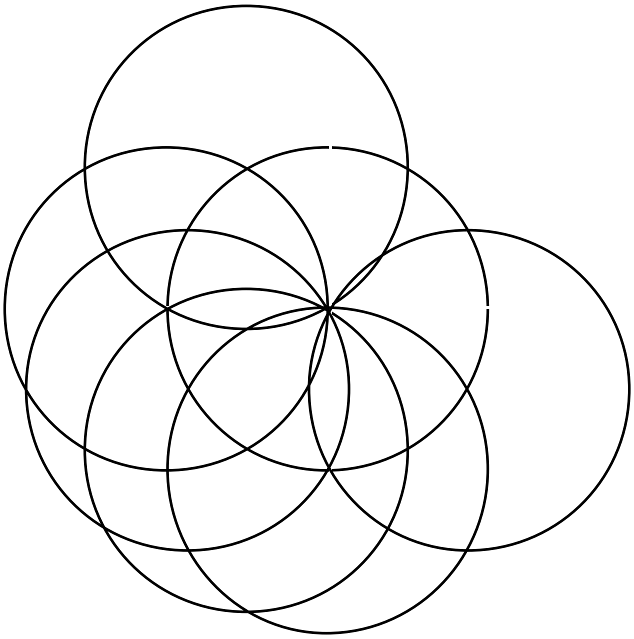
   Le premier « patron » ne comporte que des triangles, tous équilatéraux, mais la réussite de sa reproduction passe par la construction d'un hexagone régulier à l'aide du compas.
   Le second « patron » est, lui, formé de triangles, rectangles isocèles, et sa réussite passe ici par la construction d'un carré.

b. Pour un travail en classe, ces deux « patrons » peuvent être réalisés par les élèves et les solides sont le fruit d'un travail coopératif.

4. Drapeau européen

a. La construction étant complexe il faut la décomposer.
   * Rectangle (drapeau) et emplacement des étoiles
   Ici, le travail géométrique porte sur le rectangle et son centre qui est obtenu à partir des milieux des côtés et non des diagonales en raison de leur longueur puis sur la construction d'un dodécagone régulier centré au centre du rectangle, ce qui est un beau travail au compas.

Le travail sur le grand rectangle (fond du drapeau final) est fait par l'enseignant après que les élèves l'aient fait au format A4.

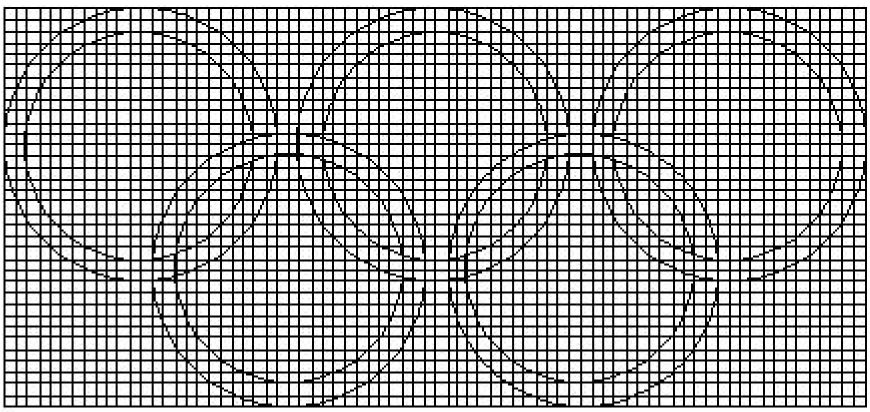


* Construction des étoiles

La construction retenue est celle de Mathäus Roriczer, dite de Dürer, un travail sur le cercle et la droite. Voir en Annexe 2.

b. Travail en classe :
Ce projet a en particulier été mené à bien dans une classe ayant un projet plus global de travail sur le thème de la Communauté européenne suivi d'un déplacement à Strasbourg.

5. Anneaux olympiques



Leur construction est un travail quasi exclusif de repérage sur quadrillage et de construction de cercles.
Pour la réalisation sur papier uni, il suffit de poser le quadrillage sur la feuille de papier uni et de percer aux centres des anneaux avec la pointe du compas.

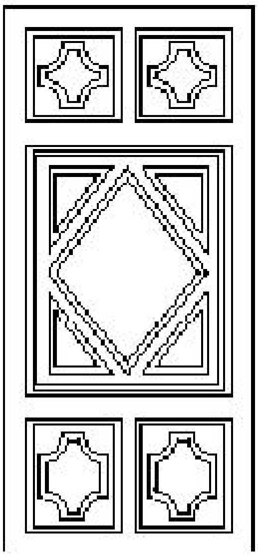
Autant que je sache, ce projet n'a pas encore été utilisé en classe. Il pourrait l'être l'année des Jeux Olympiques.

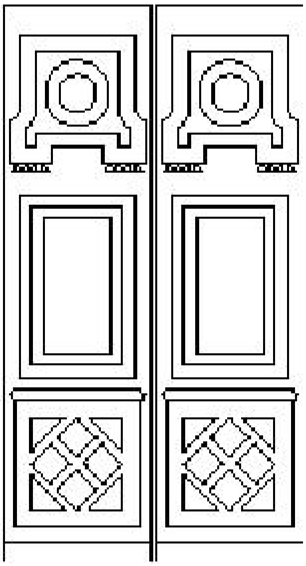
6. Rosace

Ce projet peut être qualifié de local puisqu'il s'agit de la rosace qui se trouve au-dessus de la porte nord de la cathédrale de Mende.
D'un point de vue géométrique, on n'y trouve que des tracés circulaires s'appuyant pour certains sur des perpendiculaires.
Cette idée n'a pas encore servi.

7. Portes

Second projet local, les portes anciennes sont très nombreuses et variées à Mende. Leur reproduction fait travailler les figures planes (rectangles, losanges, arcs de cercle…).

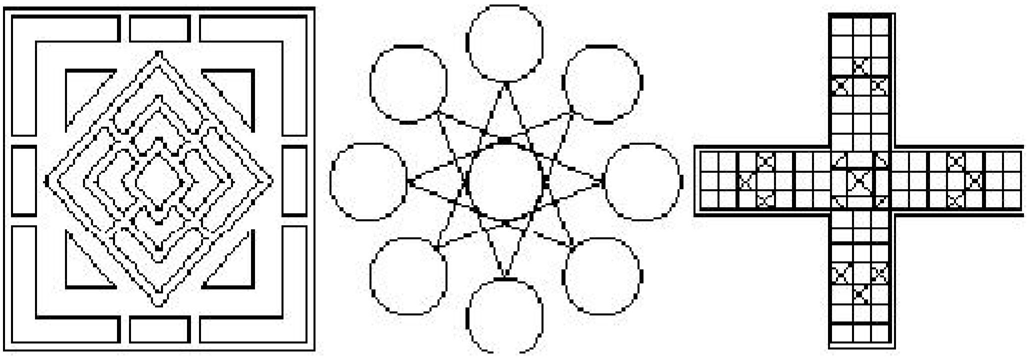




Le dessin des portes et surtout des moulures et formes qu'elles supportent est sans doute un peu compliqué. Diverses simplifications de tracé ont été étudiées et devraient servir bientôt.

8. Plateaux de jeu

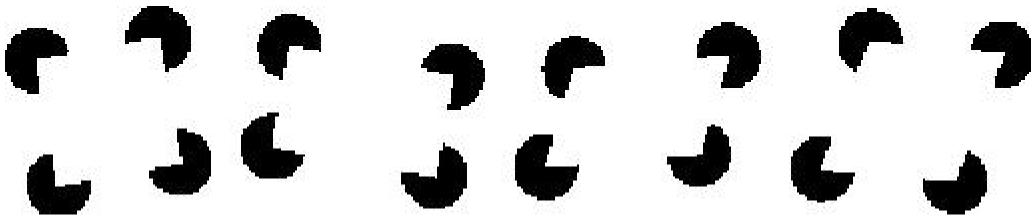
1. C'est un projet dans un CM2 autour de jeux à plateau dans différents pays. Exemples :



Comme on le voit, leur construction fait travailler différents aspects de la géométrie.

2. La figure du milieu (Mu-Torere, Nouvelle-Zélande) a été utilisée en CM2 par des PE2 en pratique accompagnée cette année. Un des éléments importants de sa construction est le cercle sur lequel sont centrés tous les cercles périphériques.

9. Illusions de Gaetano Kanisza



Les constructions font travailler les quadrilatères usuels à partir de leurs diagonales.

10. Ballon de football

C'est une idée de Jean-Claude Rauscher émise pendant l'atelier. Ce ballon est un icosaèdre tronqué, constitué de 20 hexagones réguliers convexes et de 12 pentagones réguliers convexes, les deux types de polygones ayant tous leurs côtés de même longueur. Le patron est trop complexe mais les polygones réguliers peuvent donner lieu à des travaux pour une classe de CM. L'ouverture du compas peut même rester constante pour toutes les constructions si l'on choisit la même construction des pentagones qu'au I.4.
C'est un projet qui pourrait être envisagé pour une année de Coupe du monde de football.

II. MISE EN PLACE D'UNE SÉANCE DE TRAVAIL AVEC DES PE2

Le projet retenu par le groupe à cette séance de l'atelier fut le kaléidocycle.

1. Au cours de la première séance, un tour de différentes façons de tracer des droites parallèles à l'école (CM) a été évoqué :

Technique	Notion mathématique sous-jacente	Résultats et limitations	Conception du parallélisme
En utilisant un gabarit d'angle ou par double perpendiculaire (deux variantes d'une même technique).	Angles correspondants égaux	Mauvais	Locale dans la mesure où le parallélisme n'est pas une propriété des droites, mais une conséquence de la configuration locale des petits morceaux de droite obtenus.
À l'aide l'écart constant.	Rectangle	Mauvais	Plus ou moins locale
En construisant deux segments de même milieu.	Parallélogramme	Mauvais	Locale
En déplaçant l'équerre le long de la règle.	Angles correspondants égaux	Bons mais la technique est difficile à maîtriser	Locale
En s'appuyant sur les extrémités de deux segments de même longueur à supports parallèles (placés sur les bords opposés d'une feuille de papier).	Parallélogramme	Bon mais pose le problème des angles de la feuille	Moins locale

2. Au cours de la seconde séance, une longue discussion s'est engagée sur les tracés à l'aide d'une règle à bords parallèles[3].

   N'ayant aucune expérience de classe dans ce domaine, je ne peux en faire qu'une analyse a priori (analyse qui n'a pas été faite ce jour-là).

Technique	Notion mathématique sous-jacente	Résultats et limitations	Conception du parallélisme
En utilisant les bords opposés d'une règle à bords parallèles.	Parallélisme	Le tracé des droites ne doit pas être évident puisque pour un seul bord (tracé d'une droite quelconque) les élèves ont du mal à maintenir l'inclinaison du crayon tout au long du tracé. Simple si l'écart entre les droites est celui de la règle, nécessitant une technique particulière sinon.	Un peu moins locale, surtout si la règle est longue.

[3] Pour des précisions et des techniques, voir l'article « La règle à bords parallèles » paru en 2000 dans le numéro 40 de la revue *Repères-IREM*.

3. Différentes phases du travail pour une séance de 2 h
   a. À partir du solide, le kaléidocycle
   Description pour arriver aux tétraèdres, nombre de faces, de sommets, d'arêtes, ce qui n'est pas simple.
   Recherche d'un patron sans procéder à un découpage, ce qui peut être fait à partir des tétraèdres, à condition d'arriver à les « rattacher » les uns aux autres.
   À disposition, du papier uni et les instruments de géométrie habituels.
   La validation se fait en copiant la figure obtenue et en construisant le solide.
   b. Reproduction du patron du I. 1.
   Le patron est donné sur une feuille de papier A4. La consigne est de le reproduire sur papier uni avec les instruments de son choix sans décalquer.
   Après un premier jet plus ou moins avancé, le point est fait sur ce qui a été utilisé pour faire cette construction (triangles, triangles isocèles, parallélogrammes, droites, angles de même mesure…).
   c. Optimisation de la construction
   Plus les tracés sont longs, plus précis ils peuvent être. D'où l'idée de travailler avec des droites et de chercher comment tracer des parallèles avec précision.
   Ceci renvoie aux tableaux précédents et aux idées de chacun sur le parallélisme à l'école.

Annexe 1 : compte-rendu d'un PE2 du travail effectué en stage de pratique accompagné

Effectif : 17 élèves.

Objectif : l'enfant doit être capable de reproduire une figure avec rigueur et précision (mise en œuvre de la notion de parallèles).

SÉANCE 1, DURÉE 1 H 20.

But visé : déterminer la méthode de tracé la plus précise.

Ce qui a été atteint :

- constitution de la figure : triangles isocèles, tous isométriques, des parallélogrammes (rappel des propriétés des côtés) ;
- on retrouve des écarts constants (à différents endroits) ;
- les différentes directions de parallélisme.

Objectif : déterminer les éléments nécessaires à la construction de la figure : les parallèles et les écarts. Identifier les parallèles.

Matériel :

- 1 feuille photocopiée A4 avec les figures à reproduire pour chacun ;
- la même figure sur un transparent ;
- le matériel de géométrie et des feuilles de brouillon ;
- du papier quadrillé et du calque étaient prévus pour les élèves qui en demanderaient (ce qui n'a pas été le cas).

Déroulement : groupes de 2 à 3 élèves.

a. Mise en scène sur le kaléidocycle : après expression écrite sur le mot kaléidocycle. Petite histoire et il est montré. Adhésion immédiate des élèves. C'est eux qui demandent à en fabriquer un.
b. Recherche et essais par groupe. Ils ont conduit les élèves à :
    - décalquer,
    - essayer d'utiliser le rapporteur afin de respecter les angles,
    - mesurer les segments et les tracer mais sans respecter l'orientation (seulement au coup d'œil),
    - construire des triangles successifs (sans analyse de la figure),
    - tracer de proche en proche.

Aucun groupe n'a fait d'analyse sur la façon dont est construite la figure. De quoi est-elle constituée ? Aucune notion de parallèle.

c. Mise en commun :

Chaque groupe vient présenter sa méthode qui est validée ou invalidée par le transparent.

Aucune figure n'est correcte. Les éléments non respectés sont mis en évidence et une explication du pourquoi est donnée (souvent un tracé pour réfuter, fait par le maître au tableau).

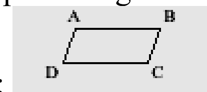
Il est ressorti de cette mise en commun qu'aucune des méthodes n'était correcte :

- mesurer oui, mais placer les segments au bon endroit ;
- décalquer : ça glisse ! (ouf ! ce n'est pas le but) ;
- le rapporteur, c'est trop compliqué.

La question est alors posée : comment pourrait-on faire pour que ce soit exactement la même figure ?

La recherche des propriétés de la figure.

d. Recherche en groupe (2 et 3) (temps bref)

e. Mise en commun :
   - faite de triangles « réguliers », isocèles, tous isométriques,
   - chaque segment vertical mesure 5 cm,
   - les sommets sont alignés,
   - pas d'angle droit,
   - des parallélogrammes donc comment les construire. Un dessin est fait : 

   - rappel des propriétés des côtés : (AD) // (BC), (AB) // (DC), AD = BC et AB = DC. Donc il faut respecter les mesures et les parallèles.

   Puis des élèves viennent montrer les lignes parallèles de la figure (dans les trois directions).

   Comptage des parallèles dans les trois directions (certains ne les avaient pas vues).

SÉANCE 2, DURÉE : 1 H.

Objectif visé : trouver une méthode simple (mesure des écarts) et tracer des parallèles.

Matériel :

- matériel de géométrie, brouillon A4 ;
- 1 ou 2 modèles dans chaque groupe ;
- le transparent pour vérifier.

Déroulement :

a. Rappel collectif de l'activité en cours et de ce qui a été découvert la dernière fois.

   J'écris au tableau les propriétés rappelées par les élèves :
   - des triangles isocèles,
   - des parallélogrammes.

   Donc figure formée de parallélogrammes. Ils sont montrés sur la figure.

   Il faudra tracer des droites parallèles ; il faudra aussi respecter les longueurs.

   La définition de droites parallèles est rappelée.

b. Essais des élèves. La plupart cherchent des éléments en groupe mais chacun trace sa propre figure.

   Ce qui ressort de cette recherche :
   - les élèves sont très actifs, ils essaient de bien faire (condition nécessaire au bon fonctionnement du kaléidocycle) ;
   - tracés de proche en proche ;

- positionnement de la règle et tracé des parallèles au coup d'œil (imprécision) ;
- prise de mesures pour les segments ;
- mesures de l'écart des parallèles mais la règle n'est pas perpendiculaire à ces parallèles ;
- certains essaient d'utiliser le compas ;
- prise de repères par rapport aux éléments de la figure.

c. Mise en commun :
Les groupes expliquent leur méthode au tableau. On invalide.
Le problème se pose alors de bien tracer des parallèles (fait par le maître au tableau).
Peut-on l'envisager pour cette figure ? Non, c'est trop long et risque d'erreurs par utilisation répétée de l'équerre.
Comment faire ? Comment utiliser la figure à reproduire ?
Apport adulte : il faut prolonger les segments de la figure.

d. Chaque élève prolonge les segments sur son modèle jusqu'aux bords de la feuille.

e. Collectivement : on va maintenant utiliser ces droites parallèles (ce sera pour le lendemain).

Remarques :

- un obstacle de taille qui tombe fort mal à propos pendant la séance : la photocopieuse déforme la figure de départ ! Photocopies sur papier et transparent ne sont pas superposables !
- prolonger les traits présente des difficultés (positionner la règle, le crayon…) et conduit à des erreurs.

SÉANCE 3

Objectif visé : être capable de mesurer des écarts[4] précis et de tracer des droites parallèles (passant par deux points)

- Mesurer et reporter les écarts sur la feuille,
- tracer les parallèles en passant par les points.

Matériel :

- un agrandissement de la figure avec les traits prolongés pour le tableau,
- photocopies de cet agrandissement avec les segments prolongés pour chaque élève,
- matériel de géométrie.

Déroulement :

a. Rappel collectif de ce qui a été découvert la veille (relancer l'intérêt, on touche au but).
Présentation de l'agrandissement avec les traits prolongés + languettes.
Que remarque-t-on ? Des languettes, c'est un patron, pour coller.

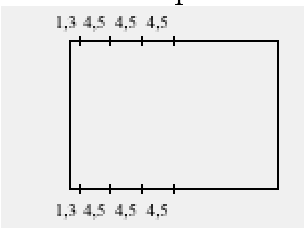
[4] Il s'agit de longueurs de segments.

Trace au tableau : pour tracer la figure, il faut :
- tracer les parallèles,
- mesurer les écarts.

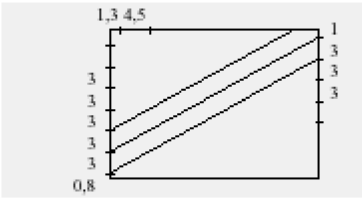
b. Préciser que l'on va procéder petit à petit : dans un premier temps, on ne va tracer que les parallèles verticales.
On détermine ensemble une démarche à suivre :
- mesurer sur le modèle (au bord),
- reporter sur la feuille,
- joindre les points.

c. Tracés des élèves
Il y a des problèmes : les mesures sont différentes d'une photocopie à l'autre et surtout sur une même photocopie (on trouve 4,4 ; 4,5 ; 4,6…)

d. Rectification pour les mesures : tout le monde adopte les mêmes



e. Le travail est étendu aux parallèles obliques (d'abord dans un sens), mesures fournies



Dans cette séance, les élèves les plus avancés n'auront pas le temps de tracer les obliques parallèles.

Remarques :

Cette séance a mis en évidence bon nombre d'obstacles supplémentaires quant à l'utilisation du matériel géométrique par les élèves.

De même pour la signification des tracés (voir séance 4).

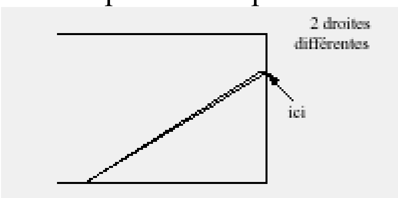
SÉANCE 4

Objectifs :
- remédier aux problèmes (obstacles répertoriés pendant la séance et sur les productions des élèves),
- tracer les parallèles obliques.

Matériel :
- les productions des élèves,
- matériel géométrique dont quelques règles de 40 cm (pour les obliques),
- les photocopies de la figure modèle (cf. séance 3),
- une liste ou un tableau récapitulatif contenant des éléments sur l'avancée de chaque élève, sur leurs erreurs… (des élèves vont en aider d'autres).

Déroulement :

a. Rappel activité en cours et avancée générale du travail.
   Faire part des remarques constatées, en général, sur les productions : des problèmes rencontrés qui sont étonnants au CM1.
b. Exploitation de ces points collectivement :
   - utilisation de la règle : on mesure à partir du 0,
   - 4,5 cm, c'est différent de 4 cm ! Mais aussi de 4,4 cm (c'est plus difficile),
   - quand on place 2 points, il faut mettre la règle de manière à ce qu'elle passe par ces deux points (penser à tourner la feuille !),
   - les repères sont au bord de la feuille car si la règle est oblique il y a des erreurs (leur faire un dessin),
   - le repère est un point au bord de la feuille :



c. Remarques : autres obstacles rencontrés :
   - la tenue du crayon,
   - crayon pas assez pointu,
   - l'inclinaison du poignet change, donc ils font des « vagues »,
   - règles en mauvais état.
d. Présentation du travail :
   - des élèves aident les autres,
   - des élèves travaillent de manière autonome (puis aident)
   - des élèves sont aidés par les autres.

Le but est d'arriver à une même avancée pour tous.

e. Chacun finit le tracé des parallèles dans un sens
   Puis explication collective des tracés des autres obliques : passer par les intersections avec le modèle sous les yeux.
   Remarques : un dessin au tableau avec des couleurs aurait été plus explicite pour certains élèves. Fin du patron pour certains élèves.

SÉANCE 5, DURÉE 25 MIN (EN DEMI-GROUPE EN PARALLÈLE AVEC L'ANGLAIS)

Objectifs :

- savoir identifier une figure complexe dans un réseau de triangles,
- savoir découper avec précision.

Matériel :

a. les productions des élèves,
b. une feuille « récapitulatif des tracés » fin séance 4,
c. matériel géométrie, ciseaux,
d. les modèles en photocopie dont 15 sont avec des couleurs (bords figure en rouge, pliage dans les deux sens en bleu, languettes en vert).

Déroulement :

a. Groupes ayant fini les tracés :
    - retrouver les bords de la figure en rouge dans leur production,
    - repasser les traits en bleu,
    - dessiner les languettes au crayon,
    - découpage minutieux pour les plus avancés.

b. Enfants en retard :
    - finir les tracés sous le regard de l'enseignant,
    - passer au a .

SÉANCE 6

Objectif :

- savoir plier selon les parallèles,
- savoir fermer le patron et coller (scotch) avec précision.

Remarque : des difficultés avec les obliques et la précision.

Matériel :

- ciseaux,
- scotch,
- feutres pour les derniers (règle, crayon).

Déroulement :

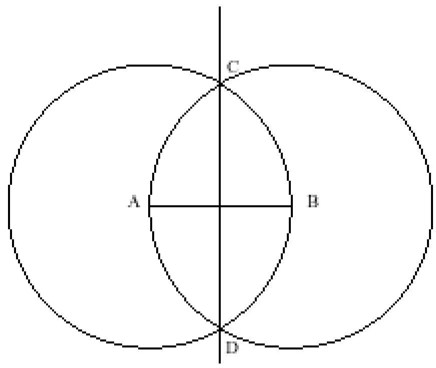
Je les ai pris par groupe de 3 pendant la séance d'expression écrite afin de :

- terminer la figure pour un ou deux élèves,
- découper,
- plier selon les trois directions de parallèles (remarque : ce n'est pas si facile que ça),
- coller avec le scotch et souvent arranger en trichant un peu aux ciseaux, en collant pour que les figures tournent mieux.

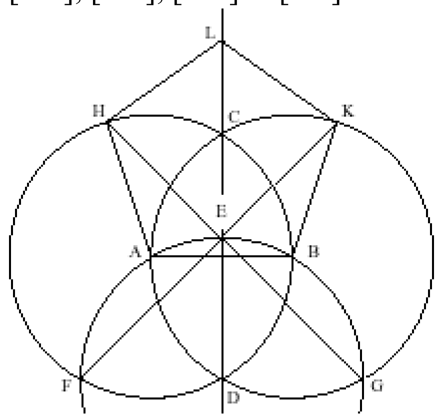
Remarque : on aurait dû faire un agrandissement des productions des élèves de A4 en A3 puis les couleurs.

Annexe 2 : construction approchée d'un pentagone régulier convexe due à Matthäus Roriczer (1487 ou 1488)

1. Placer deux points A et B.
2. Prendre une ouverture de compas donnant le côté du pentagone à construire ([AB], conserver cette ouverture pour toutes les constructions qui suivent).
   Tracer le cercle de centre A et le cercle de centre B.
   Ils se coupent en C et en D.
3. Tracer la droite (CD).



4. Tracer le cercle de centre D. Il passe par A et par B. Il coupe le segment [CD] en E.
   Il coupe le premier cercle en F et le deuxième en G.
5. La demi-droite portée par (EF), d'origine E et ne contenant pas F coupe le deuxième cercle en K.
6. La demi-droite portée par (EG), d'origine E et ne contenant pas G coupe le deuxième cercle en H.
7. Le cercle de centre K coupe la demi-droite portée par (CD), d'origine C et ne contenant pas D en L.
8. Tracer les segments [LK], [KB], [BA], [AH] et [HL].



On obtient ainsi les pentagones : ABKLH (convexe) et AKHBL.

UN EXEMPLE DE MISE EN ŒUVRE DE L'APPROCHE ANTHROPOLOGIQUE DANS LA FORMATION DES PROFESSEURS D'ÉCOLES STAGIAIRES

Joël Denisot
Christian Reymonet
Formateurs à l'IUFM d'Aix-Marseille

Résumé :

Après une présentation rapide des principaux éléments de l'approche anthropologique, les animateurs de l'atelier ont proposé une description de leur activité d'enseignement auprès des professeurs d'écoles stagiaires et des productions auxquelles cette activité donne lieu.

Dans un deuxième temps, les participants à l'atelier ont été sollicités pour évaluer des productions de PE2 (des préparations de séquences). Cette évaluation s'est matérialisée par une série de commentaires essayant d'intégrer les éléments de la théorie anthropologique présentés durant la première phase, ces commentaires étant censés aider les professeurs stagiaires (fictifs) à progresser.

La mise en commun des résultats durant cette deuxième phase a donné lieu à des interactions qui ont permis, entre autre, de préciser la position adoptée par notre équipe.

LES PRAXÉOLOGIES : PREMIERS ÉLÉMENTS DE L'APPROCHE ANTHROPOLOGIQUE.

La présentation aux participants de l'atelier des premiers éléments de l'approche anthropologique s'est matérialisée sous la forme de la projection d'une courte vidéo de 25 minutes, qui relate un entretien avec Yves Chevallard portant sur trois questions (annexe1). Ces questions lui avaient été remises par écrit la veille du jour de l'entretien et il devait dans une période n'excédant pas 30 minutes essayer de répondre à ces questions.

À partir de cette observation la notion de praxéologie est présentée : comme le précise Yves Chevallard dans l'entretien, un complexe praxéologique est constitué de deux composantes essentielles : la « praxis » (l'action, la pratique) et le « logos » (le discours, l'explication, la justification).

Types de tâches et techniques (les éléments de la praxis)

L'activité humaine, quelle qu'elle soit (celle du maçon dans le cadre de l'exercice de son métier, celle de l'élève en train d'étudier, celle du professeur en train d'enseigner, celle de la ménagère en train de nettoyer son appartement ou de cuisiner), se laisse découper en suites de types de tâches. Un type de tâches nous apparaît généralement sous la forme d'un verbe d'action suivi de l'objet sur lequel s'applique cette action.

30ème colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres.
pages 371 *à* 394

Exemples :

Pour le maçon coffrer un linteau ou talocher un enduit sont des types de tâches

Pour l'élève de cycle 3 déterminer le résultat d'une division euclidienne.

Pour le même élève faire son cartable avant de sortir de la classe.

Pour le professeur corriger les cahiers de ses élèves, organiser l'entrée en classe des élèves, préparer une leçon, etc.

Pour la ménagère passer la serpillière, nettoyer un sol moquetté, cirer un meuble, etc.

L'accomplissement de tout type de tâches se réalise grâce à une (ou plusieurs) technique(s). On décrit une technique attachée à un type de tâches dès lors que l'on tente de répondre à la question : « comment s'y prend-on pour accomplir ce type de tâches ? »

Exemples : pour calculer le résultat d'une division euclidienne, l'élève de cycle 3 peut poser l'opération et appliquer l'algorithme de calcul ou bien il peut aussi utiliser une calculatrice. Chacune de ces techniques peut donner lieu à une description parfois très précise.

La description d'une technique se présente assez souvent sous la forme d'une liste de types de tâches. Mais pour que la technique puisse être appliquée à partir de sa description, il est nécessaire que les types de tâches qui la composent soient familiers à celui à qui s'adresse cette description.

Exemple : Pour effectuer la division euclidienne avec sa calculatrice, l'élève écrit le dividende, appuie sur la touche $\boxed{\div}$, écrit le diviseur, appuie sur la touche $\boxed{=}$, récrit la partie entière du nombre obtenu qu'il retient comme l'un des résultats de la division (le quotient euclidien), appuie sur la touche $\boxed{\times}$, écrit à nouveau le diviseur, puis appuie sur la touche $\boxed{-}$, récrit le dividende, appuie sur la touche $\boxed{=}$ et annonce que le reste de cette division euclidienne est le nombre qui est inscrit sur l'écran en faisant abstraction du signe « – » qui le précède.

Technologies et théories (les éléments du « logos »)

L'exécution d'une technique donnée pour accomplir une tâche, toute pertinente que cette technique puisse être, se révélera, à un moment ou l'autre, un peu mystérieuse. On sait que le résultat est garanti mais on aimerait comprendre pourquoi cette technique produit bien ce que l'on attend. L'exemple de la situation fictive présentée dans l'annexe 3 d'une question soulevée par une jeune enseignante, permet de bien illustrer ce type de démarche.

La réponse à ce questionnement prend la forme d'un discours explicatif, la dimension technologico-théorique associée à la technique mise en œuvre dans l'exécution du type de tâche donné.

Exemple : La technique donnée dans l'exemple du paragraphe précédent se justifie par les relations arithmétiques qui permettent de définir la division euclidienne de l'entier a par l'entier b : si q et r représentent respectivement le quotient et le reste de cette division, alors on a : $b \times q \leq a < b \times (q+1)$
et $r = a - b \times q$.

Le nombre obtenu sur l'écran de la calculatrice est un décimal qui est une valeur arrondie de $\frac{a}{b}$ et on sait que $\frac{a}{b}$ est le nombre qui multiplié par b donne a.

$\frac{a}{b} \times b = a$. Ce nombre $\frac{a}{b}$ s'il n'est pas entier, est compris entre deux entiers consécutifs, q et q+1. On a : $q < \frac{a}{b} < (q+1)$, et donc $q \times b < b \times \frac{a}{b} < (q+1) \times b$, soit encore $q \times b < a < (q+1) \times b$. On encadre ainsi un entier entre deux multiples consécutifs d'un autre. Ainsi, pour parcourir les entiers jusqu'à a, on peut franchir autant qu'on peut de multiples de b jusqu'à dépasser a. On revient alors d'un cran et on ajoute un entier strictement inférieur à b (le reste) pour atteindre a.

L'annexe 4 propose un complément à cette description sommaire. C'est un résumé utilisé par Yves Chevallard dans le cadre de la formation qu'il assure auprès des PCL2 de mathématiques.

LES PRAXÉLOGIES DE L'ENSEIGNANT « PRATIQUANT »

Le référentiel de compétences : un document sur les praxéologies professionnelles

Lorsqu'on veut avoir une idée des gestes professionnels essentiels qui sont requis pour l'exercice de la profession d'enseignant dans le primaire, les référentiels de compétences se révèlent incontournables, même s'ils restent perfectibles. Une analyse de l'un de ces textes (celui qui est relatif aux enseignants en exercice) à l'aide des outils de l'approche anthropologique, a permis aux participants de s'approprier ces outils en même temps qu'ils ont pu en mesurer la pertinence.

L'annexe 5 montre les résultats d'une activité conduite à ce sujet durant la séance. Ces résultats illustrent de façon évidente l'absence du discours technologique et l'insuffisance technique de ce texte prescriptif. Evidemment, il appartient à la formation de l'enseignant, qu'elle soit initiale, continue, accompagnée ou autodidacte, de prendre en charge ces aspects.

Un complément non exhaustif

Les types de tâches énoncés dans le texte étudié précédemment peuvent être complétés par d'autres dont voici une liste que le lecteur pourra encore compléter.

- Organiser la reprise de l'étude d'un sujet donné ;
- Gérer la mémoire collective de la classe ;
- Évaluer le travail dans la classe ;
- Diriger la conception d'une synthèse ;
- Accueillir les élèves à l'école maternelle ;
- Rencontrer les parents d'élèves en début d'année ;
- Créer un contrôle de fin de séquence ;
- Préparer l'étude d'un sujet ;
- Corriger des productions d'élèves ;

- Préparer le travail d'un conseil de cycle (ou bien un conseil d'école) ;
- Établir une progression
- Gérer les différents moments d'une séquence ;
- Tirer parti des erreurs et des réussites des élèves.

Des techniques (justifiées) pour chaque type de tâche

La mise à l'étude du premier type de tâche énoncé dans la liste précédente donnerait des techniques assez nombreuses, accompagnées d'éléments technologiques en justifiant l'existence, comme en témoigne la liste ci-après :

Type de tâche : Organiser la reprise de l'étude d'un sujet donné.

Techniques et éléments de discours technologique :

- Rappel oral par l'enseignant, en début de première séance
  - Un contact avec les enseignants des classes précédentes m'a permis de savoir sur quoi on pouvait compter ;
  - Les programmes du cycle précédent définissent clairement les compétences de base. Je les considère donc acquises.
- Interroger les élèves
  - Cela rend publics dans la classe les éléments à mobiliser ;
- Organiser un débat avec la classe
  - Laisser une place suffisante à l'élève pour participer au travail de construction dans la classe ;
  - La théorie associée c'est le pari du constructivisme.
- Traiter un exercice
  - Cela met les élèves en situation ;
  - Cela permet de tester la compréhension des élèves plutôt que leur capacité à restituer un savoir formel.
- Reprendre l'étude ab ovo
  - L'oubli des élèves est total ou presque
  - Les points de vue développés antérieurement sont inutilisables
  - Le rapport au sujet d'étude des élèves est très hétérogène
- Test d'entrée
  - Je prends des informations sur le savoir des élèves ;
  - Je signifie aux élèves ce qu'ils devraient savoir ;
  - Je fais prendre conscience de ce qu'ils savent déjà sur le sujet ;
- J'attaque directement l'étude
  - Les programmes déconseillent les révisions ;
  - Par expérience, je sais le niveau des élèves de ma classe.

L'évaluation de ces différentes options permet ensuite de faire un choix qui peut dépendre de contraintes locales liées à l'histoire de la classe, mais aussi au savoir qui est manipulé.

A titre d'exercice, les participants ont pu choisir un autre des types de tâches énoncés dans le paragraphe précédent et lister, à l'image du cas traité, des techniques possibles accompagnées de discours technologiques adaptés.

LA FORMATION DES PROFESSEURS D'ÉCOLES EN DEUXIÈME ANNÉE

Une présentation sommaire de notre dispositif de formation en PE2

Notre équipe marseillaise a fait le choix de s'appuyer quasi exclusivement sur les éléments de l'approche anthropologique pour diriger l'étude des situations didactiques (analyses et ingénierie) auprès des élèves de PE2. Ce choix se justifie par deux raisons majeures :

- tout d'abord, la proximité d'une source théorique dont la pertinence est aujourd'hui de plus en plus reconnue, nous a facilité cette démarche,
- en second lieu, l'indigence du volume horaire imparti à la formation mathématique des futurs professeurs d'écoles (50 heures), nous impose la nécessité de trouver un modèle théorique unique et d'utilisation immédiate parce que volontairement fruste (comme aime à le préciser son concepteur principal).

Les séances de cours que nous assurons pour la formation des PE2 ont chacune une durée de 3 heures. Nous avons choisi de les partager en deux plages horaires à peu près égales en durée. La première partie est consacrée au séminaire durant lequel, grâce à plusieurs types de dispositifs, le formateur présente et illustre par des exemples les éléments de la théorie, en montrant leur capacité à décrire, analyser et construire le réel professionnel de l'enseignant. La deuxième partie, intitulée atelier, permet aux élèves professeurs de construire du matériel pour les classes en mettant en application les éléments de la théorie anthropologique. Ce matériel est composé de progressions sur des thèmes choisis dans une liste (annexe 6), de séquences et de séances relatives à des sujets d'études, inclus dans ces thèmes.

Les productions des étudiants, obtenues dans les ateliers encadrés par les formateurs, sont corrigées par ces derniers, reprises par les élèves professeurs rendues et à nouveau annotées, pour être ensuite mises à disposition de l'ensemble de la promotion sous forme numérisée dans un espace collaboratif (plate forme Quick Place).

L'observation et l'évaluation de productions d'élèves professeurs

Le travail que nous avons proposé, pour terminer notre atelier a consisté en l'analyse de séquences proposées par des élèves professeurs au cours de leur formation.

Après avoir précisé rapidement le cahier des charges pour la conception d'une séquence (définir les organisations mathématiques de départ et d'arrivée en relation avec les programmes ; proposer une organisation didactique qui permettra de mettre en place l'organisation mathématique visée), les participants à l'atelier ont été confrontés à des propositions ayant des degrés de conformité variables à ce cahier des charges. Il s'agissait alors pour eux d'évaluer, de commenter et de proposer éventuellement des alternatives.

Les annexes 7 et 8 présentent deux spécimens de telles productions d'élèves professeurs.

POUR CONCLURE…

La formation au métier de professeur de mathématiques des écoles n'est pas une tâche aisée. Comme toute tâche de formation professionnelle, elle se heurte à une série d'obstacles liés tant à la difficulté objective du métier, qu'à la conception qu'en ont les gens qui s'y forment. Ce dernier aspect n'est pas le moindre dans le cas particulier de la profession d'enseignant. Nous devons mener de front la construction d'une identité professionnelle en même temps que la déconstruction de tout un ensemble d'idées toutes faites sur un métier que tout le monde semble bien connaître, puisque tout le monde l'a côtoyé quotidiennement pendant des année.

Ce travail ne peut se faire sans l'aide d'un cadre théorique (même fruste), et la première étape de la déconstruction des idées toutes faites consiste justement à faire accepter cette nécessité. C'est à cela que nous nous attelons et consacrons notre énergie et nos modestes capacités didactiques.

Annexe 1 :
Questions pour un entretien avec Yves Chevallard

1. Si tu avais dix minutes pour présenter l'approche anthropologique à un public de formateurs au métier de professeur des écoles, quels éléments choisirais-tu de mettre en avant ? (tu as dix minutes…)

2. Tu as évoqué récemment un rapprochement de la théorie anthropologique avec la théorie des situations. Peux-tu nous donner quelques éléments qui confortent cette idée ? Quels sont les points de rapprochement ? Quels sont ceux dont la spécificité est porteuse pour la formation des enseignants ?

3. Est-il possible d'envisager une formation PE qui emprunterait en partie des éléments de l'approche anthropologique ? Si oui quels sont les éléments qui te paraissent les meilleurs candidats à cette transposition ?

Annexe 2 :
Résumé de l'entretien filmé avec Yves Chevallard

1) Réponses en trois points aux questions 1 et 3.
   a) Cruciale, la notion de praxéologie : praxis et logos.
      - Tout d'abord il tord le cou à une idée qui prévaut sans doute aujourd'hui chez les jeunes enseignants au moins et les attentes qu'ils ont de la formation. Il suffirait que la formation puisse dire ce qu'il faut faire pour enseigner et de l'autre côté on resterait libre pour penser la pratique.
      - Plutôt que parler d'analyse de pratiques, il propose d'introduire l'analyse des praxéologies (la pratique accompagnée du discours qui la justifie). Il évoque la nécessité d'une analyse accompagnée de synthèses ce qu'il nomme un travail praxéologique. On analyse, on fabrique, on reprend des praxéologies : c'est cela le travail de la formation.
   b) Le découpage de l'activité humaine que propose l'approche anthropologique, en types de tâches, constitue pour lui un très grand progrès. C'est pour lui, le point de départ de tout travail praxéologique, même si des entrées diversifiées peuvent être envisagées.
   c) Un aspect vital, notamment pour le professeur d'école : l'organisation de savoirs
      - Il étend dans cette partie la notion de savoir à partir de son acception la plus courante qui a tendance à ne considérer que les savoirs nobles.
      - Il explique aussi pourquoi cette théorisation porte le nom d'approche anthropologique.
      - Il évoque ce que la conception des savoirs, dans cette approche, permet comme extension lorsqu'il s'agit de déceler les savoirs contenus dans toute pratique, y compris celle d'enseignement.

2) A propos de la deuxième question, deux éléments

   a) L'histoire des relations entre les deux développements théoriques et leur articulation

      - Il n'y a pas rivalité, ce ne sont pas deux théories alternatives
      - Guy Brousseau et Yves Chevallard ont travaillé chacun de leur côté mais en se tenant informés de manière à fabriquer une articulation qui puisse se divulguer
      - Au sein des organisations didactiques mises à l'étude, il y a un moment où le relais est pris par la théorie des situations.

   b) La question du rapprochement

   Ce rapprochement n'est pas commandé par les personnes, à l'instar du romancier avec ses personnages, le producteur d'une théorie ne peut pas lui faire faire n'importe quoi. Il y a un processus lent de maturation nécessaire qu'il faut laisser se produire.

   À propos de ce rapprochement, il développe en deux points :

      - Les situations autodidactiques évoquées dans l'approche anthropologique et la confrontation à la nature (jeu contre la nature) sont directement liées au concept d'adidacticité ;
      - L'action indispensable qu'engendre l'étude, nécessite un milieu. Le grand problème qui est posé aujourd'hui est celui de la construction du milieu. C'est sur ce point qu'une articulation et un rapprochement peut être envisagé.

Annexe 3
Types de tâches, techniques, technologies

Anne COUTURIER

Lors de la dernière demi-journée de terrain, dans la classe de CM2 que j'observais, j'ai remarqué qu'ayant à construire la perpendiculaire à une droite passant par un point, un élève trace deux cercles passant par le point et centrés sur la droite. Il termine la construction en traçant la droite qui passe par le point et l'autre intersection des cercles. Cette construction marche toujours (je l'ai testée), mais je n'arrive pas à m'expliquer pourquoi ça marche.

Quel est le type de tâche à l'étude dans cette question ?

Quelle est la technique à l'œuvre ?
- Tracer deux cercles passant par le point et centrés sur la droite
- Tracer la droite qui passe par le point et l'autre intersection des cercles

Quelle est la place de la technologie dans cette question ?
- C'est justement la réponse à la question posée.

Donner les éléments technologiques relatifs à cette situation.

Annexe 4
Séminaire de didactique des mathématiques de Yves Chevallard en PCL2

Séance 11 : mardi 10 décembre 2002

⇨ ***Résumons-nous !…***

• La notion d'organisation mathématique se généralise à toute activité, quelle qu'en soit la nature : toute activité humaine met en œuvre une ou plusieurs ***organisations praxéologiques*** (ou praxéologies) que l'on peut noter génériquement [$T/\tau/\theta/\Theta$] : une activité consiste à ***accomplir une tâche t*** d'un certain ***type T***, ***au moyen*** d'une certaine ***technique*** τ que l'on peut ***justifier*** par une certaine ***technologie*** θ, elle-même justifiable par une supposée ***théorie*** Θ. Le mot de praxéologie lui-même se laisse lire comme dénotant l'articulation d'une ***praxis***, d'une « pratique », représentée par le bloc pratico-technique [T/τ], et d'un ***logos***, « discours raisonné » sur la praxis, représenté par le bloc technologico-théorique [θ/Θ].

• Lorsque T est un type de tâches ***mathématiques***, on retrouve la notion d'***organisation mathématique***. En nombre de cas, pourtant, T n'est pas « purement mathématique », même si l'organisation $\mathscr{O} = [T/\tau/\theta/\Theta]$ construite autour de T est à forte teneur mathématique : on parlera alors d'organisations mathématiques ***mixtes*** (OMM), qu'il s'agissent d'organisations graphico-mathématiques, physico-mathématiques, économico-mathématiques, etc.

• La plupart du temps, un type de tâches T n'apparaît pas isolé, mais comme motivé par une technique τ^* relative à un autre type de tâches, T^*, en ce sens que, pour accomplir une tâche $t^* \in T^*$ ***par la technique*** τ^*, on doit à un certain moment accomplir une tâche $t \in T$. Même si la dépendance de T^* à T peut être rompue (en remplaçant τ^* par une autre technique qui n'exige plus d'accomplir des tâches du type T), au sein d'une pratique donnée (celle du professeur ou celle de l'élève par exemple), les types de tâches sont ainsi ***mutuellement dépendants***. À ces relations de motivation-dépendance entre couples (T_i, τ_i) répond la création d'organisations praxéologiques intégrant, autour d'une technologie commune θ, les divers types de tâches considérés : on retrouve ainsi la notion d'organisation ***locale***, $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]_{i\in I}$. Le processus d'« amalgamation » peut se poursuivre : si des organisations locales admettent la ***même théorie*** Θ, on notera $[T_{ji}/\tau_{ji}/\theta_j/\Theta]_{i\in I_j, j\in J}$ ou, pour simplifier, $[T_{ji}/\tau_{ji}/\theta_j/\Theta]$, l'organisation ***régionale*** qu'elles forment ensemble. De la même façon, on peut amalgamer un certain nombre d'organisations régionales : on obtient alors une organisation ***globale***, qu'on peut noter $[T_{kji}/\tau_{kji}/\theta_{kj}/\Theta_k]$. Cette hiérarchie correspond *grosso modo* à celle donnée à propos des organisations mathématiques :

Sujet	$\leftrightarrow$	Org. ***ponctuelle*** $[T/\tau/\theta/\Theta]$
Thème	$\leftrightarrow$	Org. ***locale*** $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$
Secteur	$\leftrightarrow$	Org. ***régionale*** $[T_{ji}/\tau_{ji}/\theta_j/\Theta]$
Domaine	$\leftrightarrow$	Org. ***globale*** $[T_{kji}/\tau_{kji}/\theta_{kj}/\Theta_k]$

• La ***réponse R*** à une ***question Q*** prend d'une manière générale la forme d'une ***organisation praxéologique*** (ou d'un fragment d'une telle organisation). Si, par exemple, la question posée est du type « Comment accomplir les tâches du type T ? », une réponse R sera une praxéologie ponctuelle $R = [T/\tau/\theta/\Theta]$. L'***étude*** d'une question Q se laisse alors définir comme le processus – on parle alors de ***processus didactique*** – par lequel on s'efforce de construire une organisation praxéologique qui soit une réponse R à la question Q. Lorsqu'un type de tâches T a trait à ***l'étude d'une question*** Q, on dit que les tâches du type T sont des ***tâches d'étude*** ou tâches ***didactiques***. Les praxéologies qui peuvent être construites autour de T, $[T/\tau_\ell/\theta_\ell/\Theta_\ell]$, sont alors appelées ***organisations didactiques*** (OD).

• Un type de tâches T devient « didactique » si sa mobilisation procède d'une ***intention didactique***, c'est-à-dire ***vise à instrumenter l'étude*** d'une ou plusieurs questions. La plupart des organisations ***mathématiques*** assument ainsi, dans la classe de mathématiques, une fonction ***d'outil d'étude*** de questions de mathématiques, et viennent à ce titre s'intégrer dans l'organisation ***didactique***.

• La pratique du professeur l'oblige à se poser une foule de questions Q auxquelles il doit apporter des réponses $R = [T/\tau/\theta/\Theta]$ sous une multitude de contraintes aussi bien

« pratiques » que « théoriques ». Dans ce processus de construction, il convient notamment

– d'identifier les couples (T*, τ*) qui motivent véritablement T, pour les examiner de manière ***critique et inventive*** (la technique τ*, qui motive T, est-elle la seule et la meilleure possible ?) ;

– de soumettre la technologie θ à un ***examen critique*** attentif, car, en matière d'enseignement, le « prêt-à-penser » est omniprésent ;

– de tirer profit de la liberté de penser ainsi gagnée pour ***modifier la technique*** τ en une technique $\tau^{\#}$, tout en s'imposant de ***justifier*** la technique $\tau^{\#}$ nouvellement mise au point par une technologie $\theta^{\#}$ la plus « solide » possible.

⇨ ***Les moments de l'étude***

• Soit θ un thème d'étude inscrit au programme de la classe, et soit alors $\mathcal{O} = [T_i/\tau_i/\theta/\Theta]_{i\in \mathrm{I}}$ l'organisation mathématique locale (OML) déterminée par le professeur P comme « explicitant » θ. La question qui se pose à P, et à laquelle une certaine organisation didactique $\partial\mathcal{O}$ devra répondre, est alors la suivante : « Comment enseigner $\mathcal{O}$, c'est-à-dire comment "mettre en place" l'OML $\mathcal{O}$? ».

• En dépit de sa complexité, on peut aborder la description et l'analyse d'une OD $\partial\mathcal{O}$ donnée, où $\mathcal{O} = [T_i/\tau_i/\theta/\Theta]_{i\in \mathrm{I}}$, en examinant la manière dont elle prend en charge certaines ***fonctions didactiques clés*** appelées ***moments de l'étude*** (ou moments ***didactiques***). Le mot de « moment » par lequel on désigne ces fonctions se justifie par le fait que, quelle que soit la manière d'opérer du professeur, ***il arrive forcément un moment où***… – où, par exemple, la classe, sous la direction de P, ***rencontre*** pour la première fois le type de tâches T_i ($i \in \mathrm{I}$).

• De manière précise, étant donné une organisation mathématique ponctuelle $\mathcal{O}_i = [T_i/\tau_i/\theta_i/\Theta_i] \subset \mathcal{O}$, où θ_i et Θ_i sont les parties de θ et Θ permettant de justifier le bloc $[T_i/\tau_i]$, on distingue 6 moments :

– le moment *de la première rencontre* **avec T_i ;**

– le moment *exploratoire*, **qui voit** *l'exploration* **du type de tâches T_i et** *l'émergence de la technique* **τ_i ;**

– le moment *technologico-théorique*, **qui voit** *la création du bloc* **$[\theta_i/\Theta_i]$;**

– le moment *du travail* **de l'organisation mathématique créée, et en particulier** *du travail de la technique*, **où** *l'on fait travailler* **les éléments de l'OMP élaborée pour s'assurer qu'ils « résistent » (et, le cas échéant, pour les améliorer), et où, en même temps, on** *travaille sa maîtrise* **de l'OMP considérée, et en particulier de la technique τ_i ;**

– le moment *de l'institutionnalisation*, **où l'on** *met en forme* **l'organisation mathématique $[T_i/\tau_i/\theta_i/\Theta_i]$, en précisant chacun de ses composants, et en l'amalgamant à l'organisation déjà institutionnalisée, $\oplus_{j<i}[T_j/\tau_j/\theta_j/\Theta_j]_{j\in \mathrm{I}, j<i} = [T_j/\tau_j/\oplus_{j<i}\theta_j/\oplus_{j<i}\Theta_j]_{j<i}$;**

– **le moment** *de l'évaluation*, **où l'on évalue sa** *maîtrise* **de l'organisation mathématique créée, mais aussi où l'on évalue** *cette organisation mathématique elle-même***.**

• Chacun de ces moments peut se réaliser en ***plusieurs épisodes*** : non seulement parce que l'on procède par épisodes ***limités dans le temps***, mais aussi parce que, par exemple, un épisode de travail de la technique peut conduire à retoucher l'organisation mathématique mise en place, et donc éventuellement à vivre un nouvel épisode technologico-théorique, et en tout cas à envisager, si bref soit-il, un autre épisode d'institutionnalisation.

• Les moments didactiques sont des entités ***fonctionnelles***, dont la réalisation ***structurelle*** est *a priori* indéterminée, mais que l'on doit pouvoir retrouver à travers ***tout choix structurel déterminé***. S'agissant de la structure didactique ternaire (ou quaternaire) mise en avant dans ce Séminaire, on aura ainsi les correspondances suivantes :

– **le moment** *de la première rencontre*, **le moment** *exploratoire*, **le moment** *technologico-théorique* **se réalisent dans l'***Activité d'étude et de recherche* **(AER) ;**

– **le moment** *de l'institutionnalisation* **correspond pour l'essentiel à la** *Synthèse* **;**

– **le moment** *du travail de l'organisation mathématique* **se concrétise dans les** *Exercices & problèmes* **;**

– Le moment de ***l'évaluation*** se réalise notamment à travers les divers ***travaux écrits notés***.

• On soulignera encore une fois qu'une activité d'étude et de recherche relative à un type de tâches $T_i = T$ doit prendre en charge la construction de ***l'ensemble*** de l'OMP $[T/\tau/\theta/\Theta]$, soit ***les trois moments de l'étude*** indiqués plus haut : première rencontre avec T, exploration de T et fabrication de τ, élaboration de $[\theta/\Theta]$. Par contraste, lorsqu'on parle d'activités (regardées comme « introductives » ou « préparatoires »), on tend ordinairement, ***mais à tort***, à se centrer sur le seul moment de la ***première rencontre***. Celui-ci est, certes, un moment important, mais il ne saurait ***se suffire à lui-même*** – à moins que l'on veuille n'organiser qu'une fugitive rencontre avec une OMP qui, finalement, ***ne serait pas construite !…***

⇨ ***Niveaux de détermination didactique***

• Une ***organisation didactique*** (OD) a pour objet la ***mise en place***, dans un groupe humain, et en particulier dans une classe de collège ou de lycée, d'une ***organisation de savoir*** (ici, une organisation mathématique) : toute OD est donc une organisation praxéologique ***ponctuelle*** puisqu'elle se forme pour permettre d'accomplir un ***unique type de tâches*** : « mettre en place une organisation de savoir ».

• Mais une OD est une organisation praxéologique ***complexe***, dont l'analyse fait apparaître plusieurs ***niveaux interdépendants*** d'« ingrédients », en lien avec les « emboîtements » institutionnels définissant la matière à étudier : celle-ci se constitue en effet comme telle en un ***système scolaire*** donnée, dans une ***discipline*** donnée au sein d'icelui, en un ***domaine*** donné de cette discipline, etc.

– Ainsi le ***niveau 0*** correspond-il aux éléments d'organisation didactique qui conditionnent en principe la mise en place de ***toute*** organisation de savoir dans un ***système scolaire*** donné : c'est le niveau ***pédagogique***.

– Le ***niveau 1*** correspond, lui, à ces éléments d'organisation didactique spécifiques de la mise en place de ***toute*** organisation de savoir d'***une discipline scolaire*** donnée (pour nous, « les mathématiques »).

– Le ***niveau 2*** est le niveau correspondant aux éléments d'organisation didactique intervenant en principe lors de la mise en place de toute organisation de savoir d'un ***domaine*** donné d'une discipline scolaire donnée (comme par exemple, en 2de, le domaine *Calcul et fonctions*).

– Le ***niveau 3*** est le niveau correspondant aux éléments d'organisation didactique intervenant en principe lors de la mise en place de toute organisation de savoir d'un ***secteur*** donné au sein d'un domaine disciplinaire (comme par exemple le secteur des fonctions à l'intérieur du domaine *Calcul et fonctions*).

– Le ***niveau 4*** est le niveau correspondant aux éléments d'organisation didactique intervenant en principe lors de la mise en place de toute organisation de savoir relevant d'un ***thème*** donné au sein d'un secteur disciplinaire (comme par exemple le thème des fonctions linéaires et affines).

– Le ***niveau 5*** est le niveau correspondant aux éléments d'organisation didactique intervenant en principe lors de la mise en place de l'organisation de savoir répondant à un ***sujet*** donné au sein d'un thème disciplinaire (comme par exemple le sujet de la modélisation par une fonction linéaire).

• Chacun des niveaux indiqués est un niveau de ***détermination didactique*** : son contenu ***permet*** certaines choses et en ***interdit*** d'autres, du point de vue des formes et des contenus de l'***étude scolaire*** en général, de l'étude scolaire ***des mathématiques*** plus spécifiquement, etc.

– Le niveau de détermination didactique de plus haute généricité, le niveau 0, est, on le sait, classiquement désigné comme le niveau de la ***pédagogie***. Bien que l'action du professeur à ce niveau de détermination didactique soit en général des plus limitées, du fait des diverses « autorités » qui encadrent son intervention (l'expression de « liberté pédagogique » est à cet égard trompeuse), il convient de ne pas oublier qu'il s'agit là d'un niveau décisif, ***qui conditionne l'ensemble des niveaux suivants***.

– Un exemple simple permet de saisir ces effets de conditionnement. Longtemps, dans la pratique scolaire, le terme de ***copie*** fut employé au sens strict : au XIX^{e} siècle, « tout devoir remis au professeur est une "copie", c'est-à-dire la reproduction exacte sur une feuille d'un texte écrit sur le cahier ; et le maître est en principe tenu de veiller à l'identité des deux textes, ce qu'il ne fait d'ailleurs qu'exceptionnellement » (André Chervel, *La culture scolaire. Une approche historique*, Belin, Paris, 1998, p. 59). La disparition de cette pratique a fait de « copie » un mot opaque du jargon scolaire, dont l'opacité n'est pas même interrogée. Mais surtout, en obligeant l'élève à se séparer radicalement du fruit de son travail – la « copie » est désormais ***l'original lui-même*** –, l'évolution des pratiques a engendré une certaine forme d'aliénation, l'élève devenant étranger à ce qu'il produit mais dont il n'assure plus la production que pour s'en séparer aussitôt. Cette aliénation est si consubstantielle au statut scolaire que l'étudiant conservera longtemps l'habitude de confier au professeur ***l'original de son travail***, même dans les cas où cette pratique est aux antipodes de l'usage social (on ne se défait pas de l'original d'un rapport, d'un compte rendu, d'un mémoire quel qu'il soit). Parmi les effets observables de cet état de choses, on notera la tendance chez nombre d'élèves et d'étudiants à vivre l'obligation de « remettre une copie » comme purement externe, « instrumentale », « pour le professeur » (qui doit évaluer, noter, etc.), et non comme un ***moyen d'étudier, de se former, d'apprendre***, ce qui est évidemment ***la raison d'être de l'original***, mais ***non bien sûr de la copie*** (au sens strict du mot).

– D'une manière générale, on retiendra que, à interdire telle possibilité ou à imposer telle disposition au niveau n on impose ou on interdit *ipso facto* telles autres dispositions aux niveaux $n\pm k$, souvent sans avoir pris la peine de faire un inventaire même grossier des effets de la décision prise au niveau n.

Annexe 5

Dans le texte du référentiel des compétences, on a mis en évidence les types de tâches professionnels (encadrés), techniques (encadrées grisées) et éléments de technologies (soulignés grisés) qui jalonnent le quotidien de l'enseignant à l'école primaire.

Préambule

Le professeur des écoles est un fonctionnaire de la République. Il connaît les exigences de la fonction enseignante et de la responsabilité qui s'y attache, et comprend l'importance d'une éthique professionnelle.

Principes généraux

Le professeur des écoles est un maître polyvalent, capable d'enseigner l'ensemble des disciplines dispensées à l'école primaire.

- Il a vocation à instruire et éduquer de la petite section de maternelle au CM2.
- Il exerce un métier en constante évolution.

I – Le professeur des écoles doit être capable d'enseigner à tous les élèves de l'école primaire

- Il doit posséder une culture générale lui permettant de maîtriser les grands concepts relatifs aux disciplines enseignées à l'école maternelle et élémentaire (espace, temps, démarche scientifique, système de numération, fonctionnement de la langue…) et, bien entendu, maîtriser clairement les connaissances de base des langages fondamentaux (orthographe, expression écrite, mécanismes opératoires, proportionnalité…)
- Il doit être capable d'initier ses élèves à une langue vivante, étrangère ou régionale.
- Il doit nécessairement posséder des connaissances et des outils d'enseignements relatifs à toutes les disciplines qui sont au programme des écoles (français, mathématiques, sciences et technologie, histoire et géographie, éducation civique, éducation artistique, éducation physique et sportive).
- Il doit mettre au service de cet enseignement une connaissance du développement de l'enfant et des processus d'apprentissage.

A cet effet, il doit connaître parfaitement les étapes du développement de l'enfant, avoir une bonne connaissance des principales théories et des modèles d'apprentissage, et être en mesure de repérer, d'analyser les difficultés individuelles les plus courantes et d'y remédier.

II – Le professeur des écoles doit être capable d'enseigner dans une classe

- Il doit savoir créer une dynamique de classe et l'exploiter pour développer toute les potentialités des élèves.

- faire de l'élève un acteur des projets de classe

- développer les aspects sociaux : entraide, coopération, écoute de l'autre…

• Il doit évaluer et gérer les apprentissages des élèves

- utiliser des techniques de classe (du tableau à la BCD, en passant par l'ordinateur)

- savoir choisir un manuel et justifier ce choix

- analyser les besoins

- établir une progression

- associer l'élève à sa propre progression et expliciter avec lui les objectifs à atteindre

- repérer des difficultés et des compétences individuelles

- mesurer des progrès

- proposer un accompagnement méthodologique

- mesurer l'efficacité de son enseignement

• Il doit savoir définir des exigences pour tous les élèves et s'adapter à leur diversité, par l'élaboration de plans d'action pédagogique diversifiée, en tenant compte des performances et des capacités individuelles.

- définir les objectifs à atteindre

- énoncer sa propre stratégie

- prévoir ses démarches et les supports de l'action

- estimer la durée

- élaborer les modalités d'évaluation de l'action

- communiquer le bilan des opérations

III. Le professeur des écoles doit être capable d'enseigner dans une école

• Il doit assurer la continuité et la cohérence des apprentissages, par un travail en équipe des maîtres, dans le cadre d'un projet d'école et d'un projet de cycle.

• Il doit connaître la place de l'école dans le système éducatif et dans la société.

- la famille et l'école : l'information des familles, la place des parents à l'école, leur participation à la vie de l'école

- le quartier et l'école : la santé, la police, la justice, la sécurités, les associations

- les collectivités locales, prioritairement la commune

• Il doit connaître les relations entre l'école et son environnement social, économique et culturel, en vue d'adapter son enseignement à la diversité des classes et des écoles.

- les autres ordres d'enseignement et en priorité le collège.

- l'administration de l'éducation nationale, et en priorité ce qui est relatif à l'école (programmes, horaires, instructions officielles, personnel, textes réglementaires…) mais aussi à l'histoire, au fonctionnement du système…

Conclusion

Quelles que soient les situations d'exercice de ce métier, il convient que le professeur des écoles

- porte un regard positif sur l'enfant

- développe une attitude réflexive sur sa pratique

donne une dimension sociale au métier d'enseignant.

Annexe 6

DOMAINE NUMERIQUE	Domaine géométrique	Domaine de la mesure
Secteur N1 : Les entiers • Thème N11 : Désignations orales et écrites des nombres entiers naturels (cycle 2) • Thème N12 : Désignations orales et écrites des nombres entiers naturels (cycle 3) • Thème N13 : comparaison des entiers (cycle 2) • Thème N14 : comparaison des entiers (cycle 3) • Thème N15 : relations arithmétiques entre les nombres entiers (cycle 2) • Thème N16 : relations arithmétiques entre les nombres entiers (cycle 3) • Thème N17 : approche des entiers à l'école maternelle **Secteur N2 : les fractions et les décimaux** • Thème N21 :les fractions (cycle 3) • Thème N22 : Désignation orale et écrite des nombres décimaux • Thème N23 : comparaison des nombres décimaux et fraction • Thème N24 : : relations entre certains décimaux et fractions **Secteur N3 : le calcul** • Thème N31 : l'addition au cycle 2 • Thème N32 : l'addition au cycle 3 • Thème N33 : la soustraction au cycle 3 • Thème N34 : la multiplication au cycle 3 • Thème N35 : la division au cycle 3 Secteur N4 : exploitation de données numériques • Thème N41 : la proportionnalité (cycle 3) ; • Thème N42 : organisation et représentation de données numériques (cycle 3)	**Secteur G1 : Approche de la géométrie à l'école maternelle** • Thème G11 : repérage dans l'espace (cycle 1) • Thème G12 : formes et grandeurs (cycle 1) • Thème G13 : reproduction et pavages **Secteur G1 : repérage, orientation** • Thème G12 : repérage et orientation au cycle 2 • Thème G13 : utilisation de plans et cartes au cycle 3 **Secteur G2 : objets et figures de l'espace** • Thème G22 : les solides au cycle 2 • Thème G23 : les solides au cycle 3 **Secteur G3 : objets et figures du plan** • Thème G31 : relation et propriété des objets géométriques • Thème G32 : figures planes au cycle 2 • Thème G33 : figures planes au cycle 3 **Secteur G4 : les transformations** • Thème G42 : reproduction de figures au cycle 2 • Thème G43 : symétrie axiale au cycle 3 • Thème G44 : agrandissement et réduction de figures	**Secteur M1 : les grandeurs** • Thème M11 : formes et grandeurs à l'école maternelle • Thème M12 : longueurs et masses au cycle 2 • Thème M13 : volumes au cycle 2 • Thème M14 : repérage du temps à l'école maternelle • Thème M15 : repérage du temps au cycle 2 • Thème M16 : aires au cycle 3 • Thème M17 : angles au cycle 3 **Secteur M2 : mesure et instruments** • Thème M21 : longueurs, • Thème M 22 : masses, • Thème M 23 : volumes (contenances) • Thème M 24 : repérage du temps et durées

Annexe 7
SEQUENCE
FRACTIONS AU CM1

ORGANISATION MATHEMATIQUE :

Type de tâche :

partager un segment en parties égales.

Instructions officielles :

Documents d'application p.21 : « les fractions et les nombres décimaux doivent d'abord apparaître comme de nouveaux nombres, utiles pour traiter des problèmes que les nombres entiers ne permettent pas de résoudre de façon satisfaisante : problème de partage, de mesures de longueurs (…) ».

« Les fractions telles que ½, ¼, … peuvent être illustrées ou évoquées en référence à des pliages successifs en 2 de l'unité. Dans d'autres cas, par ex. ceux où l'unité est partagée en 3 ou en 5, on peut avoir recours à un réseau de droites parallèles équidistantes. Ce réseau permet de partager une longueur en plusieurs longueurs égales, sans recours à la division. »

Programmes p.236-237 : « utiliser, dans des cas simples, des fractions (…) pour coder des mesures de longueurs, une unité étant choisie. »

Environnement :

Prérequis :

- Nombres entiers : désignation orale et écrite, comparaison, relations arithmétiques.
- Géométrie : notion de segment, repérage dans l'espace.
- Mesure : utilisation d'instruments et d'unités.

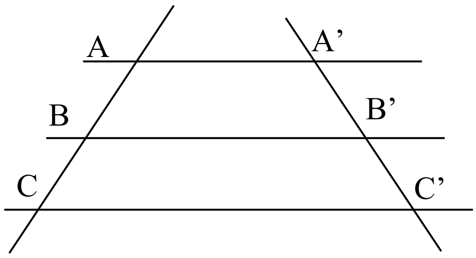
En cours d'acquisition :

- Calcul : division.
- Géométrie : agrandissement et réduction de figure, utilisation de plans ou de cartes, notion d'échelle.
- Mesure : utilisations d'instruments et d'unités.

Environnement technologico-théorique :

Axiome de Thalès :

« On appelle une configuration de Thalès une figure formée de droites parallèles et de droites sécantes. On admet que dans une configuration de Thalès les parallèles définissent sur les sécantes des segments proportionnels, c'est-à-dire que :



AB/A'B'=AC/A'C'=BC/B'C' ou encore que AB/AC=A'B'/A'C'.

Les techniques :

Le pliage :

Partage d'une longueur en **N** parties égales, **N** étant un nombre pair : plier le segment unité en 2 parties en faisant soigneusement coïncider les extrémités de manière à obtenir deux segments exactement superposables puis plier à nouveau en deux, ainsi de suite, N fois.

Le calcul : technique opératoire de la division

Partage d'un segment de longueur connue en **N** parties égales : division de la mesure de la longueur du segment unité par **N**, si l'opération produit un reste nul, le quotient indique alors la longueur à laquelle il convient de couper le segment unité pour obtenir les parties égales, si le reste est non nul, la technique n'est pas valable.

Le réseau de droites parallèles équidistantes : « guide-âne » ou « machine à partager »

Partage d'un segment en **N** parties égales : numéroter un réseau de droites parallèles équidistantes, placer le segment unité (bande) de telle façon que le coin inférieur gauche repose sur la droite 0 et son coin supérieur gauche sur la droite N, marquer d'un trait le point de contact de chacune des droites avec le bord de la bande, constater que l'on obtient bien N parties égales ; pour obtenir non plus N mais (N-1) parties égales, il suffit de maintenir le coin inférieur gauche de la bande dans sa position d'origine et de faire pivoter la partie supérieure jusqu'à la droite (N-1) ; il est ainsi facile par un simple mouvement de rotation de se placer sur le « N » de son choix et de marquer les différents segments.

ORGANISATION DIDACTIQUE :

Première rencontre :

Il s'agit de présenter une tâche problématique aux élèves qui ne disposent pas de techniques expertes pour la résoudre : *partager une bande de papier de 20 cm de longueur en 3 parties égales.*

L'approche numérique n'apporte pas de réponse satisfaisante ($20 = 6\times3 + 2$).

Le pliage n'est pas non plus satisfaisant puisqu'il ne suffit pas d'amener les extrémités bord à bord.

Les élèves pourront donc procéder par tâtonnements successifs : le quotient de la division indique que la longueur de chacun des segments est comprise entre 6 et 7, ils utiliseront la règle ou le compas en variant sur les mm ou les écartements pour partager approximativement.

Exploration de la tâche, élaboration de techniques :

<u>Phase 1 :</u> bande unité = 20 cm, partage en 2 parties égales ;

La division et le pliage sont valables.

Sous-tâche : codage des parties de la bande : bande = 1, on compte les parties égales et on l'inscrit au dénominateur de la fraction : partie = ½

<u>Phase 2 :</u> partage en 4, 6 et 8 ;

Les pliages successifs sont valables. La division est valable pour 4 mais 6 et 8 parties posent un problème ($20 = 6\times3 + 2$ et $20 = 8\times2 + 4$).

Sous-tâche : codage : 1/4, 2/4, 1/6, 3/6, 1/8…

- De la première rencontre à la phase 2 incluse : séance 1

<u>Phase 3 :</u> partage en 3

Les élèves ont déjà rencontré cette tâche et ne disposent pas de technique adaptée, on leur présente le guide-âne (environnement technologico-théorique).

Travail de la technique :

A l'aide du réseau numéroté, les élèves cherchent la technique de partage. A l'issue de cette phase de recherche, la technique est présentée au tableau.

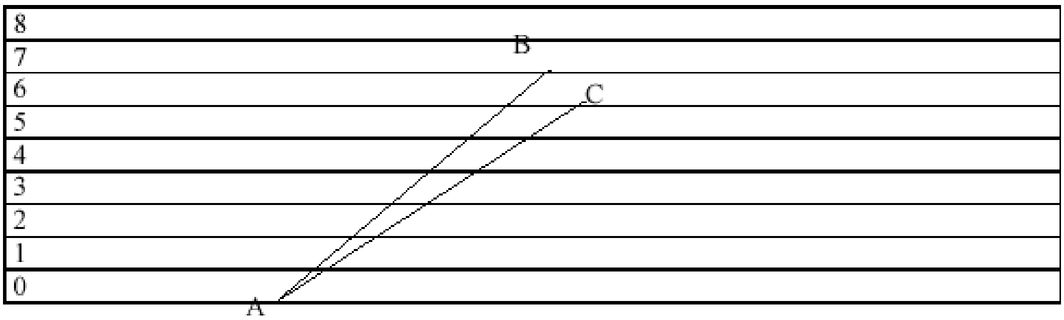
Les élèves sont invités à s'exercer sur des bandes unités de différentes longueurs qu'ils partagent en différentes parties.

Cette technique est-elle efficace ? En elle-même ? Par rapport au pliage et au calcul ?

- De la phase 3 au travail de la technique : séance 2
- On peut consacrer une troisième séance à l'entraînement et au travail de la technique qui s'achèvera avec l'institutionnalisation.

Institutionnalisation :

<u>Aide-mémoire pratique :</u> « comment partager un segment en parties égales ? »



Le segment AB est partagé en 7 parties égales.

Le segment AC est partagé en 6 parties égales.

Il s'agit de la seule technique institutionnalisée car c'est la seule qui permette de partager n'importe quel segment en N parties égales.

Evaluation :

Cette technique peut être réinvestie lors de reprise d'étude sur les fractions, c'est à ce moment là que le PE pourra évaluer la capacité des élèves à réinvestir cette technique hors du contexte de l'apprentissage, c'est-à-dire qu'il pourra évaluer la maîtrise réelle qu'en ont les élèves.

Annexe 8
Relations Arithmétiques entre les Nombres Entiers
Cycle 3

Comme le mentionnent les instructions officielles, un des apprentissages principaux durant cette première année du cycle des approfondissements concerne la notion de multiples. Les multiples de 2, 5 et 10 sont particulièrement travaillés.

Voici donc une progression possible permettant d'aborder la notion de multiples puis de travailler la reconnaissance des multiples d'un nombre donné (par exemple 2 et 5).

Activité 1 :

Faire compter oralement, en groupe classe, les élèves de 2 en 2 en partant de zéro. Un élève commence, prononce 4 ou 5 nombres puis un élève prend la suite. On peut imaginer de faire atteindre le nombre 100.

Il est possible d'envisager la même chose avec 5, 3 et 4.

⇒ *Objectif :* il s'agit tout simplement d'introduire la notion de multiples et de familiariser l'élève aux différents nombres (= multiples) qui découlent de 2 et de 5 par ajout.

Activité 2 :

Proposer le jeu des "sauterelles automates". Dans ce jeu, les sauterelles doivent monter un escalier de 100 marches. La première fait des bonds de 2 marches et la seconde de 5. Chaque élève doit remplir un tableau comme suit :

Marches atteintes par la 1ère sauterelle	0 – 2 – 4 - ....
Marches atteintes par la 2nde sauterelle	0 – 5 – 10 - ....

On introduira donc la notion de multiple. En effet, 15 est un multiple de 5 car on peut écrire 15 = 5 × 3. Faire remarquer donc que 15 est aussi un multiple de 3. Faire réfléchir les élèves sur 10 comme multiple de 5 et de 2. Leur demander de trouver toutes les cases où les 2 sauterelles passeront, donc tous les multiples communs de 2 et 5.

⇒ *Objectif :* l'objectif est semblable à celui de la 1ère activité à savoir continuer à familiariser l'élève avec les multiples de 2 et de 5. Cette activité privilégie l'utilisation de la droite numérique pour repérer les multiples d'un nombre.

Activité 3 :

On peut maintenant proposer un travail d'anticipation sur les multiples. Cette fois, les élèves doivent déterminer si les sauterelles (toujours le même pas de saut) vont atteindre telle ou telle marche. Par exemple, quelle(s) sauterelle(s) atteindra(ont) les marches suivantes : 135, 180, 184, 223...

Il faut, bien évidemment, faire ressortir les différents modes opératoires. On peut imaginer également un travail sur calculette.

⇒ *Objectif :* cette activité prépare l'activité 4 qui va consister à faire construire aux élèves des outils pour repérer les multiples de 2 et de 5. On pourra encore admettre certaine technique comme le fait de compter de 5 en 5 jusqu'a 135 par exemple.

Activité 4 :

Reconnaissance systématique des multiples de 2 et de 5. On peut afficher au tableau une liste assez importante (une vingtaine) de nombres pairs et impairs. On demande aux élèves de relever tous les multiples de 2. On caractérise donc les multiples de 2. Même chose avec 5.

⇒ Objectif : Dans cette activité on va systématiser qu'un nombre X est multiple de Y car X = Y × K. Reconnaissance des multiples de 2 et de 5.

➲ Toutes ces activités peuvent être accompagnées d'exercices de systématisation en fonction des difficultés éprouvées par les élèves pour construire cette notion de multiples. Il est donc plus simple de débuter par les nombres 2 et 5. Au terme de cette 4ème activité, on peut donc reprendre les activités 2 et 4 et les transposer aux autres nombres, notamment 3 et 4.

Activité 5 :

Suite au travail effectué sur les multiples de 2, 5, 3 et 4, on peut proposer aux élèves de trouver le deuxième terme d'un produit. Par exemple : 35 = ? × 5 et 5 × ?.

⇒ *Objectif :* en travaillant sur des multiplications à trou, on montre aux élèves que la connaissance des tables de multiplication permet de déterminer les multiples des nombres de 1 à 9.

Activité 6 :

Il est possible désormais de proposer aux élèves de résoudre des problèmes faisant intervenir les multiples. On peut reprendre l'idée des "sauterelles automates". Cette fois-ci, les sauterelles doivent atteindre, par exemple, la marche 72. Peuvent-elles y arriver en faisant des sauts de 12 marches. Faire trouver aux élèves que cela est possible car 72 est un multiple de 12, passer à l'écriture 72 = 12 × 6. Faire aussi remarquer que les sauterelles pourront aussi faire 12 sauts de 6 marches (72 = 6 × 12). Faire trouver d'autres sauts possibles pour atteindre cette marche 72.

⇒ *Objectif :* renforcer la notion de multiples et faire rechercher et utiliser les multiples d'un nombre pour résoudre un problème.

Activité 7 :

On propose un nouveau problème à résoudre (on garde nos chers amis automates !). Cette fois-ci, les sauterelles doivent atteindre la marche 48 mais en évitant d'autres marches comme la 12, 25 et 36. On va donc conduire les élèves à choisir le bon saut car des sauts de 6 (48 = 6 × 8) vont conduire les sauterelles sur une marche piège. Par contre des sauts de 8 (48 = 8 × 6) sont réalisables.

⇒ *Objectif :* Il est identiques à celui de l'activité 5. On commence à introduire la différence existant entre $X = Y \times Z$ et $X = Z \times Y$.

COMMENT PROMOUVOIR LES MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE À TRAVERS DES SITUATIONS EXPÉRIMENTALES ?

Julie Massin
DEA de Didactique des Mathématiques - Paris 7

Catherine Taveau
IUFM de Créteil - IREM de Paris 7

Résumé :

Le dispositif « la Main à la Pâte » a permis de déclencher une médiatisation et une popularisation d'une culture scientifique jusqu'alors peut présente. Il a relancé, dans les écoles, un enseignement basé sur une approche expérimentale des évènements scientifiques.

Peut-on envisager un dispositif analogue pour populariser la culture mathématique et par là même remotiver des générations d'élèves à s'engager dans des études scientifiques ? Telle est la problématique posée aux participants de l'atelier.

INTRODUCTION

Une demande internationale, relayée en France par l'Académie des Sciences, souhaiterait la mise en place d'un dispositif type « la Main à la Pâte » pour la popularisation des mathématiques. La COPIRELEM, en lien avec l'INRP, pourrait être un interlocuteur privilégié pour mener ce projet.

Mais comment définir ce projet ? A quels objectifs spécifiques répondraient la mise en place d'un dispositif analogue ?

Nos interrogations s'articulent autour des questions suivantes :

« Comment réussir à diffuser nationalement les mathématiques ? ». Il ne s'agit pas de diffuser l'enseignement des mathématiques mais tout simplement une culture mathématique.

« Comment faire pour que notre discipline devienne plus attractive, moins rébarbative, moins connotée de schémas élitistes ? ».

« Comment faire exister les mathématiques en elles-mêmes sans être un outil au service des autres disciplines? Peut-on construire un dispositif sur le long terme ? ».

Le ministère a choisi de privilégier un certain type de diffusion, avec une vision élitiste : les Olympiades Mathématiques, le concours Kangourou. Alors qu'en parallèle, les IREM développent les défis ou rallyes mathématiques qui misent plus sur l'activité collective d'une classe et qui ont pour objectifs de modifier les pratiques enseignantes dans leur rapport aux activités de résolution de problèmes. Il s'agit de mettre l'élève dans une véritable situation de chercheur.

Voici une partie des questions que la COPIRELEM se posent et cet atelier est l'occasion de pouvoir avancer sur l'élaboration de réponses possibles.

Ainsi l'objectif de l'atelier est d'essayer de construire un cahier des charges concernant un dispositif de ce type: quelles mathématiques, quels modèles, quelles problématiques et quelles présentations sont envisageables et souhaitables pour une diffusion des mathématiques.

La première partie de l'atelier est une présentation de ce qui se fait dans le cadre de la « Main à la Pâte » sur une expérimentation qui nécessite beaucoup de mathématiques, et qui est le sujet de mémoire de DEA de didactique des disciplines option mathématiques de Julie Massin.

La deuxième partie correspond au travail plus spécifique de l'atelier où les participants ont été sollicités à réfléchir sur la pertinence de dispositif permettant la popularisation de la culture mathématique.

LE PROJET ERATOSTHÈNE

Cette partie correspond à un extrait du travail de DEA de Julie Massin (Paris 7)

A - Les dix principes de la Main à la Pâte

Début en 1996 – Georges Charpak

La Main à la Pâte est une dynamique visant à promouvoir l'enseignement des sciences à l'école primaire. Depuis ses débuts expérimentaux en 1996 sur l'initiative de quinze pédagogues et scientifiques réunis autour de Georges Charpak (prix Nobel de physique 1992), jusqu'au Plan de rénovation, mis en place par le ministère de l'Éducation nationale, qui l'étend à tout le territoire en 2002, elle privilégie une démarche de construction des connaissances par l'exploration, l'expérimentation et la discussion.

Par ailleurs, la Main à la Pâte est une marque déposée de l'Académie des sciences.

Construction des connaissances par : l'exploration, l'expérimentation, la discussion.

Pour faire comprendre l'"esprit main à la pâte", voici la citation d'un extrait de l'introduction, rédigée par Georges Charpak[1] lui-même : «*Je ne sais pas s'il existe encore des écoles dans lesquelles on dit aux élèves*: «l'eau bout à 100°, na!» *Mais combien plus intéressante est une classe dans laquelle un instituteur, conscient que l'apprentissage de ce bout de vérité contribue à former l'esprit de ses élèves, prend le temps de faire bouillir une casserole d'eau et – lorsque ceux-ci reportent sur un graphique la variation de température et croient constater qu'à 100°, le thermomètre est bloqué – leur fait prendre conscience qu'ils assistent à un changement d'état. C'est le début d'une belle leçon de choses qui les conduit à une réflexion profonde.»*

Mais pour être plus précis, voilà les 10 principes de la Main à la Pâte qui sont disponibles sur la page d'accueil du site.
(www.inrp.fr/lamap/main/principes/dix_principes.htm).

[1]« La Main à la Pâte » édité chez Flammarion

La démarche pédagogique

1. Les enfants observent un objet ou un phénomène du monde réel, proche et sensible et expérimentent sur lui.

2. Au cours de leurs investigations, les enfants argumentent et raisonnent, mettent en commun et discutent leurs idées et leurs résultats, construisent leurs connaissances, une activité purement manuelle ne suffisant pas.

3. Les activités proposées aux élèves par le maître sont organisées en séquences en vue d'une progression des apprentissages. Elles relèvent des programmes et laissent une large part à l'autonomie des élèves.

4. Un volume minimum de deux heures par semaine est consacré à un même thème pendant plusieurs semaines. Une continuité des activités et des méthodes pédagogiques est assurée sur l'ensemble de la scolarité.

5. Les enfants tiennent chacun un cahier d'expériences avec leurs mots à eux.

6. L'objectif majeur est une appropriation progressive, par les élèves, de concepts scientifiques et de techniques opératoires, accompagnée d'une consolidation de l'expression écrite et orale.

Le partenariat

7. Les familles et/ou le quartier sont sollicités pour le travail réalisé en classe.

8. Localement, des partenaires scientifiques (universités, grandes écoles) accompagnent le travail de la classe en mettant leurs compétences à disposition.

9. Localement, les IUFM mettent leur expérience pédagogique et didactique au service de l'enseignant.

10. L'enseignant peut obtenir auprès du site Internet des modules à mettre en œuvre, des idées d'activités, des réponses à ses questions. Il peut aussi participer à un travail coopératif en dialoguant avec des collègues, des formateurs et des scientifiques.

B - Présentation du projet Ératosthène

Le principe

Une expérience historique.

En 205 avant J.C., Ératosthène alors Directeur de la Grande Bibliothèque d'Alexandrie en Égypte, propose une méthode purement géométrique pour mesurer la longueur du méridien terrestre. Ce savant grec "universel" (mathématicien, astronome, philologue, poète, géographe et historien), part de l'observation d'ombres portées faites en deux lieux, Alexandrie et Syène (aujourd'hui Assouan), éloignés d'environ 800 km (distance estimée d'après le temps mis par les caravanes de chameaux pour relier ces deux villes!), au moment du solstice d'été et à l'heure du midi solaire local.

Cette méthode est en fait reproductible tous les jours de l'année partout dans le monde, en utilisant deux simples bâtons verticaux fixés sur un sol plan et horizontal en au moins deux lieux de latitudes différentes.

Le projet Ératosthène de la Main à la Pâte développe alors cette méthode afin de partager une expérience scientifique historique avec des enfants.

Une équipe complémentaire.

A l'origine de ce projet se trouve une équipe complémentaire formée de: Mireille Hartmann, enseignante et auteur d'ouvrages pédagogiques sur l'astronomie; Emmanuel di Folco, astrophysicien à l'ESO; David Jasmin, chercheur à l'INRP et créateur du site Internet de la Main à la Pâte assisté de Marc Jamous qui a créé le cédérom; Huguette Farges, enseignante en Zone d'Éducation Prioritaire; André Laugier, formateur à l'IUFM de Bordeaux qui a suivi et filmé une classe de CM1; et Denis Guedj, romancier et mathématicien.

Le dispositif

Un public varié

Tout d'abord, il s'adresse à un public varié. Les enfants participant au projet peuvent avoir entre neuf et treize ans (même un peu moins pour certaines parties, même un peu plus ce qui facilite la compréhension des étapes grâce à la connaissance d'outils mathématiques supplémentaires). Ils peuvent être encadrés par des enseignants (c'est la forme pensée au départ), des animateurs de clubs scientifiques ou de colonies de vacances, ou des parents tout simplement.

Un support riche et structuré: des fiches pédagogiques « main à la pâte ».

Le support est riche d'une documentation en quantité et en qualité incroyables. Le site Internet détaille en précision toutes les étapes nécessaires dans des fiches-standard de la Main à la Pâte (avec la liste du matériel recommandé, les notions pré-requises, la durée approximative, le lieu le plus adapté, …). Il permet un dialogue entre les enseignants en fournissant les adresses électroniques des participants et des icônes «Réagir». Par ailleurs des scientifiques peuvent répondre aux questions sur le sujet comme dans n'importe quelle autre partie du site de la Main à la Pâte. Un livre a été édité (Mesurer la Terre est un jeu d'enfant aux éditions Le Pommier), accompagné d'un CD-ROM. Ceux-ci reprennent l'essentiel de ce qui se trouve sur le site Internet, avec en plus des illustrations nombreuses (entre autres, des vidéos de séances filmées dans une classe ayant participé au projet les années précédentes).

Un suivi des classes participantes.

A partir de ces documents, chacun peut choisir d'en tirer ce qu'il veut: une expérimentation, des séances étalées sur un mois, ou bien des activités pour une année scolaire entière. La forme officielle du projet Ératosthène étant: l'inscription en début d'année d'une classe de fin d'école primaire ou de début de collège, le suivi de ses activités par une inscription régulière, la mise sur le net de cartes postales et des mesures réalisées.

Le guide du maître.

C'est un résumé de l'expérience historique, du projet et des séquences proposées pour que les professeurs aient une vision générale du projet.

Les élèves sont guidés par une suite d'étapes fixées à l'avance. Il est difficile d'imaginer que les enfants puissent deviner l'étape n+1 avant d'avoir réalisé l'étape n.

C - Pré-test et post-test

Le pré-test est la séquence préliminaire proposée dans le cadre du projet Ératosthène. Il permet à l'enseignant d'avoir une idée des notions connues par les élèves.

Il est d'abord précédé par la lecture d'un texte court introduisant la découverte par Ératosthène d'un papyrus signalant qu'à Syène, un piquet vertical ne projette aucune ombre à midi le 21 juin alors qu'à Alexandrie, Ératosthène observe qu'il y a une ombre.

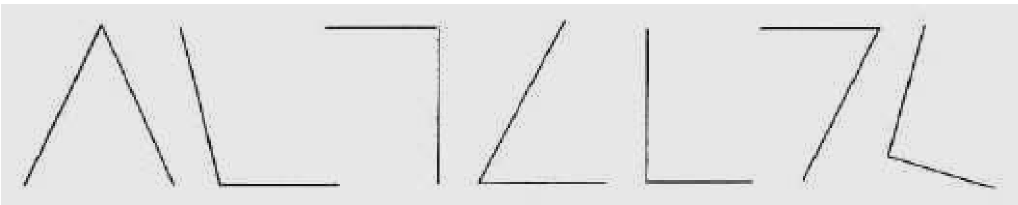
Le questionnaire est alors présenté comme un «jeu-test», non noté.

Les questions faisant explicitement appel aux mathématiques sont les questions 3, 4 et 5 et sont les suivantes :

PROJET : " SUR LES PAS D'ÉRATOSTHÈNE "
13 questions pour faire le point sur tes connaissances dans certains domaines.
Avant de répondre à une question, commence par la lire jusqu'au bout.
Lorsque tu dois choisir une réponse proposée, **entoure** *la réponse choisie au crayon noir.*
Lorsque tu dois répondre par un ***dessin****, fais celui-ci sur une feuille à part en écrivant d'abord le* ***numéro*** *de la question sur cette feuille.*

3 – A l'angle de ma rue

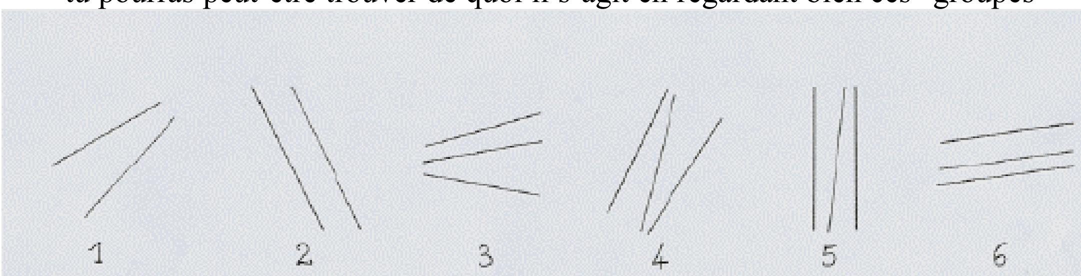
Peut-être sais-tu déjà ce qu'est un angle, et peut-être aussi, un angle droit ?
Parmi les angles ci-dessous, entoure ceux que tu reconnais être des angles droits.



Sais-tu comment s'appelle un angle "moins ouvert " que l'angle droit ?
On dit que c'est un angle______________
Connais-tu l'instrument qui sert à mesurer " l'ouverture " d'un angle ?
On l'appelle un______________________

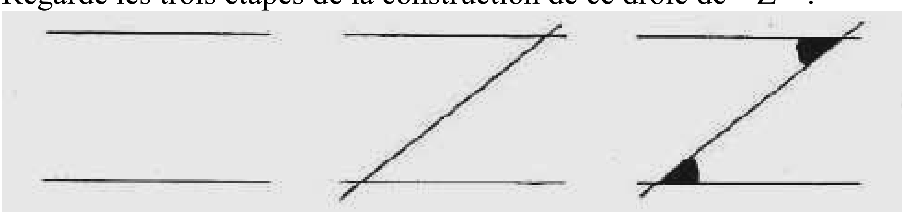
4 – Prenons une rue parallèle à la tienne...

As-tu entendu parler de " droites parallèles " ? Même si ça n'est pas le cas, tu pourras peut-être trouver de quoi il s'agit en regardant bien ces "groupes"



Si tu penses avoir trouvé, entoure les "groupes" de droites parallèles figurant sur le dessin.

5 – Z comme Zorro (cette question est réservée aux élèves de collège)
Regarde les trois étapes de la construction de ce drôle de " Z " :



Les deux angles coloriés en noiront une particularité : laquelle ?

____

On pourrait la vérifier, comment ?

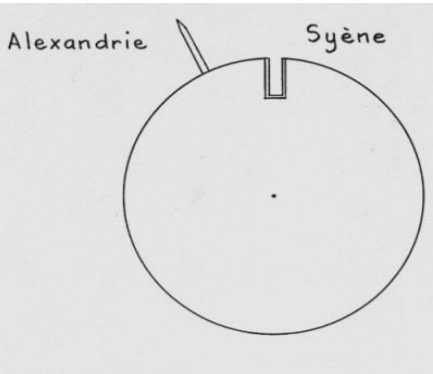
____

Le post-test est la dernière séquence proposée dans le cadre du projet Ératosthène. **(www.inrp.fr/lamap/activites/projet/eratos03/post_test.htm)**

Il permet de faire un bilan des acquis des élèves. Pour cela, il comprend mot pour mot les questions du pré-test, et trois questions en plus, dont les deux suivantes qui nécessitent d'avoir compris les mathématiques en jeu dans le projet Ératosthène:

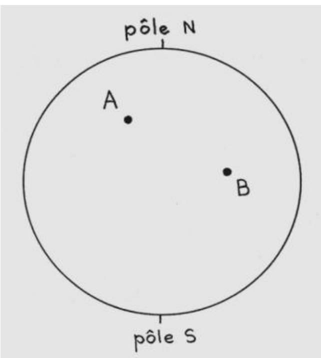
16 - L'idée géniale d'Ératosthène

Sauras-tu compléter la célèbre figure d'Ératosthène ? Commence par ajouter à ce schéma deux rayons solaires : l'un arrivant au fond du puits, l'autre sur l'obélisque, jusqu'au sol (et même un peu au-delà par quelques pointillés). Prolonge ensuite, jusqu'au centre de la Terre, la verticale de Syène et celle d'Alexandrie. Pour terminer, colorie les deux angles égaux (du " Z de Zorro ") qui ont permis à Ératosthène de mesurer le méridien terrestre.



17 - Méridiens et parallèles

Voici un autre schéma du globe terrestre avec deux villes A et B. Trace le méridien puis le parallèle passant tous deux par la ville A. Fais de même pour la ville B. Montre, à l'aide de pointillés, la distance qui doit être prise en compte - dans l'opération Ératosthène - dans le calcul de la longueur du méridien terrestre.



L'impression générale sur ce questionnaire est la suivante: il est assez long pour des élèves d'école primaire; il aborde plusieurs thèmes différents qui recouvrent une grande partie des points-clés du projet Eratosthène; les questions sont variées dans la forme de réponse attendue (un mot, une phrase, un dessin, QCM); le titre des questions (souvent un jeu de mot) ramène à une notion de la vie courante qui peut prêter à confusion.

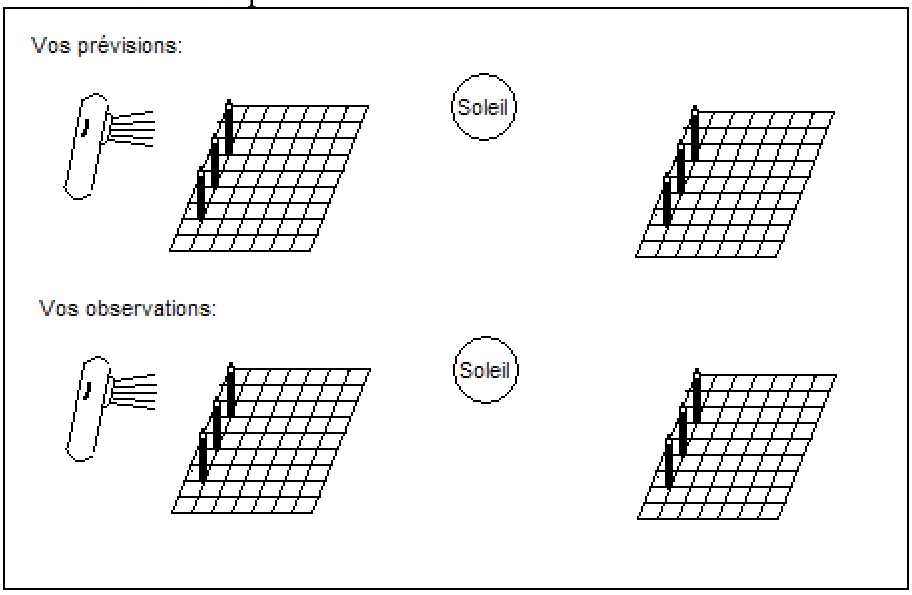
D - Les ombres des crayons en classe: première série de vidéos

La séquence optionnelle n°1

Elle est disponible sur le site Internet (à l'adresse suivante: http://www.inrp.fr/lamap/activites/projet/eratos03/seq1_option.htm) et présente ce qui est prévu pour que les élèves prennent conscience du parallélisme des ombres de crayons verticaux sur un plan horizontal quand ils sont éclairés par le Soleil, alors que ce n'est pas le cas si on les éclaire avec une lampe de poche assez rapprochée. (La propagation rectiligne des rayons lumineux a été traitée auparavant).

Les vidéos

Les vidéos sont disponibles sur le cédérom accompagnant le livre du projet Ératosthène: Mesurer la Terre est un jeu d'enfant. Dans celles qui concernent les ombres de crayons en classe, la maîtresse propose de prévoir la formation des ombres de trois crayons verticaux sur la table horizontale, selon qu'ils sont éclairés par le Soleil ou par la lampe de poche. Les élèves font ensuite l'expérience et confrontent leurs prévisions avec la réalité observée. Ils notent au fur et à mesure toutes leurs remarques sur une feuille qui a cette allure au départ:



Problème spatial

Ce n'est pas un problème de géométrie proprement dit. Il s'agit d'un problème spatial (selon la classification de R. Berthelot et M.H. Salin) de communication où les élèves doivent constater le fait que les ombres sont parallèles ou non.

Géométrie/Optique

Les mathématiques interviennent comme outil au service de la modélisation en optique. En effet, la vérification du parallélisme des droites se fait à l'aide de techniques de géométrie (improvisées ou non, mais institutionnalisées), mais le registre reste celui de l'optique ("rayon convergeant ou non"). Cet appel à deux disciplines en même temps est mal coordonné, puisque cela provoque des confusions même dans le discours de la maîtresse pendant la synthèse collective: *«Elles s'écartent. Oui. Tout à fait. Et, qu'est-ce qu'elles font au contraire quand elles se rejoignent vers un même point? Vous savez?*

[…] Est-ce que vous connaissez ce mot en géométrie? […] On dit qu'elles convergent vers un même point. […] Bon. Et bien quand elles font le contraire, les ombres, quand elles ne vont pas vers un même point, quand elles se dispersent, on dit qu'elles divergent».

Des petits malins

Une autre difficulté caractéristique du projet est qu'on veut faire découvrir des propriétés choisies aux élèves. Alors que le problème est présenté comme ouvert, la maîtresse ignore les remarques des élèves sur des caractéristiques décidées comme inintéressantes du point de vue du résultat à obtenir (la longueur des ombres, la mobilité des ombres obtenues avec la lampe qui «bouge», …). D'après la chronologie de la vidéo, on peut penser que ces interventions de la maîtresse arrivent avant la rédaction des observations sur le cahier d'expérience, et donc que l'élève n'a pas entièrement la charge de sélectionner parmi tous ses constats ce qu'il faut retenir. On remarque aussi souvent dans le document servant de base aux séances: « *un petit malin fera remarquer que…* », « *des petits malins ajouteront certainement…* ». L'apprentissage repose donc sur l'intervention d'éventuels « petits malins », interventions dont les résultats serviront pour toute la classe.

E - La hauteur du Soleil: deuxième série de vidéos

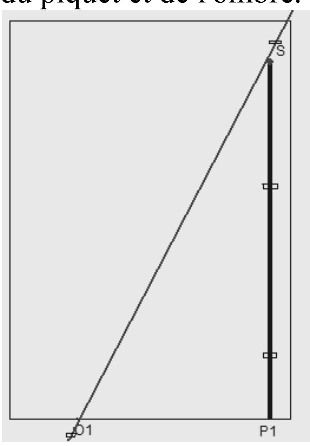
La séquence n°4

Elle est disponible sur le site Internet à l'adresse suivante: http://www.inrp.fr/lamap/activites/projet/eratos03/sequence4.htm. *Il s'agit pour les élèves de remarquer que les rayons du Soleil à un moment donné forment toujours le même angle avec l'horizontale, quelque soit la longueur du piquet vertical qui a permis de les matérialiser. Le détail des étapes à suivre n'est pas le même que dans la vidéo disponible sur le cédérom.*

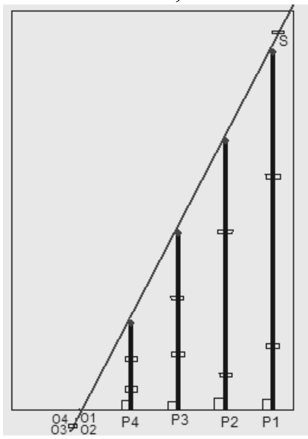
Le scénario des vidéos

Les élèves ont au préalable fait des relevés de longueurs d'ombres de piquets verticaux de différentes tailles sur un support horizontal au moment du midi solaire. Ils savent de nombreuses choses sur leurs gnomons: l'ombre est dirigée vers le Nord, elle est la plus courte de la journée au moment du midi solaire, … . La maîtresse veut modéliser la situation au tableau afin de repérer l'angle appelé hauteur du Soleil.

Dans les deux premières vidéos, la maîtresse donne les consignes et les élèves proposent différentes façons de positionner le piquet de un mètre au tableau (en le scotchant). Il faut ensuite placer l'ombre et matérialiser (par un ruban rouge) le rayon solaire passant par les extrémités du piquet et de l'ombre. Finalement, on obtient ceci:



Les élèves, guidés par la maîtresse, placent ensuite les trois autres piquets de longueurs 25, 50 et 75 centimètres sur le tableau de façon à avoir une même «figure», «sans tout recommencer». Ils vérifient de façon expérimentale (par la mesure) que le placement des piquets supplémentaires perpendiculairement à la ligne du sol et touchant le rayon solaire déjà matérialisé est justifié puisque l'extrémité de l'ombre arrive bien au même endroit pour tous les piquets. Au tableau, on trouve alors ceci:



Les deux dernières vidéos correspondent alors à la lecture de la "figure", i.e. le repérage des sous-figures: triangles, angles de ces triangles, et finalement la découverte de l'angle appelé "hauteur du Soleil".*C'est un exercice de modélisation (avec changement de matériel).*

Il y a ici plusieurs notions mathématiques en jeu, notamment l'angle droit, la mesure d'une longueur, d'un angle… Il y a aussi une mise en évidence de la modélisation de la situation avec en particulier un changement caractéristique du matériel:

> Thomas [E]est au tableau et place le piquet verticalement, contre le carton, le pied du piquet au niveau du bord inférieur du carton.
>
> - [M] Et pourquoi tu l'alignes sur le carton.
> - [E] C'est pour qu'il, pour qu'il soit droit.
> - [M] Et pourquoi?
> - [M] Par rapport à quoi, il faut qu'il soit droit?
> - [E] Par rapport au sol.
> - [M] Par rapport au sol. Et comment on fait dans la cour pour vérifier qu'il est bien droit?
> - [E] On le fait avec le fil à plomb
> - [M] Voilà. Et ici, on va vérifier avec quoi?
> - [E] L'équerre.
> - [M] Avec l'équerre. (La maîtresse prend la grande équerre pour le tableau.) Allez, tu l'aides, Maïa? Tu vérifies qu'il a bien son angle droit?

Sélectionner un plan dans l'espace.

Une des difficultés principales de cet épisode est de sélectionner dans l'espace en trois dimensions de l'expérience, le plan vertical qui contiendra les éléments importants pour la suite du projet (le piquet, son ombre et le rayon solaire associé).

Les conventions pour le dessin sur une feuille de papier sont les suivantes: sauf précision contraire, on imagine que la feuille de papier sur laquelle on dessine est tenue verticalement, comme si elle était plaquée sur le tableau. Alors le bord gauche et le bord droit de la feuille sont verticaux; on dit que tout segment dessiné sur la feuille parallèlement à ces bords est vertical (même si la feuille est placée sur une table horizontale). Les segments perpendiculaires aux premiers sont dits horizontaux. On remarque que cette convention est aussi utilisée en dehors des mathématiques: on parle du bord supérieur et du bord inférieur de la feuille, on dit: "voir plus bas dans le texte" ou "écrivez votre nom en haut de la feuille". De nombreux travaux ont été réalisés pour que les élèves intègrent progressivement cette convention en utilisant des tables inclinées (de moins en moins, jusqu'à être horizontales) pour transposer le contenu du tableau vertical sur une feuille horizontale..

Dans cette séance, le problème ne se pose pas de cette façon puisque les directions verticale et horizontale de l'expérience restent verticales et horizontales sur la modélisation au tableau. Cependant, les élèves ont visiblement du mal à sélectionner dans l'espace réel en trois dimensions le plan qui sera porteur de toutes les informations pertinentes. A cela s'ajoute sûrement le fait que les élèves ont déjà beaucoup travaillé sur les relevés d'ombres en insistant sur le plan horizontal sur lequel est fixé le gnomon: au moment de la vérification de son horizontalité par des niveaux à bulle, puis au moment de l'exploitation des relevés (feuilles posées sur le plan horizontal pendant toute la journée). Ainsi, en appliquant naturellement les conventions habituelles, le premier élève transpose le plan horizontal du relevé d'ombre sur le tableau vertical en pointant le piquet en haut du carton, perpendiculairement à celui-ci. Je suppose donc que c'est un obstacle didactique qui s'ajoute à la difficulté incontournable de sélectionner un plan pertinent dans un espace à trois dimensions.

Analyse de quelques séquences vidéos

Dans le cadre du DEA, Julie Massin effectue une analyse détaillée des tâches mathématiques du projet Ératosthène à partir de quelques fiches pédagogiques. Elle privilégie les séquences sur lesquelles le plus de documents sont disponibles, c'est-à-dire en particulier, celles qui faisaient l'objet des vidéos du cédérom accompagnant le livre du projet. Cela revient à sélectionner trois notions géométriques (angle droit, droites parallèles et angle) puis de faire une étude des pré- et post-tests.

Consigne de la vidéo: contrat didactique transformé

Après avoir modélisé l'expérience de la mesure des ombres au tableau grâce à des piquets placés correctement et du ruban, la maîtresse demande d'observer la figure qui apparaît (voir ci-dessus). Voici l'extrait de la transcription qui correspond à cette situation:

La maîtresse est au tableau, elle regarde ce qui a été obtenu auparavant.

- [M] Faudrait peut-être regarder cette figure de plus près. Qu'est-ce que vous voyez? Regardez bien ça…
- [E] En géométrie?…
- [M] Oui, oui, on est en géométrie… Juste regarder… Juste regarder… (léger bruit de commentaires dans la classe)

La maîtresse ajoute une consigne en décidant que la séance s'intitule "géométrie": il ne s'agit pas de regarder le tableau n'importe comment, il s'agit de regarder la «figure» du point de vue de la «géométrie», c'est-à-dire qu'il faut reconnaître des formes géométriques parmi les sous-figures. L'effet de contrat est flagrant.

Confirmation de ce qu'on voit dans les vidéos

A partir de quelques questionnaires diffusés auprès d'enseignants investis dans la démarche de la Main à la Pâte, voici des réponses obtenues . De façon générale, les horaires dédiés au projet Ératosthène sont spécifiques et assez conséquents. Les notions mathématiques sont vues avant en classe, puis reprises et révisées dans le projet Ératosthène.

Les enseignantes françaises ont l'air d'être assez proches des activités proposées dans les fiches pédagogiques disponibles sur le site Internet. Ce qui est plus surprenant, ce sont les questions posées dans un contexte strictement mathématique qui amènent des réponses en physique. L'exemple le plus marquant est la définition ad hoc de l'angle droit comme angle entre l'horizontale et la verticale.

Les Italiens sont plus sensibles pour distinguer les mathématiques des sciences physiques et parlent de mathématiques appliquées, ils prennent aussi plus de distance avec le projet Ératosthène.

LE DÉBAT PENDANT L'ATELIER

Tout d'abord, il s'agit d'éviter la polémique avec la Main à la Pâte.

Ce dispositif a permis de redynamiser un enseignement des sciences, qui était souvent délaissé dans les écoles. L'enseignement des mathématiques ne souffrent pas d'un enseignement qui serait devenu « facultatif ». Tous les élèves de France font des mathématiques et tous les jours.

Mais nous pouvons présenter quelques éléments de notre analyse sur l'approche de l'enseignement des sciences perçue à travers ce dispositif. A propos de l'expérience d'Eratosthène, le projet la « main à la pâte » procède par étapes explicatives en se servant d'expériences dans des micro-espaces qui sont, en elles-mêmes, pour l'enseignant des mini-modèles locaux (pas pour l'élève qui voit dans chaque expérience un défi motivant). Lorsqu'il s'agit d'aller jusqu'à la compréhension de l'expérience elle-même, il s'agit de mettre bout à bout les résultats issus de ces mini-modèles expérimentaux ajoutés à une modélisation plus globale : (recours à des figures pour modéliser la terre, à des droites pour modéliser l'ombre, etc..). Par ailleurs, cette modélisation est montrée aux élèves comme si cela allait de soi, ce qui est naïf du point de vue approche didactique.

En mathématiques l'approche des notions ne s'effectue pas de la même manière. Un professeur de mathématiques préférera par exemple éviter la mesure de l'angle avec un rapporteur au cycle 3, quitte à simplifier l'expérience physique, pour se concentrer plus sur la notion d'angle.
En revanche, il est intéressant de tirer parti des observations faites concernant le dispositif « la Main à la Pâte » pour préciser ce qui pourrait exister et ce qui se transpose au contraire mal aux mathématiques. Il faut reprendre des démarches existantes dans l'approche de certaines notions mathématiques et créer à partir de cela quelque chose de nouveau.

Le but à atteindre est de populariser les mathématiques. Il faut donner envie de faire des mathématiques à un plus grand nombre. Le point de départ de la Main à la Pâte, c'est de se poser une question dans la vie de tous les jours, a priori, en dehors de tout enseignement, et ensuite de guider les élèves dans une démarche scientifique et expérimentale afin d'y répondre au mieux. La question de départ est identifiée immédiatement et il n'y a pas de problème de dévolution. De façon similaire, il faudrait que les mathématiques apparaissent comme un moyen de lire le monde intelligemment, de le comprendre.
Malheureusement, en général, les enfants (comme les adultes) n'ont pas le sentiment de vivre dans un monde dans lequel les mathématiques sont souvent présentes et indispensables. L'argument d'autorité entendu parfois: « *il y a des mathématiques dans*

les cédéroms et les cartes bancaires » ne suffit pas toujours pour convaincre et développer la curiosité des interlocuteurs. Il faudrait donc répandre l'idée, qu'il y a véritablement des mathématiques autour de nous en promouvant de vrais exercices de mathématiques ancrés dans la vie courante. Un exemple est le problème, qui concerne de nombreuses familles, du nombre moyen de paquets de céréales à acheter pour compléter sa collection des cinq autocollants offerts dans les boîtes. Il faudrait convaincre le public qu'il est impossible, en tant que citoyen, de vivre dans notre monde en faisant l'économie d'une certaine culture mathématique, et par ailleurs donner les moyens de l'articulation entre les connaissances enseignées et les problèmes de la vie courante qui peuvent être résolus grâce à elles.

De même, l'intérêt n'est pas de former un pot-pourri de connaissances variées et disponibles sans ordre particulier. Cela existe déjà dans certaines revues et les enfants y ont accès assez aisément dans des clubs scientifiques. Au contraire, il faut proposer un corpus de connaissances aux objectifs et contenus fixés qu'on peut inscrire ensuite dans des curriculums pensés.

Il s'agit de construire des dispositifs, des situations, des expériences pour valider un modèle. Le but étant de populariser les mathématiques, il faut choisir des situations mobilisatrices afin de construire des savoirs (alors que dans les rallyes mathématiques, ce sont plus la démarche, le défi et la persévérance qui sont en jeu, et moins la construction de savoir). Ces situations doivent faire partie de domaines permettant l'élaboration d'expériences rattachées à ou validant certains modèles et permettant aux élèves de construire des mathématiques. Une fois le modèle choisi, il faudra construire une situation qui permette à l'élève de le découvrir et le connaître.

L'objectif serait de former des équipes à qui on distribuerait des sujets et un cahier des charges pour réaliser le travail, le moyen de diffusion idéal étant un dispositif médiatisé.

La tâche réservée pour la fin de cet atelier est plus modeste et consiste à proposer une liste de domaines (notions, thèmes) possibles:

- la combinatoire qui permet des situations motivantes et des résolutions à l'aide d'arbres et de graphes par exemple, ou des dénombrements de collections (le travail à l'école primaire n'allant pas jusqu'au modèle comme on pourrait le faire au lycée);
- les probabilités (approche déjà effectuée par Guy Brousseau, voir la revue <u>Tangente</u>, des simulations étant faciles à mettre en œuvre);
- la géométrie (par exemple des mesures d'aire en pesant des formes géométriques découpées en carton, voir les travaux de Berthelot-Salin);
- les propriétés des nombres (triangle de Pascal, suite de Fibonacci, nombres parfaits, numération en base 10 …).

La séance s'est terminée sur la question suivante qui est fondamentale et dont la réponse influence forcément le travail à faire: ***pourquoi faire des mathématiques et pourquoi vouloir les populariser?***

SUPPORTS ET OUTILS DE COMPRÉHENSION POUR ÉLÈVES EN DIFFICULTÉ (CYCLE III ET COLLÈGE)

François Boule
CNEFEI, Suresnes

Résumé :

Il s'agit de proposer des supports et activités visant à faciliter la compréhension, la représentation, la mémorisation. La plupart ont été expérimentées dans le cadre de Réseaux d'aides, SEGPA, Classes-relais.

Plusieurs directions sont envisagées :

* Présentation des fractions et des décimaux (approche critique, construction ou remédiation),
* Techniques opératoires sur les entiers,
* Entraînement au calcul par des jeux numériques variés, individuels ou collectifs.

1. LE CADRE.

Les supports proposés à la discussion dans cet atelier ont été conçus pour être mis à disposition des enseignants des classes-relais. Les classes-relais sont des dispositifs de collège destinés aux élèves descolarisés, en vue de permettre leur réinsertion scolaire jusqu'à l'âge de 16 ans. Il ne s'agit en aucune façon de les occuper mais d'enseigner, selon des modalités pédagogiques adaptées, des contenus leur permettant de réintégrer une classe de collège convenant à leur niveau scolaire. Le séjour dans une classe-relais peut durer quelques semaines ou quelques mois. Les groupes sont très peu nombreux (6 à 10 élèves) et les parcours individualisés. Il convient donc de disposer d'outils permettant une relative autonomie, assez attractifs, et en écart par rapport aux supports habituellement en usage, afin de donner du sens à des apprentissages qui n'en n'ont plus.

Mais on peut penser que ces supports et méthodes pourraient être utilisés ou adaptés avec profit avec d'autres publics, dans des cadres différents, comme la SEGPA, ou les groupes d'élèves en grande difficulté scolaire.

Le champ de cet atelier comporte deux thèmes : la reconstruction des fractions et décimaux ; les jeux de calculs (sur des entiers) propres à établir de façon attrayante des stratégies de calcul efficaces.

Il s'agit donc d'examiner ces supports du point de vue de leur utilisation avec un public particulier (dans un cadre qui n'est pas celui d'un apprentissage premier), et d'autre part en formation : mise à jour des avantages/inconvénients, progression, variantes, scénarios pédagogiques.

Les documents discutés, résumés ci-dessous, sont disponibles, complets, au format PDF, sur demande à l'adresse < fboule@wanadoo.fr >.

2. PÉDAGOGIE DES FRACTIONS ET DÉCIMAUX : UN RAPIDE APERÇU HISTORIQUE ET CRITIQUE

Il s'agit de comparer quelques présentations diverses, plus ou moins anciennes et d'en signaler les avantages et les inconvénients, aucune ne semblant, malgré les nombreuses recherches didactiques des vingt dernières années, éviter tous les obstacles et mériter une préférence définitive.

Une distinction quasi-rituelle (et inscrite traditionnellement dans les programmes) consiste à séparer les « fractions simples » des autres ; les premières sont celles qui portent un nom particulier en français (une moitié, un demi, un tiers, un quart) et qui par conséquent appartiennent au vocabulaire et à l'expérience courante des enfants. Une représentation classique associe à ces fractions de l'unité un secteur angulaire :

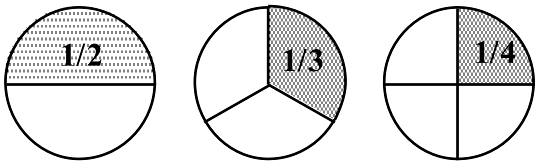


fig. 1

On reviendra plus tard sur les inconvénients de cette représentation. Remarquons au passage plusieurs caractéristiques : le numérateur est 1 ; elles sont inférieures à l'unité ; elles sont classiquement représentées par une barre de fraction horizontale ou oblique (comme ci-dessus).

Une approche historiquement ancienne (antérieure à 1970) consiste à définir une fraction comme une division à faire : « **17/3 = diviser 17 par 3** » ; l'écriture et la technique de la division étant supposées connues, cette définition permet de disposer aussitôt d'un décimal aussi proche que l'on veut, en poursuivant la division. Cette définition, qui a l'avantage de présenter parallèlement fraction et encadrement décimal, ne donne pas un *statut de nombre* aux fractions, ce qui rend vide de sens leur addition (on ne peut "additionner" des procédures) ou leur produit. La comparaison est rendue difficile, voire faussée puisqu'on ne peut comparer par exemple 3/17 et 2/11 sans passer par une approximation décimale. Une maîtrise très incertaine de la division avec quotient décimal rend cette définition, non seulement insatisfaisante, mais d'emploi malaisé. On pourrait penser que l'usage des calculettes est de nature à faciliter cette approche. Il n'en est rien puisque la calculette rend un résultat tronqué. La définition, qui confondrait alors 2/3 et 0.666666, en devient fautive.

Une approche de nature voisine, et qui a eu un succès certain dans les années 70 est fondée sur l'usage des « opérateurs ». Un opérateur est défini par la donnée de deux listes (fig. 2)

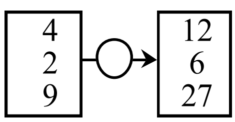


fig. 2

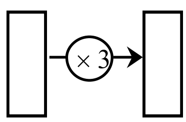


fig. 3

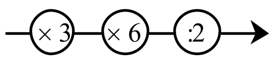


fig. 4

Ainsi défini fonctionnellement, un opérateur peut être étudié indépendamment des listes, et notamment être intégré dans des chaînes (fig. 4). Ces chaînes permettent commutations, associations et réductions.

fig. 5

Une fraction est définie comme une chaîne composée d'une multiplication et d'une division (fig.5).

Cette définition peut sembler relever d'un certain arbitraire. Mais elle facilite beaucoup l'étude de certaines propriétés et particulièrement l'usage du calcul multiplicatif. En effet, moyennant un léger flou initial (qui risque peu de froisser les élèves), on accepte volontiers la commutativité et l'associativité des opérateurs. En revanche elle a deux inconvénients majeurs. D'une part le *nombre* **4** et la *fraction* × **4** sont, par définition, des objets de nature différente, et il faut *admettre* que × **1/2** opérant sur le nombre 1 produit le *nombre* 1/2. D'autre part, comme précédemment, la comparaison et surtout l'addition d'opérateurs sont dépourvues de sens.

Ces approches peuvent être appelées “fonctionnelles” puisqu'elles privilégient une propriété algébrique.

Une approche plus récente (Neyret, thèse, 1995) offre quelque parenté avec celle-là :

Un automate, partant du zéro d'une graduation, arrive au point 7 en trois sauts (fig. 6).

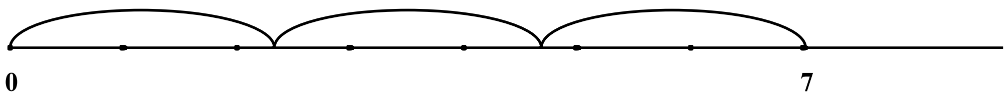


fig. 6

Un saut est un déplacement, mais on lui associe implicitement la longueur du saut, qui est repérée par un nombre. C'est l'avantage de cette définition par rapport à la précédente. Mais on retrouve le même arbitraire formel lorsque l'on désigne ce saut par la fraction 7/3.

Le versant “transformations” du contexte des sauts permet d'étudier aisément les équivalences, c'est-à-dire la “simplification” des fractions, de laquelle découle les procédures de calcul. En revanche la signification des opérations somme et produit réclame, comme on va le voir, de recourir au versant “mesure”.

Les approches suivantes privilégient toutes une relation avec la mesure.

La première, d'usage encore très répandu, consiste à utiliser la représentation proposée fig. 1. Mais elle a un grave inconvénient : elle permet difficilement d'aborder des fractions supérieures à l'unité.

En effet on n'a pas de mal à accepter que la partie grisée (fig. 7) représente un tiers, même en l'absence du disque référence.

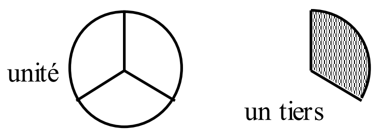


fig. 7

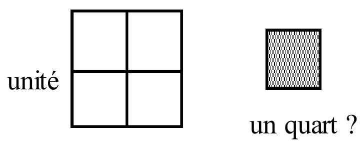


fig. 8

En revanche si la figure de référence n'est pas un disque (fig. 8) la partie grisée n'a plus de sens en l'absence de l'unité de référence.

Une dernière approche permet de définir fractions et décimaux par un système de mesure.

On considère un objet L à mesurer et une unité de longueur U, subdivisée en dix sous-unités V :

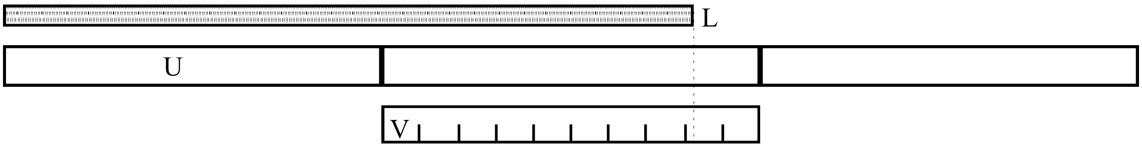


fig. 10

On peut écrire d'abord U < L < 2 U, puis 1U 8V < L <1U 9V. Ou encore 18 V < L < 19V. Le processus peut se poursuivre. On définit ainsi un *système* (U,V,W…). La position de l'unité **principale** U est marquée par une virgule : ***Def.*** : 18V = 1U 8V = 1,8 U

Si, au lieu d'un partage en dix parties, on utilise un partage en trois, on créé une subdivision en tiers. Cette approche, qui semble maintenant considérée comme le « modèle standard » présente deux avantages considérables : permettre rapidement des comparaisons empiriques, en constituant diverses graduations, et donner une interprétation très accessible de l'addition et même de la multiplication (voir ci-dessous). Deux difficultés se présentent cependant, dont l'une est de caractère théorique.

La première est due à la *confusion* de la *longueur* et du *repère* de l'extrémité :

fig. 11

La seconde difficulté, plus théorique, n'est certainement pas un obstacle pédagogique : il est nécessaire *d'admettre* que la formule donnant l'aire d'un rectangle, que l'on peut établir pour des côtés dont les mesures sont des entiers est encore valable pour des côtés dont les mesures ne sont pas entières. C'est ce que l'on appellera ici un «passage en force» (énoncé à faire admettre). On ne peut évacuer tout *passage en force* dans l'enseignement, mais il convient d'en évaluer le *coût psychologique*. Ils ne sont pas tous psychologiquement équivalents. Ni la didactique ni les programmes ne s'interrogent sur ce point. Faire admettre un point pour alléger le programme, conduit à renoncer aux mathématiques (ce qui advient de plus en plus au lycée). On peut souvent donner l'idée d'une démonstration, sans approfondir la mise en forme. Les points à faire admettre n'ont pas tous la même portée.

Exemple:

L'aire d'un rectangle sur papier quadrillé est obtenue par le produit longueur × largeur.

Aucun élève ne résiste à admettre que c'est encore vrai pour les mesures non entières. Pourtant la preuve n'est pas simple (passage à la limite, comme dans la démonstration classique du Th. de Thalès).

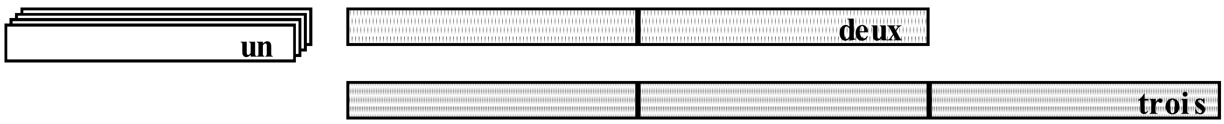
Ce "passage en force" offre un bon appui à l'intuition. Il est légitime et efficace. A charge d'approcher la preuve plus tard.

Fournir un algorithme non justifié (règle de trois, produits en croix…) n'est pas de même nature.

La bonne pédagogie consiste à trouver un itinéraire où les "passages en force" sont intuitivement efficaces, et légitimes (c'est-à-dire ne font pas craindre des ruptures de sens ou des élargissement illicites).

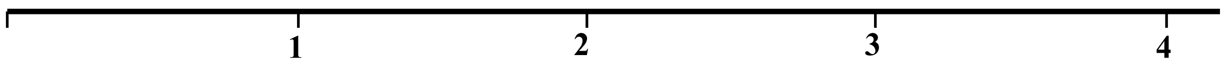
3. LE SCÉNARIO DES BANDES DE PAPIER. AVANTAGES ET INCONVÉNIENTS

Le principe de cette présentation des fractions consiste à construire plusieurs échelles et à les comparer. Une échelle a pour but de repérer avec précision croissante des longueurs à mesurer. On se donne une **unité**, par exemple la *largeur* d'une feuille de papier A4 (il est facile d'obtenir une grand nombre d'exemplaires, de couleur et largeur diverses, en pliant et découpant plusieurs feuilles). Plutôt que de *reporter* cette unité, on peut aisément construire des bandes de longueur 2, ou 3, ou 5 unités, et éviter ainsi des reports.



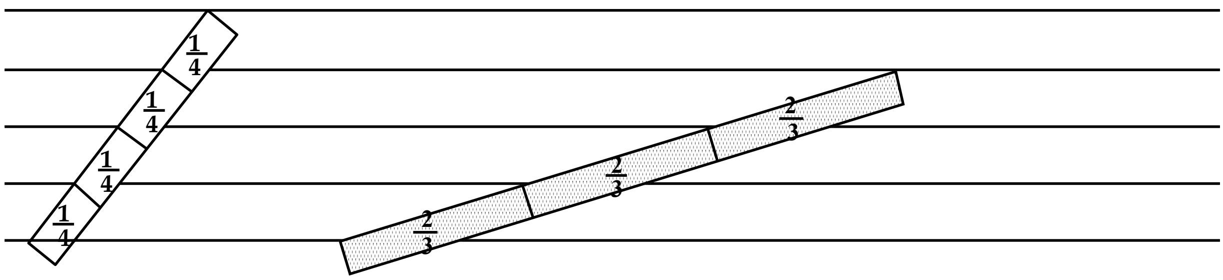
3.1 Graduations

Ceci permet de graduer un axe :



Pour améliorer la précision, on partage l'unité. On utilise pour cela un réseau de traits parallèles.

Ce réseau permet de subdiviser les bandes (nouveau "passage en force" mais dont le coût est faible).

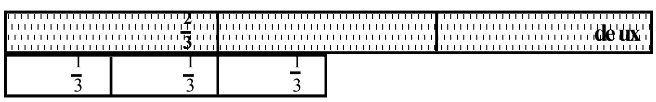


On a plié la première bande en quatre, on obtient des ***quarts*** , la seconde en ***tiers*** ; la notation chiffrée conventionnelle est une fraction dont le NUMERATEUR représente l'objet partagé, l'unité et le DENOMINATEUR indique le nombre de parties. On traduit ces subdivisions par :

Definition $:\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$ et $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=2$

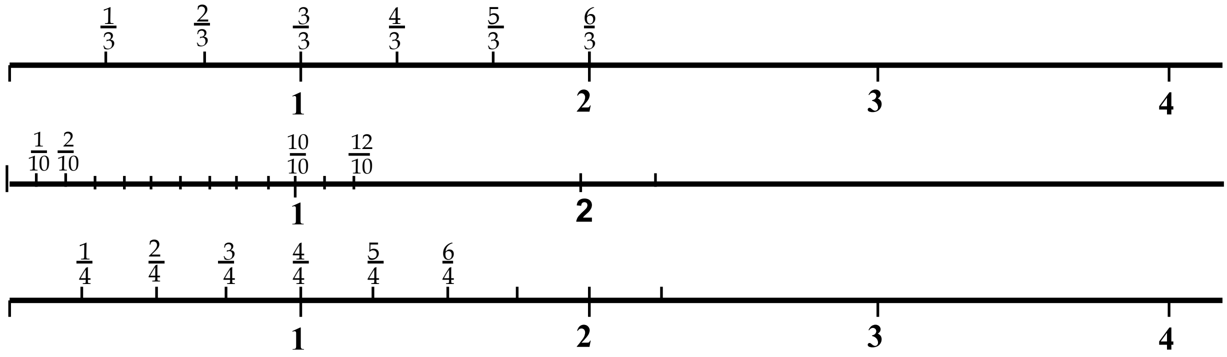
Un premier résultat important est exprimé par l'exemple suivant :

« Il revient au même de prendre le tiers de 2 et de prendre deux fois le tiers de l'unité ».



3.2 Premières égalités

En reportant le long de l'axe précédent (fig. 13), on obtient de nouvelles graduations :



En calant tous les points de départ, on constate ainsi des **coïncidences** qui vont s'écrire :

$$\frac{3}{3} = \frac{4}{4} = 1 \quad , \quad \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = 2 \quad , \quad \frac{2}{4} = \frac{5}{10} \quad , \quad \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = \frac{15}{10} \quad \text{etc.}$$

3.3 Comparaison de fractions

La confrontation de ces graduations permet aussi d'écrire des *inégalités* :

$$\frac{4}{3} < \frac{3}{2} < \frac{5}{3} \qquad \frac{5}{4} < \frac{4}{3} < \frac{6}{4}$$

Deux règles empiriques simples résultent de ces comparaisons :

> *Quand deux fractions ont le même dénominateur, la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur.*

Exemple : $\frac{5}{3} > \frac{4}{3}$

> *On obtient une fraction égale en multipliant numérateur et dénominateur par le même nombre (≠0).*

Exemple : $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{10}{15} = \ldots$

On dispose alors d'un moyen pour comparer deux fractions.

Pour comparer deux fractions, on dresse d'abord une liste de fractions égales :

$$\frac{4}{7} = \frac{8}{14} = \frac{12}{21} = \frac{16}{28} = \frac{16}{28} = \ldots \frac{36}{63}$$

$$\frac{5}{9} = \frac{10}{18} = \frac{15}{27} = \frac{20}{36} = \frac{25}{45} = \ldots = \frac{35}{63}$$

Ce qui permet de conclure : $\frac{35}{63} < \frac{36}{63}$ donc $\frac{5}{9} < \frac{4}{7}$

Remarque :

Un autre moyen de comparaison, au moins pour les fractions inférieures à l'unité, procède d'une construction géométrique sur un quadrillage. Commençons par représenter des fractions :

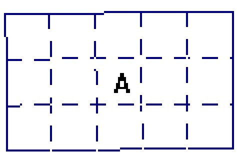


fig. 12

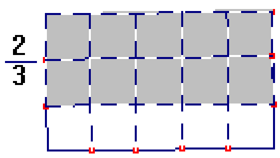


fig. 13

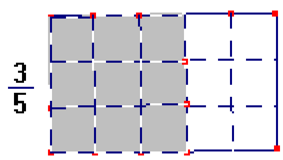


fig. 13

La surface-unité est A. Sur les figures 13 et 14, les surfaces hachurées représentent respectivement 2/3 et 3/5. Il reste à comparer ces deux rectangles, ce que l'on fait en dénombrant les carreaux (respectivement 10 et 9).

3.4 Pluralité d'écritures, notation décimale

La meilleure possibilité de maîtrise des fractions et des décimaux, décisive pour les comparaisons et les calculs, consiste en la *pluralité des écritures*. On est habitué à manipuler des décompositions additives sur les entiers ; c'est l'un des outils fondamentaux du calcul réfléchi. Il est fondamental de s'attarder sur la multiplicité des écritures d'une fraction (puis d'un décimal), avant d'aborder les calculs.

Ainsi $\frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} \ldots$

En particulier, le détachement de la partie entière facilite comparaisons et calculs.

Dans le cas d'un partage en dix parties, on introduit une nouvelle notation (*nombres décimaux*).

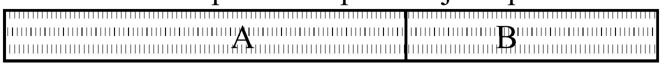
Par définition $2{,}3 = 2 + \frac{3}{10} = \frac{23}{10}$

Le nombre de chiffres après la virgule indique le partage de l'unité.

Exemples : $0{,}12 = \frac{12}{100} = \frac{1}{10} + \frac{2}{100}$ $\quad 2{,}03 = 2 + \frac{3}{100}$

3.5 Calcul additif

L'addition est représentée par une juxtaposition de bandes.



A+B

Dans le cas de fractions de même dénominateur, il suffit de travailler sur une seule graduation.

Exemple : $\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{8}{4} = 2$ $\quad$ ou encore $\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = 1 - \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} = 2$

Pour obtenir un résultat exact dans un cas plus général, il convient de se ramener à une graduation commune, c'est-à-dire au même dénominateur.

3.6 Calcul multiplicatif

Si le calcul additif n'offre guère d'alternative, puisque l'on reste dans le champ de mesures de longueurs, le calcul multiplicatif offre deux interprétations.

La première consiste à revenir à la définition du produit comme mesure d'une aire. L'aire d'un rectangle est mesurée par le produit des longueurs des côtés.

La seconde interprétation s'exprime en terme de transformation.

Ces deux interprétations sont liées par la double lecture que l'on peut faire d'une fraction.

$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times 2$ (deux fois *un tiers*) $= 2 \times \frac{1}{3}$ (un tiers de 2, ou encore 2 *divisé par* 3)

Considérons par exemple le produit $2/3 \times 4/5$.

On peut l'interpréter comme la mesure d'un rectangle dont les côtés mesurent 2/3 et 4/5.

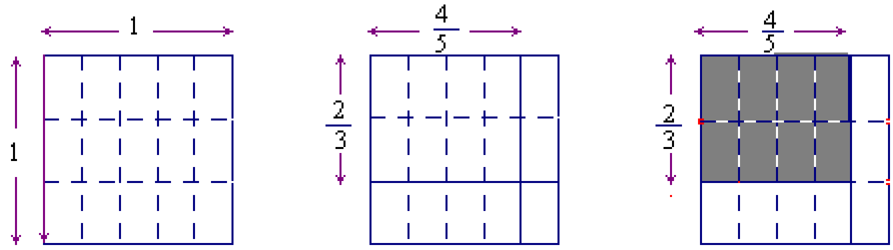


fig.15

Il reste à calculer le résultat : on obtient 2×4 carreaux sur 3×5, soit 8/15.

La seconde interprétation consiste à considérer que l'on prend d'abord les 2/3, puis les 4/5 du résultat (l'ordre inverse conduit bien sûr au même résultat).

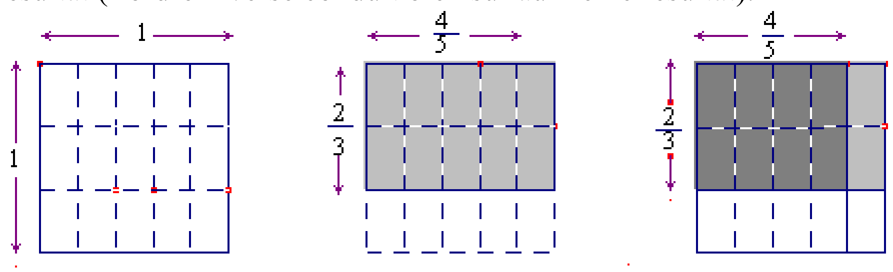
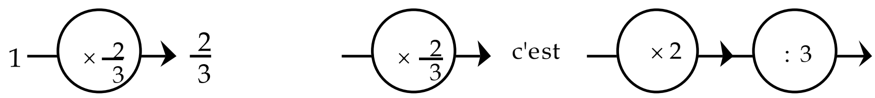


fig. 16

Il reste à calculer le résultat : on obtient 2×4 carreaux sur 3×5, soit 8/15.

Remarque :

Cette seconde interprétation contient un moyen de calcul pratique très efficace, grâce à un abus de langage ; c'est la méthode des opérateurs. L'abus de langage consiste à identifier 2/3 et $\times$ 2/3.



On aura reconnu là un nouveau «passage en force ».

Dans tous les cas, le résultat s'énonce en une règle simple :

« numérateur = produit des numérateurs ; dénominateur = produit des dénominateurs ».

La seconde démarche offre le grand mérite de permettre de traiter aisément la *division* d'un entier ou d'une fraction par une fraction, par le moyen de la fraction *inverse*.

4. DISCUSSION

Plusieurs questions alimentent le débat, comme les «passages en force» évoqués ci-dessus. Ces questions concernent la **population spécifique** (élèves déscolarisés ou en grande difficulté) pour lesquels il ne s'agit pas d'un apprentissage premier, la possibilité de **transposition** pour une population "ordinaire" plus jeune, l'intégration à la formation des maîtres. Elles portent principalement sur la distance entre les «conceptions» initiales et les représentations à construire.

Tenter de s'appuyer sur les conceptions peut consister en un amorçage par des questions comme "*que veut dire 2/3 + 4/5 ?*". Cette question risque de déstabiliser les élèves car elle ne renvoie à aucun savoir pratique ; la réponse risque fort d'être un résultat (vraisemblablement 6/8) obtenu en sollicitant une procédure fictive. On ne peut alors rien opposer d'autre que "*ce n'est pas ça*" et le débat n'en est pas avancé. Il ne convient donc d'interroger les conceptions (initiales) que lorsque la distance aux représentations visées n'est pas trop grande. En revanche, si l'on a exercé le recours à un support, l'élève peut expérimenter avec les bandes de papier, et trouver un encadrement. Le support ne prouve rien, mais évite la panne.

C'est une stratégie pédagogique indispensable avec les élèves en grande difficulté, c'est-à-dire dépourvus de représentations efficaces et de moyens de contrôle (cf. Julo-Houdebine, 1988).

C'est ici qu'interviennent les *"représentations-relais"* (comme la frise numérique ou les collections de doigts pour les nombres entiers). Il s'agit d'objets intermédiaires (*schèmes* pour Kant, *schémas* pour Gonseth), qui permettent d'établir des représentations, et d'intégrer les propriétés fonctionnelles.

D'une façon analogue, un fonctionnement verbal réitéré de type de 2/3 U + 2/3 U conduit à l'"évaporation de l'unité", c'est-à-dire à la construction d'un algorithme formel agissant sur 2/3 + 2/3. Autre moyen : l'utilisation empirique des bandes juxtaposées, puis leur progressive mis à distance. Les deux moyens peuvent être coordonnés et conduisent à la constitution conjointe d'une représentation et d'une procédure.

Dans ce cas, le support n'est pas seulement un objet mou, une image inerte ; il peut servir de support à un début d'isomorphisme avec la structure à construire.

La question du rapport avec les apprentissages premiers a été abordée, mais pas épuisée.

Si une méthode se révèle efficace pour des élèves en difficulté et retard scolaire, pourquoi ne pas l'employer *plus tôt*, comme apprentissage initial ? Une méthode est rarement meilleure *intrinsèquement*, indépendamment des conceptions et du développement des élèves. C'est pourquoi une telle hypothèse mérite expérimentation.

En ce qui concerne l'exercice professionnel, on s'accorde à constater un assez fréquent recours (régressif ?) des enseignants débutants à des conceptions plus primitives que celles qui leur sont enseignées en formation, et plus proches de leurs souvenirs d'élèves. Quel place donner alors en formation à l'étude de différentes méthodes dans un domaine donné, et comment éviter que la présentation de fiches-élève ne désamorce toute critique ?

5. JEUX DE CALCUL

Les activités numériques sur les entiers constituent un socle indispensable pour la construction des objets numériques plus complexes. Elles peuvent également se présenter comme ludiques, comme défis, compétitions entre élèves ou entre groupes. Elles ont pour objectif *d'affermir* les représentations numériques.

La représentation la plus primitive de l'ensemble N est celle d'une **liste** verbale.

Les apprentissages ultérieurs visent à donner des moyens de **survol** de cette première représentation (estimation, opérateurs additifs et multiplicatifs, etc). Il s'agit non seulement de moyens de calcul, mais d'enrichissement de la représentation numérique, et de constitution de l'ordre de grandeur.

La représentation primitive de *liste* peut se révéler suffisante pour effectuer certains calculs de la vie mais elle est insuffisante dès que l'un des nombres dépasse une ou deux dizaines ou lorsqu'il s'agit de calcul multiplicatif.

Le rapport de la Commission Kahane (2002) insiste sur l'opposition entre l'automatisation de “routines” et la composante stratégique du calcul. Le calcul mental a été longtemps considéré à l'école comme une *gymnastique intellectuelle*, un exercice d'attention, et à ce titre régulièrement recommandé jusqu'aux années 70. Le rôle de la mémorisation a été minoré pendant les deux ou trois décennies suivantes. On reconnaît maintenant, dès le début de l'école élémentaire, que la connaissance des nombres n'est pas indépendante des structures de calcul, c'est-à-dire qu'il n'y a pas antériorité de la liste sur la structure organisatrice. Le calcul contribue à la construction des nombres.

En première approximation, on a coutume de distinguer les “calculs arithmétiques simples” (les *tables*) et les calculs complexes. Les résultats arithmétiques simples sont d'abord “reconstruits” (Fayol : *l'Enfant et le Nombre, 1990*), puis progressivement “rappelés” (sous forme d'énoncés répertoriés en mémoire). Cette constitution de répertoire résulte de l'exercice fréquent et de l'exigence de rapidité. Elle est indispensable à une *automatisation* nécessaire à la hiérarchisation, c'est-à-dire à la réalisation de calculs plus complexes, mais aussi à la constitution de représentations plus riches et plus fermes de l'ensemble des nombres entiers. Ces représentations sont essentielles, non seulement pour l'efficacité calculatoire dans la vie courante, mais aussi pour la constitution d'objets complexes, comme les décimaux et les fractions, dont la structuration est bien plus délicate que celle des entiers.

SOMMAIRE DES FICHES[1] PROPOSÉES :

- COMPUTIX (jeu à deux)

pratique du calcul additif simple, utilisation d'une stratégie

- FAIRE QUINZE (jeu à deux)

renforcement des décompositions additives de 15 en trois termes ; composante stratégique importante

- CASCADE

réciprocité addition/soustraction, pratique du calcul mental,
approche des notions d'inconnue et d'équation

- COMPTE EST BON

pratique du calcul arithmétique simple, du parenthésage,
pratique de l'ordre de grandeur

- CHAINE DE CALCUL

pratique du calcul arithmétique, anticipation, recherche d'hypothèse

- OPERATIONS A TROUS

réciprocité addition/soustraction, multiplication/division

- TABLEAUX DE NOMBRES

entraînement aux décompositions numériques

- OPERATIONS IMAGINAIRES

formulation et validations d'hypothèses.

[1] Les fiches mentionnées ci-dessus sont disponibles, au format PDF, sur demande à l'adresse < fboule@wanadoo.fr >. Les commentaires critiques, résultats d'expérimentations, suggestions seront accueillis avec gratitude.

DES RALLYES POUR FAIRE DES MATHÉMATIQUES AUTREMENT

Philippe Le Borgne
IUFM FRANCHE-COMTÉ et DIDIREM Paris VII
Philippe.leborgne@fcomte.iufm.fr
http://www-irem.univ-fcomte.fr/rallye/index.htm

Résumé :
Les rallyes mathématiques font partie des nombreuses innovations pédagogiques, comme par exemple la pratique des problèmes ouverts, les concours Kangourou ou Math en Jeans, qui considèrent comme essentiel et central le rôle de la résolution de problèmes dans les apprentissages. Cet atelier avait pour objectif de faire connaître certaines expériences de rallyes mathématiques dans l'enseignement élémentaire et dans le second degré. La réflexion sur les différents aspects de l'activité de l'élève dans les épreuves de rallye nous a conduit naturellement à nous interroger sur la prise en compte des rallyes comme des instruments au service des apprentissages, et de la formation des enseignants.

1. PRINCIPES GÉNÉRAUX DES RALLYES

Les rallyes sont des concours réservés à des classes entières : il s'agit de résoudre au mieux un certain nombre de problèmes sans l'aide du professeur : la classe doit s'organiser seule pour résoudre des exercices en une séance et rend une seule feuille réponse.

Les objectifs s'expriment ainsi :

- Permettre à tous les élèves d'une même classe de participer à une activité mathématique.
- Motiver les élèves : les problèmes sont présentés sous forme de jeu, de défis.
- Favoriser l'argumentation et la communication au sein de la classe.
- Développer la démarche scientifique.

2. UN EXEMPLE DE RALLYE

Le rallye des écoles primaires du département des Ardennes

Le rallye départemental des écoles primaires des Ardennes existe depuis 1989. C'est un concours réservé à toutes les écoles du département des niveaux CP à CM2 comprenant trois épreuves annuelles où, dans chacun des cas, une classe doit résoudre une famille de problèmes inédits en une heure et rendre une seule fiche réponse. La première est un entraînement qui permet aux enseignants de tester l'adaptation du dispositif à leur classe. Ensuite, les classes volontaires peuvent s'inscrire à une épreuve de qualification où les cinq meilleures classes par niveau seront sélectionnées pour la finale qui se déroule à l'IUFM. Certains problèmes proposés à ce rallye figurent en annexe 1.

Le rallye des Ardennes est organisé par une équipe de professeurs d'école pilotée par deux enseignants de l'IUFM de mathématiques et un PEMF, dans le cadre d'un stage de formation continue (supprimé en 2002…) consacré à la rédaction de problèmes et à tout un travail sur le rôle de leur résolution dans l'apprentissage des mathématiques, en particulier, par l'étude des énoncés. Les stagiaires se répartissent entre enseignants déjà formés à l'organisation du rallye et d'autres plus novices. L'organisation du rallye nécessite plusieurs rencontres (relecture des épreuves, envoi des sujets…) en dehors du stage ou les enseignants sont toujours volontaires. Elles concrétisent les actions de formation. Ainsi, le rallye apparaît comme un projet intéressant dans le cadre de la formation continue.

L'atelier a donné l'occasion aux participants de porter un regard critique sur les problèmes.

3. UNE EXPÉRIMENTATION

Les participants à l'atelier, séparés en deux groupes de cinq, se sont prêtés à une mini-épreuve de rallye consistant à résoudre cinq problèmes proposés en annexe 2 (deux exercices ont été retirés de l'épreuve par manque de participants).

Le but de cette expérimentation était de mettre les participants de l'atelier « dans le bain » en s'amusant à « sécher » sur des problèmes à énoncés simples, mais aussi de voir sur quels paramètres peut jouer l'organisateur pour atteindre les objectifs du rallye : une activité de recherche collective, un débat et aussi un certain engouement pour l'activité mathématique.

Il n'y a pas eu de problèmes pour l'engouement mais le public était convaincu ! Les procédures n'ont pas toujours abouti mais ont été discutées. Plusieurs remarques sont à signaler par ailleurs :

- Le débat ne s'improvise pas et demande beaucoup de temps : en général, on préfère continuer à chercher, même sur les questions difficiles, au lieu de faire un bilan collectif ;
- L'organisation de la recherche est très diverse : certains (leaders ?) portent le crayon mais influencent sans doute la recherche … on préfère travailler à deux plutôt qu'à quatre …

Voici quelques échanges pris « sur le vif » :

- « Moi, je préfère m'isoler »
- « Moi, je cherche l'exercice 1 »
- « Quand même !…il doit être faisable cet exercice 1 »
- « Bon, là il s'agit de ne pas se planter… »
- « Pour la boule de billard, je l'ai résolu et elle était d'accord… » (en parlant de la voisine).
- « Existe-t-il un contre-exemple ? »

Certaines attitudes ne m'ont pas échappé : regard au dessus de l'épaule (« tiens comment fait-il ? »), « j'espère qu'on aura les solutions… ».

Une première conclusion de l'expérimentation : l'observation des élèves et l'examen de leurs procédures aident sans doute l'enseignant à prélever des informations et à mieux connaître la classe. La posture de retrait adoptée par le professeur durant les épreuves peut être une position privilégiée pour l'observation en vue d'une exploitation ultérieure.

Les problèmes

Les problèmes ont été choisis (ou construits) parmi des classiques de rallyes, de jeux, d'olympiades pour susciter l'intérêt d'un public de professeurs de mathématiques : des énoncés simples mais on « sent » qu'il y a des mathématiques derrière…

Nous précisons ici quelques idées « clefs » :

Exercice 1 : la question est ouverte et appelle un éventuel contre-exemple (piège) ; de nombreuses procédures sont possibles (arriver au résultat par adaptation, utiliser les nombres complexes). On peut en déduire une généralisation.

Exercice 2 : il s'agit d'une application classique du problème des tiroirs.

Exercice 3 : on peut, par exemple, se ramener à la construction d'un segment plus petit et utiliser une homothétie.

Exercice 4 : un peu d'arithmétique…

Exercice 5 : est-ce une bonne tactique de répondre au hasard ? Utiliser des symétries orthogonales pour « déplier » le trajet de la boule.

4. PRÉSENTATION DE DIFFÉRENTS DISPOSITIFS DE RALLYES

4.1 Maine-et-Loire

Le rallye mathématique du Maine-et-Loire est réservé aux classes de niveau CE2 à 5ème. Plusieurs observations ont permis d'analyser l'organisation collective des classes pendant les épreuves : organisation des groupes, responsabilités prises au sein de la classe, débats et décisions collectives, intérêt manifesté par les élèves. S'il semble que l'enthousiasme ait été l'attitude la plus fréquente, de nombreux obstacles apparaissent dans la mise en place d'un débat mathématique dans la classe :

- la nécessité de répondre à 10 problèmes posés amène à privilégier le temps de recherche plutôt que la confrontation ;
- n'ayant rien à perdre lorsque les réponses sont fausses, les élèves n'éprouvent pas le besoin de les contrôler.

Une nouvelle formule a été mise en oeuvre en 1993 pour favoriser davantage le débat mathématique. Désormais, seuls trois problèmes sont à résoudre à choisir dans une liste de 15 (les mêmes pour tous les niveaux), les réponses fausses étant comptées négativement.

Si on a noté une amélioration générale dans l'organisation des débats (cf. annexe 5 : brochure du CRDP Pays de Loire), la tendance est forte chez les classes de petits niveaux (cours moyen) de préférer de résoudre les problèmes les plus difficiles qui rapportent davantage de points (voir statistiques, brochure p 75).

4.2 Le Rallye de Franche-Comté

Le rallye de Franche-Comté s'adresse aux classes de 3ème et 2nde de l'Académie de Besançon. Trois épreuves identiques sont proposées aux élèves qui doivent résoudre 6 exercices (cf. annexe 3). Pour les engager dans l'épreuve, nous privilégions des problèmes où l'énoncé est simple et facile à comprendre (exercices 1, 2, 3, 4, 7), de plus certains sont assez faciles à résoudre. Tous nécessitent une argumentation pour se convaincre de la justesse des procédures.

Les énoncés sont exploitables en classe par l'utilisation de prolongements ou en jouant sur les variables. On demande également aux élèves de produire une justification écrite pour certains exercices - et non pas tous pour ne pas les obliger à produire systématiquement une démonstration – afin de favoriser en aval une analyse des procédures et l'explicitation des erreurs. Ces travaux feront l'objet d'une brochure disponible à l'IREM de Franche-Comté fin 2004.

5. DISCUSSIONS AUTOUR DES INTÉRÊTS ET LIMITES DES DISPOSITIFS « RALLYE »

Les évaluations par questionnaires auprès des élèves ou des professeurs montrent, à l'unanimité, l'intérêt des situations de rallye pour motiver les élèves. Il est rare que ces derniers pratiquent les mathématiques de manière collective. De plus, l'enjeu de la participation au rallye dépasse le cadre de la classe (concours départemental ou régional). Les rallyes offrent donc des occasions de donner une autre vision des mathématiques et, éventuellement, facilitent une modification du rapport des élèves à celles-ci.

Il y a, dans ces remarques, à la fois les intérêts et les limites du dispositif. Le rallye donne aux élèves l'occasion d'adopter une attitude de chercheur (le travail collectif est de fait un « mini travail de laboratoire »), mais elle n'est pas naturelle, elle se prépare. Le rôle de l'enseignant est primordial pour affirmer l'importance de la résolution de problèmes et la faire vivre en classe.

Quelques réflexions sur les apprentissages

Lors d'une épreuve de rallye, l'enseignant n'intervenant pas, le jeu des actions et rétroactions se décline non pas pour un élève particulier mais pour un groupe d'élèves. Un élève peut être exclu de tout ce qui se passe au niveau du savoir dans une telle situation. Si l'enseignant ne tente pas d'exploiter en aval les travaux des élèves, tout se passe lors du rallye comme s'il s'agissait d'une situation non-didactique. Replacé dans un cadre plus large, où l'enseignant exploite les travaux produits lors des épreuves, le rallye peut permettre de s'intégrer dans l'organisation didactique de l'enseignant. Il peut être le support d'une première rencontre avec une notion mathématique ou donner l'occasion de réinvestir certaines règles du débat mathématique…

Le rallye peut, en partie, prendre en charge certains apprentissages « proto-mathématique » non inscrits dans le curriculum : conjecturer, explorer, observer, informer, prouver, modéliser, formuler, débattre, savoir utiliser des exemples, des contre-exemples. Il permet également de construire des réseaux de connaissances, de recourir à des types de problèmes de références.

Comment favoriser le débat mathématique ?

La discussion a permis de revenir sur les notions de débat, argumentation, preuve…Nous renvoyons ici aux travaux de N. Balacheff, de G. Arsac ou de J. Douaire cités dans [5] et [8] de l'annexe 5.

6. EXPLOITER LES RALLYES

Nous avons tenté, dans la discussion de fin d'atelier, de répondre aux questions posées dès l'introduction en prenant compte des réflexions précédentes : quels apprentissages peuvent être visés dans la participation à un rallye mathématique ? Quelles pratiques enseignantes pour une utilisation des épreuves du rallye ?

Deux arguments semblent essentiels pour permettre une exploitation pédagogique du rallye :

- La participation au rallye doit s'inscrire dans un projet collectif mais elle doit être reconnue utile aux apprentissages individuels par l'enseignant comme par les élèves.
- Les pratiques mathématiques préconisées par les rallyes doivent s'inscrire dans les travaux quotidiens de la classe. En tant que telles, elles doivent être objets d'enseignement.

Plusieurs pistes ont été proposées comme matière à réflexion.

Utiliser les problèmes de rallyes dans la classe

Les problèmes posés dans les épreuves de rallyes le sont souvent de manière ludique. Il paraît essentiel de bien comprendre « quelles mathématiques sont derrière les énoncés ». Une exploitation des énoncés peut souvent être envisagée (cf. les énoncés du rallye de Franche-Comté) de façon à :

- rencontrer une nouvelle notion, une nouvelle technique ;
- exhiber toute une gamme de procédures différentes pour répondre à une question ;
- prolonger la réflexion sur des questions ouvertes ;
- isoler des variables et en jouer, apprendre à distinguer des « types de problèmes ».

Tout ce travail d'exploitation semble possible et souhaitable en classe.

De même les productions des élèves peuvent également être utilisées dans la classe :

- pour apprendre à communiquer : « expliquer aux autres groupe votre démarche… »
- pour amender un formalisme maladroit et source d'erreur ;
- pour analyser des erreurs…

Les solutions des élèves peuvent être « dépersonnalisées » dans le but de leur donner un statut d'écrits mathématiques : « en résolvant des problèmes, on construit des mathématiques… ».

Formation des enseignants

Analyse d'un questionnaire (cf. annexe 4 Rallye des Ardennes 2002)

Les questionnaires posés à des enseignants faisant participer leur classe montrent parfois un décalage entre les pratiques ordinaires de la classe et les activités pendant le rallye. Citons quelques réflexions :

« Les élèves sont confrontés à différents problèmes qu'ils ne font pas en classe ».

Pour préparer les élèves :

« 4 séances d'une heure trente pour tous les enfants et un atelier au fond de la classe pour les plus rapides à partir de Noël ».

De façon générale, il semble utile de sensibiliser les participants du rallye aux objectifs réels de ce type d'épreuve. De ce point de vue, l'organisation de rallye paraît un excellent moyen de former les enseignants.

CONCLUSION

Les mathématiques se font plus qu'elles ne s'apprennent et selon Marc Legrand (RDM 16.2) :

« Il n'est déontologiquement acceptable d'enseigner à tous les sujets de la société une discipline qui repose essentiellement sur la réflexion et qui est initialement un moyen d'intelligibilité du monde, que si précisément tous ces sujets peuvent par ce mouvement avoir accès à une meilleure intelligibilité du monde ».

Ainsi, l'activité mathématique collective développe une attitude démocratique : celle du chercheur qui se mesure aux autres chercheurs en utilisant les arguments qui permettent rationnellement de distinguer le vrai du faux. En favorisant cet aspect de débat en groupe, les rallyes permettent de participer à cette formation auxquels tous les élèves doivent avoir droit.

Recherche en didactique des mathématiques, La Pensée Sauvage, Grenoble.

ANNEXE 1
Rallye des écoles élémentaires des Ardennes

Préface

Vous avez entre les mains l'épreuve d'entraînement du Rallye mathématique.

Ce concours proposé sous forme de résolutions de problèmes très divers a pour objectifs **d'intéresser TOUS les élèves d'une même classe, d'inciter ces classes au travail d'équipe et d'y développer un esprit scientifique ainsi qu'une démarche expérimentale.**

Dans un esprit d'équité, nous vous demandons de respecter les consignes suivantes:

⇨ durée de l'épreuve : **55 minutes**

⇨ ne pas aider les élèves, ne pas orienter leurs recherches mais leur donner le matériel qu'ils souhaitent.

⇨ le choix final de la solution pour chaque exercice est de la seule responsabilité des élèves, ceci au cours des 55 minutes.

Nous vous laissons une totale autonomie dans l'organisation des groupes, la répartition des problèmes, le choix d'un groupe pour vérifier les solutions (Il n'est pas nécessaire de faire résoudre à chaque groupe la totalité des problèmes).

La classe doit résoudre, dans le temps imparti, les problèmes suivants :

CP : **1 à 8**	CE1 : **6 à 13**	CE2 : **9 à 16**
CM1 : **14 à 21**	CM2 : **17 à 24**	CM1 & CM2 : **16 à 23**
CE1 & CE2 : **8 à 15**	CE2 & CM1 : **9 - 10 - 12 - 14 - 16 - 18 - 20 - 22**	

CE2 & CM1 & CM2 : **9 - 12 - 14 - 15 - 17 - 19 - 21 - 23**

CE1 & CE2 & CM1 : **8 - 11 - 13 - 15 - 17 - 18 - 19 - 21**

CE1 & CE2 & CM1 & CM2 : **8 - 11 - 13 - 15 - 17 - 19 - 21 - 23**

CP & CE & CM : **1 - 4 - 7 - 10 - 13 - 16 - 19 - 21**

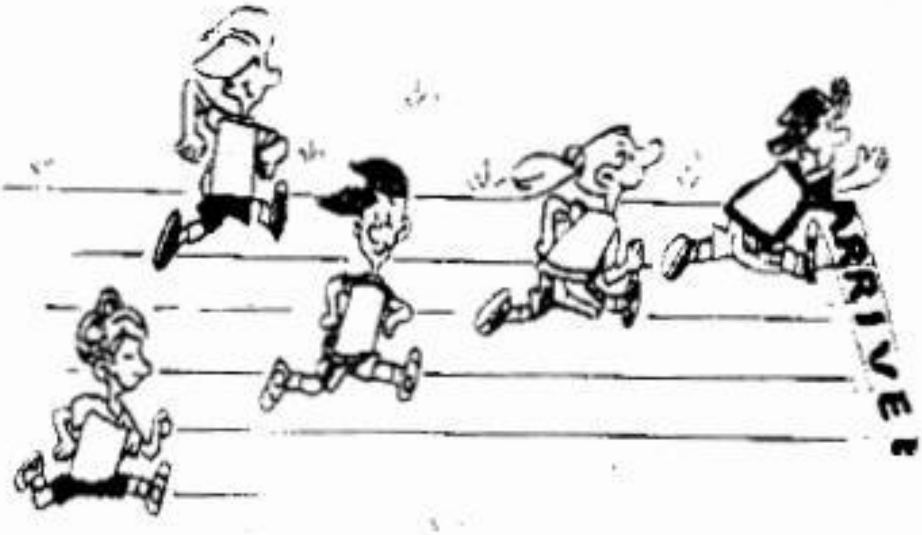
CP & CE1 : **1 - 3 - 5 - 7 - 8 - 9 - 11 - 13**

CP & CE1 & CE2 : **1 - 3 - 5 - 7 - 9 - 11 - 13 - 15**

Bon courage et bonne observation des stratégies des élèves. Nous restons à votre entière disposition pour répondre à toute question.

N° 1

A vos marques



	numéro du dossard
1er coureur	trente-cinq
avant-dernier coureur	nombre juste avant 60
5ème coureur	nombre compris entre 49 et 51
second coureur	10+10+10+6
3ème coureur	7 unités 1 dizaine

Sur chaque dossard, écris le bon numéro.

Entraînement 2000

N° 2

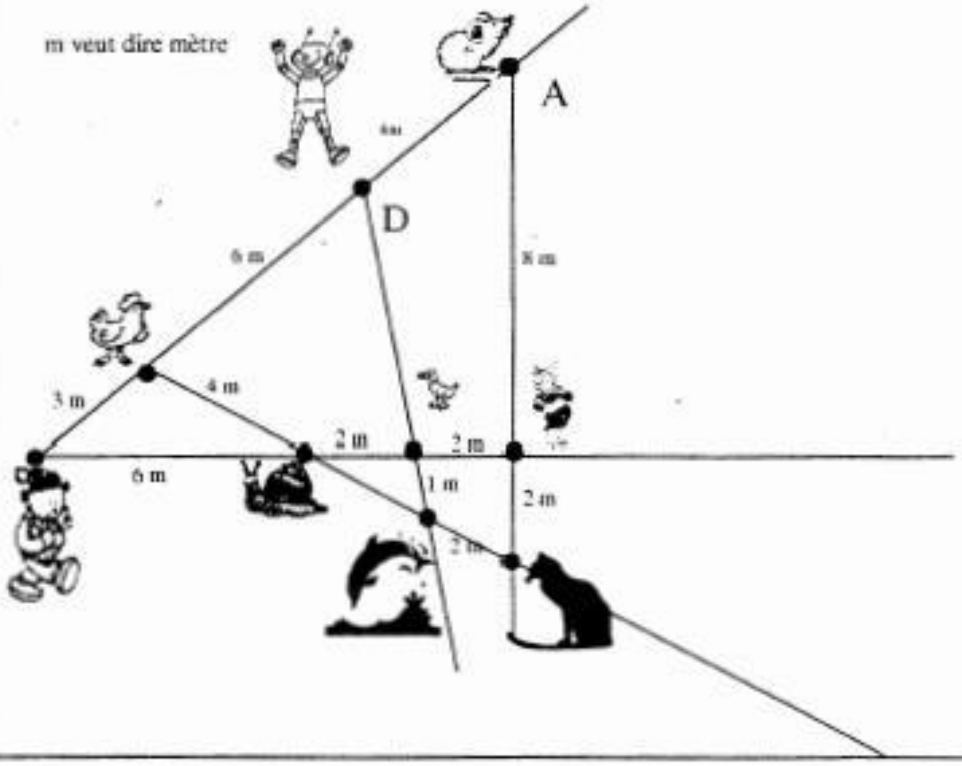
Salut à tous

Glup le martien est heureux, il va bientôt rentrer chez lui. Mais avant de partir il veut dire au revoir à tous ses amis.

Trace en rouge le trajet de Glup qui part de D et termine en A (il passe une seule fois auprès de chacun)

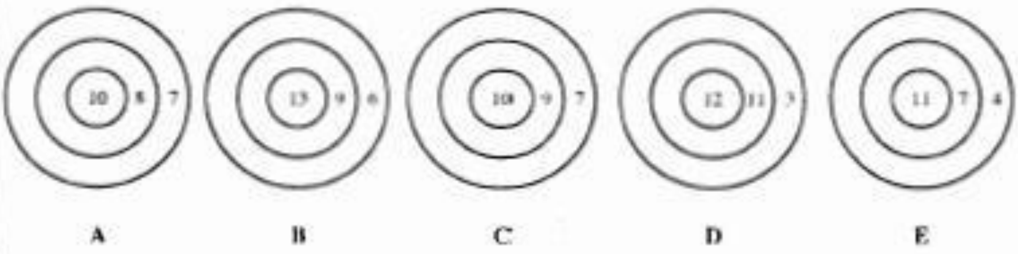
Quelle distance a-t-il parcourue ?

m veut dire mètre



N° 3

Robin des bois



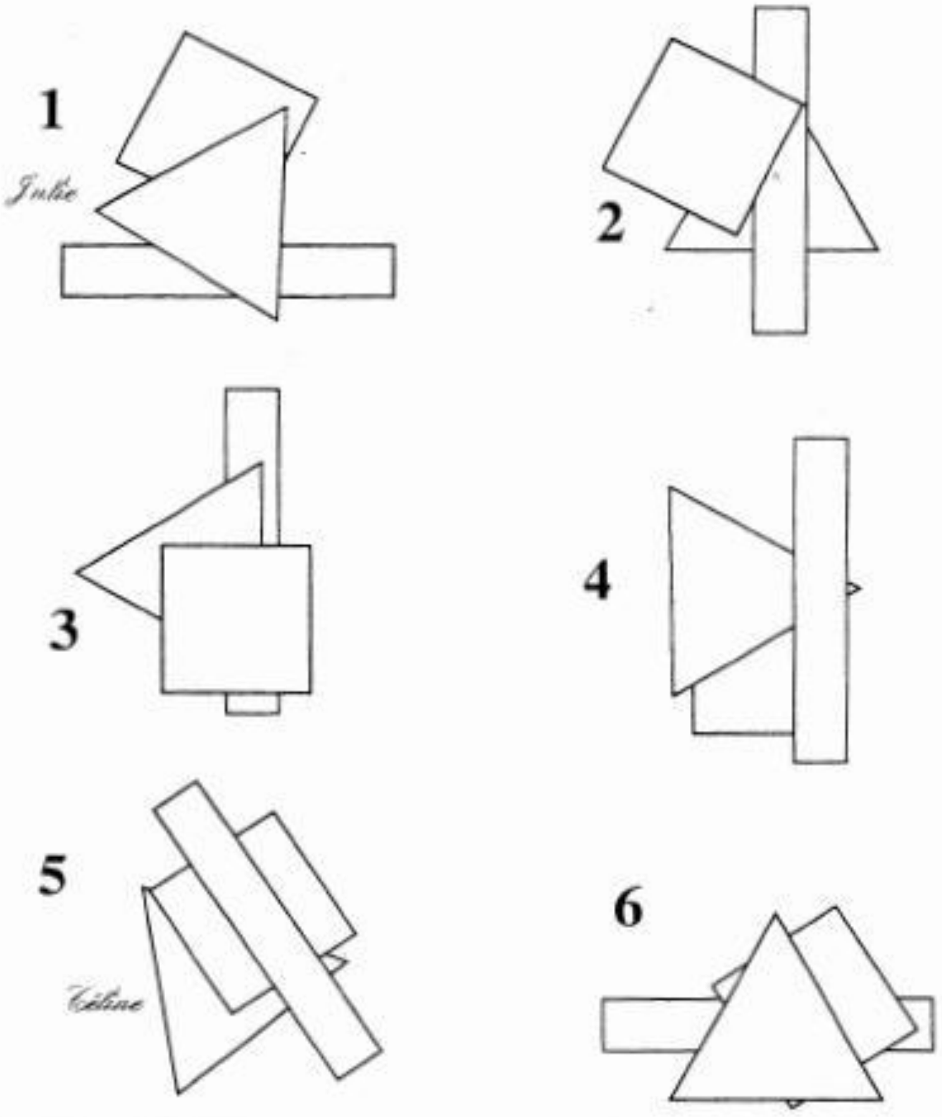
Dans quelles cibles peut-on marquer 25 points en plaçant 3 flèches ?

N° 4

A qui est-ce ?

4 enfants n'ont pas écrit leur prénom.
Marc dit : "J'ai placé le carré sous les deux autres."
Angèle ajoute: "J'ai d'abord posé le rectangle et ensuite le triangle".
"Moi, dit Jordan, j'ai mis le triangle sur les deux autres".
Enfin, Patrick déclare : " Le rectangle est entre les deux autres ".

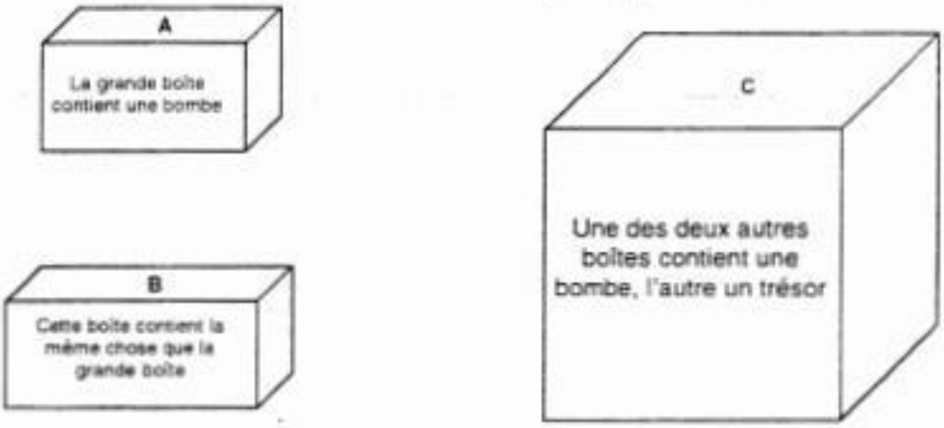
Rends à chacun son travail.



Entraînement 2000

N° 5

Choix décisif

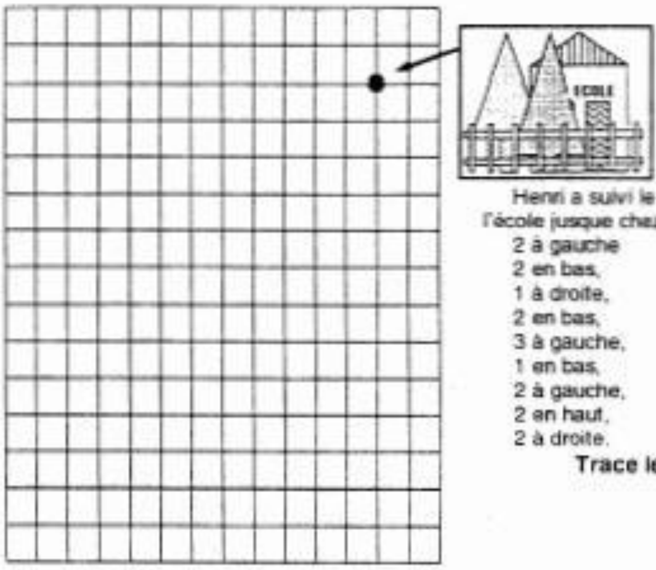


Une de ces boîtes contient un trésor, les deux autres une bombe.

Quelle est la boîte qui contient le trésor ?

N° 6

Le chemin des écoliers



Henri a suivi le chemin suivant pour aller de l'école jusque chez lui.

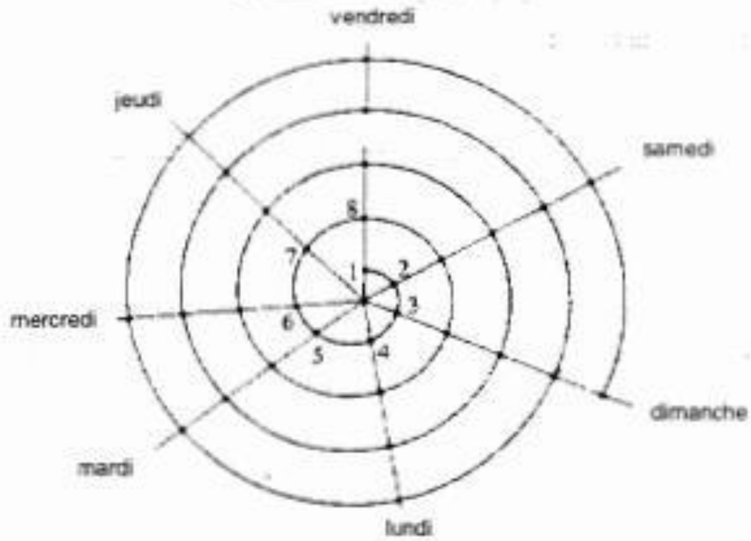
2 à gauche
2 en bas,
1 à droite,
2 en bas,
3 à gauche,
1 en bas,
2 à gauche,
2 en haut,
2 à droite.

Trace le chemin.

6

N° 7

Au fil des jours



En lisant ce dessin, on remarque que le 1er décembre 2000 tombera un vendredi.

Complète maintenant ce tableau.

tombera un	L	M	M	J	V	S	D
le 1er décembre					X		
Noël							
le dernier jour de l'année							

Iras-tu en classe le 13 décembre? Pourquoi?

N° 8

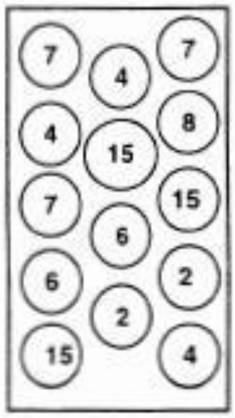
Allo

Tu trouveras la température de l' eau dans laquelle Pierre va plonger en additionnant les nombres qui n'apparaissent qu' une seule fois dans A et ceux qui n'apparaissent qu' une seule fois dans B.

A

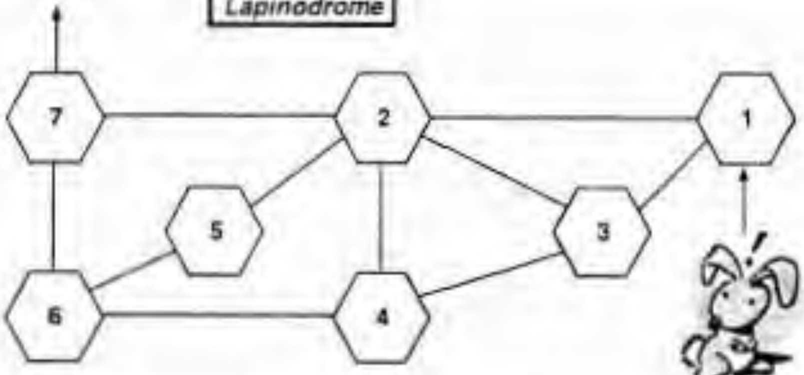
1	10	12	6	15
7	9	5	3	1
23	2	11	15	16
16	4	3	6	23
11	1	10	16	9
4	12	5	14	7

B



N° 9

Lapinodrome



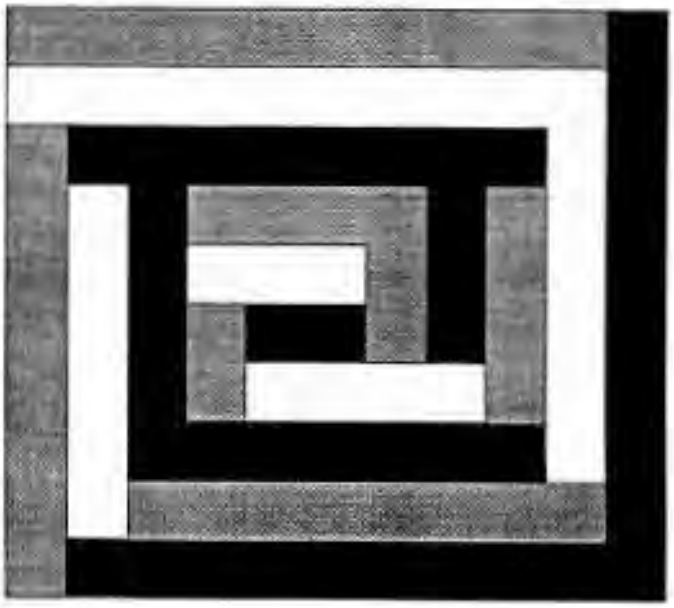
Le lapin entre en 1 et sort en 7.

Par combien de trajets différents peut-il passer sans jamais traverser une même alvéole plus d'une fois lors du même trajet ?

Exemples : (1.2.7) (1.3.2.7) (1.3.4.6.7) sont 3 trajets différents.

N° 10

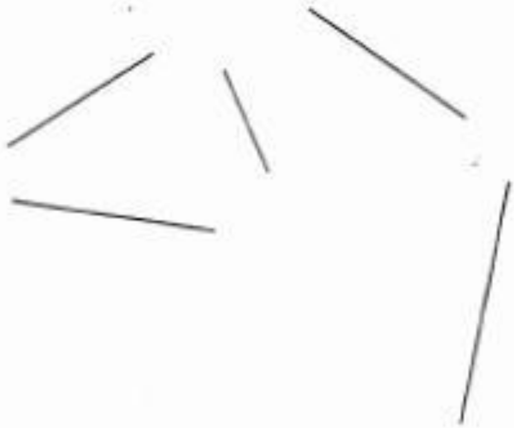
Le Maître à ruban



Quelle longueur de ruban de chaque couleur a-t-on utilisée?

N° 11

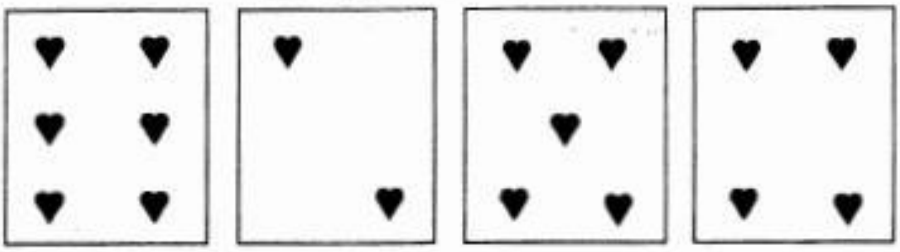
Traits tirés



Combien de triangles obtiendra-t-on en prolongeant ces traits ?

N° 12

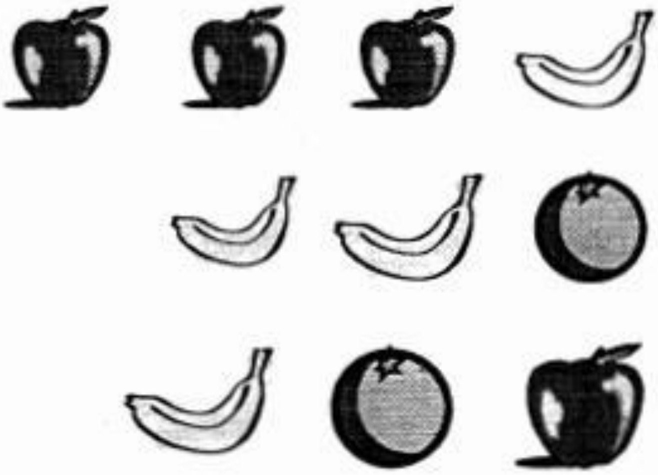
Poker



Trouver une carte dont la valeur est égale à la moitié de la somme de 2 autres.

N° 13

Salade de fruits



= 14 F

= 16 F

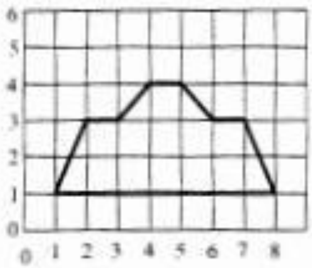
= 14 F

Combien coûte une orange?

N° 14

Quitte ou double ?

(1-1) (2-3) (3-3) (4-4) (5-4)...



Ecris le nouveau code du dessin en doublant les dimensions du dessin.

N° 15

On a gagné!

	Nantes	Saint-Denis	Lyon	Marseille
1/4 de finale	cat.1 750f cat.2 490f cat.3 250f	cat.1 750f cat.2 490f cat.3 350f cat.4 520f	cat.1 750f cat.2 490f cat.3 250f	cat.1 750f cat.2 490f cat.3 250f
1/2 finale		cat.1 1850f cat.2 1250f cat.3 800f cat.4 300f		cat.1 1850f cat.2 1100f cat.3 300f
finale		cat.1 2950f cat.2 1750f cat.3 950f cat.4 350f		

Pour la coupe du monde de football, deux personnes ont assisté ensemble à un match de quart de finale, à un match de demi-finale et à la finale.

Elles ont dépensé en tout 8900f (pour 2).

Quelles places ont-elles achetées à chaque match ?

N°16

A vos rangs! Fixe!

Un capitaine a 3 enfants. Je voudrais connaître leur âge respectif sachant que:

- Le produit de leurs âges est égal à 24.
- La somme de leurs âges est égale au nombre de marins sur le bateau (nombre impair compris entre 10 et 20).
- Le plus jeune ne sait pas encore nager.

Donne toutes les solutions possibles.

N°17

Vincent mit l'âne

Mille	Vingt	Quatre	Cent

Avec ces étiquettes, en les utilisant toutes à chaque fois, forme 2 nombres pour que la différence soit la plus petite.

Quelle est cette différence ?

Peux-tu trouver la même réponse si on te donne les étiquettes ?

Millions   Cent   Vingt   Quatre

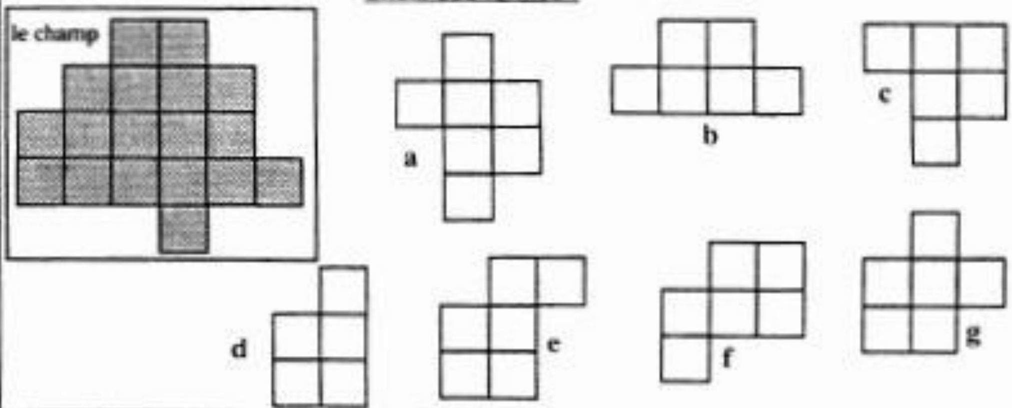
N° 18

Prendre l'aire pure

Un paysan partage son champ entre ses trois enfants. Il tient absolument à ce qu'ils aient tous des parts de formes superposables.

Aide-le à faire son partage en choisissant la forme qui convient.

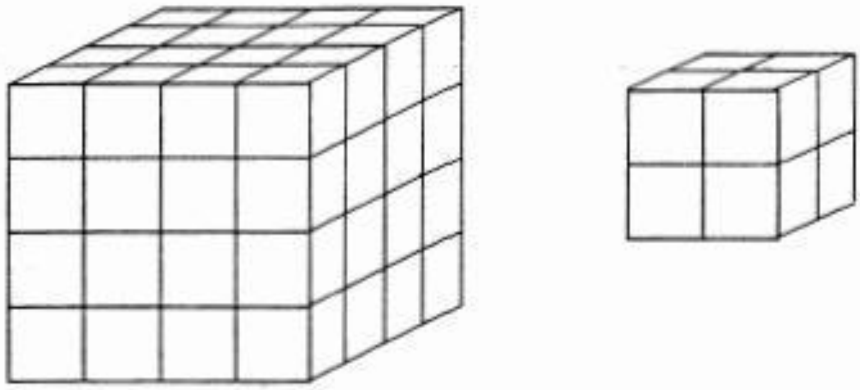
Choix des formes :



N° 19

Gros cubes poussez pas.

Combien y a t-il de façons possibles de placer le petit cube dans le grand ?



N° 20

Carrefour dangereux

	A	B	C	D	E	F
1					■	
2				■		
3			■			
4				■		
5	■	■				
6					■	

Horizontal

1) Double de 822.
2) Le chiffre des dizaines est égal à la somme des 2 autres. Carré de 5.
3) Les chiffres des unités et des dizaines sont identiques. Le chiffre des unités est égal à la différence des deux autres.
4) Le chiffre des unités est égal au quotient des deux autres.
   Carré d'un nombre impair multiplié par 10.
5) Son chiffre des dizaines est égal à la somme des deux premiers et la somme des trois premiers nous donne le dernier.
6) 55 centaines.

Vertical

A) (5x100)+(8x10)+9+(1x1000)
B) Tous ses chiffres se suivent .
C) Le chiffre des unités est la moitié du chiffre des dizaines. 11 dizaines.
D) Premier nombre de deux chiffres.
E) Le chiffre des dizaines est égal à la somme des 3 autres.
F) Le chiffre des centaines de mille est la moitie du chiffre des unite et la somme de ses chiffres est 13 .

N° 21

Bzzz ! Bzzz !

Deux villes distantes de 800 km sont reliées par une double voie de chemin de fer. A un moment donné, deux trains roulant à 100 km/h quittent chacune des deux villes en direction de l'autre.

Une mouche dont la vitesse est de 150 km/h commence alors un aller-retour ininterrompu entre ces deux trains.

Quelle distance aura-t-elle parcourue au moment où les 2 trains se croisent ?

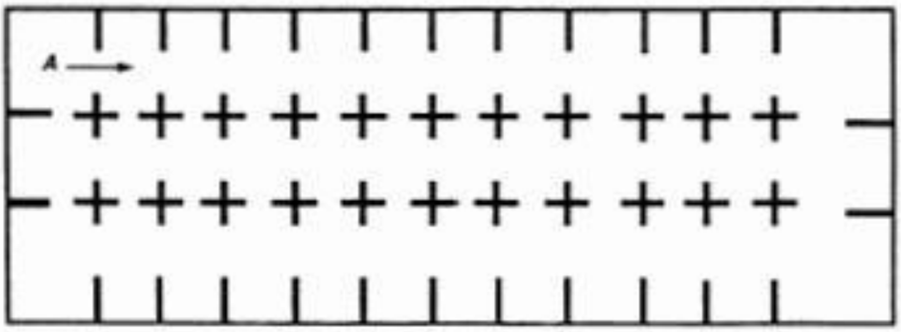
N° 22

Veille au grain

Monsieur Folnambule, veilleur de nuit à la CASDEN doit faire des rondes dans la salle des coffres. Il doit traverser toutes les salles une seule fois. Il part de A dans le sens indiqué par la flèche et doit terminer sa ronde en A.

Pour déjouer les observations d'éventuels cambrioleurs Mr Prédesésous, le directeur lui a demandé de ne jamais faire deux rondes identiques.

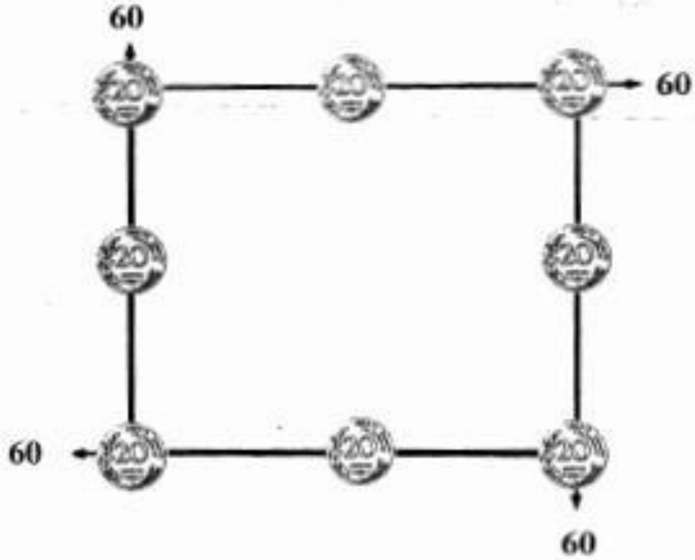
Donne 4 trajets différents



N° 23

Cent deux sous dessus

8 pièces de 20 centimes sont placées sur le périmètre d'une table.



Comment peut-on placer 4 pièces de 10 centimes supplémentaires sans les empiler, ni changer la valeur des côtés?

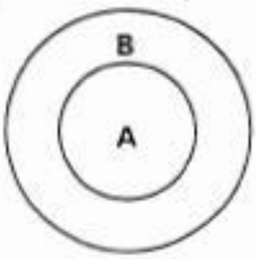
N° 24

Lance pierres

Pierre lance 3 fléchettes dans une cible comme celle-ci : deux dans le disque **A** et une dans la couronne **B**. Il marque 33 points.

Paul lance aussi 3 fléchettes, une dans **A** et deux dans **B**. Il obtient 27 points.

Combien de points obtient-on pour chaque fléchette dans le disque A et dans la couronne B ?



ANNEXE 2
Problèmes proposés dans l'atelier

Problème 1 [10 points]

Est-ce que le produit de deux nombres qui s'écrivent comme somme de deux carrés d'entiers est encore la somme de deux carrés d'entiers?

Problème 2 [15 points]

22 arbres sont mis en rond ; sur chaque arbre se pose un corbeau. Toutes les minutes, deux corbeaux se déplacent chacun sur un arbre voisin du leur. Est-il possible pour les corbeaux, après un certain nombre de minutes, de se rassembler tous sur le même arbre?

Problème 3 [20 points]

Étant donné deux points du plan distants de 1 km, peut-on construire la droite qui les joint en utilisant une règle et un compas de dimensions ordinaires? (Décrivez votre méthode)

Problème 4 [20 points]

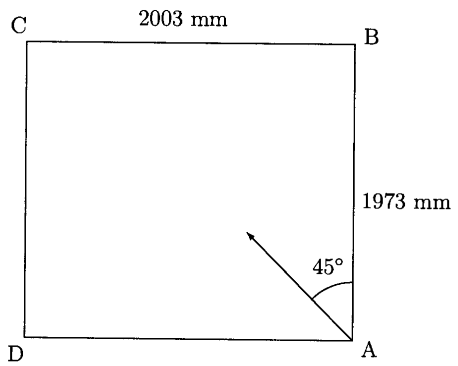
Par combien de zéros se termine le nombre 1000000!?

Problème 5 [25 points]

Une boule de billard part de l'angle A d'un billard rectangulaire de 1973 mm sur 2003 mm, selon la bissectrice de l'angle en A. Elle poursuit sa route sans perdre d'énergie en rebondissant sur les côtés, jusqu'à atteindre l'un des 4 angles. La boule s'arrêtera-t-elle

☐ en A? ☐ en B? ☐ en C? ☐ en D? ☐ jamais.

Attention : toute réponse fausse vous pénalise de 10 points.



Problème 6 [30 points]

Existe-t-il f, g et h trois polynômes de degré 2 tels que la composée $f \circ g \circ h$ soit un polynôme de degré 8 ayant pour racines 1, 2, 3, ... 8?

Problème 7 [30 points]

Le quotient de deux entiers inférieurs à 1000 est 0.6786389 (à la calculatrice). Quels sont ces deux entiers?

ANNEXE 3

1

Rallye Mathématique de Franche-Comté 2004 : épreuve d'entraînement

Les classes de troisième doivent résoudre les exercices 1 à 6 ; les classes de seconde doivent résoudre les exercices 4 à 9.
La classe doit rendre une seule réponse par exercice traité. Une fiche réponse est prévue à cet effet.

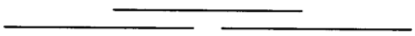
1- Construction avec des allumettes

Pour construire des figures géométriques, on ne dispose que de sept allumettes, chacune mesurant exactement 3 centimètres.

Le but est de placer le milieu d'un segment [AB] de longueur 11,5 centimètres avec pour seuls outils les sept allumettes.

Représentez en couleur la position des sept allumettes sur le dessin de la fiche réponse.

Remarque : l'alignement de deux allumettes nécessite l'utilisation d'une troisième allumette comme l'illustre le schéma ci-dessous.



2- Quand 2003 se plie en 4

Le 31 décembre 2002 au soir, le programme qui gère l'illumination de la tour Eiffel est pris d'un virus hors du commun : la quadrimania !
Il refuse d'utiliser tout chiffre qui n'est pas un 4, mais permet tous les calculs habituels que l'on trouve sur une calculatrice : addition/soustraction, multiplication/division, puissance, racine carrée, parenthèses, etc.

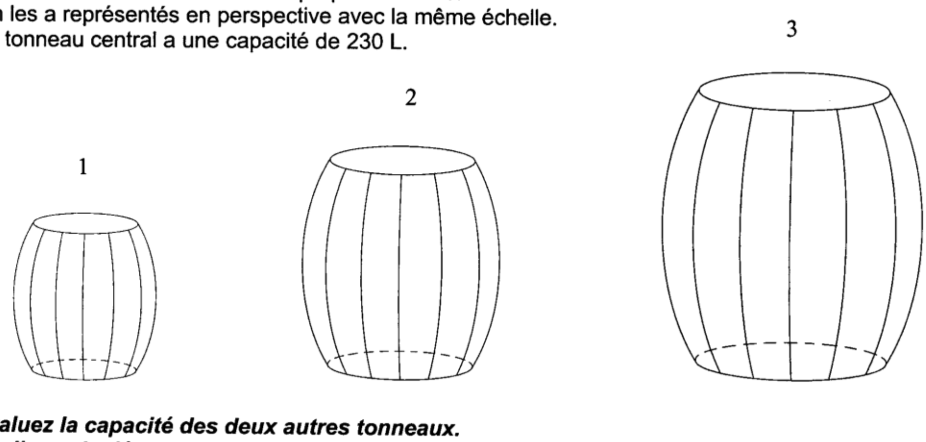
Pour ne pas décevoir les milliers de personnes qui attendent la nouvelle année devant la tour, ainsi que les millions de téléspectateurs, l'informaticien propose, dans l'urgence, le calcul suivant :

$$\frac{4444-444}{\sqrt{4}}+4-\frac{4}{4}$$

Auriez-vous été capable de programmer à votre tour l'affichage du nombre 2003, en utilisant le moins de chiffres 4 possible ? Proposez alors un affichage.

3- Réserve de tonneaux

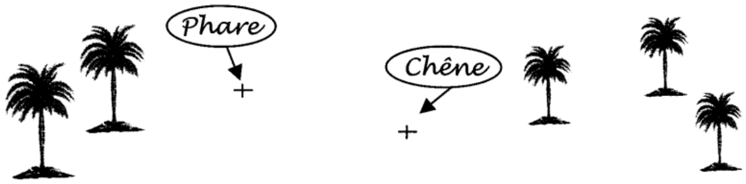
Trois tonneaux ont des mesures proportionnelles.
On les a représentés en perspective avec la même échelle.
Le tonneau central a une capacité de 230 L.



Evaluez la capacité des deux autres tonneaux.
Expliquez la démarche que vous avez utilisée et précisez vos calculs.

4- SOS pour pirate manchot

Le pirate anglais Pad Barb tient sa vengeance, il a enfin localisé la cache secrète de son ennemi juré, le corsaire français Naquinheuil.
Il lui suffit de trouver sur sa carte la position symétrique du phare de l'Ile des Mouettes par rapport au vieux Chêne des Pendus.
Mais il y a un os : le pirate a perdu un bras lors de son dernier affrontement avec Naquinheuil, il ne peut donc pas utiliser de règle et n'a que son vieux compas à sa disposition.



Aidez-le à trouver une méthode pour débusquer sur sa carte la cachette de son ennemi. (On prendra soin de laisser les arcs de cercles utiles à la construction sur la fiche réponse)

5- Trio de tête

On procède à l'élection du président d'un club comptant 48 membres.
Il y a trois candidats : Jacques, Michel et Richard.
Chaque électeur classe les trois candidats dans son ordre de préférence sur son bulletin de vote.
Le mode de scrutin retenu consiste à élire le candidat cité en première position le plus grand nombre de fois.
En cas d'ex æquo, le candidat cité le plus grand nombre de fois en deuxième position est élu.

Au dépouillement, on constate qu'il y a au moins un bulletin de vote pour chacun des six classements possibles. De plus :

¤ Jacques a été plus souvent classé devant Michel que Michel devant Jacques.

¤ Michel a été plus souvent classé devant Richard que Richard devant Michel.

A la surprise générale, Richard remporte l'élection.

Donnez un exemple de répartition des 48 votes correspondant à cette situation.

6- Pneu à pneu on fait sa route ...

Quelle distance peut-on parcourir avec une voiture disposant de 7 pneus neufs, sachant que chaque pneu peut faire 40 000 km ?

7- Enchaînement d'entiers

On considère un nombre entier *n* compris entre 2 et 99.
En partant de *n*, on construit une chaîne de nombres de la façon suivante :
¤ si un nombre *k* de la chaîne est pair, le suivant s'obtient en divisant *k* par 2,
¤ si un nombre *k* de la chaîne est impair, le suivant s'obtient en multipliant *k* par 3 et en ajoutant 1.
La longueur de la chaîne est le nombre d'entiers nécessaires pour atteindre le nombre 1.

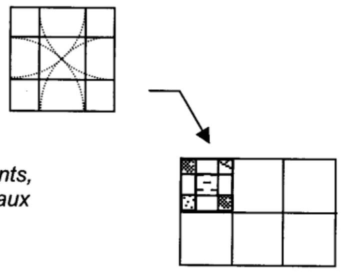
Exemple en prenant *n* = 20 : 20 – 10 – 5 – 16 – 8 – 4 – 2 – 1 est une chaîne de longueur 8.

Attention, les nombres utilisés dans chaque chaîne ne peuvent s'écrire qu'avec 1 ou 2 chiffres.

Quel est le nombre compris entre 2 et 99 qui possède la chaîne la plus longue ?
Donnez sa chaîne complète.

8- Division sacrée

En Grèce, en Europe ou encore en Egypte, on a retrouvé des plans de villes ou des décors construits selon la règle de la "division sacrée".



A partir d'un carré :
- on trace quatre quarts de cercle ayant chacun pour rayon la moitié de la longueur d'une diagonale et pour centre l'un des quatre sommets du carré.

- ces quatre quarts de cercle coupent les côtés du carré en huit points, que l'on joint deux à deux pour obtenir quatre segments parallèles aux côtés du carré.

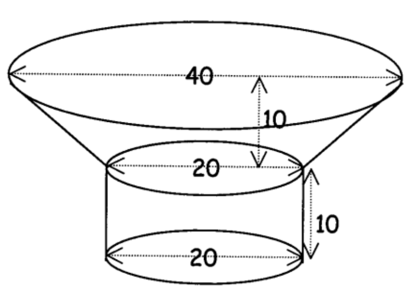
M. Bricol veut mettre dans sa cuisine un panneau mural en carrelage.
Ce panneau sera un rectangle constitué de six carreaux.
Chaque carreau, de forme carrée, sera partagé selon la "division sacrée", puis peint :
seuls seront peints le carré central et les quatre petits carrés, chacun d'une seule couleur.

M. Bricol a également les exigences suivantes, sachant qu'on ne dispose que de 4 couleurs différentes :

> ¤ Dans le panneau, deux carrés ayant un côté ou un sommet commun devront être de couleurs différentes.
> ¤ Sur le panneau rectangulaire, chaque couleur devra recouvrir exactement la même surface totale.

Faites une proposition à M. Bricol sous forme de maquette en respectant ses voeux.

9- Ras-le-bol



Un récipient en plastique transparent a la forme ci-contre :
Il est constitué :
¤ d'un cylindre droit de hauteur 10 cm et de diamètre 20 cm,
¤ d'un tronc de cône droit de hauteur 10 cm et dont le diamètre supérieur mesure 40 cm.

On désire graduer ce récipient tous les litres.

Proposez une méthode.
Marquez les graduations sur le récipient (on reproduira le schéma de la fiche réponse à l'échelle réelle sur une autre feuille, millimétrée si possible).

ANNEXE 4
Questionnaire destiné aux enseignants organisant le rallye dans leur classe (Rallye des Ardennes 2002)

Ce questionnaire a été distribué à l'issue de la finale du rallye mathématique des écoles en 2002.

Les questions :

1) *Pourquoi avez-vous décidé d'engager votre classe dans un rallye ?*

2) *Selon vous, la participation au rallye a-t-elle des effets sur les apprentissages mathématiques de vos élèves ?*

3) *La participation au rallye a-t-elle une influence sur la pratique des mathématiques dans votre classe ?*

4) *Combien de temps consacrez-vous à la préparation des épreuves ? (temps de travail en classe, fréquence des séances)*

5) *Comment organisez-vous le travail pour que la classe puisse résoudre 12 exercices en 50 minutes ?*

Quel dispositif est adopté pour l'organisation de la classe sans l'enseignant ? (finale)

6) *Comment est construit ce dispositif avec les enfants ?*

7) *Des projets sont-ils mis en place dans votre classe favorisant un travail de coopération entre vos élèves ? (lesquels ?)*

Quelques réponses

Question 1

Pour favoriser le travail de groupe, le travail collaboratif (40%)

→« Pour confronter les élèves à différents problèmes, qu'ils ne font pas forcément en classe ».

→ « Pour la cohésion du groupe, la motivation pour les maths ».

→ « Pour un entraînement au travail de groupe »

→ « Pour la compétition, pour la diversité des exercices »

→ « Pour favoriser la motivation, s'engager dans un défi collectif où chacun peut amener ses réflexions et les justifier »

→ « Pour sortir des exercices traditionnels »

→ « Pour finaliser les travaux de l'année »

→ « Pour une ouverture de la classe et l'étalonnage avec d'autres établissements »

Question 2 : très peu de réponses

→ « oui » (35%), « non » (2 fois)

→ « surtout développement des qualités telles que l'écoute, l'argumentation »

→ *« Développement de l'esprit logique » (2 fois)*
→ *« Prise de conscience de l'existence de problèmes non numériques »*
→ *« Oui, car on apprend à chercher et à justifier »*
→ *« Non – Ils ne reproduisent pas en classe les méthodes de recherche utilisées pendant le rallye »*
→ *« Les élèves sont plus motivés »*

Question 3

(plusieurs « oui » non justifiés, quelques « non »)
→ *« Oui, on fait référence à certains exercices du rallye »*
→ *« Les grandes notions abordées partent très souvent de situations problèmes pouvant relever du rallye mathématique »*
→ *« Réinvestissement de méthodes de travail, se relire, se concerter, ai-je répondu à la question ? »*
→ *« Pratique de résolution de problèmes par travail en groupes hétérogènes »*
→ *« Les élèves connaissent une approche différente des mathématiques par le biais des entraînements »*

Question 4

→ *« Pas de temps supplémentaire »*
→ *« 5 à 6 heures + quelques exercices tirés des archives RM, donnés en guise d'exercices d'appui à une séquence - non quantifié.»*
→ *« 3 à 4 entraînements » (3 fois).*
→ *« 4 séances d'une heure trente pour tous les enfants et un atelier au fond de la classe pour les plus rapides à partir de Noël »*
→ *« Un entraînement spécifique dans les conditions de l'épreuve, la séance pour la qualification, d'autres séances selon qu'on est qualifié ou pas »*
→ *« 2 ou 3 heures »*
→ *« Séance d'entraînement : épreuve + temps de correction assez long pour mettre en lumière les stratégies. Une fois tous les 15 jours, les élèves sont confrontés à des défis mathématiques en groupes »*
→ *« 2 séances d'une heure + une demi-heure de correction à chaque fois »*
→ *« une séance tous les quinze jours »*

Question 5

Groupes hétérogènes et répartition des problèmes (plusieurs réponses)
Coopération entre les plus forts et les faibles (trois réponses)

→ *« En groupe, la confrontation finale se fait avec un représentant de chaque groupe »*
Dans une classe de CP-CE1 : « 5 groupes de travail ; 5 min de lecture des problèmes par le leader avec surlignage des consignes et classement des épreuves suivant leur difficulté, 30 min de travail par groupe. 10 min de synthèse par les responsables des résultats trouvés. »

→ *« Grouper les enfants, 6 groupes de 3 enfants. Ils ont les 12 problèmes et chacun doit en faire au moins 6. Après une première lecture, les enfants choisissent les 6 problèmes…. »*

→ *« Recherche libre sans organisation spécifique dans un premier temps ; à partir des constats effectués, définition collective d'un mode d'organisation adapté. »*

→ *« Chaque enfant possède les exercices, les résout, puis les plus rapides confrontent ensemble leurs résultats »*

→ *« Travail en petits groupes avec confrontation des résultats entre deux groupes qui ont travaillé sur le même problème. Discussion et choix d'un résultat. Reprise des problèmes qui ont posé des difficultés ».*

→ *« Petits groupes hétérogènes représentant les trois niveaux de la classe, les grands venant au secours des petits » (Classe de CP/CE1/CE2).*

→ *« Division de la classe en groupes hétérogènes (4 élèves par groupe), répartition des exercices (exemple : 4 faciles + 1 difficile), alternance des travaux : seul, confrontation des résultats, confrontation générale. »*

→ *« Répartition en groupes de même niveau, chaque groupe a deux exercices (1 facile, 1 plus dur) puis après résolution, aident les autres. Synthèse : chaque groupe présente sa solution aux autres : discussion ».*

Question 6

Dans tous les cas, le dispositif est mis en place par l'enseignant avec parfois une « discussion » avec les élèves.

Question 7

Tutorat CE/CM
Défi lecture
Rédaction d'un journal.

ANNEXE 5
Quelques ressources sur les Rallyes

http://www.univ-irem.fr/
http://www.apmep.asso.fr
http://www.animath.fr
http://www-irem.univ-fcomte.fr/rallye/index.htm
(sites disposant d'un catalogue de sites web « Rallye »)

[1] ***250 problèmes pour nos élèves***. I.R.E.M. de Lyon Université Claude Bernard-Lyon 1. Mai 1993.

[2] A.P.M.E.P. ***Fichier Evariste***. Coédition A.P.M.E.P./les Editions du Kangourou.

[3] A.P.M.E.P. ***Jeux 4*** *« de l'intérêt des problèmes de rallyes ».* Publication de l'A.P.M.E.P. 1995 - n° 97.

[4] ***AASSILA*** **M**. *300 défis mathématiques*. Editions Ellipses.

[5] ***ARSAC*** **G. GERMAIN G. MANTE M.** *Problème ouvert et situation-problème* I.R.E.M. Académie de Lyon.

[6] ***Comité*** **International des Jeux Mathématiques**. *PanoraMath 2.* Panorama 2000 des compétitions mathématiques. CIJM Paris 1999 - Coédition CIJM-APMEP-ACL.

[7] ***Comité*** **International des Jeux Mathématiques**. *PanoraMath96.* Panorama 1996 des compétitions mathématiques. CIJM Paris 1996. Coédition CIJM-APMEP-ACL.

[8] ***ERMEL Vrai ? Faux ? ...On en débat !*** *De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3.* Institut National de Recherche Pédagogique Paris 1999.

[9] La fraction du bicentenaire, *championnat de France, volume n° 5.* Jeux mathématiques et logiques , Hatier collection jeux mathématiques sous la direction de Gilles COHEN.

[10] ***HALMOS*** **P**. *Problèmes pour mathématiciens petits et grands*. Le sel et le fer, CASSINI Paris 2000.

[11] ***Le plaisir de chercher en mathématiques et autres textes de didactique.*** Publication de l'I.U.F.M. de Nice. Université de Nice-Sophia-Antipolis - Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques et Institut Universitaire de Formation des Maîtres de l'Académie de Nice (mai 1996).

[12] ***Le Rallye mathématique transalpin ; Quels profits pour la didactique ?*** Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin - Brigue 1997-1998. Dipartemento di Matematica dell'Università di Parma/Institut de Recherche et de Documentation Pédagogique Neufchâtel. Éditeurs responsables : GRUGNETTI L. et JAQUET F.

[13] ***Évolution des connaissances et évaluation des savoirs mathématiques*. Actes des journées d'études sur le *Rallye mathématique transalpin***. Siena 1999 Università di Siena Dipartemento di Matematica « Roberto Magari »/Institut de Recherche et de Documentation Pédagogique Neufchâtel. *RMT* - Neufchâtel 2000. Editeurs responsables : GRUGNETTI L. (Parma), JAQUET F. (Neufchâtel), CROCIANI C., DORETTI L. SALOMONE L. (Siena).

[14] ***PEAULT* Hervé** *Un Rallye pour débattre de Mathématique*, 4 années d'expérience du Rallye mathématique de Maine-et-Loire, épreuves – résultats - commentaires. C.R.D.P. des Pays de la Loire / C.D.D.P. de Maine-et-Loire 1989-1993.

[15] ***SOULAMI* T.B.** *Les olympiades de mathématiques* - Réflexes et stratégies. Editions Ellipses.

[16] La ***revue*** **TANGENTE Tangente** ***Arithmétique.*** Secrets de nombres. Tangente hors série n° 6. Editions Archimède.

LE RÔLE DES PRATIQUES LANGAGIÈRES DANS LES APPRENTISSAGES MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

Muriel Fénichel
I.U.F.M. de Créteil

Résumé :
Cet atelier avait pour objectif d'amorcer une réflexion :
- sur l'apprentissage à la description du monde mathématique avec des mots, des expressions qui désignent les objets mathématiques et les relations entre les objets mathématiques,
- le rôle des pratiques langagières dans la construction des concepts mathématiques et sur la manière dont on peut utiliser les propositions des élèves de l'école élémentaire
  * d'une part dans la formation initiale et continue des enseignants,
  * et d'autre part dans la pratique de la classe de l'enseignant qui les a mises en place pour aider ses élèves à apprendre en mathématiques.

Cet atelier a déjà été proposé lors du colloque de la COPIRELEM organisé en 2002 à La Roche sur Yon.

Je ne reprendrai donc pas les différents points qui ont été évoqués à la Roche sur Yon et qui ont été développés dans les actes de ce colloque. Les participants à l'atelier du colloque d'Avignon pourront s'y reporter.

Dans un premier temps, je présenterai les pistes de réflexion proposées aux participants à l'atelier concernant la mise en place d'un langage propre à la description du monde mathématique à travers certaines pratiques langagières.

Dans un second temps, j'évoquerai des activités de pratique langagière proposées à des élèves de l'école élémentaire pouvant participer à la construction des concepts mathématiques et les questions que leur analyse ont suscité au sein du groupe de participants.

A) APPRENDRE À DÉCRIRE LE MONDE MATHÉMATIQUE

1) Les mots et les expressions qui désignent des objets ou des relations entre les objets

Le passage de la langue courante à la langue mathématique est un enjeu incontournable de l'enseignement des mathématiques.

De nombreuses erreurs sont dues au fait qu'un même signifiant peut désigner des signifiés différents selon le contexte référent.

Par exemple, le verbe « doubler » a un sens différent selon qu'il est associé au mot nombre ou au mot voiture. Un élève peut donner la réponse 6, quand on lui demande de doubler le nombre 5. Cette erreur déjà mise en évidence par Stella Baruk, peut être due au fait que l'élève associe le verbe « doubler » au mot voiture et dans ce cas, doubler une voiture signifie passer devant.

Il faut beaucoup de temps avant que les élèves puissent évoquer tout de suite le bon signifié.

On peut citer, à ce propos, quelques extraits des documents d'applications des programmes de mathématiques aux cycles 2 et 3.

«L'enseignement des mathématiques donne lieu, dès l'école élémentaire, à l'apprentissage d'un vocabulaire précis. Les interférences entre « mots courants » et « mots mathématiques» peuvent être sources de confusion auxquelles l'enseignant doit être attentif (....) De plus, la mise en place d'un vocabulaire précis ne remplace pas la construction des concepts. Ce vocabulaire n'a de sens que lorsque le concept est en construction et a déjà été utilisé implicitement par les élèves »

La langue mathématique s'apprend en se pratiquant. Il s'agit d'utiliser la langue courante pour construire des mathématiques mais aussi pour apprendre à parler la langue des mathématiques. Il s'agit de préparer les élèves à la langue que l'on va utiliser pour faire des mathématiques.

Les participants de l'atelier ont été amenés à mettre en évidence le fait qu'il y des mots et expressions qui sont utilisés :

- uniquement dans le domaine des mathématiques (polyèdre, bissectrice, équipollent, poser une opération....),
- dans d'autres domaines que les mathématiques alors que leur sens premier est mathématique : le vecteur d'une infection, une croissance exponentielle...
- en mathématiques et dans d'autres domaines en désignant des signifiés différents : le centre d'un cercle, le centre d'une ville, un sommet d'un triangle, le sommet d'une montagne, le produit de deux nombres, un produit de consommation,…

D'autre part, en mathématiques, un mot ne doit pas seulement être lu pour ce qu'il désigne mais aussi pour les propriétés qui lui sont attachées. Par exemple, les consignes suivantes ont été proposées aux participants :

- colorier en rouge tous les rectangles et en bleu tous les carrés
- construire un carré dont la diagonale a pour longueur 6 cm,
- construire un carré dont le côté a pour longueur 6 cm,
- construire un rectangle dont le périmètre est égal à 24 cm et dont l'aire est maximale

Leur analyse a révélé le fait que, dans chacune d'elles, le mot « carré » ne fait pas appel aux mêmes propriétés

Il est important de prendre en compte ces différents points tant en formation initiale qu'en formation continue. En effet, trop souvent, les enseignants n'ont pas conscience que ce qu'ils disent n'est pas entendu par leurs élèves, soit parce qu'ils ne peuvent imaginer que ces derniers ne se réfèrent pas au même domaine qu'eux (ici les mathématiques), soit parce qu'eux-mêmes emploient un langage peu précis et ambigu pour parler de mathématiques.

450

Il semble aussi nécessaire de leur donner des outils pour leur permettre d'analyser la manière dont sont évoqués les objets mathématiques et les relations entre les objets dans les documents qu'ils utilisent avec leurs élèves. Bien souvent, ces documents utilisent des expressions erronées qui peuvent être sources de difficulté à la construction des connaissances (par exemple, l'utilisation de l'expression «nombre décimal » à la place de l'expression « écriture décimale »)

A l'école élémentaire, il s'agit de sensibiliser les élèves à cette polysémie : en même temps, qu'ils découvrent ou approfondissent une notion, il semble important de distinguer les différents sens que peut prendre un même mot ou une même expression et de mettre en clairement évidence ce qui relève du domaine des mathématiques.

Par exemple, à propos d'une activité autour des patrons des polyèdres, il est possible de demander aux élèves de donner plusieurs significations de ces mots et, ensuite, de mettre en évidence le sens qu'ils recouvrent en mathématique.

Il semble aussi important de faire exprimer les relations qui existent entre les différents objets mathématiques :

Par exemple, à propos d'une leçon sur les longueurs, il est possible de demander aux élèves d'exprimer les relations entre mètre et centimètre. A propos d'activités concernant la notion de multiple, il est possible de demander aux élèves de traduire l'expression « 63 est un multiple de 7 ».

Quelques exemples de telles pratiques langagières intégrées dans les activités mathématiques de la classe ont été proposés aux participants.

2) Donner du sens aux écritures symboliques

La langue mathématique est aussi une langue de symboles, une langue qui s'appuie sur des conventions. Ces dernières doivent explicitement être évoquées aux élèves. Par exemple, il est intéressant de leur dire que l'écriture à virgule d'un nombre décimal est une écriture conventionnelle qui a été introduite pour faciliter l'exposition des calculs.

A l'école élémentaire, de nombreuses écritures symboliques sont introduites et il s'agit de proposer aux élèves des activités pour leur donner du sens.

On peut alors faire l'hypothèse que formuler et faire formuler les relations sous-jacentes à ces écritures contribuent à leur donner du sens.

Les exemples suivants relatifs aux écritures additives, soustractives et multiplicatives ont été proposés aux participants de l'atelier :

Formuler avec des mots l'écriture :

- *5 + 4 = 9*
- *125 - 78*
- *4 x 5 = 20*

Voici quelques propositions pour 5 + 4 = 9 :

- des formulations se référant à des contextes : nous sommes le quatre, dans cinq jours, nous serons le neuf
- des formulations hors contexte : cinq plus quatre égale neuf où on désigne chaque symbole par un mot, formulation qui peut marquer l'absence de sens, la somme de quatre et cinq, ça fait neuf, quand j'ajoute cinq à quatre, je trouve neuf...
- des formulations qui font apparaître le lien entre signifié et signifiant : cinq plus quatre, c'est la même chose que neuf.

A ce propos, une discussion entre les participants permet alors d'évoquer la signification du signe « = » : pour un élève de l'école élémentaire, il évoque un calcul à faire, le résultat d'une opération. Doit-on lui donner le sens de l'équivalence ? Est-il satisfaisant de le traduire par l'expression «pas plus, pas moins» ? D'autre part, l'ensemble de référence joue un rôle important dans la signification d'une telle écriture : quand on se réfère à un ensemble de symboles, l'écriture $5 + 4 = 9$ n'a pas de sens alors que quand on se réfère à un ensemble de nombres désignant des quantités, $5 + 4 = 9$ a du sens dans la mesure où $5 + 4$ et 9 représentent la même quantité.

Pour l'ensemble des participants, il semble nécessaire de proposer des égalités du type $5 + 4 = 6 + 3$ sans passer par l'intermédiaire de 9.

D'autres formulations peuvent être évoquées :

- neuf, c'est cinq (quatre) de plus que quatre (cinq)
- de cinq (quatre) pour aller à neuf, il faut ajouter quatre (cinq).

On peut aussi évoquer les égalités qui se déduisent de $5 + 4 = 9$

$9 – 5 = 4$ et $9 – 4 = 5$.

Voici quelques propositions pour 125 - 78 :

- des formulations se référant à un contexte : j'ai cent vingt cinq euros et je dépense soixante dix-huit euros ;
- des formulations moins contextualisées : cent vingt-cinq moins soixante dix-huit, la différence entre cent vingt-cinq et soixante dix-huit, l'écart entre cent vingt-cinq et soixante-dix huit, ce qu'il faut ajouter à soixante-dix huit pour obtenir cent vingt-cinq, ce qui manque à soixante dix-huit pour obtenir cent vingt-cinq.

De même pour 4 x 5 = 20

- des formulations se référant à un contexte : vingt fauteuils, c'est quatre (cinq) rangées de cinq (quatre) fauteuils ;
- des formulations moins contextualisées : quatre fois cinq égalent vingt, vingt est un multiple de quatre (cinq), quatre (cinq) est un diviseur de vingt, vingt est dans la table de quatre (cinq), vingt est cinq (quatre) fois plus grand que quatre (cinq).

Généralement, les enseignants en formation initiale ou continue n'ont pas conscience de toutes ces traductions. Il semble important de les faire émerger afin de montrer que le sens d'une écriture symbolique se construit tout au long de la scolarité et que ces activités langagières peuvent permettre à leurs élèves de mieux calculer et de mieux résoudre les problèmes numériques en s'appuyant sur les relations explicites entre les nombres.

Ces activités peuvent être aussi l'occasion d'aborder ce qu'est un champ conceptuel.

Ce travail de formulation des écritures symboliques peut suggérer d'autres exemples de pratique langagière permettant d'en approfondir le sens. En voici quelques exemples :

- écrire un énoncé de problème dans lequel on trouve le mot « gagner » et où la solution se trouve en faisant une soustraction.
- écrire un énoncé de problème dans lequel on trouve l'expression « de moins que » et où la solution se trouve en faisant une addition.
- écrire un énoncé de problème dans lequel on trouve l'expression « fois plus » et où la solution se trouve en faisant une division.

452

Un travail analogue peut être envisager pour donner du sens à d'autres écritures symboliques introduites à l'école élémentaire : l'écriture fractionnaire, l'écriture à virgule, les écritures utilisant les symboles « > » et « < ».

B) PRATIQUES LANGAGIÈRES ET CONSTRUCTION DES CONCEPTS

Dans la seconde partie de l'atelier, les participants ont été amenés à donner leur point de vue sur le compte-rendu d'activités de pratique langagière proposées à des élèves de l'école élémentaire. L'objectif de ces activités est de faire écrire, parler en mathématiques pour aider à mieux construire les connaissances.

1) Mettre en évidence les liens qui existent entre les différentes connaissances, de faire apparaître le réseau conceptuel.

Les connaissances ne se construisent pas de manière isolée, elles se construisent en interaction avec d'autres. Elles font partie d'un réseau dont les différentes connections sont établies avec d'autres connaissances. Un concept ne peut avoir d'existence que s'il est en liaison avec d'autres concepts.

Il semble important d'aider les élèves à mettre en relation les différentes connaissances qu'ils sont en train d'acquérir afin qu'ils prennent conscience de la manière dont elles se construisent en leur donnant du sens. Trop souvent, les activités à partir desquelles les apprentissages mathématiques sont mis en place sont perçues comme des moments isolés. Peu nombreux sont les élèves qui sont capables d'en construire les liens qui les unissent et qui permettent de donner du sens aux connaissances en jeu.

A propos d'apprentissages en cours, certains enseignants avec lesquels nous travaillons ont mis en place des moments de pratique langagière afin de faire apparaître chez leurs élèves les liens qui tissent le réseau de connaissances en train de se construire.

En voici quelques exemples illustrés par les réactions des participants de l'atelier auxquels il était demandé une analyse :

a) En CP au mois d'avril : « explique à ta manière à quoi sert un nombre » (cf annexe 1)

Voici les analyses à priori et à postériori de cette séance :

Analyse a priori

L'objectif de cette activité est de faire le point sur ce que les élèves sont en train d'apprendre dans le domaine des nombres. Peuvent-ils évoquer avec leurs mots l'aspect outil de l'objet mathématique nombre qu'ils sont en train d'apprendre ?

On peut faire les hypothèses suivantes sur les propositions des élèves à cette époque de l'année :

- un nombre sert à compter
- un nombre sert à calculer

On peut aussi faire l'hypothèse qu'à travers toutes les propositions des élèves vont apparaître les différents contextes dans lesquels peuvent être utilisés les nombres.

On peut reprendre ceux évoqués par Karen Fuson (Chemin du nombre) qui en distingue sept contextes qu'elle répartit en quatre classes :

Les contextes mathématiques :

- le contexte cardinal où le nombre quantifie une collection d'éléments discontinus (réponse à la question "Combien?") ;
- le contexte ordinal où le nombre décrit l'ordre d'un élément dans une collection d'éléments ordonnés (réponse à la question "où ?") ;
- le contexte de la mesure où le nombre indique le nombre d'éléments nécessaires, pris pour unités, pour "remplir" l'objet considéré : "tu as deux ans aujourd'hui".

Les contextes séquentiels

- le contexte de séquence où chaque mot nombre est un élément d'une suite ordonnée sans référence à une quelconque quantité ou même réalité,
- le contexte de dénombrement dans lequel les mots-nombres, organisés en suite stable et conventionnelle, sont mis en correspondance terme à terme avec les éléments d'une collection.

Le contexte symbolique

- où les nombres sont perçus en tant qu'écriture chiffrée.

Le contexte non numérique

- où les nombres servent à désigner des codes tels que les numéros de téléphone ou de bus…

Analyse a postériori

Pratiquement tous les contextes ont été évoqués.

Néanmoins les élèves n'ont pas évoqué que le nombre pouvait servir pour mémoriser une quantité ou une position, mais peut-être n'en ont-il pas conscience alors qu'ils utilisent ces fonctions du nombre à l'école et ce depuis la maternelle ;

D'autre part, ils n'arrivent pas à exprimer la différence entre nombre, chiffre, numéro.

Ils ont beaucoup évoqué le contexte mathématique de la mesure.

Ils ont aussi pu évoquer le calcul : les nombres servent à calculer, à obtenir d'autres nombres.

L'enseignante a poursuivi ce travail en proposant à ses élèves des activités leur permettant de distinguer ce qu'est un nombre et ce qu'est un numéro.

Certains participants ont trouvé que l'enseignante aurait du intervenir de manière à lever certaines ambiguïtés. Certains se sont posé la question de la nécessité de différencier nombre et numéro en CP. D'autres encore ont proposé de donner la consigne sous la forme suivante : quand utilise-t-on les nombres ?

En formation initiale et continue, il est possible d'utiliser la transcription de la séance pour introduire les aspects outil et objet du nombre et les différents contextes dans lesquels ils sont utilisés

b) En CE2 en début d'année : à propos du mot « retenue » (cf Annexe 2)

Il s'agit ici de mettre en évidence les liens qui existent entre la technique opératoire de l'addition posée en colonne et la numération.

Les participants ont fait les remarques suivantes :

Dans le document proposé par l'enseignante, on ne sait pas ce qui est mis derrière le mot «retenue» : s'agit-il de sa définition, de sa fonction ? L'enseignante est-elle au clair avec ce qu'elle attend des élèves ?

Deux réponses d'élèves sont proposées en annexe 3.

454

c) En CE1 en fin d'année ou en CE2 en début d'année : explique cent à ta manière

(se reporter au compte-rendu de l'atelier du colloque de la Roche Sur Yon)

Il s'agit ici de faire le point, de provoquer un retour sur ce qui a été appris plus ou moins récemment, de rendre compte de la manière dont elles ont été mémorisées. Il s'agit aussi de faire apparaître toutes les connaissances numériques évoquées par cette consigne ainsi que leurs liens. Les élèves peuvent alors prendre conscience que selon les activités proposées, ils feront appels à des expressions différentes du nombre cent :

2) Débat et construction des connaissances

Nous illustrerons ce paragraphe par l'activité suivante proposée, cette année, à des élèves de plusieurs classes de cycle 3. La consigne donnée par l'enseignant est la suivante : Explique à ta manière pourquoi il y a un zéro dans 502 ?

Les propositions des élèves d'une clase de CM2 sont données en annexe 4. Elles ont été distribuées aux participants de l'atelier mais nous n'avons pas eu le temps de les analyser.

Pour commenter ce travail, je livrerai dans un premier temps les propos d'Eliane Ricard – Fersing, professeur de philosophie à l'IUFM de Créteil, qui fait partie de notre groupe de travail « lire et écrire pour apprendre ». Il s'agit d'une synthèse des réflexions que ce travail a suscitées au sein de ce groupe.

« La discussion démarre à partir de la question : quel sens faut-il donner à l'expression « à ta manière » dans la consigne : explique, *à ta manière*, le zéro dans 502.

Est-ce le signal du droit de l'élève à oser une pensée, à dire sa manière de voir les choses ? Si c'est le cas, n'y a-t-il pas tromperie dans la mesure où l'école tend vers l'adoption d'une explication unique du phénomène en particulier quand il est scientifique ? Est ce que le détour par le débat, l'argumentation fait faire aux élèves de véritables progrès dans leurs apprentissages ?

Au fond, que voulions-nous avec une telle consigne ? Nous visions une problématisation des savoirs scolaires, plus qu'une aide à la conceptualisation. Nous voulions que les enfants rencontrent le savoir sur la numération comme un savoir en relief, un savoir paradoxal qui oblige à s'arrêter et réfléchir et finalement, peut-être, à s'émouvoir devant l'ingéniosité de la numération de position. Nous voulions que les enfants perçoivent qu'il y a là « matière à penser » (titre d'un livre de Connes et Changeux). Le zéro, marque habituelle du néant, peut jouer un rôle tout différent quand il est utilisé à l'intérieur du nombre et l'interrogation sur son sens déclenche toute une reconstruction de la logique de la numération de position.

Expliquer le zéro, ce n'est pas être confronté à une situation problème mais plutôt au caractère problématique des objets de connaissance qui en disent toujours plus qu'on ne croit, principalement parce qu'ils sont des créations de l'esprit humain et qu'en tant que tels ils reflètent une pensée à l'œuvre, complexe, historique, orientée autant vers la connaissance que vers l'action. Ni plus ni moins que l'idée d'accord grammatical, l'idée du zéro ne se laisse séparer de son épaisseur et des enjeux qui ont présidé à son élaboration et à son utilisation.

Etre problématique pour un concept, ce n'est pas seulement poser des problèmes ou présenter des difficultés mais avoir une histoire, répondre à des enjeux, s'articuler avec d'autres concepts. »

Pour conclure, j'évoquerai les questions que nous nous posons à propos de cette activité ?

- La consigne posée est-elle judicieuse ? Engage-t-elle les élèves dans un véritable débat ?
- Serait-il préférable de donner la consigne de la manière suivante : A ton avis, la présence du chiffre 0 dans 502 permet-il de dire qu'il n'y a pas de dizaine dans 502 ?
- L'expression « à ta manière » renvoie-t-elle au domaine des mathématiques pour tous les élèves ?
- Y a-t-il une réponse (ou plusieurs) attendue par l'enseignant ?
- Cette activité est-elle utile du point de vue de la construction des connaissances mathématiques ?
- Défavorise-t-on les élèves en difficulté en proposant une telle activité ? Ne rendons-nous pas flou, ce qui l'était déjà pour les élèves ?
- A quel moment l'enseignant doit-il intervenir ? Doit-il intervenir de manière immédiate pour lever le flou ou alors doit-il le faire après l'analyse des propositions des élèves ?
- Quel moyen peut se donner l'enseignant pour prendre en compte l'ensemble des propositions de ses élèves ?
- Et surtout, que faire de ce travail ? Comment le situer dans la mise en place des apprentissages mathématiques ?

Des questions qui restent en supens et qui auraient pu être posées aux participants de cet atelier. Nous n'en avons malheureusement pas eu la possibilité, faute de temps.

C) CONCLUSION

Pourtant, dans chacune des classes où nous avons proposé ce type d'activité, nous avons vraiment eu le sentiment que les élèves étaient en train de penser mathématiques. Ce n'est pas un argument scientifique, nous en sommes conscients.

Il s'agit non seulement de faire que «l'un des objectifs de l'enseignement des mathématiques soit aussi, à côté des autres disciplines, de contribuer au développement des compétences dans le domaine de la langue orale et écrite, tout en travaillant les spécificités du langage mathématique et sa syntaxe parfois particulière » (documents d'application des programmes de mathématiques aux cycles 2 et 3) mais aussi de permettre aux élèves d'élargir leurs connaissances mathématiques en utilisant les interactions entre la langue écrite et la langue orale.

456

Annexe 1

Classe de CP de Anne –Marie Lanoizelée
Ecole Jean Jaurès Stains

Présentation de la situation

Il s'agit de demander aux élèves d'expliquer avec leurs mots à quoi sert un nombre.

LE DÉROULEMENT DE LA SÉANCE ET LES PROPOS DES ÉLÈVES

La séance a duré environ 40 minutes.

Consigne donnée par la maîtresse :

Je voudrai que vous me disiez à votre avis, avec vos propres mots à vous, à quoi sert un nombre.

Les propos des élèves

Steeve : «ça sert à compter»
Keltoum évoque la même idée
M (maîtresse) : «ça ne sert qu'à compter ?»
Elève : «à faire des égalités»
Anna : «à écrire»
M : «à écrire quoi ?»
Anna «ça sert à écrire maman»
Anna vient écrire le mot maman au tableau.
M : «A-t-elle bien écrit le mot maman ?» Les élèves constatent que oui.
M : «Anna, montre-nous avec quel nombre tu as écrit maman» puis «Avec des nombres, peut-on écrire quelque chose ?»
Ager : «on écrit des nombres et quand on les écrit à l'envers, ça fait des lettres»

On constate ensemble que pour écrire des mots, on utilise des lettres. Puis on repart sur la consigne :

Vivian : «Pour apprendre à écrire les nombres quand on ne sait plus les écrire.» Il donne un exemple : «quand on ne sait plus écrire 7, on compte jusqu'à 7 et on regarde (sur la bande numérique) et on l'écrit.»
Sonia : «Dans les classes»
M : «ça ne sert qu'à l'école ?»
Une grande partie des élèves répond non.
Steeve : «Sur la terre : c'est pareil dans d'autres pays»
M : «Il y a des pays où ils ont leurs nombres à eux. Font-ils la même chose que nous ? Les Chinois, font-ils la même chose que nous ?»
Elève : «Ils comptent»
Laurie : «pour apprendre à compter. Les Chinois ne savent pas compter. Peut-être qu'ils font un, neuf, dix, quarante Peut-être qu'ils ne comptent pas dans le même ordre que nous.»
M : «Il y a des enfants qui parlent en arabe. Qui peut écrire 7 ?»

M (reprise de la consigne) : «On se sert des nombres en classe. Pour quoi faire ?»

Sarah : «Quand on fait des choses de mathématiques»
M : «par exemple ?»
Sarah : «quand on fait des problèmes de mathématiques»
M : «C'est quoi un problème ?»
Marc évoque le problème qu'ils viennent de résoudre lors du contrôle.
M : «A quoi ça servait les nombres dans le problème ?»
Elève : «à faire des plus et des moins»
Elève : «A savoir combien il y a de gommettes.»
Wilam (?) : «ça sert à faire les âges»
M : «ça sert à faire quoi aux âges ?»
Elève : «Si on a vingt ans, ça sert à dire l'âge»
Elève : «Si on ne se rappelle plus ce qu'il y a avant 8, on récite 7, 8»

M : «Les papas et les mamans se servent-ils des nombres ?»
Marc : «Pour l'argent»
Dylan : «Il y des numéros sur l'argent. Il faut savoir compter pour savoir combien il faut payer».
Laurie : «L'argent, ça sert à manger. Il y a des nombres sur l'argent»
M : «Dylan nous dit qu'il y a des nombres sur l'argent et Laurie nous dit qu'il y a des numéros»
Elève : «Jusqu'à 9, c'est des numéros et si c'est 10, c'est un nombre»
M : «Pourquoi ?»
Elève : «parce qu'il y a deux chiffres et avec deux chiffres ça fait un nombre»
Elève : «Quand il y a un seul chiffre, c'est un numéro»

M : «ça sert à quoi les numéros ?»
Jame (?) : «à compter»
M : «Alors un nombre et un numéro, c'est la même chose ?»
Anna : «Les numéros, ça sert à compter. Ça sert à écrire»
M : «Alexandre, qu'en penses-tu ?»
Alexandre : «les numéros, ça sert à faire les nombres»
M : «Pour faire 10, quels numéros on utilise ?»
Alexandre : «1 et 0»
Laure-Alexia : «C'est un chiffre»

M : «Est-ce que c'est la même chose chiffre et numéro ? Qui saurait dire ce qui n'est pas pareil ?»
Laure-Alexia : «Les numéros, ça s'écrit avec plusieurs chiffres et un chiffre, ça s'écrit avec un chiffre. Jusqu'à 9 on se sert de chiffres»
Un élève évoque le nombre 10 : « Si on enlève le 0, ça fait 1. Si on le remet, ça fait 10 »

La maîtresse écrit au tableau 01 et 10 et demande si c'est la même chose.
Elève : « 01 c'est la date ou alors 1»
Elève : «Si tu mets le 0 avant 1 ça va pas. Il faut le mettre après le 1»
Elève : «On peut aussi écrire des numéros avec des lettres»
Laure-Alexia : «les chiffres, ça sert aussi pour faire les numéros de téléphone, ça sert aussi pour faire les numéros sur les voitures»

458

Alexandre : «Comme dans les appartements» (référence au code)
Laurie : «il y en a aussi sur les motos»

M (pour permettre aux élèves de se recentrer sur la consigne) : «Quand on a construit l'école, est-ce qu'on s'est servi des nombres ?»
Ager (?) «quand on mesure»
Laure–Alexia : «Ben oui avec le mètre»
Elève : «La taille»
Elève : «la température pour savoir la chaleur, avec le thermomètre»
M : «mais pourtant, quand on s'est mesuré, on a uniquement fait des traits» (La maîtresse fait référence aux repères qui permettent aux élèves de repérer leur taille)
Elève : «Sur les montres, il y a des nombres»
Elève : «dans la poésie « Pirouette», il y a des nombres»
M : «les nombres sur l'horloge permettent de savoir l'heure»
Elève : «sur la télécommande de la télé, pour changer de chaîne»
M : «Il y a des nombres sur la télévision, à quoi servent-ils ?»
Elève : «pour savoir sur quelle chaîne on est »

Pour clore la séance, la maîtresse propose aux élèves qui n'ont pas pris la parole de faire une proposition

Jame (?) : «Quand on colle des gommettes on peut les compter.»
Elisa évoque les bandes numériques
Sonia «Pour lire la date, à savoir la date et le mois»
Néhamat (?) «aussi sur l'ordinateur, il y a des nombres»
M : «A quoi servent-ils ?» Néhamat ne répond pas
Anne (?) : «à savoir l'anniversaire»
Reine : «Sur la règle il y a des nombres»
M : «A quoi servent-ils ?»
Elève : «A tracer»
M : «Comment fait-on pour tracer ?»
Jason : «On ne peut pas tracer avec des nombres »
Elève : «Le 60 sert à savoir où on s'arrête»
Elève : «A faire des recettes de gâteaux»
Elève : «Pour savoir ce qu'il faut comme quantité»
Elève : «Il y en a sur les calendriers»

Annexe 2
Une retenue, qu'est-ce que c'est ?

1) On a calculé cette addition en colonnes :

$$\begin{array}{r} 1\,6\,2\,5 \\ +\ \ 1\,3\,5 \\ +\ \ \ \ 2\,8 \\ \hline 1\,7\,8\,8 \end{array}$$

Explique à ta façon :
la retenue, qu'est-ce que c'est ?

2) On a calculé cette addition en colonnes :

$$\begin{array}{r} 3\,4\,6\,2 \\ +\ \ 3\,4\,3 \\ +\ \ \ \ 7\,3 \\ \hline 3\,8\,7\,8 \end{array}$$

Est-ce qu'ici la retenue est la même chose que
dans la première opération ?

Oui, c'est la même chose :...

Non, ce n'est pas la même chose : ....

 460

Annexe 3

Une retenue, qu'est-ce que c'est ?

1) On a calculé cette addition en colonnes :

```
   1
 1625
+ 135
+  28
 ----
 1788
```

Explique à ta façon :
la retenue, qu'est-ce ce que c'est ?

Une retenue s'est 10 unités, parce - que 10 unités s'est 1 dizaine, et la dizaine s'est une retenue

2) On a calculé cette autre addition en colonnes.

```
  1
 3462
+ 343
+  73
 ----
 3878
```

Est-ce qu'ici la retenue est la même chose que dans la première opération ?

Oui c'est la même chose

....

Non, ce n'est pas la même chose Parce - que la retenue la de la deuxième opération la retenue est dans les centaines, alors que dans la première opération la retenue elle est dans les dizaines.

Annexe 4
Explique pourquoi il y a un « 0 » dans 502

Classe de CM2 de Carine– Ecole Varlin 2 Pierrefitte (17/01/2003)

La veille, les élèves avaient eu à répondre par écrit à la question suivante :
«Explique à ta manière pourquoi il y un 0 dans 502»

18 élèves ont répondu « s'il n'y avait pas de 0, cela ferait (ou, pour certains, se lirait) 52.
4 élèves ont répondu « Parce qu'il n'y a pas de dizaine »
2 élèves ont fait référence au tableau de numération : c d u
1 élève a écrit 502 = 500 + 2
1 élève a écrit, s'il y avait 1 à la place de 0, ça ferait 512.

Au tableau sont écrites les différentes propositions numérotées :

1) Parce que s'il n'y avait pas de 0, on lirait cinquante deux
2) Parce qu'il n'y a pas de dizaine
3) Parce qu c'est un nombre à trois chiffres, c'est-à-dire une centaine, une dizaine, une unité. On est obligé de mettre la dizaine
4) Parce que normalement 500 possède deux zéros. Si on ajoute 2 à la place du dernier zéro, ça fait 502
5) Parce que s'il y avait 1 à la place du 0, ça ferait 512.

M : «Vous allez lire ces propositions, y réfléchir. En particulier celles qui n'étaient pas votre réponse. Ensuite, on va débattre sur ce qui vous semble correct ou incorrect.»

Elle rappelle les règles d'organisation de la classe durant un débat.

M : «Qui a une remarque à faire ? Qu'est-ce qui vous semble correct ou évident ?»
E : «la première»
E : «la deuxième»
E : «la troisième»
E : «la première»
E : «la cinquième»
(Ce sont tous des élèves différents)
M : «On va les prendre une à une»

<u>Première proposition :</u>

E : «parce que s'il n'y a pas de 0, ça ferait 52»
La maîtresse écrit 502

52

<u>Deuxième proposition</u>

E : «S'il n'y a pas de dizaine, on remplace par un 0 et on peut remplacer par le chiffre des unités»
M : «explique»
Le même élève : «dans 502, il n'y a pas de dizaine»
Isabelle : «S'il n'y a pas de dizaine dans 502, on peut ajouter le 2. On ajoute. Si on enlève le 2 des unités, ça fait 500»
M : «J'enlève 2 ou le chiffre 2 ?»
Isabelle : «Il n'y a ni dizaine, ni unité»
M : «le 0 indique qu'il n'y a ni dizaine, ni unité ? »

462

Cachito : «dans 502, il y a des dizaines, s'il n'y a pas de dizaine, ça fait 52. »
M : «Dans 52, il n'y pas de dizaine ?»
E : «le 5 est dans la colonne des centaines»
La maîtresse écrit au tableau :

c	d	u
5	0	2

Cachito : «Si on enlève le 0, et on met 5 à sa place, il y a des dizaines»
Bobby : «Quand on dit 502, on entend cent. On n'entend pas les dizaines, mais pourtant on est obligé d'écrire quelque chose pour la dizaine»
M : «Est-ce qu'il y a des dizaines ou pas ?»
E : «Si on veut vraiment voir 502, on est obligé de mettre un 0»
E : «S'il y avait une dizaine, on l'aurait su en voyant le nombre»
E : « Il y a des dizaines à cause de ce que vient de dire Bobby»
La maîtresse propose de laisser, pour le moment cette proposition et de passer à la suivante :

Troisième proposition

Christian : «le 0, c'est une dizaine»
M «Quand j'ai une dizaine de bonbons, comment j'écris ? Une dizaine de bonbons et 2 bonbons, c'est 02 ?»
E : «non»
Isabelle : «C'est obligatoire de mettre une dizaine pour 502»
M : «Je crois qu'il y a un problème de vocabulaire : je mets forcément une dizaine. Qu'est-ce que c'est une dizaine ?»
E : «C'est 10»
La maîtresse fait alors référence à la situation « tickets de cantine » (ERMEL) qu'elle a fait vivre dans sa classe au début de l'année :
M : «Vous vous souvenez des tickets de cantine ?»
Bobby : «3 chiffres, c'est une centaine, une dizaine, une unité. Il faut dire des centaines, des dizaines, des unité»
M : «Quelle forme ça prend ?»
E : «De 1 à 9»
Isabelle : «Si on a 10, on doit mettre dans la colonne d'à côté»
On peut traduire les propos d'Isabelle par : dès qu'il y a plus de dix unités du même ordre, on doit passer à l'ordre d'unité supérieur.
M : «Je vais recentrer : dans chaque colonne, on est obligé d'écrire une certaine quantité de centaines, de dizaines, d'unités. Pour toi, la quantité c'est de 1 à 9.»
Cachito : «100 000 000 : on doit mettre 100 dans la colonne des millions et des 0 après»
Cachito monte ainsi que pour écrire les grands nombres, on ne procède pas de la même manière : en effet, le million est une base auxiliaire et cela masque certains ordres d'unité.
M : «Que met-on dans les colonnes ? Dans chaque colonne on peut mettre 0, ...9. ça s'appelle comment ?»
E : «Des chiffres»
M : « Est-ce que ça convient à tous ? La formulation de la proposition 3 est incorrecte : on écrit un chiffre des unités, un chiffre des dizaines, un chiffre des centaines. Ce n'est pas forcément une dizaine, c'est le chiffre des dizaines. »

Quatrième proposition :

Fatoumata : «oui, si on n'avait pas mis le 2 à la place du 0, ça fait 520»

M s'adressant à Oumar, le seul à avoir écrit cette proposition : «Oumar, tu avais écrit cela, explique»

Oumar essaie d'expliquer mais n'y arrive pas

Mohamed : «Cette explication est zarbi (bizarre) parce que je ne comprends pas pourquoi on remplace le 0 par le 2»

E : «Pourquoi il parle du 2»

Logan : «Si on met 500 et après 2, le 0 n'est pas à sa place»

Au tableau, il écrit 500, il écrit 2 en effaçant le 0 des unités et en montrant le 0 des dizaines, dit « le 0 ne change pas »

Albin : «On pourrait remplacer le 0 des dizaines par un 2»

E : «ça ferait 520 et pas 502»

M : «Comment Oumar a-t-il écrit 502 ?»

E : « Il a ajouté 2 à 500»

M : «est-ce que c'est vrai ?»

E : «Oui »

M : «Qu'est-ce qui rend sa réponse un peu bizarre ? Sabrina, qu'en penses-tu ? »

Sabrina : «On a 500, on enlève le 0»

M : « a-t-il d'autres avis ?»

E : «normalement, si on ajoute 2 à la place du dernier 0, on peut dire 2 u»

Dans la proposition 4, la maîtresse met entre crochets la phrase : «la place du dernier zéro».

M : «C'est mieux comme ça. En enlevant cela, qu'est ce que ça change dans le sens de la phrase ?»

Bobby : «C'est plus clair»

Paul : «On ne sait pas dans quel sens on part quand on parle du dernier zéro»

La maîtresse lui fait remarquer qu'on utilise le sens de l'écriture.

M : «Lorsqu'on ajoute, est-ce qu'on remplace ?»

E : «Non, on n'enlève pas»

M : «Mettre à la place, c'est qu'on enlève et qu'on met autre chose à la place, ce n'est pas la même chose. Additionner et remplacer, ce n'est pas la même chose. Oumar a ajouté 2 mais dans son explication, il a dit qu'il avait fait une addition et il a dit ce que ça donnerait du point de vue de l'écriture.»

La maîtresse efface alors le morceau de phrase qu'elle avait mis entre crochets.

E : «C'est pas correct : si on ajoute 2, on ne sait pas quel 2»

M : «Alors, il faut dire comme Bobby , 2 unités ; Est-ce que c'est obligatoire ?»

Paul : «On aurait pu dire 20»

M : «Généralement, est-ce qu'on précise ? Est-ce que dans la pratique courante, quand on ajoute 2, 8 , on précise l'unité ?»

E : «Non, on sait que le chiffre 2 va être dans les unités»

M : «je rajoute le mot unité si ça vous fait plaisir, mais on ajoute rarement le mot unité, c'est sous-entendu. Mais si je vous demande d'ajouter 2 dizaines de bonbons, il faut que je précise, si je dis 2, c'est 2 unités.»

Cinquième proposition :

M : «Lahna, qu'en penses-tu ?»

Lahna : «C'est vrai»

Jugurta : «C'est vrai»

Isabelle : «Je ne suis pas d'accord, parce qu'on parle de 502 et pas de 512. IL fallait expliquer pourquoi il y a un 0 dans 502 et pas dans 512»

464

Paul : «Au lieu de dire 1, on pourrait dire autre chose»

E : «Il fallait mettre par exemple»

M : «ça n'exclut pas toutes les autres possibilités : 1 c'est un exemple . Il y a d'autres propositions qui ressemblent à celle là, est-ce que la première, ce n'est pas la même chose ?»

Lahna : «dans la première réponse, on l'enlève (le 0)»

M : «Pour Lhana, il y a une grosse différence, dans la première réponse, on ne donne pas un exemple, on enlève le 0»

Isabelle : «Si on ne met pas le 1, ça ferait aussi 52»

M : «Est-ce que la dernière proposition explique le rôle du 0 ?»

E : «Elle explique le rôle du 1»

E : «Elle explique les deux»

Lucie : «Le 1, il n'a rien à faire» (C'est 502 et pas 512)

M : «ça peut donner une explication. Qu'apprend-t-on avec le 1 ?»

E : «S'il y avait un 2 à la place ça ferait 522. Ça apprend quelque chose»

E : «ça apprend, que chaque chiffre a un rôle dans l'écriture, si on en met une autre à la place, ça change le nombre. Si je mets le 1 à la place du 0, ça fait 512 et plus 502»

E : «Si c'est vrai pour le 1, c'est vrai pour le 0, si on l'enlève ça fait 52»

M : «On se sert de chiffres pour écrire les nombres. Chaque chiffre a un rôle à jouer. Si on change les chiffres, on change la valeur du nombre».

La maîtresse propose alors de revenir à la proposition 2.

Samira : «S'il n'y a pas de dizaine, on est obligé de mettre 10»

Mohamed : «Il y a des dizaines»

M : «Il faut argumenter pour convaincre les autres»

Jugurta : «On est obligé de mettre un 0 pour dire 502».

M : «Certains ont dit que le 0 indiquait qu'il n'y avait pas de dizaine mais pourtant Mohamed dit qu'il y a des dizaines»

Mohamed : «Ce n'est pas le chiffre des dizaines, c'est le nombre de dizaines»

M : «Quand on dit qu'il n'y a pas de dizaine, que dit-on ? Mohamed a dit qu'il y a un problème avec le chiffre des dizaines et le nombre de dizaines. Est-ce que dans 502, il y a des dizaines»

Mohamed : «Il y en a»

D'autres élèves : «On ne peut pas savoir»

Sandoche : «1 centaine, ça fait dix dizaines»

M : «J'ai combien de centaines dans 502 ?»

Sandoche : «5 centaines », et il continue : « 1 centaine c'est 10 dizaines , 2 centaines, c'est 20 dizaines»

La maîtresse écrit au fur et à mesure au tableau.

M : «Jusqu'où vas-tu aller comme ça ?»

Sandoche : «5 centaines, c'est 50 dizaines».

M : «Sandoche semble avoir convaincu beaucoup de monde»

Kévin : «C'est vrai, c'est bien»

M : «Et donc, que peut-on dire de la proposition 2 ?»

Bobby : «En fait, il y en a, il y en a un nombre, mais il n'y a pas de chiffre»

M : «Et 0 ?»

Logan : «Il y a des dizaines»

M : «la proposition 2 n'est donc pas correcte, puisque Sandoche nous a dit qu'il y en a 50. Alors qu'est-ce qui vient faire là le 0, pourquoi y a-t-il un 0 et y a-t-il des dizaines».

Paul : «parce que c'est 50 dizaines et 2 unités»

La maîtresse écrit au tableau : 502 c'est 50 d et 2u ;

M : «Comment aurait-on pu l'écrire autrement ?»

Lucie : «5 centaines, 0 dizaine, 2 unités»

La maîtresse continue à écrire au tableau.

Elle rappelle aux élèves la situation des tickets de cantine :

M : «Rappelez-vous des tickets de cantine . Comment fonctionnait-on ? 10 tickets, un carnet ; 10 carnets, une enveloppe ; Quand est-ce que je vais avoir 0 à la place des carnets ?»

Elle reprend le matériel et rappelle à nouveau :

M : «Chaque fois qu'on a 10 tickets, on un carnet : une dizaine

Chaque fois qu'on a 10 carnets, on une enveloppe : une centaine.

Ainsi, on a calculé facilement le nombre de tickets. Si j'ai 369 tickets, combien ai-je de tickets, de carnets, d'enveloppes tout seul ?»

E : «Il y a 3 enveloppes, 6 carnets, 9 tickets»

E : «6 carnets, ça fait bien 60»

M : «Et si j'ai 502 tickets de cantine ?»

Isabelle : «5 enveloppes, 2 tickets, je n'ai pas de carnet»

E : «On a 0 carnet»

M : «Mais alors si on a 0 carnet, comment a-t-on fait les enveloppes ? Qu'a-t-on fait avec tous les carnets ?»

Logan : «On les a regroupés»

M : «Bravo, Logan»

M : «A chaque fois qu'on en a 10, on regroupe. S'il y a un 0, c'est qu'on a pu faire tous les échanges. Il n'y a plus de carnet tout seul. Cela ne veut pas dire qu'il n'y a pas de carnet. Le 0 indique qu'on n'a pas pu faire de groupement et qu'il n'en reste pas tout seul»

M : «Qu'est-ce qu'il aurait été correct de mettre à la place de la proposition 2. Qu'aurait-on pu écrire à la place ? Comment aurait-on pu formuler autrement pour que ça devienne correct ?»

Cachito : «Que ce n'est pas parce qu'on n'entend pas le 0 qu'il n'y a pas de dizaine.»

Bobby essaye de commencer à reformuler .

Les élèves ont du mal à reformuler.

La maîtresse leur propose alors de réfléchi, dans la semaine, à une bonne formulation .

Puis :

M : «J'aimerai que quelqu'un essaye de résumer ce qu'il y a à retenir.»

Oumar : «la remarque de Sandoche»

Mohamed : «des fois, il faut réfléchir, il faut savoir si on est dans les nombres. Il faut réfléchir au vocabulaire, de quoi on parle : chiffre, nombre»

Isabelle : «Il faut savoir que le 0 est un chiffre»

Cachito : «Ce n'est pas parce qu'on n'entend pas le 0 qu'il n'y a pas de dizaine et même quand on l'écrit»

Et pour conclure :

M : «j'ai deux petites remarques à vous faire :

- Lorsqu'on vous demande une explication écrite ou orale, il faut faire attention au vocabulaire qu'on utilise. En mathématique, c'est pareil que lorsque vous répondez à des questions de lecture. Tous les termes ont une explication précise. Lorsqu'on utilise un terme à la place d'un autre, ça peut changer le sens, ce qui est vrai peut devenir faux.
- Ce matin, vous avez été très bien dans votre argumentation »

466

LISTE DES PARTICIPANTS AU COLLOQUE 2003

ADJIAGE Robert	IUFM d'Alsace
AMMAR KHODJIA Farid	IUFM Franche-Comté
ANFRE Georges	IUFM Draguignan
ARIBERT Bernadette	IUFM Marseille
ASSUDE Teresa	IUFM Marseille
AUBERTIN Jean-Claude	IUFM Franche-Comté
AURAND Catherine	IUFM Versailles
ARHEL Danièle	IUFM Versailles
BATTLO Valérie	IUFM de Cergy
BEN SALAH - BREIGEAT Chedlia	IUFM de Créteil
BERGEAUT Jean-François	IUFM Toulouse
BERNASCHI Dominique	IUFM Aix
BERTHON Eliane	IUFM Toulouse
BERTOTTO Anne	IUFM Massy
BLANCHOUIN Aline	IUFM Créteil
BLOCH Isabelle	IUFM Toulouse
BOHN Myriam	IUFM Rouen
BOISSARD Vincent	IUFM Nîmes
BONNET Nicole	IUFM Dijon
BONNEVAL Antoine	IUFM Versailles
BOULE François	CNEFEI Suresnes
BOULEAU Nivose	IUFM Martinique
BORATTO Marie-Françoise	IUFM Marseille
BOUVATIER Chantal	IUFM St Germain-en-Laye
BREGEON Jean-Luc	IUFM Moulins
BRIAND Joël	IUFM Bordeaux
BRONNER Alain	IUFM Montpellier
BROUSSEAU Guy	Retraité
BUTLEN Denis	IUFM Créteil
CABASSUT Richard	IUFM Strasbourg
CANIVENC Bruno	IUFM Aix
CAUMET Chantal	IUFM Marseille
CAUVAS Mado	Massy
CELI Valentina	IUFM Créteil
CHABAULT Dominique	IUFM Versailles
CHARNAY Roland	IUFM Lyon
CHAMBON Lionel	IUFM Franche-Comté
CHAMPION Claudette	IUFM Bourgogne
CHAUSSECOURTE Philippe	IUFM Paris

CHEVALIER Claudine	IUFM Créteil
CLOSQUINET Jean-Paul	IUFM Nantes
COPPE Sylvie	IUFM Lyon
COSTE Rémy	IUFM Versailles
COULANGE Lalina	IUFM Créteil
COURRIERE Michel	IUFM Nice
COUSSON Bernadette	IUFM Besançon
DANOS Pierre	IUFM Auch
DENISOT Joël	IUFM Marseille
DEPECKER Hervé	IUFM Toulouse
De REDON Marie-Christine	IUFM Marseille
DORNIER Jean-Marie	IUFM Besançon
DOSSAT Luce	IUFM Auvergne
DOUADY Régine	Retraitée
DUPLAY Jean-Paul	IUFM Lyon
DURAND-GUERRIER Viviane	IUFM Lyon
DUSSUC Marie-Paule	IUFM Lyon
EYSSERIC Pierre	IUFM Aix
EXCOFFON Yvonne	IUFM Troyes
FENICE Jean-Claude	IUFM Troyes
FENICHEL Muriel	IUFM Créteil
FREDE Valérie	IUFM Toulouse
FREMIN Marianne	IUFM Lille
GAUDEUL Claire	IUFM Lille
HUGUET François	Retraité
IMBERT Jean-Louis	IUFM Tarbes
JAFFROT Michel	IUFM La Roche-sur-Yon
GALISSON Marie-Pierre	IUFM Cergy
GAMO Sylvie	IUFM Créteil
GIBERT Jany	IUFM Montpellier
GIRMENS Yves	IUFM Montpellier
GRAU Sylvie	IUFM Nantes
GRELIER Jean-François	IUFM Toulouse
GREFF Eric	IUFM Versailles
GREWIS Annie	IUFM Alsace
GRISONI Pascal	IUFM Chaumont
GUY Michel	IUFM Carcassonne
HERSANT Magali	IUFM Versailles
HOUDEMENT Catherine	IUFM Rouen
JAN-GAGNEUX Joëlle	IUFM Orléans-Tours
KOBER Paule	IUFM Nice
KOSKAS Joël	IUFM Versailles
KRITTER Chantal	IUFM Créteil

KUZNIAK Alain	Université Strasbourg
LALLEMENT Marie-Hélène	IUFM Avignon
LARGUIER Mirène	IUFM Montpellier
LAROSE Valérie	IUFM Etiolles
LATOUR Jacqueline	IUFM Lyon
LAURENCOT-SORGIUS Isabelle	IUFM Toulouse
LE BORGNE Philippe	IUFM Franche-Comté
LEDUC Christian	IUFM Valenciennes
LEJEUNE Michèle	IUFM Bonneuil
LE NOST Marie-Hélène	IUFM Versailles
L'EPLATTENIER Marc	IUFM Rouen
LE POCHE Gabriel	IUFM Bretagne
MALABRY Yvan	IUFM Cergy
MAGENDIE Laurence	IUFM Toulouse
MALECKI Sophie	IUFM Nancy
MALLEN DONTENWILL Annie	IA Vesoul
MANOUBA Jean-Noël	PE Marseille
MARTY-GUILHAUMON Marilyne	IUFM Du Puy
MASSELOT Pascale	IUFM Créteil
MASSIN Julie	IUFM Créteil
MASSOT Annick	IUFM Nantes
MASSOT Christian	IUFM Nantes
MAURIN Claude	IUFM Avignon
MAZOLLIER -Sophie	IUFM Créteil
MICHEL Claude	IUFM Créteil
MICHON Florence	IUFM Grenoble
MOPONDI BENDEKO Alexandre	IUFM Créteil
MORIZOT-DELBREIL Brigitte	IUFM Rouen
MUHL André	IUFM Antony
NGONO Bernadette	IUFM Rouen
NIEL Christine	IUFM Aix
NOEL Christian	IUFM Antony
NOIRFALISE Annie	Retraitée
NOIRFALISE Robert	Retraité
NORMAND Catherine	IUFM St Germain-en-Laye
PELTIER Marie-Lise	IUFM Rouen
PETIT Nadine	IA Morangis
PEZARD - CHARLES Monique	IUFM Melun
PETREL Isabelle	IUFM Rouen
PFAFF Nathalie	IUFM Créteil
POIRET-LOILIER Dominique	IUFM Reims
PRESSIAT André	IUFM Orléans-Tours
RANC Geneviève	IA Massy

RANSON Catherine	IUFM Nancy
RAUSCHER Jean-Claude	IUFM Strasbourg
REYMONET Christian	IUFM Marseille
ROUSSET Brigitte	IUFM Nîmes
RODIGUEZ Ruben	IUFM Caen
ROYE Louis	IUFM Lille
SALIN Marie-Hélène	IUFM Bordeaux
SANCHEZ Robert	IUFM Rodez
SANSONETTI Joseph	IUFM Ajaccio
SARROUY Michel	IUFM Montpellier
SAYAC Nathalie	IUFM Créteil
SCHMITT M-Josèphe	IUFM Grenoble
SICARD Mireille	IUFM Bretagne
SIMARD Arnaud	IUFMP Franche-Comté
SORRENTINI Nicole	IUFM Marseille
SOUMY jean-Guy	IUFM Guéret
TANNER Michel	IUFM Marseille
TARDY Claire	IUFM Lyon
TAVEAU Catherine	IUFM Créteil
TOROMANOFF Jean	IUFM Orléans-Tours
TORRALBA Denis	IUFM nice
TREMEJE Joële	IUFM Draguignan
VALA-VIAUX Françoise	IA Veynes 05
VANNIER Marie-Paule	IUFM Créteil
VAULTRIN-PEREIRA Madeleine	IUFM Toulouse
VERBAERE Odile	IUFM Lille
VERCKEN Dominique	IUFM St Germain en Laye
VERDENNE Dominique	IUFM Orléans-Tours
VILATTE Pascal	IUFM Tulle
WIERUSZEWSKI Patrick	IUFM Blois
WINDER Claire	IUFM Nice
WILLHEM Christian	IEN Stagiaire Lanion
WOZNIAK Floriane	IUFM Marseille
ZARAGOSA Serge	Fontenay sous Bois
ZIN Isabelle	IUFM Versailles

Auteurs : Travail collectif coordonné par la COPIRELEM

Titre :

Actes du XXX$^{\text{ème}}$ Colloque national des Professeurs et Formateurs de Mathématiques chargés de la formation des maîtres.

« Trente ans d'activités de la COPIRELEM au service de la formation des maîtres : acquis et perspectives. »

Public concerné :

Professeurs de mathématiques et Formateurs chargés de cette discipline pour le premier degré.

Résumé :

Cette brochure contient les textes des conférences et des communications de recherches ainsi que les compte rendus des ateliers du Colloque qui s'est déroulé à Avignon les 19, 20 et 21 Mai 2003.

Mots clés :

Didactique des mathématiques, enseignement et apprentissage, formation des maîtres, école élémentaire.

Editeurs :

IREM de Marseille
Université de la Méditerranée
Faculté des Sciences de Luminy, case 901, 163, avenue de Luminy
13288 Marseille cedex 9
Directrice : Myriam QUATRINI
e-mail : dir@irem.univ-mrs.fr
Tel : 04 91 82 93 43

Responsable de la publication :

Myriam QUATRINI Directrice de l'IREM de Marseille.

Date : Mai 2004

Nombre de pages : 470

N° ISBN : 0297- 4347